

Cláudia Manuela Ferreira Maia

**As Isometrias na Inovação Curricular e a Formação de Professores de  
Matemática do Ensino Básico**

**TESE DE DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO**

**Departamento de Ciências da Educação e do Património**

Trabalho realizado sob a orientação do

Professor Doutor João Sampaio Maia



**UNIVERSIDADE PORTUCALENSE**

**Fevereiro, 2014**

Dedico este estudo ao meu adorável pai.

## Agradecimentos

A concretização deste trabalho foi possível com o apoio e o envolvimento de muitas pessoas a quem estou muito grata:

Ao meu orientador, Doutor João Sampaio Maia, pelos seus contributos sempre pertinentes, pela orientação profissional, rigorosa e atenta e pela sua amizade.

Aos professores que responderam ao inquérito, e aos outros que foram responsáveis pela dinamização e divulgação das *workshops*; às escolas que me receberam. Sem estes contributos a concretização deste trabalho seria mais difícil.

À Presidência da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto e à Coordenadora da UTC de Matemática, pelo apoio e compreensão manifestadas ao longo de todo o percurso.

Aos meus queridos amigos, às duas “estrelinhas” com quem falo quase todos os dias, aos meus primos e tios que acompanham a minha vida ativamente e esperam ansiosamente que este percurso acabe para retomarmos a vida social e familiar que tantas vezes foi privada.

Aos meus três afilhados e à minha madrinha a quem peço desculpa por, ao longo deste período, não ter estado mais presente nas suas vidas.

Às minhas queridas mãe e irmã que são o pilar da minha vida, que tanto desejaram este momento e por quem tenho uma gratidão infinita. As três velinhas pintadas...

Ao Jorge porque me ajudou sempre, não só na parte técnica, mas também na imposição dos momentos de convívio familiar.

Ao pequeno Diogo que é o meu menino.

Ao Fernando por ser a minha estrela brilhante. A sua preocupação constante comigo, a tranquilidade que me dá, os conselhos sábios, os sonhos que plantou e os projetos que já concretizamos. Não sei dizer mais pois o coração não fala e eu não tenho o dom da palavra.



## RESUMO

A Matemática, enquanto disciplina escolar, ocupou sempre um lugar de destaque no currículo escolar por ser uma ciência com fortes implicações no modo de agir e de pensar do ser humano. Por este motivo, os temas abordados nos programas curriculares desta disciplina estão sujeitos a alterações de que é exemplo as *Simetrias e das Transformações Geométricas* no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007).

Os estudos sobre o domínio do conteúdo, nesta temática específica, por parte dos professores no ativo, são muito escassos, quer a nível nacional quer a nível internacional. Ora, neste trabalho de investigação, pretendemos identificar conceções desajustadas e conhecer a posição dos professores face a algumas particularidades nesta matéria; conhecer algumas opções metodológicas na abordagem desta temática; conhecer as fontes de atualização científica e aferir a existência de diferenças significativas entre os professores do 2.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e do 3.º CEB. Desta forma, pretendemos tirar ilações sobre o domínio dos docentes em relação a cada um dos saberes específicos da disciplina (conhecimento científico, didático e curricular). A prossecução destes objetivos potenciou a criação de várias questões orientadoras de carácter geral e de carácter específico no que concerne aos três domínios apontados com o intuito de saber se os professores são detentores de todas as valências, nesta matéria, para proporcionarem aos alunos uma aprendizagem com compreensão, assim como, se o desenvolvimento destas competências é feito de forma empírica ou contínua.

Este projeto de investigação assumiu uma abordagem metodológica mista na qual se privilegiou a vertente quantitativa pelo que neste estudo se reconhecem, principalmente, as características de um estudo *survey*. O instrumento de recolha de dados utilizado foi o inquérito por questionário, construído a partir de observações de aulas do 6.º ano de escolaridade sobre esta temática. O inquérito por questionário, que contém questões nas três dimensões do conhecimento (didático, curricular e do conteúdo), foi aplicado no ano letivo de 2011/2012, essencialmente em ações de formação contínua para professores sobre o tema em causa, que constituíram uma amostra de 142 professores de uma população-alvo de docentes do Ensino Básico de determinados agrupamentos de escola ou escolas não agrupadas de uma determinada região do país.

O tratamento dos dados, com recurso ao *software* estatístico SPSS, permitiu-nos identificar conceções desajustadas, crenças, tópicos com maior e menor sucesso nas respostas e, ainda, comparar as respostas dos grupos de professores do 2.º e do 3.º CEB. Os resultados daí obtidos permitem perceber que, de um modo geral, os professores atualizam os seus conhecimentos de forma

autodidata e dominam superficialmente esta temática com implicações diretas no processo de ensino e aprendizagem das isometrias.

As inúmeras fragilidades e concepções desajustadas no domínio do conhecimento científico percorrem os temas principais da temática: as isometrias, as simetrias, as rosáceas e os frisos. Como exemplo dessas fragilidades, verificamos na nossa amostra, que menos de metade dos professores reconhece a existência de apenas 4 isometrias básicas; somente 29% distinguem eixo de simetria de eixo de reflexão; apenas 6% identificaram as simetrias de rotação num triângulo equilátero; 42% reconhecem a existência de 7 tipos de frisos mas somente 14% conseguiram identificar as simetrias em alguns exemplos de frisos. Uma parte significativa das dificuldades sentidas pelos professores é proveniente da presença da antiga concepção de simetria que cria limitações no estudo das simetrias, em particular das rosáceas e dos frisos. A nível inferencial apontamos algumas diferenças entre os professores que lecionam no 2.º e no 3.º CEB (e.g., distinção entre simetria e isometria, identificação do triângulo equilátero como rosácea) mas, na generalidade, estes dois grupos de docentes não apresentam diferenças significativas no domínio do conhecimento científico. As diferenças são mais visíveis ao nível do conhecimento didático do conteúdo, em particular pelo maior uso de materiais manipuláveis pelos do 2.º CEB e de ambientes de Geometria Dinâmica pelos do 3.º CEB.

Este estudo de investigação poderá, estamos convictos, ajudar a refletir sobre a importância da formação contínua de professores para a melhoria da qualidade de ensino com ênfase no conhecimento do conteúdo que estudámos, mas também, em momentos de alterações programáticas profundas que abranjam outras áreas cognitivas da matemática.

*Palavras-chave:* Ensino das isometrias, formação contínua de professores, simetria.

## ABSTRACT

Mathematics, as a school subject and because it is a science with strong implications in the way of acting and thinking of being human, has always occupied a prominent place in the school curriculum. For this reason, the topics covered in the curriculum of this course are subject to change as exemplified by the Symmetries and Geometric Transformations in Mathematics Syllabus of *Educação Básica* in Portugal (2007).

Studies on the mastery of the content, on this particular subject, by teachers in asset, are very scarce, either in a national or international level. However, in this research, we intend to identify dysfunctional conceptions and get to know the position of teachers in what concerns to some peculiarities in this matter; knowing some methodological options in the development of this issue; knowing the sources of scientific update and assess the existence of significant differences among teachers of 2<sup>nd</sup> Ciclo do Ensino Básico (CEB) (10-11 years old) and 3<sup>rd</sup> CEB (12-14 years old). Therefore we intend to draw conclusions about the domain of teachers in relation to each of the specific knowledge of the subject (content, didactic and curricular knowledge). Achieving these goals potentiate the creation of several guiding questions of a general and specific nature in relation to the three areas indicated in order to know if the teachers are holders of all valences, in this area, to provide students an understandable learning as well as the development of these skills in an empirically or continuously way.

This research project took a mixed methodological approach in which the quantitative strand was benefited and, because of that, this study recognizes primarily the features of a *survey* study. The data collection instrument used was a questionnaire survey, constructed from observations of 6<sup>th</sup> grade classes about the topic. The questionnaire survey, which contains questions on the three dimensions of knowledge (content, didactic and curricular), was applied in the academic year 2011/2012, mainly in workshops for teachers on the topic in question, which constituted a sample of 142 teachers from a target population of teachers of elementary education schools in a particular region of the country.

The processing of data using SPSS statistical software allowed us to identify inadequate conceptions, beliefs, topics with more or less success in the responses, and also to compare the answers of the two groups of teachers of 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> CEB. The results obtained allow us to realize that, in general, teachers update their knowledge by self-learning and superficially dominate this issue with direct implications in the teaching and learning process of isometries.

The countless weaknesses and inadequate conceptions of scientific knowledge in the field run through the main themes of the subject: the isometries and symmetries, rosettes and friezes. As examples of these weaknesses, we find, in our sample, that less than half of the teachers recognize

that there are only 4 basic isometries, only 29% distinguish the axis of symmetry from axis of reflection; only 6% identified the equilateral triangle rotation symmetries; 42% agree that there are 7 types of friezes but only 14% manage to identify the symmetries in some examples of friezes. A significant part of the difficulties faced by the teachers came from the presence of the ancient conception of symmetry that creates limitations in the study of symmetries, in particular the rosettes and friezes.

At an inferential level we see some differences among the teachers of 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> CEB (e.g., distinction between symmetry and isometries, identification of the equilateral triangle as a rosette), but in general, these two groups do not show significant differences in what concerns to scientific knowledge. The differences are more visible in the didactic content knowledge, particularly by the increased use of manipulative materials by 2<sup>nd</sup> CEB teachers and from Dynamic Geometry environments by 3<sup>rd</sup> CEB teachers.

We believe this research study will help to consider the importance of in-service teacher training to improve the quality of teaching emphasizing the content knowledge that we have studied, but also in moments of deep programs change, covering other cognitive areas of mathematics.

Keywords: Teaching isometries, in-service teachers training, symmetry

## RÉSUMÉ

Les mathématiques, en tant que matière scolaire, ont toujours occupé une place privilégiée dans le curriculum scolaire en raison d'être une science avec de fortes implications dans la façon d'agir et de penser de l'être humain. C'est pour cette raison que les thèmes abordés dans les programmes curriculaires de cette matière subissent des altérations comme l'exemple des Symétries et des Transformations Géométriques dans le programme de *Matemática do Ensino Básico* (2007).

Les études sur le domaine du contenu, dans le cas de ce thème spécifique, faites par les professeurs dans l'actif, sont très rares, aussi bien sur le plan national que sur le plan international. Par conséquent, dans ce travail d'investigation, nous prétendons identifier des conceptions désajustées et connaître la position des professeurs face à certaines particularités de cette matière; connaître quelques options méthodologiques dans l'abordage de cette matière; connaître les sources d'actualisation scientifique et vérifier l'existence de différences significatives entre les professeurs du 2<sup>e</sup> *Ciclo do Ensino Básico (CEB)* (11 et 12 ans) et du 3<sup>e</sup> *CEB* (13-15 ans). De cette façon, nous prétendons retirer des conclusions sur les connaissances que les professeurs ont sur chacun des domaines spécifiques de la matière (domaine scientifique, didactique et curriculaire). La réalisation de ces objectifs a fait surgir diverses questions indicatives d'ordre général et d'ordre spécifique en ce qui concerne les trois domaines signalés avec le but de savoir si les professeurs sont détenteurs de toutes les valeurs, sur cette matière, pour proportionner aux élèves un apprentissage de compréhension, ainsi que, savoir si le développement de ces compétences est fait de forme empirique ou continue.

Ce projet d'investigation a suivi un abordage méthodologique mixte dans lequel le côté quantitatif a été privilégié. Par conséquent, cette étude présente principalement les caractéristiques d'une étude *survey*. L'instrument de recueil des données utilisé a été le questionnaire, construit à partir d'observations de cours de 6<sup>e</sup> année de scolarité sur ce thème. Le questionnaire, qui contient des questions dans les trois domaines du savoir (didactique, curriculaire et du contenu), a été appliqué dans l'année scolaire 2011/2012, essentiellement au cours de séances de formation continue pour professeurs sur le thème en question, et il a été constitué en partant d'un échantillon de 142 professeurs d'une population-cible de professeurs de *Ensino Básico* de certains regroupements scolaires ou d'écoles non-regroupées d'une région déterminée du pays.

Le traitement des données, avec recours au software de statistique SPSS, nous a permis d'identifier des conceptions désajustées, des croyances, des sujets présentant un succès plus ou moins grand dans les réponses et, encore, comparer les réponses des groupes de professeurs du 2<sup>e</sup> et du 3<sup>e</sup> *CEB*. Les résultats obtenus permettent de comprendre que, d'une façon générale, les professeurs actualisent leurs connaissances de façon autodidacte et ils dominent superficiellement le

thème avec des implications directes dans le processus de l'enseignement et de l'apprentissage des isométries.

Les nombreuses fragilités et conceptions désajustées dans le domaine du savoir scientifique parcourent les thèmes principaux de la thématique : les isométries, les symétries, les rosaces et les frises. Comme exemple de ces fragilités, nous vérifions dans notre échantillon, que moins de la moitié des professeurs reconnaissent l'existence de seulement 4 isométries de base; seulement 29% distinguent l'axe de symétrie de l'axe de réflexion; seulement 6% ont identifié les symétries de rotation dans un triangle équilatéral; 42% reconnaissent l'existence de 7 types de frises mais seulement 14% ont réussi à identifier les symétries dans quelques exemples de frises. Une partie significative des difficultés ressenties par les professeurs proviennent de la présence de l'ancienne conception de symétrie qui crée des limitations dans l'étude des symétries, en particulier, les rosaces et les frises.

Sur le plan inférentiel nous signalons quelques différences entre les professeurs qui enseignent dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> CEB (e.g., distinction entre la symétrie et l'isométrie, identification du triangle équilatéral à la rosace) mais, en général, ces deux groupes de professeurs ne présentent pas de différences significatives dans le domaine du savoir scientifique. Les différences sont plus visibles au niveau du savoir didactique du contenu, en particulier, en raison d'une plus grande utilisation de matériels manipulables par les professeurs du 2<sup>e</sup> CEB et d'environnements de Géométrie Dynamique par les professeurs du 3<sup>e</sup> CEB.

Cette étude d'investigation pourra, certainement, aider à réfléchir sur l'importance de la formation continue des professeurs pour améliorer la qualité de l'enseignement, plus précisément, les connaissances sur le contenu que nous avons étudié, mais, également, au cours des altérations profondes des programmes qui s'étendent à d'autres domaines cognitifs des mathématiques.

*Mots-clés:* Formation des enseignants, l'enseignement des isométries, symétrie

## SUMÁRIO

<b>SIGLAS E ACRÓNIMOS.....</b>	<b>15</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>17</b>
<b>ÍNDICE DE TABELAS .....</b>	<b>21</b>
<b>ÍNDICE DE GRÁFICOS.....</b>	<b>25</b>
<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>27</b>
<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>27</b>
Contextualização e Pressupostos.....	27
Objetivos e Questões Orientadoras .....	32
Pertinência do Estudo.....	34
Organização da Dissertação.....	38
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>41</b>
<b>CURRÍCULO DA MATEMÁTICA .....</b>	<b>41</b>
O Currículo.....	41
A Matemática como Disciplina Escolar .....	48
Necessidades da própria sociedade .....	51
Exames nacionais e internacionais .....	53
Investigação científica .....	61
Avanços tecnológicos.....	63
Investigação em educação Matemática .....	64
As reformas curriculares na Matemática escolar.....	66
Programa de Matemática do Ensino Básico (2007). .....	77
Programa de Matemática do Ensino Básico (2013). .....	86
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>89</b>
<b>PROFESSORES .....</b>	<b>89</b>
O Contributo de Shulman (1986, 1987, 2005) para a Identificação dos Saberes Docentes .....	92

Os Trabalhos de Shulman em Outras Investigações .....	96
O conhecimento do conteúdo: contributos e interpretações para a mesma discussão .....	98
As Mudanças Conceituais do Professor .....	107
Os Professores e a Geometria .....	115
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>119</b>
<b>TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS.....</b>	<b>119</b>
A Simetria.....	119
Perspetiva Histórica.....	122
A Importância do Estudo da Simetria e das Transformações Geométricas no Currículo Escolar ...	125
Algumas Particularidades desta Nova Abordagem das Transformações Geométricas .....	136
O Ensino e Aprendizagem das Transformações Geométricas .....	150
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>161</b>
<b>ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO.....</b>	<b>161</b>
<i>Design</i> do Estudo .....	161
Caracterização da População e da Amostra .....	166
O inquérito por Questionário .....	168
A elaboração do questionário .....	169
O documento final .....	173
Aplicação do questionário.....	174
Validade e Fiabilidade do Estudo.....	175
Questões de Natureza Ética .....	177
Tratamento de Dados .....	179
<b>CAPÍTULO 6.....</b>	<b>181</b>
<b>O INQUÉRITO POR QUESTIONÁRIO.....</b>	<b>181</b>
Parte I.....	181
Parte II.....	183
Parte III.....	186

Isometrias.....	187
Simetrias .....	189
Rosáceas .....	190
Frisos .....	193
<b>CAPÍTULO 7.....</b>	<b>195</b>
<b>ESTUDO EMPÍRICO.....</b>	<b>195</b>
O Inquérito por Questionário.....	196
A Amostra .....	196
Conhecimento Didático e Curricular .....	201
Formas de atualização científica.....	206
Ambientes de geometria dinâmica.....	213
Materiais manipuláveis .....	219
O Conhecimento do Conteúdo .....	224
Isometrias.....	224
Simetria .....	237
Rosáceas .....	247
Frisos .....	261
Síntese.....	272
<b>CAPÍTULO 8.....</b>	<b>277</b>
<b>CONCLUSÕES E LINHAS FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO .....</b>	<b>277</b>
Resumo do Estudo .....	277
Conclusões.....	280
Questões de Caráter Geral.....	280
Os Saberes Específicos da Disciplina de Matemática.....	286
Dimensões ao nível do conhecimento didático e curricular .....	286
Dimensões ao nível do conhecimento do conteúdo. ....	288
Limitações do Estudo .....	297

Considerações Finais .....	297
Recomendações.....	301
Recomendações para o Ensino .....	301
Recomendações para Futuras Investigações .....	302
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>305</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>329</b>
Apêndice 1 .....	330
Apêndice 2 .....	332

## SIGLAS E ACRÓNIMOS

- AGD – Ambientes de Geometria Dinâmica
- APM – Associação de Professores de Matemática
- CEB – Ciclo do Ensino Básico
- DIF - Diferenciais de funcionamento do item
- CNEB – Competências Essências do Ensino Básico
- FIMS - First International Mathematics Study
- GAVE - Gabinete de Avaliação Educacional
- IEA - Evaluation of Educational Achievement
- LEB – Licenciatura em Educação Básica
- ME – Ministério da Educação
- MMM – Movimento da Matemática Moderna
- MTL - Masters in Teaching and Learning
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics
- OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico
- PAM – Plano de Ação da Matemática
- PEB – Professores do Ensino Básico
- PFCM – Plano de Formação Contínua em Matemática
- PISA - Programme for International Student Assessment
- PM – Plano da Matemática
- PME - Psychology of Mathematics Education
- PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico
- SPSS - *Statistical Package for the Social Sciences*
- TIMMS - Third International Mathematics Study
- UC – Unidade Curricular



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Figuras Isométricas com Orientações Distintas .....	138
Figura 2. Figuras Isométricas por reflexão? .....	139
Figura 3. Mediatrizes de $[MM']$ e $[PP']$ .....	139
Figura 4. Reflexão Deslizante .....	140
Figura 5. A Reflexão Deslizante num Manual do 6.º Ano de Escolaridade .....	141
Figura 6. A Reflexão Deslizante na Planificação Anual de um Manual Escolar A (6.º Ano de Escolaridade) .....	141
Figura 7. Definição de Reflexão Deslizante em outro Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade ....	141
Figura 8. Definição de Reflexão Deslizante num Manual Escolar do 8.º Ano de Escolaridade .....	141
Figura 9. Definição de Reflexão Deslizante em outro Manual Escolar do 8.º Ano de Escolaridade ....	142
Figura 10. Composição de uma Reflexão com uma Translação na Direção Perpendicular ao Eixo da Reflexão .....	142
Figura 11. Reflexão de eixo l .....	143
Figura 12. Uma nota sobre Rosácea num Manual Escola do 6.º Ano de Escolaridade .....	145
Figura 13. Rosácea num Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade .....	146
Figura 14. Simetria de Rotação num Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade .....	146
Figura 15. Rosáceas Cíclicas e Diedrais num Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade .....	146
Figura 16. Simetrias nos Polígonos no PMEB (2007) .....	147
Figura 17. Representação que não é um Friso .....	148
Figura 18. Friso com Simetria de Translação, Simetria de Reflexão de Eixo Vertical e Eixo Horizontal e Simetria de Rotação .....	149
Figura 19. Soluções das Simetrias Existentes em Dois Frisos de m Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade .....	149
Figura 20. Exemplo do Uso da Designação de Washburn e Crowe (1998) num Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade .....	150
Figura 21. "Um coelho simétrico" (Hill et al., 2008, p. 485) .....	157
Figura 22. Etapas para a concretização de um <i>Survey</i> .....	164
Figura 23. Inferência Estatística (Martins, 2006, p. 11) .....	165
Figura 24. Enunciado da Questão 1.1 .....	182
Figura 25. Enunciado da Questão 1.4 .....	182
Figura 26. Enunciado da Questão 1.6 .....	182

Figura 27. Enunciado da Questão 2.2 do Questionário.....	183
Figura 28. Enunciado da Questão 2.3 do Questionário.....	185
Figura 29. Questão 2.5 do Questionário .....	185
Figura 30. Questão 3.2 do Questionário .....	187
Figura 31. Questão 3.13 do Questionário .....	187
Figura 32. Questão 3.17 do Questionário .....	188
Figura 33. Reflexão Deslizante no Quadriculado .....	188
Figura 34. Questão 3.18 do Questionário .....	189
Figura 35. Enunciado da Questão 3.3 do Questionário.....	189
Figura 36. Enunciado da Questão 3.14 do Questionário.....	190
Figura 37. Enunciado da Questão 3.4 do Questionário.....	190
Figura 38. Enunciado da Questão 3.6 do Questionário.....	191
Figura 39. Enunciado da Questão 3.8 do Questionário.....	191
Figura 40. Enunciado da Questão 3.15 do Questionário.....	191
Figura 41. Enunciado da Questão 3.16 do Questionário.....	191
Figura 42. Manual Escolar de Matemática do 8.º Ano de Escolaridade .....	192
Figura 43. Enunciado da Questão 3.5 do Questionário.....	192
Figura 44. Enunciado da Questão 3.7 do Questionário.....	192
Figura 45. Enunciado da Questão 3.9 do Questionário.....	193
Figura 46. Enunciado da Questão 3.10 do Questionário.....	193
Figura 47. Enunciado da Questão 3.11 do Questionário.....	193
Figura 48. Enunciado da Questão 3.12 do Questionário.....	194
Figura 49. Enunciado da Questão 2.1 do Questionário.....	202
Figura 50. Enunciado da Questão 2.2 do Questionário.....	206
Figura 51. Enunciado da Questão 2.3 do Questionário.....	213
Figura 52. Enunciado da Questão 2.4 do Questionário.....	216
Figura 53. Questão 2.5 do Questionário .....	219
Figura 54. Questão 3.2 do Questionário .....	224
Figura 55. Enunciado da Questão 3.17 do Questionário.....	227
Figura 56. Questão 3.13 do Questionário .....	230
Figura 57. Enunciado da Questão 3.18 do Questionário.....	234
Figura 58. Enunciado da Questão 3.3 do Questionário.....	238
Figura 59. Enunciado da Questão 3.14 do Questionário.....	242
Figura 60. Enunciado da Questão 3.4 do Questionário.....	244

Figura 61. Enunciado da Questão 3.5 do Questionário.....	248
Figura 62. Enunciado da Questão 3.7 do Questionário.....	249
Figura 63. Enunciado da Questão 3.6 do Questionário.....	252
Figura 64. Enunciado da Questão 3.8 do Questionário.....	254
Figura 65. Enunciado da Questão 3.15 do Questionário.....	256
Figura 66. Enunciado da Questão 3.16 do Questionário.....	258
Figura 67. Enunciado da Questão 3.9 do Questionário.....	262
Figura 68. Enunciado da Questão 3.10 do Questionário.....	263
Figura 69. Enunciado da Questão 3.11 do Questionário.....	266
Figura 70. Enunciado da Questão 3.12 do Questionário.....	269



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Quadro Comparativo dos Programas de 1990 e 2007 para o 1.º CEB .....	79
Tabela 2. Quadro Comparativo dos Programas de 1991 e 2007 para o 2.º CEB .....	81
Tabela 3. Quadro Comparativo dos Programas de 1991 e 2007 para o 3.º CEB .....	83
Tabela 4. As simetrias as transformações geométricas no programa de Matemática do Ensino Básico homologado em junho de 2013 .....	87
Tabela 5. Percentagem de professores que afirmaram ter tido formação nos dois anos prévios ao TIMMS2011 em cada um dos domínios (Santos & Serrazina, 2013) .....	110
Tabela 6. Anos de Lecionação dos Professores Inquiridos (Questão 3.14) .....	198
<b>Tabela 7.</b> Número de Anos Letivos de Docência dos Professores e as Respetivas Formações Iniciais .....	199
Tabela 8. Formação Inicial dos Professores Constituintes da Amostra e o Respetivo Ciclo de Lecionação no Ano Letivo 2011/2012.....	200
Tabela 9. Número de Professores a Lecionar nos Diferentes Ciclos de Ensino no Ano Letivo 2011/2012 que não responderam à questão 2.1. ....	203
Tabela 10. Opinião dos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino sobre o Tema da Simetrias e das Isometrias no PMEB (2007).....	204
Tabela 11. Opinião dos Professores do 2.º e 3.º CEB sobre a Inclusão das Simetrias e das Isometrias no PMEB (2007).....	204
Tabela 12. Opinião dos Professores do 2.º e 3.º CEB sobre a Inclusão das Simetrias e das Isometrias no PMEB (2007).....	205
Tabela 13. Respostas à Questão 2.1 pelos Professores com as Diferentes Licenciaturas .....	205
Tabela 14. Seleção de <i>Formação Inicial</i> na Questão 2.2 pelos Professores com as Diferentes Licenciaturas .....	209
Tabela 15. Seleção da <i>Formação Inicial</i> na Questão 2.2 pelos Professores com as Diferentes Licenciaturas agrupadas.....	209
Tabela 16. Fontes de Atualização Científica Referidas pelos Professores do 2.º e 3.º CEB e Respetivos Valor-p dos Testes de Significância Aplicados.....	212
Tabela 17. Resposta à Segunda Parte da Questão 2.3 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB.....	215
Tabela 18. Número de Professores que já Utilizaram AGD na Sala de Aula.....	217
Tabela 19. Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino ...	217
Tabela 20. Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB.....	218

Tabela 21. Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB.....	218
Tabela 22. Materiais Referidos pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino .....	220
Tabela 23. Materiais Referidos pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB.....	221
Tabela 24. Materiais Manipuláveis referidos pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino .....	221
Tabela 25. Propostas de Temas/Atividades para Explorar com as Miras pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino.....	223
Tabela 26. Comparação das respostas à Questão 3.2 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB .....	226
Tabela 27. Comparação entre os ciclos de ensino e as respostas à questão 3.17 .....	227
Tabela 28. Respostas à Questão 3.17 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB .....	228
Tabela 29. Justificação dada na Questão 3.17 pelos Respetivos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	229
Tabela 30. Respostas à Questão 3.13 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB .....	233
Tabela 31. Justificação apresentada na Questão 3.13 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB .....	234
Tabela 32. Resposta à Questão 3.18 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino.....	235
Tabela 33. Comparação das Resposta à Questão 3.18 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB .....	236
Tabela 34. Respostas à Questão 3.18 dos Professores do 2.º e 3.º CEB que responderam corretamente à Questão 3.2 .....	237
Tabela 35. Seleção da 4.ª Opção da Questão 3.3 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB.....	240
Tabela 36. Resposta Correta, Incorreta ou Ausência de resposta à Questão 3.3 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	241
Tabela 37. Resposta à Questão 3.14 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino.....	243
Tabela 38. Número de Professores que Referiram, pelo menos, uma Simetria Identidade.....	245
Tabela 39. Número de Respostas do Grupo 1.....	246
Tabela 40. Número de Respostas do Grupo 2.....	246
Tabela 41. Número de Respostas do Grupo 3.....	247
Tabela 42. Número de Respostas do Grupo 4.....	247
Tabela 43. Respostas à Questão 3.5 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	249
Tabela 44. Respostas à Questão 3.7 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	250
Tabela 45. Relação entre o número de Lados do Polígono Regular e o Número de Simetria desse Polígono referida pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino .....	251
Tabela 46. Relação entre o número de Lados do Polígono Regular e o Número de Simetria desse Polígono Referida pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	251
Tabela 47. Resposta à Questão 3.6 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	253
Tabela 48. Número de Respostas à Questão 3.8 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino .....	255

Tabela 49. Respostas à Questão 3.8 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	256
Tabela 50. Justificação da Questão 3.16 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino .....	260
Tabela 51. Justificação da Questão 3.16 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	261
Tabela 52. Resposta à Questão 3.9 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	262
Tabela 53. Resposta à Segunda Parte da Questão 3.10 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino .....	264
Tabela 54. Seleção das Opções Associadas à Resposta Sim na Questão 3.11 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino.....	268
Tabela 55. Justificações apresentadas na Questão 3.11 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	268
Tabela 56. Justificação da Resposta à Questão 3.12 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino que Responderam Negativamente a essa Questão .....	271
Tabela 57. Resposta à Questão 3.12 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB .....	271



## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Distribuição por Ciclos de Ensino nos Anos Letivos 2010/2011 e 2011/2012 dos Docentes Inquiridos.....	197
Gráfico 2. Formação Inicial dos Professores Inquiridos (questão 1.1 do questionário).....	198
Gráfico 3. Respostas à Questão 2.1 do Questionário .....	203
Gráfico 4. Respostas à Questão 2.2 do Questionário .....	207
Gráfico 5. Número de Professores, nas Diferentes Licenciaturas, que Selecionaram Formação Inicial na Questão 2.2 do Questionário .....	208
Gráfico 6. Número de Horas de Formação Contínua na Temática Considerada.....	210
Gráfico 7. Referências Bibliográficas Referidas pelos Professores .....	211
Gráfico 8. Gráfico das Respostas à Primeira Parte da Questão 2.3 do Questionário .....	214
Gráfico 9. Respostas à Segunda Parte da Questão 2.3 dos Professores que Responderam Afirmativamente à Primeira Parte desta Questão .....	214
Gráfico 10. Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores que nunca Utilizaram este Recurso em Sala de Aula .....	216
Gráfico 11. Respostas à Questão 3.2 do Questionário .....	225
Gráfico 12. Respostas à questão 3.17 do Questionário .....	227
Gráfico 13. Tipo de Justificação dada à Questão 3.17 do Questionário .....	228
Gráfico 14. Respostas à Questão 3.13 do Questionário .....	230
Gráfico 15. Justificações dadas na Resposta à Questão 3.13 do Questionário .....	231
Gráfico 16. Respostas com Justificação Incorreta à Questão 3.13 do Questionário .....	231
Gráfico 17. Respostas Corretas ou Parcialmente Corretas à Questão 3.13 por Ciclo de Ensino .....	233
Gráfico 18. Respostas à Questão 3.18 do Questionário .....	235
Gráfico 19. Respostas à Questão 3.3 do Questionário .....	238
Gráfico 20. Seleção unicamente da 4. <sup>a</sup> Opção da Questão 3.3 Por Ciclos de Ensino.....	239
Gráfico 21. Seleção da 4. <sup>a</sup> Opção e Outra Opção da Questão 3.3 Por Ciclos de Ensino .....	240
Gráfico 22. Respostas à Questão 3.14 do Questionário .....	242
Gráfico 23. Respostas à Questão 3.14, Considerando as Respostas Corretas à Questão 3.3 do Questionário .....	243
Gráfico 24. Respostas à Questão 3.4 do Questionário .....	245
Gráfico 25. Respostas à Questão 3.5 do Questionário .....	248
Gráfico 26. Respostas à Questão 3.7 do Questionário .....	249

Gráfico 27. Respostas à Primeira Parte da Questão 3.6 do Questionário .....	252
Gráfico 28. Respostas à Segunda Parte da Questão 3.6 do Questionário .....	254
Gráfico 29. Respostas à Questão 3.8 do Questionário .....	255
Gráfico 30. Respostas à Questão 3.15 do Questionário .....	257
Gráfico 31. Justificações Apresentadas pelos Professores à Questão 3.15 do Questionário .....	257
Gráfico 32. Respostas à Questão 3.16 do Questionário .....	259
Gráfico 33. Justificações Apresentadas pelos Professores à Questão 3.16 do Questionário .....	260
Gráfico 34. Respostas à Questão 3.9 do Questionário .....	262
Gráfico 35. Respostas à Primeira Pergunta da Questão 3.10 do Questionário .....	263
Gráfico 36. Respostas à Segunda Parte da Questão 3.10 do Questionário .....	264
Gráfico 37. Respostas à Segunda Parte da Questão 3.10 do Questionário tendo Respondido Não na Primeira Parte desta Questão.....	265
Gráfico 38. Respostas à Segunda Parte da Questão 3.9 do Questionário tendo Respondido Sim na Primeira Parte desta Questão.....	266
Gráfico 39. Respostas à Primeira Parte da Questão 3.11 do Questionário .....	267
Gráfico 40. Opções da Segunda Parte da Questão 3.11 Associada à Seleção Prévia do Sim .....	267
Gráfico 41. Resposta à Questão 3.12 do Questionário .....	269
Gráfico 42. Justificação dada à Questão 3.12 do Questionário .....	270

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como propósito a contextualização da investigação realizada pelo que se inicia com uma descrição sucinta da sua pertinência, das principais influências e dos objetivos e questões que lideraram o *design* investigativo. Inicialmente percorreremos três temáticas principais que servirão de suporte teórico e reflexivo para o estudo empírico que se seguirá, nomeadamente, a inovação curricular e as suas implicações no ensino e aprendizagem da Geometria, em particular, as simetrias e as transformações geométricas, o conhecimento do conteúdo por parte do professor que detém um papel fulcral no desenvolvimento do currículo da Matemática e as suas dificuldades perante as novas conceitualizações e abordagens deste tema. Por fim, enumeram-se os objetivos desta investigação e apresenta-se uma síntese da estrutura organizativa da dissertação.

#### Contextualização e Pressupostos

A evolução da sociedade e a conseqüente evolução das ciências exige que os programas curriculares lecionados nas escolas caminhem a par destas evoluções. O ensino da geometria tem sido privilegiado nos últimos programas nacionais de Matemática e o Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 2007, colocou num plano destacado as transformações geométricas.

A mudança curricular patenteada no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 potenciou a introdução de novos conteúdos programáticos em todos os ciclos referentes ao Ensino Básico: 1.º, 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico (CEB) e novas abordagens a partir de diferentes perspetivas. A inovação curricular relativa ao tema *Isometrias*, e, em particular, às *simetrias* de uma figura, descrita no PMEB (2007), envolveu a introdução de novos conteúdos programáticos e a alteração do conceito de simetria trabalhado ao longo de todos estes ciclos. A par dos conteúdos curriculares que acabamos de referir estão as diretrizes do PMEB (2007), com o objetivo de fomentar uma dinâmica de sala de aula apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem socioconstrutivista que aconselha a manipulação de recursos estáticos e dinâmicos, o uso de materiais manipuláveis e a proposta de tarefas desafiadoras. Ora, estas valências ao nível científico e pedagógico exigem por parte dos docentes um investimento pessoal no sentido de atualizarem os seus saberes. Contudo,

relativamente à mudança conceitual, devemos reconhecer que “é difícil mudar formas de ensinar porque a mudança exige um processo de desaprender e aprender novamente” (Mousley, 1990, citado por Handal & Herrington, 2003, p. 4) provocando “sentimentos de desconforto que podem ser desagradáveis e intimidantes” (Martin, 1993, citado por Handal & Herrington, 2003, p. 4). No entanto, “não devemos perder de vista a forte possibilidade que existe de as concepções dos professores interferirem no ensino que realizam e na aprendizagem dos seus alunos” (Vasconcellos, s.d., p. 1). Para além disso, o confronto entre a inovação curricular e as concepções dos professores pode, por isso, provocar um desconforto nestes (Costa, 2008) que, assim, “evitam ensinar temas que não dominam, mostram insegurança e falta de confiança” (Curi, 2004, p. 162).

A inovação curricular ocorrida ao nível dos conteúdos programáticos não é pacífica e, como já referimos, exige preparação ao nível científico por parte dos docentes, afirmação esta que é corroborada por alguns investigadores:

- Teresa Assude (s/d, p. 44), numa comunicação sobre a inovação curricular, afirma que esta tem uma condicionante ao nível do conhecimento matemático pois os professores, “na sua maioria, estão «atrasados» em relação a estas inovações”.
- Ana Paula Canavarro (2010, p. 1) considera que este PMEB (2007) contém “novos tópicos matemáticos com que a maioria dos professores nunca lidou”, tais como o conceito de friso e as características e propriedades de outras transformações geométricas prescritas para estudo nestes dois ciclos (1.º e 2.º CEB), em particular as isometrias no plano que alarga o estudo único das reflexões como as isometrias abordadas nestes ciclos de estudo.
- O grupo de trabalho do 2.º ciclo da Associação de Professores de Matemática (APM) (2010, p. 36) refere, acerca do PMEB (2007), que os conceitos referidos anteriormente “merecem aprofundamento teórico, por serem «novos» neste nível de ensino ou por estarem a ser considerados numa metodologia que não tem tradição”.
- Rita Bastos (2006, p. 11), do Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática, relativamente à atitude dos professores face às isometrias, escreve que “o hábito de resolver problemas com recurso às transformações geométricas não está muito enraizado”.

Todos estes relatos reforçam a ideia de que a formação contínua dos docentes devia ser abrangente a todos os professores de Matemática, dando, também, segundo Nacarato e Passos (2003, citado por Vasconcellos, s.d., p. 16), “oportunidade [aos docentes] de vivenciar situações da prática pedagógica que (possam) contribuir para a formação do seu próprio pensamento geométrico” e, conseqüentemente promover a atualização científica destes profissionais. Os professores, através

do papel fulcral que desempenham no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, necessitam de oportunidades para procederem a essa atualização científica e é necessário que, por parte dos organismos governamentais, a mesma seja proporcionada e cuidadosamente acutelada aquando das renovações científicas.

O desenvolvimento concetual, no caso particular da simetria, assunto alvo deste trabalho, sujeita os docentes a uma preparação cognitiva para aceitar e compreender os novos conceitos que não assumem características inerentes a um processo natural. Numa primeira instância, este conceito exige o conhecimento de todas as isometrias no plano e, numa segunda, a necessidade de o professor se alienar do conceito de simetria como era entendido no passado, já que, quer na linguagem corrente quer nos programa anteriores, o termo simetria estava associado à reflexão ou simetria de reflexão, não havendo distinção destas. De facto, o conceito de simetria em linguagem corrente por, na grande maioria dos casos, não ser perfeita, é usado frequentemente e associado à reflexão axial, por qualquer indivíduo, por observação da natureza e objetos construídos pelo homem. O que afirmamos anteriormente é atestado por Caputi e Gerônimo (2006) quando referem que

cada um de nós possui, mesmo que vagamente, alguma concepção de simetria. Ao observarmos o mundo ao nosso redor, identificamos algumas imagens como simétricas, outras como assimétricas, mesmo sem explicitar o que queremos dizer com isso. A Matemática também tem a sua concepção de simetria. (p. 21)

Exige-se, por isso, uma mudança concetual relativamente a este conceito, tarefa esta que requer preparação por parte dos docentes e à qual não se atribui facilidades pois, tal como refere Ponte (1992, p. 1), “as nossas concepções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que nos habituámos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes”. Estas concepções “condicionam a forma de abordagem das tarefas, muitas vezes orientando-nos para abordagens que estão longe de ser as mais adequadas” (Ponte, 1992, p. 8).

O trabalho de pesquisa de Ma (2009), que deu origem à publicação do livro *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, debruça-se sobre a compreensão da Matemática dando ênfase aos aspetos do conhecimento que mais poderão contribuir para a capacidade do professor em promover a compreensão matemática por parte dos alunos, ou seja, a defesa da compreensão profunda da matemática fundamental em vez do seu conhecimento superficial e mecanizado. Significa isto que, em prol da compreensão matemática elementar profunda, o professor deve estar munido de todas as valências, entre elas a científica, de forma a fomentar o desenvolvimento de outras competências incluindo as competências transversais. Neste sentido, afirma Ma (2009) que

alguns investigadores fizeram notar que, de modo a promover a compreensão matemática, é necessário que os professores ajudem os alunos a fazer conexões explícitas entre os materiais manipuláveis e as ideias matemáticas. De facto, nem todos os professores são capazes de fazer essas ligações: tudo indica que apenas os que têm uma clara compreensão das ideias matemáticas incluídas no tópico poderão estar aptos a desempenhar esse papel. (p. 38)

Da mesma forma que Ma (2009) abordou no tema *Números e Operações* as concepções e metodologias de trabalho dos professores, também nós, neste trabalho, pretendemos abordar o tema Geometria e, em particular, as isometrias no plano. Uma das razões para esta escolha é o facto de “os últimos tempos ter havido por parte dos professores e de modo geral, por parte da comunidade científica que pesquisa o assunto, o interesse em resgatar o ensino da Geometria nas escolas, tendo em vista um certo descaso a esse respeito” (Vasconcellos, s/d, p. 14).

Outro dos motivos da escolha deste tema, isometrias, prende-se com o percurso pessoal e profissional.

Para uma melhor compreensão da problemática descrita anteriormente, elegemos este estudo que se centra, então, no PMEB (2007), quando desenvolve, como conteúdo, uma nova perspetiva e abordagem das isometrias. Acresce a este fator motivacional o interesse significativo que tal tema oferece e desperta quando lecionamos<sup>1</sup> no curso de Licenciatura em Educação Básica (LEB) na Escola Superior de Educação do Porto e percebemos as inúmeras dificuldades e receios dos estudantes do 1.º ano em matérias relacionadas com a geometria. Os alunos provenientes da Matemática A, no ensino secundário, tendencialmente sentem necessidade de algebrizar a geometria pois dominam as manipulações algébricas e sabem interpretar esses resultados. Contudo, demonstram receio em trabalhar com a geometria através da visualização e manipulação de materiais. Nos restantes estudantes, que não possuem os mesmos pré-requisitos que os últimos, denota-se uma baixa pré-disposição para a geometria. Em ambos os casos verifica-se que a comunicação matemática relacionada com as discussões em pequeno e grande grupo, sobre temas da geometria, apresenta várias limitações.

No terceiro ano daquela licenciatura, mais propriamente no ano letivo 2009/2010, lecionámos a unidade curricular (UC) Matemática, Materiais e Tecnologias, de cujo programa somos coautores, e que contemplava o uso de *software* de Geometria dinâmica, nomeadamente, o *Geogebra*. Este ambiente de trabalho possibilita o uso de diversas ferramentas básicas para traçados de pontos, retas, circunferências, polígonos, entre outros, permitindo o cálculo de áreas, perímetros e comprimentos de linhas, bem como a determinação de pontos médios, entre outras situações que sejam de simples compreensão. Este *software* permite, também, a aplicação de transformações geométricas de figuras

---

<sup>1</sup> Ao longo do texto, a autora referir-se-á a si própria na primeira pessoa do plural.

(reflexão, translação, rotação, inversão e homotetia). Ora, das quatro isometrias existentes (reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante) e referidas no PMEB (2007), nos comandos do *Geogebra*<sup>2</sup> surgem referenciadas apenas três daquelas transformações (reflexão, translação e rotação).

As primeiras atividades que desenvolvemos no *Geogebra* com os estudantes exigiam a utilização direta das ferramentas básicas do programa, pois tinham como objetivo familiarizá-los com este ambiente. As atividades posteriores eram de caráter investigativo, ou seja, através de uma situação-problema, solicitava-se aos estudantes a construção de objetos geométricos através de pistas sucessivas até atingirem, com sucesso, a representação das soluções. As atividades de investigação pressupunham, por exemplo, o domínio do ponto programático referente aos *lugares geométricos* lecionados no ano anterior com uma abordagem mais teórica. Ao fim de algum tempo percebemos que os resultados desta aprendizagem foram mais profícuos e mais significativos do que os conseguidos com a abordagem teórica desenvolvida no ano anterior e que se constituía como um pré-requisito para este ponto programático. A visualização dos objetos geométricos em ambiente dinâmico permitiu-lhes experimentar e reconhecer soluções possíveis ou caminhos errantes.

Nos anos letivos 2009/2010 e 2010/2011, lecionámos duas UC – Iniciação à Prática Profissional II e Iniciação à Prática Profissional III, do curso de LEB, que implicou a criação de uma bolsa de professores cooperantes do 2.º CEB, de forma a viabilizar os respetivos programas. A par do contacto próximo com estes docentes, também nestes anos supervisionámos os estágios pedagógicos dos alunos da Licenciatura em Professores do Ensino Básico (PEB), variante Matemática e Ciências da Natureza, e, em anos letivos anteriores, exercemos as funções de docente de Matemática no 2.º CEB e 3.º CEB. Nas escolas do Ensino Básico onde exercemos a docência, a interação com os colegas do 2.º CEB permitiu-nos conhecer e desenvolver metodologias de trabalho em sala de aula, assim como o trabalho colaborativo desenvolvida nas reuniões do Plano de Ação da Matemática (PAM).

As três situações referidas anteriormente permitiram-nos um contacto regular com vários professores de Matemática do 2.º CEB, que nos deram a perceber algumas dificuldades ou fragilidades no que respeita à utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) e mesmo de ambientes estáticos onde se insere a utilização de materiais manipuláveis. Além disso, o desconhecimento da existência de determinados materiais manipuláveis potenciadores de aprendizagens ricas no âmbito do estudo da reflexão, a única isometria que constava deste programa, não permitia desenvolver determinadas tarefas facilitadoras, para os alunos, da visualização desta transformação geométrica.

Verificamos, também, que as tarefas apresentadas em fichas de trabalho, em momentos de avaliação, eram digitalizadas de manuais escolares de diversas editoras ou de outras fontes e, quando

---

<sup>2</sup> Na última versão 4.4.

havia a construção, por parte do docente, de imagens e objetos geométricos, estes eram elaborados em ambiente *Paint* ou diretamente em ambiente *Word*, utilizando as opções de desenho, apresentando, assim, um grau de perfeição largamente questionável.

Ainda no ano letivo de 2010/2011, lecionámos, pela primeira vez, neste curso de licenciatura em Educação Básica, a UC de Geometria, cujo programa, de que somos coautores, continha um capítulo sobre isometrias. A construção dos textos de apoio, de atividades para a UC e a inserção de um capítulo sobre isometrias no mestrado por nós frequentado na Universidade do Minho, obrigou-nos a uma intensa pesquisa bibliográfica sobre a temática em causa. Ao efetuar tal exploração bibliográfica deparamo-nos com inúmeros textos com informação considerada desatualizada, o mesmo acontecendo com fichas de trabalho, páginas *Web*, entre outros documentos, nomeadamente no que respeita à exploração do conceito de simetria. De facto, poucos foram os recursos, nessa altura encontrados, com o conceito do termo *simetria* devidamente atualizado.

Nos últimos quatro anos dos encontros *Profmat* e *Matemática nos Primeiros Anos*, organizados pela APM, bem como de outros encontros da especialidade, organizados por diversos grupos editoriais, observámos que as comunicações e sessões práticas dinamizadas nesses encontros com a temática das isometrias e AGD eram principalmente dirigidas aos professores dos 1.º e 2.º CEB e encontravam-se constantemente com lotação esgotada. Constatámos que as questões colocadas pelos assistentes, nestas sessões, revelavam algum desconhecimento e desconforto ao nível científico nesta temática, bem como demonstravam as dificuldades na manipulação dos recursos disponibilizados nas sessões práticas. Tudo isto e a notória preocupação demonstrada pelos professores que lecionavam este conteúdo programático provocaram-nos um certo alerta e alguma ansiedade profissional.

As experiências e os cargos desempenhados incentivaram-nos a procurar perceber, de um modo mais profundo, esta realidade, cujas respostas permitirão refletir sobre a necessidade, ou não, de o Ministério da Educação (ME) disponibilizar formação contínua aos professores com principal relevo nos momentos de inovação curricular.

### **Objetivos e Questões Orientadoras**

No âmbito da problemática acima referida e dos pressupostos supracitados, definimos os seguintes objetivos que nos propomos atingir neste trabalho:

- Verificar se os professores têm concepções desajustadas em relação ao tema em estudo e, se sim, identificá-las.
- Perceber a profundidade do conhecimento dos professores nos vários subtópicos do tema central desta tese.
- Perceber a posição dos professores face às afirmações produzidas pelos alunos.
- Conhecer algumas atitudes metodológicas usadas pelos professores para o ensino da temática em causa, nomeadamente, a utilização de ambientes de geometria dinâmica e de materiais manipuláveis.
- Conhecer as fontes usadas pelos professores para a atualização científica.
- Perceber se há diferenças significativas nas respostas dadas pelos professores dos grupos de docência 230 e 500 (2.º e 3.º CEB) e relativamente aos pontos anteriormente referidos.

Em consonância com os objetivos traçados anteriormente, colocaram-se-nos algumas questões nucleares e genéricas a partir das quais desenvolvemos o nosso estudo empírico.

Após a homologação e a aplicação do PMEB (2007), em particular com a introdução do estudo de novas isometrias, a mudança concetual da noção de simetria e as novas abordagens metodológicas referentes a este tema, serão os professores detentores de todas as valências para proporcionarem aos alunos uma aprendizagem com compreensão? O desenvolvimento destas competências é realizado de forma empírica ou através da frequência de ações de formação contínua?

Com o intuito de facilitar a compreensão e a aplicação, no terreno, das questões acima transcritas, socorremo-nos das questões parcelares abaixo enunciadas que separaremos nas várias dimensões de carácter geral e específico:

#### Carácter Geral

- O que pensam os professores da alteração programática relativamente às isometrias?
- Perante a inovação curricular, de que forma os professores constroem e atualizam os seus conhecimentos científicos no tema das simetrias e transformações geométricas?
- Que papel tem o manual escolar para as aprendizagens dos próprios professores?
- Qual o papel das ações de formação?
- Haverá opiniões significativamente distintas entre os docentes dos 2.º e 3.º ciclos em relação às questões colocadas?

#### Carácter Específico

##### Dimensão Didática e Curricular

- Os professores reconhecem as vantagens do uso de ambiente de geometria dinâmica para o desenvolvimento deste tema e utilizam estes recursos na sala de aula?

- Os professores conhecem os diferentes materiais manipuláveis para o ensino das transformações geométricas?
- Algum grupo de professores, do 2.º CEB ou 3.º CEB, se destaca pelo uso destes recursos?

#### Dimensão Científica

- Os professores adotaram, nas suas estruturas mentais, o novo conceito de *simetria*?
- Os professores reconhecem as propriedades das rosáceas e dos frisos?
- As afirmações nesta matéria, por parte dos alunos, são exploradas corretamente sob o ponto de vista científico ou são aceites ou refutadas sem justificação?
- Algum grupo de professores, do 2.º CEB ou 3.º CEB, se destaca no domínio científico do tema das simetrias e transformações geométricas?

### **Pertinência do Estudo**

O currículo escolar é imprescindível para a sociedade e é regulado pelo próprio Estado com o objetivo de fomentar a igualdade no acesso à educação e à instrução mas, ao mesmo tempo, conferir um carácter específico e individualizado subjacente às características de cada escola e comunidade educativa. O desenvolvimento do currículo ocorre em três dimensões: macro, meso e micro (Bogantes, 1997; Lehenbauer, Picawy, Steyer & Wandscheer, 2005; Llavador, 1991; Diogo & Vilar, 1999; Verdugo, 2006) e seis fases da objetivação: currículo prescrito, currículo apresentado aos professores, o currículo moldado pelos professores, o currículo em ação, o currículo realizado e o currículo avaliado (Gimeno-Sacristán, 2007). Neste processo, o professor assume um papel fulcral (Pardal, 1993), que não pode ser ignorado e que tem sido alvo de atenção por parte dos organismos estatais.

O aparecimento das disciplinas escolares remonta aos séculos XVI/XVII e, desde então, o enorme desenvolvimento cultural dos últimos dois séculos (Boavida & Amado, 2008) impulsionou o aparecimento de novos saberes escolares que se traduziram no surgimento de uma multiplicidade de disciplinas e, indubitavelmente, o desaparecimento de outras, outrora considerados inquestionáveis na educação escolar. A Matemática enquanto ciência e enquanto disciplina escolar é das mais antigas, o que lhe tem proporcionado, ao longo dos tempos, um lugar de destaque no currículo (Ponte et al., 2007).

A indissociável relação de dependência entre a disciplina de Matemática e a própria sociedade originou a existência de movimentos reformistas ou de reajustamentos nos programas desta disciplina,

impulsionados pelos progressos da própria sociedade. Para perceber esta realidade, importa conhecer os principais impulsionadores das reformas curriculares na educação matemática, não apenas em Portugal mas na esfera global, e realçar os momentos mais marcantes desta evolução, desde meados dos anos 50 do século passado até à atualidade.

Em Portugal, nos últimos 25 anos, registou-se a implementação do programa de 1990/1991, do programa de 2007 e de um terceiro, homologado em 2013. Nos programas de Matemática de 1990/1991 havia conteúdos programáticos que surgiam mais ou menos reforçados e que importa realçar. Referimo-nos à Geometria, que tem elevado a sua importância nos últimos programas, seguindo as tendências internacionais, em particular no estudo das simetrias e das transformações geométricas, que surgem destacadas no programa de 2007 e perdendo esta categoria no programa de 2013. No programa de 2007, este tema é abordado nos três ciclos de ensino de forma crescente (Fernandes, 2011), iniciando-se no 1.º ciclo, de um modo informal, sendo depois revisitado de um modo mais aprofundado nos ciclos seguintes (Dâmaso et al., 2010; Janela, 2012; Ponte & Sousa, 2010) onde é visível o aumento da formalização. No programa de 2013, as alterações curriculares são significativas relativamente ao programa anterior, nomeadamente nesta temática e, com a homologação deste documento, surgem ecos de descontentamento e de preocupação por parte de inúmeros notáveis e organizações na área da Matemática (e.g., Associação de Professores de Matemática, 2013; Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM), 2013; Veloso, Brunheira & Rodrigues, 2013). Estes autores vislumbram um retrocesso no ensino da Matemática, ainda mais “quando surgem indicadores nos estudos internacionais (TIMSS 2011; PIRLS 2011; PISA 2009; PISA 2013) de uma evolução muito positiva das competências dos alunos portugueses, nomeadamente em Matemática” (Santos & Serrazina, 2013, p. 3).

Aquando do desenvolvimento deste trabalho de investigação, em particular, da recolha de dados, o programa em vigor era o datado de 2007 e não previa a existência de outro num espaço tão curto de tempo, pelo que este trabalho se centra nas aprendizagens previstas nesse documento, para o tema das simetrias e transformações geométricas. No entanto, apesar de este programa ter sido substituído pelo de 2013, o estudo que desenvolvemos não perdeu pertinência pois, o tema em investigação continua a ser iniciado no 1.º CEB, a ser revisitado no 2.º CEB e aprofundado no 3.º CEB. Para além disso, o conjunto das metas curriculares da disciplina de Matemática apresenta vários descritores sobre as simetrias e as transformações geométricas que os alunos devem atingir durante o Ensino Básico. Estes descritores surgem com principal relevo no 6.º ano de escolaridade onde, pela primeira vez, são definidos objetivos específicos para a resolução de problemas envolvendo as

propriedades das isometrias e figuras com simetria de rotação e de reflexão axial<sup>3</sup>. No 3.º CEB, este documento volta a dar relevo a esta temática aliando agora outros descritores relacionados com o estudo vetorial<sup>4</sup> e, mais uma vez, não esquecendo a resolução de problemas envolvendo todas as isometrias e simetrias. Em suma, seguindo as diretrizes internacionais, a nível nacional, as simetrias e as isometrias têm um papel a não desprezar no ensino da Matemática do Ensino Básico, plasmável nestes dois documentos orientadores (Programas e Metas Curriculares) das aprendizagens. Este facto ocorre pelo reconhecido benefício do estudo destas matérias para o desenvolvimento das referidas competências, e de outras, relacionadas com outras áreas da Geometria<sup>5</sup>.

No caso particular do estudo das simetrias e das transformações geométricas prevê-se, para os estudantes, um conjunto de vantagens na medida em que estas matérias estão intimamente relacionadas com a capacidade intrínseca do ser humano em identificar fenómenos que ocorrem na natureza, tal como a existência de simetria (Veloso, 1998). A transversalidade deste conceito, a sua aceitação e a tentativa de uniformização do mesmo eleva a sua importância e a impulsiona a sua consistência. Na perspetiva histórica efetuada sobre esta temática, iniciamos naturalmente no conceito de simetria que está presente em algumas das mais belas obras e criações do homem e percebemos a mudança concetual deste termo que, desde o programa de 2007, tem adquirido uma abordagem distinta da que foi explorada nos programas anteriores. Este tema da geometria possui grandes potencialidades para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem pois, além de fomentar a construção e o desenvolvimento do pensamento geométrico, contribui “para o desenvolvimento do raciocínio e capacidade de argumentação por parte dos alunos” (Yanik, 2011, p. 231).

O ensino das transformações geométricas na Matemática escolar, em particular na matemática elementar, para além dos aspetos referidos anteriormente, permite o estudo das propriedades das figuras por alheamento da sua posição, a conexão com as funções e a análise das representações culturais.

Ora, a tendência para trabalhar com a Geometria recorrendo à Álgebra, é para muitos autores, uma conexão a que se deve dar menos relevo em benefício destas duas áreas. A Álgebra não contribui para a melhoria da capacidade de visualização, nem a manipulação algébrica garante a compreensão geométrica do que se está a executar pelo que devem ser tratadas separadamente (Lacroix (1765-1843) citado por Boyer, 1998). Esta associação exagerada, que ainda existe nos dias de hoje, relevou a geometria para segundo plano que, durante décadas, foi encarada como um parente pobre da álgebra linear e, por isso, encarada como uma área sem grande interesse para o prosseguimento de estudos. Este facto originou, praticamente, o desaparecimento do ensino de

---

<sup>3</sup> Ver páginas 41, 42 e 43 das Metas Curriculares do Ensino Básico da disciplina de Matemática.

<sup>4</sup> Ver páginas 62, 63 e 64 das Metas Curriculares do Ensino Básico da disciplina de Matemática.

<sup>5</sup> Ver subcapítulo *A importância do Estudo da Simetria e das Transformações Geométricas no Currículo Escolar*.

aspectos da geometria ligados à observação, experimentação e construção (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Consequentemente, os professores que aprenderam geometria nos currículos que a descuidaram ficaram com falta de bases nesta matéria, o que originou também uma tendência para o descuido do seu próprio ensino (Costa, 2005). Sendo a simetria e as transformações geométricas uma área da própria Geometria não fica afastada desta tendência e, mais ainda, sai fragilizada pela mudança conceitual do conceito de simetria e pela abordagem primária das transformações geométricas em ciclos de ensino que não lecionavam mais do que a reflexão. Neste âmbito, o papel fulcral que o professor possui no processo de ensino e aprendizagem deste tema apresenta constrangimentos apontados por vários autores que alertam para a dificuldade dos docentes nestas matérias e que se urge colmatar. Esta realidade não ocorre somente a nível nacional mas é registado em inúmeras publicações a nível internacional.

O domínio, por parte do professor, do conhecimento do conteúdo influencia a ação deste e, consequentemente, a qualidade da instrução na sala de aula que é visível através da seleção das atividades, uso de estratégias apropriadas, a forma e natureza das questões colocadas, a capacidade de responder apropriadamente, a avaliação da compreensão dos alunos e a promoção de uma atitude positiva face à Matemática, no próprio esforço e habilidade do professor para ajudar os alunos a aprender (Caseiro, 2010; Henderson & Rodrigues, 2008; Hill et al., 2008).

A escassez de estudos sobre o conhecimento do conteúdo de professores no ativo, nesta temática, eleva a importância do estudo empírico que aqui se apresenta para se tentar perceber se a realidade descrita na esfera internacional e nacional, e obtida através de pequenas amostras de profissionais ou grupos de futuros profissionais, também por nós é verificada. É importante perceber a se as fragilidades decorrentes da maior abrangência conceitual de simetria e das suas implicações no estudo das isometrias que são registadas por investigadores de todo o mundo (e.g., Canavarró, 2010; Dâmaso et al., 2010; Desmond, 1997, citado por Yanik, 2011; GTG, s.d.; Hill et al., 2008; Ilaslan, 2013; Loureiro, 2009; Veloso, 2012; Yanik, 2011) também se verificam no nosso grupo de profissionais. Apesar de se pressupor, por vezes, que estas novas matérias ao nível do Ensino Básico sejam básicas e comumente compreendidas, no caso específico das isometrias, o tema não é de todo superficial e os docentes que a lecionam têm que aprofundar os seus conhecimentos nesta temática de forma a entendê-la de uma forma ampla sob pena de, parafraseando Silva (2010, p. 37), gerarem “conceituações confusas que possam conduzir a ideias geradoras de dificuldades e obstáculos na aprendizagem posterior dos conceitos”.

É importante referir que, até ao ano letivo de 2011/2012, o investimento na formação contínua dos professores foi uma preocupação do Ministério da Educação e uma estratégia reconhecida pelo impacto positivo que teve na aprendizagem dos alunos. Atualmente assiste-se a um desinvestimento

nesta matéria pelo que vários educadores e organizações vislumbram um retrocesso no ensino da Matemática com consequências para as aprendizagens dos próprios alunos (APM, 2013; Brunheira, 2013; Santos & Serrazina, 2013; Veloso, Brunheira & Rodrigues, 2013; Viana, 2013).

Neste âmbito e nesta investigação focaremos duas problemáticas: a primeira associada ao conhecimento científico e a forma como este é atualizado e, a segunda, referente ao conhecimento didático no sentido de perceber a utilização, por parte dos professores, de ferramentas e materiais manipuláveis que apoiem a aprendizagem desta temática. Não podemos ignorar que um dos constrangimentos na abordagem das transformações geométricas nas aulas de Matemática reside na necessidade de interpretações abstratas por parte dos alunos, tal como refere Pimenta (2007), num artigo publicado na revista *Educação e Matemática*:

Em muitas aulas sobre isometrias vive-se num mundo imaginário:

- “imaginem este triângulo a rodar  $180^\circ$  em torno deste vértice”;
- “Imaginem que se move a figura, sem lhe alterar o tamanho, do canto do quadro até ao centro do quadro”. (p. 37)

Exigir do aluno a aprendizagem das transformações geométricas sem recorrer a materiais manipuláveis, a programas de Geometria Dinâmica ou a outros recursos interativos é admitir que o aluno tem uma capacidade de abstração que, provavelmente, na realidade, não possui. Parafraseando Almeida (1994, p. 7): “imaginar exige de quem o faz, não ver tudo o que se vê e ver algo do que não se vê”.

Nesta investigação, tentaremos perceber a existência de fragilidades ao nível científico, as ferramentas e materiais utilizados pelos professores, essencialmente nos primeiros dois ciclos de ensino, e a forma de atualização científica privilegiada pelos profissionais estudados nesta matéria. Assim, através da apresentação dos resultados deste estudo, poderemos contribuir positivamente para o ensino e aprendizagem desta temática acrescentando à reflexão da comunidade científica mais uma investigação numa área de grande escassez, em particular, a nível nacional.

## **Organização da Dissertação**

Esta dissertação encontra-se estruturada em oito capítulos que, a seguir a esta Introdução, se dividem em duas partes fundamentais, a revisão da literatura e o trabalho empírico. Neste primeiro capítulo é apresentada a introdução ao estudo investigativo que aqui se incorpora, realçando os referenciais teóricos que assinalam a sua pertinência e os objetivos.

Os capítulos dois, três e quatro incluem a revisão da literatura referentes aos três temas teóricos que sustentam e, de certa forma, orientaram este estudo de investigação.

No capítulo dois, apresentamos um percurso histórico sobre a importância da Matemática enquanto disciplina escolar e a necessidade das reformas do currículo desta ciência, fazendo referência aos seus maiores impulsionadores e aos movimentos reformistas mais marcantes dos últimos anos. Nos movimentos que marcam os últimos programas de Matemática do Ensino Básico, destaca-se a importância do ensino e aprendizagem da Geometria, cuja abrangência e a linha de evolução progressiva se tentará perceber neste capítulo.

No capítulo três, reconhecemos o papel fulcral que o professor, enquanto executor dos programas das disciplinas, tem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Destacamos assim o conhecimento do conteúdo de que nos fala Shulman (1986) e terminamos com a problemática registada por vários autores, sobre este conhecimento, relativamente ao tema das simetrias e das transformações geométricas.

No capítulo quatro, seguindo a tendência para a elevação da geometria enquanto área da Matemática, especifica-se a importância do estudo da simetria e das transformações geométricas que, no PMEB (2007), adquiriu um papel de relevo. Apesar de este trabalho de investigação se centrar no programa de 2007, faremos uma análise sucinta das alterações que sofreu a temática em causa, no programas anteriores e no programa de Matemática homologado em junho de 2013.

A componente empírica deste trabalho subdivide-se em três capítulos.

O capítulo cinco descreve o modelo do estudo adotado e a descrição detalhada das etapas que constituíram a preparação, a recolha e o tratamento dos dados. Neste capítulo, apresenta-se detalhadamente as características dos elementos da nossa amostra bem como as questões de natureza ética, de validade e de fiabilidade.

Dedicamos o capítulo seis unicamente ao inquérito por questionário, onde fundamentamos as opções tomadas em termos das questões colocadas, em particular, referente à identificação das especificidades sob o ponto de vista profissional dos elementos da amostra e às questões do foro científico que são acompanhadas por uma pequena abordagem teórica que permitirá perceber a relevância das questões formuladas.

No capítulo sete, procedemos à análise dos dados recolhidos pelo questionário aplicados aos professores que constituíram a nossa amostra. Esta análise encontra-se subdividida em três fases, as mesmas integrantes no questionário: a primeira caracteriza a amostra, a segunda relaciona-se com o conhecimento didático e curricular do tema matemático em questão e a última ao conhecimento do conteúdo do mesmo. Nesta última fase, será redigida uma análise dos dados recolhidos,

estabelecendo, muitas vezes, algumas comparações entre os grupos de professores do 2.º e 3.º ciclos de ensino.

Por último, no capítulo oito, relatamos algumas conclusões sobre o estudo realizado nas diversas dimensões tratadas e serão propostas algumas linhas de investigações futuras que possam contribuir para aprofundar questões particulares sobre a temática em causa. Neste capítulo, não podíamos deixar de relatar algumas limitações do estudo protagonizado que, como veremos, não se revelaram significativas.

No que concerne às referências consultadas para este trabalho, destacamos como fonte privilegiada a *b-on*, através da qual foram pesquisadas diversas obras e artigos publicados há menos de cinco anos, nas mais variadas revistas e jornais reconhecidos internacionalmente. Estas leituras permitiram recolher informações sobre as últimas investigações em diversos temas abordados ao longo deste trabalho, cujos autores são educadores e outros investigadores, alguns com notoriedade mundial. Outra fonte privilegiada de consulta foi a *Google books* onde acedemos a capítulos de livros não disponíveis nas principais bibliotecas de Portugal. A revista *Educação e Matemática* permitiu também o acesso a artigos de educadores e professores, na área da Matemática, maioritariamente portugueses. Em suma, neste trabalho de investigação, 11% das referências têm identificação *doi*, 44% são publicações dos últimos 5 anos e 24% têm entre 6 a 10 anos.

## CAPÍTULO 2

### CURRÍCULO DA MATEMÁTICA

A escola é uma estrutura organizada instituída pelo Estado, no caso português, sendo um dos principais agentes para a socialização dos mais jovens e para o desempenho de papéis sociais necessários à sociedade em que está inserida. Assim, como em todas as sociedades democráticas, a escola torna-se um instrumento insubstituível “para a aquisição de conhecimentos e habilidades indispensáveis, tanto para a luta contra as desigualdades económicas e sociais quanto para a participação no processo de transformação social” (Silva, 1989, p. 67).

A Matemática é uma das mais antigas disciplinas escolares. O termo currículo surgiu para discriminar o percurso escolar efetuado pelos indivíduos, ao nível das disciplinas e, posteriormente, foi adotado para outras designações sendo das mais reconhecidas a descrição do percurso profissional de um indivíduo, o conhecido *Curriculum Vitae*. O currículo da Matemática é uma expressão que abarca as duas designações anteriores nas mais variadas aceções. O currículo pode ter várias interpretações e, o currículo da Matemática, diversas mutações pois o seu papel é, cada vez mais, social e, por isso, surge como um agente potenciador do desenvolvimento da sociedade.

No capítulo que se segue, abordaremos alguns temas que consideramos relevantes para perceber a problemática principal deste trabalho de investigação: a inovação curricular. A expressão *inovação curricular* é utilizada aqui como sinónimo de alteração curricular e pode estar incluída, ou não, nas reformas curriculares. Assim, dividimos este capítulo em dois momentos principais. No primeiro momento daremos a conhecer a evolução do termo *currículo*, as suas variadas aceções e a sua ligação ao ensino da Matemática. No segundo momento, centrar-nos-emos na Matemática como disciplina escolar e tentaremos dar a conhecer os agentes potenciadores das alterações curriculares e as várias reformas protagonizadas deste a época da Matemática Moderna até aos dias de hoje.

#### O Currículo

A regulação da escola por parte de entidades governamentais não cobre todas as dimensões. A escola possui alguma autonomia e, portanto, é-lhe permitido adequar os normativos ao respetivo contexto particular e moldar desenvolvimento do currículo. As características específicas do grupo de alunos, nomeadamente, as condições económicas, sociais e culturais, devem servir como ponto de

partida para a adequação dos processos pedagógicos e didáticos, de forma a garantir um ensino diversificado e de qualidade, respondendo assim às exigências de um currículo comum (Silva, 1989).

O currículo comum, aqui como sinónimo de currículo nacional, ou como é conhecido na literatura estrangeira, *core curriculum*, segundo Silva (1989), “resulta do conjunto de dados e conhecimentos seleccionados dos bens culturais disponíveis, transformados em saber escolar (logo, susceptíveis de serem ensinados e aprendidos)” (p. 69) e surgiu com o objetivo de “garantir a socialização do conhecimento como um dos requisitos necessários em direção a uma maior equidade social” (p. 69). Para o mesmo autor, “a necessidade de um currículo comum não implica, porém, um ensino único, homogéneo” (Silva, 1989, p. 69), mas, sim, pensar no currículo, não como um corpo uniforme, mas como um binómio cujos termos são o *core curriculum* e a concretização que a escola faz desse *core curriculum* (Roldão, 1998). Esta concretização pressupõe, segundo Roldão (1998, p. 44), a apropriação do “currículo face a uma situação real, definindo opções e intencionalidades próprias, e reconstruindo modos específicos de organização e gestão curricular, adequados à consecução das aprendizagens que integram o currículo para os alunos concretos daquele contexto”.

Na introdução feita anteriormente, estão implícitos, ainda que não mencionados em várias aceções do termo *currículo*, o desenvolvimento curricular e a gestão flexível do currículo que tem tido um lugar de destaque na divulgação científica, mas cujo desenvolvimento não constitui um campo de interesse para o nosso trabalho.

O termo *currículo*, sob o ponto de vista histórico, sofreu, tal como os próprios sistemas educativos, de uma evolução concetual desde o seu aparecimento no vocabulário pedagógico até aos dias de hoje. Saviani (2003) identifica o surgimento do termo *currículo* com a Reforma Protestante de final do século XVI e, implicitamente, segundo Hamilton (1991, citado por Saviani, 2003), com a ideia de formalização, envolvendo plano, método (com conotação distinta da atual) e controlo.

O currículo nesta época significava, então, “um *movimento progressivo ou carreira*, para indicar uma *entidade educativa que denotava uma totalidade estrutural e uma integridade sequencial*, constituindo-se num *todo unitário*, que devia não apenas ser *seguido* mas também *acabado*” (Saviani, 2003, p. 25). Este ideal era reportado para a organização do próprio sistema educativo tal como podemos perceber pelas palavras de Hamilton (1991, citado por Saviani, 2003):

O Ensino comportava então um plano rígido, compreendendo as áreas de estudo a que se dedicaria cada professor e as normas de conduta do aluno, cuja promoção de um nível a outro do curso dependeria dos progressos nos estudos e do cumprimento das normas estabelecidas, e cuja vida estudantil estaria sob a supervisão do professor. E, o currículo, representando todo esse conjunto, era o nome dado ao certificado de conclusão do curso, com a avaliação dos resultados de cada estudante. (p. 23)

Atualmente, o termo *currículo*, de origem latina, afasta-se desta ideia inicial de registo da vida estudantil que cumpria funções análogas ao termo *curriculum vitae*, e cuja evolução do seu significado leva Saviani (2003) a acreditar na influência do tempo, do contexto e das questões pedagógicas candentes nos variados momentos.

Não insistiremos mais nesta temática da evolução histórica do termo currículo por não se revelar essencial aos desígnios deste trabalho, e, referenciando Franklin (1991) e Forquin (1993), citados por Saviani (2003), apontaremos a década de 60 do século XX como o marco histórico para o currículo, na medida em que, neste período, passou a ser encarado como indissociável de uma identidade própria e com implicações culturais na sociedade onde o mesmo seria aplicado. Desde essa altura, e perdurando até à atualidade, a palavra *currículo* apresenta uma diversidade de definições e conceções que torna difícil um entendimento consensual do mesmo. Não há uma só definição, mas várias definições para este termo, consoante o sentido que o seu autor lhe queira dar, ou seja, “é um conceito que admite uma multiplicidade de interpretações e teorizações quanto ao seu projecto de construção e mudança” (Roldão, 1999, p. 43). Contudo, o currículo é a substância de qualquer sistema educativo. Nesta ótica, destacamos algumas definições de currículo cuja autoria provém de entidades reconhecidas na matéria. Assim:

- Roldão (1999, p. 43) define currículo como um “conjunto de aprendizagens consideradas necessárias num dado contexto e tempo e à organização e sequência adoptadas para o concretizar ou desenvolver”.
- A Associação de Professores de Matemática (2009) define currículo como um

conjunto organizado de objectivos, orientações metodológicas, conteúdos e processos de avaliação. (...) Um currículo, seja ele qual for, assenta e traduz um conjunto de premissas teóricas gerais que definem a sua filosofia. Estas premissas do currículo que aqui chamamos pressupostos, princípios e orientações, vão, de certo modo, determinar, por um lado a sua organização, e por outro o significado, conteúdo, e alcance das suas componentes (objectivos, metodologias, conteúdos e avaliação). (p. 15)

- Gimeno-Sacristán (2007), por sua vez, refere que

o currículo é uma prática e não um objecto estático emanado de um modelo coerente de pensar a educação ou as aprendizagens necessárias das crianças e dos jovens, que tão pouco se esgota na parte explícita do processo de socialização cultural nas escolas. (...) É uma prática que se expressa em comportamentos práticos diversos. (p. 16)

- Zabalza (1997), por seu lado, entende que

o currículo escolar concretiza todo o conjunto de oportunidades de desenvolvimento pessoal e de aquisição de novas aprendizagens que a escola oferece aos sujeitos em idade escolar. Nele se especifica o compromisso do Estado em relação à educação, expresso tanto em termos de intenções – exigências (do que os sujeitos escolarizados têm de aprender) como de recursos postos à sua disposição para o alcançar (professorado, instituições, organização da escolaridade, recursos materiais, etc.). (p. III)

Numa vertente sociológica, Pardal (1993, p. 14) é de opinião que “um currículo escolar não corresponde a uma mera construção técnica de planos de estudo, de estratégias de aprendizagem e de mecanismos de avaliação. Um currículo escolar é uma construção sociopedagógica elaborada por uma estrutura política, assente num conjunto de valores”.

O currículo reveste-se, portanto, de dupla dimensão pois, por um lado, requer uma conceção ajustada àquilo que a sociedade impõe através do currículo nacional, e, por outro lado, requer uma diversidade e adequação, ou melhor, uma contextualização das características individuais de cada escola e de cada comunidade educativa, convertendo-se, assim, num projeto educativo. Talvez por isso, Pardal (1993) aponte como elementos-chave necessários à realização dos objetivos a que a escola se propõe, não só o currículo mas também o professor. Assim, o desenvolvimento curricular ocorre em três dimensões ou níveis de decisão curricular: macro, meso e micro (Bogantes, 1997; Diogo & Vilar, 1999; Lehenbauer, Picawy, Steyer & Wandscheer, 2005; Llavador, 1991; Verdugo, 2006).

No nível macro (nacional), considera-se a organização oficial do sistema escolar que regula o ensino através do currículo nacional. No nível meso (regional), sistémico, intermédio, por vezes apelidado de administrativo e que confere as decisões técnicas de gestão regional ou local do sistema, encontra-se o currículo, seu desenho, a planificação e execução. Por fim, no nível micro (institucional), mas não menos importante, temos os intervenientes na ação pedagógica que decorre na sala de aula, o espaço onde se geram as situações de aprendizagem (Verdugo, 2006) referentes à maioria das disciplinas específicas. Neste último nível, atuam os grupos de interesse da sociedade (professores, alunos, pais, etc.) que potencializam a realização, a implementação e a adequação do currículo prescrito.

Como refere Pardal (1993, p. 15), “um currículo escolar só é verdadeiramente compreensível no interior da sociedade e da cultura para a qual existe”. Assim, torna-se impraticável a ideia de um currículo uniforme e rígido, pelo que a gestão flexível do currículo constitui um instrumento necessário e útil na adequação do programa formativo às características dos seus alunos (Diogo & Vilar, 1999). A procura de mecanismos mais eficazes para que os alunos “adquiram as aprendizagens curriculares

com uma eficácia aceitável, que lhes permita assegurar a sua sobrevivência social e pessoal, e um nível de pertença e desempenho sociocultural que permita à sociedade manter-se equilibrada e superar os riscos de ruptura” (Roldão, 1999, p. 29), induz a crescente afirmação da lógica de projeto curricular contextualizado sobre a lógica da administração nacional do currículo (Roldão, 1999). Entende-se aqui, segundo a mesma autora, como projeto curricular de escola, um conjunto de opções assumidas “quanto às aprendizagens (de todo o tipo) que cada escola queira assumir como suas prioridades (dentro das balizas do currículo nacional), e quanto aos modos que considera mais adequados para o conseguir com sucesso” (Roldão, 1999, p. 29). A adequação do currículo ao projeto curricular, que constitui o processo dinâmico que atrás referimos, exige uma intervenção ativa, discutida explicitamente por parte de todos os seus intervenientes, para que não se resuma a uma mera reprodução de decisões e modelações implícitas (Gimeno-Sacristán, 2007).

Os significados distintos de currículo, segundo Gimeno-Sacristán (2007), são provenientes de diferentes conceções para os processos e fases do desenvolvimento curricular como consequência da ação dos vários intervenientes. Assim, este autor aponta seis fases da objetivação do significado do currículo: currículo prescrito, currículo apresentado aos professores, o currículo moldado pelos professores, o currículo em ação, o currículo realizado e o currículo avaliado. Diogo e Vilar (1999) apresentam, também, níveis de decisão em matéria de organização, gestão e desenvolvimento curricular de acordo com os diferentes significados atribuídos ao currículo: currículo prescrito, currículo apresentado, o currículo traduzido, o currículo trabalhado e o currículo concretizado. Repare-se que os primeiros cinco níveis de Diogo e Vilar (1999) e os de Gimeno-Sacristán (2007) são similares, sendo a única diferença a ausência, por parte dos dois últimos autores, do currículo avaliado referido por Gimeno-Sacristán (2007). Assim sendo, faremos referência às designações das fases distintas de Gimeno-Sacristán (2007), com apoio, no caso português, de Diogo e Vilar (1999):

- **Currículo prescrito:** é constituído por todas as decisões assumidas pela Administração Central do Sistema Educativo (Lei de Bases do Sistema Educativo, decretos-lei, despachos, programas e outros documentos normativos ou orientadores) que constituem o referencial, a matriz ou o ponto de partida para a elaboração de materiais para o desenvolvimento curricular, funcionando assim como o instrumento nuclear da política curricular (Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007). Em síntese, Roldão (1999) refere-se a este como sendo um marco de referência teórica comum a um certo conjunto de situações.
- **Currículo apresentado aos professores:** é constituído pelos meios elaborados por diferentes instâncias (Administração Regional e Local do Sistema Educativo, Editoras, Associações de carácter científico e pedagógico, etc.), com o objetivo de oferecer aos docentes uma interpretação do significado e conteúdo do currículo prescrito, realizando uma

leitura interpretativa deste. O papel mais decisivo é desempenhado, por exemplo, pelos manuais escolares (Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007).

- **Currículo moldado pelos professores/traduzido:** o professor é um agente ativo e muito decisivo na concretização do currículo. Assim, este currículo é constituído pela sua planificação e consequentes programações pedagógico-didáticas que, a nível de Escola, são levadas a efeito à luz do Projeto Educativo de Escola e assumido pela respetiva Comunidade Educativa (Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007). A função do professor, vital neste processo construtivo, está diretamente relacionada com a sua formação inicial e consequente evolução na sua formação contínua (Teixeira, 2004).
- **Currículo em ação/trabalhado:** é a prática real, guiada por esquemas teóricos e empíricos do professor em função das finalidades educativas assumidas, designadamente as decisões decorrentes da planificação curricular e programações pedagógico-didáticas a nível de Escola (Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007).
- **Currículo realizado/concretizado:** é constituído pelas aprendizagens significativas dos alunos (efeitos cognitivos, morais, sociais, etc.) e professores (socialização profissional) em consequência das tarefas escolares levadas a efeito no sentido da consecução das finalidades educativas enunciadas para o nível e ciclo de estudos (Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007).
- **Currículo avaliado:** através deste reforça-se o significado concreto da prática educativa que ocorre desde os primeiros anos de escolaridade pela valoração das atividades desenvolvidas e resultados alcançados (Gimeno-Sacristán, 2007).

Vários autores referem ainda a existência de um currículo oculto (e.g., Apple, 1986; Araújo, 2008; Beyer & Liston, 2001; Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007; Pardal, 1993; Roldão, 1999), que comporta duas diferentes conceções. Uma delas associada ao processo natural de aquisição de aprendizagens espontâneas e não diretamente referidas no currículo prescrito, fruto da própria convivência, expectativas e rotinas escolares tais como normas, valores, sentimentos e condutas para os parâmetros sociais e morais vigentes. A outra conceção associada ao efeito perverso do desenvolvimento do mesmo, marcado pela ocultação, dissimulação ou mistificação (Diogo & Vilar, 1999). O currículo oculto era muito marcante nas primeiras escolas públicas; por exemplo, em Portugal, a existência de um manual escolar único, onde os livros colocados à disposição dos alunos continham mensagens sociais e ideológicas que se pretendia transmitir através dos ensinamentos nas escolas (Beyer & Liston, 2001).

Desenhar o currículo “é uma tarefa complexa e desafiante que compromete uma variedade de atores políticos, económicos, sociais e culturais a nível governamental e não-governamental” (Magendzo, 2008, p. 24). Tyler (1949, citado por Magendzo, 2008) refere como a tarefa central dos desenhadores do currículo, a formulação e a especificação dos objetivos que o currículo deve propor-se alcançar, para, posteriormente, selecionar os conteúdos que permitirão atingir as metas estabelecidas.

O processo de construção do currículo, que induz a adequação do currículo prescrito ao projeto curricular, implica que os professores interpretem, alterem ou procedam à revisão e adaptação daquele consoante as suas próprias perspetivas, conceções curriculares e outras características individuais, que resulte no currículo em ação, proporcionando a todos os alunos a aquisição das aprendizagens básicas e essenciais sob a forma de aprendizagens contextualizadas (Diogo & Vilar, 1999).

A operacionalização do currículo prescrito, segundo Roldão (1998, pp. 44-45) implica o estabelecimento de programas de ação “no sentido da definição e previsão de campos de desenvolvimento, linhas de organização e métodos de aprendizagem” constituindo apenas instrumentos do currículo passíveis de serem reconvertíveis, mutáveis e contextuais, diversos e organizados de várias formas, mas que, através destes, devem estar garantidas as finalidades curriculares que lhe deram origem.

No passado recente, não apenas no nosso sistema educativo, o currículo era inteiramente concebido e construído a nível central, “por equipas de autores (professores convidados para o efeito) e corporizado nos programas das disciplinas. Os professores, face aos programas, teriam, essencialmente, de os passar à prática, de os cumprir com correcção pedagógica” (Roldão, 1998, p. 45). Talvez, por este facto, se constate a confusão instalada em torno dos termos de currículo e programa (Magendzo, 2008; Teixeira, 2004), marcada por uma visão muito limitada e redutora que os identifica como sinónimos e os associa a um conjunto de conteúdos a lecionar sequencialmente, num determinado ano ou ciclo (Ponte, Matos & Abrantes, 1988, citados por Ferreira, 2010). Ferreira (2010, p. ii) atesta esta afirmação dizendo que, “no que diz respeito ao conceito de currículo, os conteúdos programáticos assumem um papel de destaque, sendo, frequentemente, associado à ideia de plano de estudos”. Canavarro (2003), num trabalho de investigação que realizou com duas docentes, constatou que uma delas “media o grau de cumprimento do programa em função da quantidade de conhecimentos matemáticos que ensinou” (p. 560) e concluiu que, para esta docente, *cumprir o programa* significava “ensinar aos alunos de forma consistente, a totalidade dos conhecimentos previstos” (p. 559), mesmo reconhecendo não tratar todos os temas “com o mesmo grau de aprofundamento” (p. 559). A título de exemplo, Canavarro (2003, pp. 559-560) refere a abordagem da Estatística “em pouco tempo, no final do ano, e recorrendo a uma metodologia que pretendia acelerar

a sua abordagem”. Esta pretensão, como suposta forma de atingir as finalidades do currículo, apoiada na gestão flexível do currículo, remete-nos para o *conteudismo*, termo usado por Apolinário (2007) para a preocupação única e máxima do ensino do conteúdo.

Alonso (1998, p. 67) acredita que “o currículo continua a ser entendido como algo dado e preexistente, sendo o professor um seguidor individual de programas, manuais, materiais curriculares ou rotinas já interiorizadas”. A pressão sentida pelos professores em “cumprir o programa”, no sentido de abordar todos os conteúdos programáticos nele contemplados, é manifestada pela preocupação em preparar os alunos para os exames nacionais, quer daquele ano ou de anos posteriores (Alonso, 1998; Canavaro, 2003; Ferreira, 2010; Leal, 1997) ou, tão-somente, por encararem o currículo como demasiado prescritivo, privilegiando a aprendizagem mecânica em detrimento de uma aprendizagem significativa (Neto, 2001).

Os conteúdos a trabalhar, presentes nos programas das diversas disciplinas, devem ser lecionados de forma a proporcionar aprendizagens significativas aos alunos, e de forma a que estes não sejam “meros depositários dos saberes memorizadamente espartilhados” (Figueiredo & Barros, 2000, p. 2). Corroborando e parafraseando Figueiredo e Barros (2000, p. 2), “não defendemos o incumprimento do programa, apenas uma mudança na sua gestão e estratégias que os procuram corporizar”, com vista a promover no aluno a construção do próprio conhecimento por meio de aprendizagens significativas.

No presente trabalho, não nos focaremos mais nas questões em torno do currículo nas suas várias aceções, mas interessar-nos-á, agora, conhecer e destacar os principais impulsionadores que marcaram as grandes reformas curriculares na Matemática enquanto disciplina escolar.

### **A Matemática como Disciplina Escolar**

O aparecimento das disciplinas escolares remonta aos séculos XVI/XVII quando uma série de *verdades* começaram a ser postas em causa pelo facto de as investigações levadas a cabo por cientistas de renome, tais como Copérnico (1473-1543) e Galileu (1564-1642), originarem uma nova maneira de o homem conceber o conhecimento adotando um modelo de racionalidade científica (Fonseca, 2002). Desta forma, catapultou-se a distância entre a Filosofia (ciência social) e a Ciência (ciências exatas) e a crença nesta última, provocando a primeira grande cisão de áreas do conhecimento e o início de todo um processo de divisão, cada vez maior, do conhecimento em inúmeras disciplinas científicas, ratificando e consolidando ainda mais a visão disciplinar que prevalece

até aos nossos dias (Fonseca, 2002, citado por Bochniak, 1992). Zabala (1998, pp. 142-143) corrobora esta ideia ao justificar que, ao longo dos anos, a ciência foi fragmentando o saber como forma de compreender a realidade o que originou uma multiplicidade de disciplinas especializadas num determinado objeto de estudo, por exemplo, o espaço para a geografia, os animais para a zoologia, as rochas para a geologia, entre outras, e, dentro destas, campos de estudo próprio tais como a geometria ou a estatística, no âmbito da matemática. Desta forma, os saberes, entendidos como a organização da experiência humana, ordenam-se historicamente em disciplinas e estas constituem campos simbólicos específicos e diferenciados que intentam explicar ou compreender, por sua vez, âmbitos da realidade específicos e diferenciados, através de um discurso e de uma prática de investigação teoricamente legitimada. Desde essa racionalidade, é necessário compreender que as disciplinas constituem verdadeiros itinerários de pensamento, possuem uma história própria de evolução e desenvolvimento e uma própria legitimidade interna, um modo racional autónomo de se constituir, legitimado em si próprio por constituir-se na sua difusão e no seu uso social. Elas têm, como propósito primordial, satisfazer as necessidades sociais de acesso e apropriação dos bens da cultura e, por isso, são e, devem ser, comunicáveis e ensináveis (Haltenhoff, 2004).

A multiplicidade de disciplinas e subdisciplinas, ou seja, o aparecimento de novos saberes escolares bem como, indubitavelmente, o desaparecimento de outros, outrora considerados inquestionáveis na educação escolar, tais como, o Latim ou o Grego, é fruto do enorme desenvolvimento cultural dos últimos dois séculos (Boavida & Amado, 2008).

A história do currículo e a história das disciplinas escolares, apesar de estarem relacionadas, não se devem confundir. A “história das matérias escolares ou a evolução das disciplinas escolares”, nomeadamente o aparecimento de novas áreas de estudo dentro do currículo, são campos de investigação presentes na história do currículo (Saviani, 2003, p. 22).

O enfoque deste trabalho não se prende com a necessidade de abordar de uma forma profunda a história das disciplinas escolares na sua globalidade, mas, apenas no que respeita à área da Matemática. Assim, centrar-nos-emos nas principais correntes mundiais que influenciaram as reformas curriculares em Portugal e nas consequentes alterações na Matemática como disciplina escolar, com relevo nos assuntos referentes aos conteúdos programáticos que serão o alvo de interesse do nosso trabalho.

A Matemática é considerada há muito tempo uma importante área do saber, como se refere no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007:

A Matemática é uma das ciências mais antigas e é igualmente das mais antigas disciplinas escolares, tendo sempre ocupado, ao longo dos tempos, um lugar de relevo no currículo. A Matemática não é uma

ciência sobre o mundo, natural ou social, no sentido em que o são algumas das outras ciências, mas sim uma ciência que lida com objectos e relações abstractas. (Ponte et al., 2007, p. 4).

A importância do ensino da Matemática e da sua aplicabilidade no conhecimento, para o desenvolvimento da sociedade nos seus vários domínios, é igualmente referida neste programa. Para tal, é exigida uma formação sólida neste ramo do saber, que inclui o fomento de uma relação positiva do aluno com a Matemática, de forma a permitir-lhe o reconhecimento das suas potencialidades quer pessoais quer sociais (Ponte et al., 2007).

A evolução da Matemática enquanto disciplina escolar acompanhou alguns movimentos de reforma do próprio currículo e sofreu influências específicas dos investigadores desta área científica. A reforma surge como a necessidade de atingir um determinado fim que o currículo em vigor não o permitiria (Amit & Fried, 2008). Tentaremos dar a conhecer os principais impulsionadores das reformas curriculares e, em particular, das reformas na educação matemática, não apenas em Portugal mas na esfera global, bem como realçar os momentos mais marcantes desta evolução, desde meados dos anos 50 do século passado até à atualidade.

A imensa bibliografia visitada sobre este tema permitiu-nos evidenciar, então, que os principais fatores que impulsionam as reformas do ensino da Matemática em todo o mundo, dos quais falaremos amiúde, são: as necessidades da própria sociedade, os exames nacionais e internacionais, a investigação científica, os avanços tecnológicos e a investigação na Educação Matemática. Estes fatores estão intimamente relacionados, podendo mesmo haver uns que influenciam os outros, como é o caso da transformação da sociedade contemporânea originada pela evolução das tecnologias de informação, internacionalização dos sistemas educativos e dos avanços nos conhecimentos científicos e tecnológicos (Cox, 2001, citado por Magendzo, 2008). Magendzo (2008) especifica, acrescentando, que a informação difundida pelos meios de comunicação social, as migrações massivas das populações, as profundas alterações no campo do conhecimento que as áreas científico-tecnológicas, quer das ciências sociais quer das artes, e o avanço para sociedades mais democráticas potencializam as reformas no sistema educativo, em geral, no currículo, em particular, do qual faz parte a Matemática.

Assumindo a correlação existente entre os fatores referidos inicialmente, tentaremos abordar cada um deles de forma individual, no sentido de especificar a forma como influenciam, simultaneamente, as reformas curriculares e as reformas da matemática enquanto disciplina escolar.

### **Necessidades da própria sociedade**

Ao longo dos tempos e ao sabor de diversos imperativos sociais, económicos e políticos, o currículo vai sofrendo alterações em paralelo com as reformas do próprio sistema educativo e consoante o *tempo curricular* (Pacheco, Ferreira & Machado, 2010,) em que se encontram.

O desenvolvimento da sociedade constitui um dos fatores mais marcantes nas reformas curriculares e indubitavelmente na matemática escolar. O currículo, como construção social (Roldão, 1998), influencia as definições e características da educação que se pretende proporcionar aos indivíduos que integram essa sociedade (D'Ambrósio, 1998, citado por Casqueiro, 2007).

Nos últimos anos, no processo de globalização do qual é parte integrante a sociedade do conhecimento e a democratização dos regimes políticos, é visível um crescimento em ritmo acelerado, profundo e de amplitude significativa (Magendzo, 2008). Este processo, constituindo um fenómeno multifacetado, de dimensões variadas e interrelacionadas de modo complexo, repercute-se no currículo com o intuito de promover alterações na própria sociedade vigente, com destaque para o reforço dos padrões individualistas, a promoção das políticas democráticas e de racionalidade económica (Magendzo, 2008). Llavador (1991), relativamente a este assunto, aponta a escola como portadora de uma missão com múltiplas intencionalidades, nomeadamente, a de garantir a transmissão de conhecimentos acumulados pela humanidade, a sua herança cultural, a de dotar os indivíduos dos instrumentos que lhes permitam um desenvolvimento pleno bem como uma integração adequada nos grupos sociais de referência. Em suma, a educação na escola está ao serviço da sociedade através da formação das novas gerações. Por este facto, as mutações temporais da própria sociedade não permitem que o currículo seja um documento atemporal, estéril e acabado. O princípio pluricausal dos acontecimentos sociais implica alterações curriculares marcadas pelo seu momento histórico e contorno social (Llavador, 1991).

Num contexto mais alargado e além-fronteiras, Magendzo (2008, p. 26) fala em isomorfismo curricular, ou seja, “o resultado da influência homogeneizante que impera atualmente sobre o currículo a nível mundial e que atua como factor predominante sobre qualquer outro agente sociopolítico e económico de ordem regional ou local”. A rápida difusão dos testes comparativos internacionais, de que falaremos mais adiante, mostra claramente a influência das políticas além-fronteiras nas reformas do nosso currículo nacional. Magendzo (2008) refere mesmo a existência de similitudes nos currículos, em vários países, ao nível dos conteúdos, do seu ensino e avaliação de qualidade. A Matemática é um exemplo do que acabamos de referir, assumindo um carácter de universalidade em comparação com as restantes disciplinas escolares pois, como constata D'Ambrósio (1992, p. 10), é a “única disciplina escolar que é ensinada aproximadamente da mesma maneira, com o mesmo conteúdo” em todo o

mundo, pela preocupação que os países têm em dotar as crianças de conhecimentos matemáticos similares.

Portanto, as mudanças provenientes do processo de globalização têm a capacidade de exercerem influência no desenho e elaboração do currículo escolar, na seleção e organização do conhecimento curricular, nomeadamente na seleção dos conteúdos curriculares, na sua implementação, atualização e avaliação (Magendzo, 2008).

Um dos acontecimentos que chamou a atenção para a necessidade dos saberes matemáticos como forma de proporcionar o desenvolvimento económico e tecnológico do país, ocorreu com o lançamento do satélite russo, Sputnik, em 1957 (Amit & Fried, 2008), que tornou evidente o avanço tecnológico da União Soviética relativamente aos Estados Unidos da América. Como consequência, o *School Mathematics Study Group* (SMSG), fundado em 1958 e que era um grupo caracterizado pela estreita ligação entre os investigadores matemáticos do ensino universitário e os professores de matemática das escolas não superiores refere, segundo Wooton (1965, citado por Amit & Fried, 2008), a necessidade cada vez maior de os alunos possuírem conhecimentos matemáticos como pré-requisito para serem cidadãos inteligentes, capazes de responderem positivamente a uma futura profissão e a novas exigências relacionadas com a matemática. Em 1989, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), citado pelos mesmos autores, referia também a necessidade do conhecimento matemático como aprendizagem para a vida, ou seja, para o desempenho de profissões cada vez menos mecânicas e mais recorrentes às tecnologias e funções complexas, como forma de igualar oportunidades e de promover a participação ativa na sociedade e do eleitorado letrado. Estas perspetivas permitem repensar os programas de matemáticas no sentido de eliminar conteúdos matemáticos que se revelem desnecessários para o mundo do trabalho e de incluir outros que se entendam ser úteis e relevantes para o cidadão (Amit & Fried, 2008). Por exemplo, o aparecimento do Euro tornou obrigatório a adaptação dos currículos a esta nova circunstância. Como refere Flamarich (2000, p. 61), “não se trata unicamente de alterar pesetas por euros, a nova moeda implica o uso de decimais e, por isso, deverá estudar-se o modo de os sequenciar e como e quando introduzi-los”.

Em poucas palavras, “o mundo está em rápida mudança e a educação matemática tem de se alterar em função dessa mudança” (Amit & Fried, 2008, p. 409) pois só assim poderá responder às demandas nacionais e internacionais (Feiteira & Pires, 2008). Estes autores adiantam dizendo que estes fatores modificam a forma como se encara o que é importante na disciplina, as suas principais características e natureza que influenciam, de forma intrínseca, a prioridade dos temas a integrar no currículo e o modo de os trabalhar. Estes fatores são impulsionadores dos movimentos de reforma e desenvolvimento curricular, deixando clara a importância do ensino da Matemática para o desenvolvimento da sociedade nas suas diversas vertentes.

### **Exames nacionais e internacionais**

As políticas educativas são, cada vez mais, influenciadas pela visão global de que a educação deve ser um veículo para o desenvolvimento da competitividade económica, crescimento, produtividade e progresso, sendo este último, o significado central das sociedades de hoje e a principal fonte de poder (Moutsios, 2010). Para tal, segundo as organizações internacionais, as políticas educativas deviam apoiar estas diretrizes dando “forte ênfase ao conhecimento, inovação e otimização do capital humano” (Moutsios, 2010, p. 121). O processo de Bolonha e os estudos comparativos internacionais são dois exemplos que marcam a influência da Europa e do mundo nos sistemas educativos, constituindo uma “força’ que opera a partir do nível global para os restantes níveis, sendo visivelmente mais forte do que quando a influência se dá dos níveis local/nacional para o global” (Costa, 2011, p. 274).

As frequentes comparações entre as características humanas dos diferentes grupos linguísticos e as culturas através dos testes internacionais marcam a influência das políticas transnacionais nas políticas nacionais pela avaliação do próprio sistema educativo e pela adoção de medidas com vista à melhoria da prestação dos nossos alunos. A consciencialização da alteração de políticas educativas em função desses exames comparativos torna estes instrumentos impulsionadores das reformas no sistema nacional. Vejamos, então, de que forma essa influência é desenhada.

Os resultados dos estudos comparativos internacionais fornecem evidências científicas sobre o que sabem os alunos dos países comparados, assim como sobre o grau de qualidade dos currículos, a forma como os professores ensinam, a autonomia das escolas, entre outros dados (Dobbins & Martens, 2012; Kilpatrick & Keitel, 1999; Oates, 2011; Yildirim & Berberoglu, 2009). Estes estudos são desenvolvidos por agências internacionais reconhecidas mundialmente e surgem como forma de legitimação das políticas educativas, de regulação dos atores sociais, de avaliação e monitorização a qualidade dos sistemas educativo dos vários países (Costa, 2011).

O objetivo da divulgação dos resultados destes estudos comparativos internacionais seria a de conhecer e perceber os sistemas educativos de outros países, nomeadamente os que apresentam altos desempenhos, e identificar possíveis políticas educativas para promovê-las nos sistemas educativos dos próprios países (Amit & Fried, 2008; Oates, 2011; Tshering & Prain, 2011). Segundo Oates (2011), a intenção seria a que os países, participantes ou não nestes estudos, aprendessem uns com os outros e se questionassem, constantemente, sobre aquilo que é necessário para ajudarem todas as crianças a fazerem melhor. Contudo, a apresentação destes resultados assume, incontornavelmente, a forma de um ranking entre os vários países, “tornando-se o centro das atenções

da comunicação social e, mais importante ainda, o centro das atenções da comunidade política” (Amit & Fried, 2008, p. 387), ou seja, aqueles passam a ser, também, um instrumento político.

Os países melhor posicionados nesse *ranking* são considerados como os que apresentam as *melhores práticas* e os países nas posições mais baixas são os que apresentam maiores fragilidades, originando uma pressão sobre os países participantes no sentido de melhorarem os seus sistemas educativos ou adaptá-los aos *sistemas vencedores* (Dobbins & Martens, 2012), dado que nenhum país quer sair derrotado em comparação com os demais. As *políticas de empréstimo*, como habitualmente são apelidadas, constituem um fenómeno de apropriação de conceitos e medidas políticas de outros países, com objetivos de legitimação de resoluções internas, a partir do exemplo estrangeiro, com vista a melhorar a prestação individual de cada país (Amit & Fried, 2008; Ball, 1998; Costa, 2011; Dobbins & Martens, 2012; Lingard, 2010; Oates, 2011; Peter, Edgerton & Roberts, 2010; Rappleye, Imoto & Horiguchi, 2011; Schweisfurth, 2011; Sung, 2011).

Em Portugal, Maria de Lurdes Rodrigues e Nuno Crato, dois ministros da educação dos últimos anos, mostraram-se, claramente, a favor da existência destes estudos comparativos. A primeira referiu a importância dos mesmos afirmando haver “um contexto internacional com o qual Portugal se identifica e no qual se projecta, e que obriga naturalmente à adopção dos referenciais internacionais por parte da administração e das escolas” (Rodrigues, 2007, p. 177). Em 2008, numa entrevista ao Jornal de Notícias, Nuno Crato considerava que o PISA era o “único instrumento viável para avaliação do nosso sistema”.

Peter et al. (2010) e Rappleye et al. (2011) reportam ao final da segunda guerra mundial o aparecimento destes estudos comparativos internacionais pelo facto de os países terem interesse em minorar as desigualdades praticadas no sistema educativo que, por sua vez, originam desigualdades sociais potencializadores de movimentos reivindicativos fora do enquadramento social legal.

As desigualdades sociais estão diretamente relacionadas com as disparidades ao nível dos recursos económicos, sociais e culturais das famílias que, conseqüentemente, ocasionam disparidades nos percursos académicos das crianças (Peter et al., 2010) e conseqüente atitude face à sociedade. A Organização das Nações Unidas (ONU) e a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura propuseram, por exemplo, estratégias educacionais com vista a combater o atraso dos povos, tidos como mais suscetíveis ao comunismo. Para Barreiro (2010, p. 76), “estes dois organismos entendiam que, se a guerra se inicia na mente dos homens, deve, igualmente, ser combatida nesse território”. Barreiro (2010) refere também que, através da educação, se pretendia ampliar e mudar a mentalidade dos povos, reduzir a “ignorância mútua dos povos” (pp. 76-77) e o seu desequilíbrio social e político que são fatores desencadeadores de guerras. Montessori (2004), já em 1949, reforçava a necessidade de se valorizar a criança e o seu espírito humano atribuindo-lhe uma

conotação de esperança, uma promessa, como se se tratasse de um tesouro precioso, e, ao mesmo tempo, um embrião espiritual cujo desenvolvimento se teria de cuidar para possibilitar o crescimento da humanidade. Montessori (2004, p. 58) diz ainda que a “sociedade tem de reconhecer a importância da criança como construtora da humanidade”, ou seja, a educação da criança torna-se uma questão pública por ser pertinente no âmbito dos direitos humanos (Haddad, s.d., citado por Andrade, 2010). A Declaração Universal dos Direitos Humanos foi também criada neste período pós-guerra, com o objetivo de promover “um conjunto de direitos e responsabilidades necessárias à participação plena dos indivíduos na sociedade” (Andrade, 2010, p. 81) dos quais a criança não é alheia. Portanto, a educação é vista como um investimento, realçando a relação entre progresso educacional e avanço social (Reis, 1968), ou ainda, como “preventiva e prospetiva em vez de retrospectiva e compensatória como, por exemplo, as políticas de segurança social” (Allmendinger & Leibfried, 2003, citados por Peter et al., 2010, p. 243), constituindo assim um fator determinante da mobilidade social e da reprodução intergeracional de estatuto social (Hout & DiPrete, 2006, citado por Peter et al., 2010). Estas afirmações têm, obviamente outras intenções para além da função social de lidar com as diferenças, com classes sociais distintas, com a compreensão para além do superficial e, conseqüentemente, com o aprender a ser tolerante (Krishnamurti, 2009) têm, também, intencionalidades do foro económico e político e do próprio desenvolvimento pessoal e profissional futuro do próprio indivíduo (Reis, 1968).

A criação dos primeiros testes comparativos internacionais foi da responsabilidade da Associação Internacional para a Avaliação das Competências Educacionais (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA)) que aplicou, em 1964, o *First International Mathematics Study* (FIMS) a doze países. Muitos outros testes comparativos internacionais se seguiram, sendo destes o *Third International Mathematics Study* (TIMMS), até à data, “o maior e mais caro dos estudos comparativos alguma vez realizados em educação Matemática” (Kilpatrick & Keitel, 1999, p. 73) pelo facto de não se ter limitado à aplicação de testes para avaliar o desempenho dos alunos como os testes comparativos anteriores. O TIMMS protagonizou “a realização da ambiciosa tarefa de analisar as linhas orientadoras dos currículos, programas e manuais, desenvolvendo um poderoso instrumento de comparação para a análise” (Schmidt et al., 1997, citados por Kilpatrick & Keitel, 1999, p. 75). O TIMMS foi aplicado em 1995, 1999, 2003 e 2007.

No ano 2000, outra agência internacional com forte influência na comunidade internacional, a Organização para o Desenvolvimento e Cooperação Económico (OCDE), cujo principal objetivo é a promoção das competências ao nível dos recursos humanos, lançou o *Program for International Mathematics and Science Assessment* (PISA), o teste com maior destaque internacional. O PISA foi aplicado em vários países e com uma amostra de escolas considerada significativa em todos os

países participantes (Wößmann, 2010; Yildirim & Berberoglu, 2009). Em Portugal e segundo o Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) (sítio consultado em 1 de março de 2012), o PISA 2012 abrangeu 4608 alunos com idades compreendidas entre os 15 anos e 3 meses e os 16 anos e 2 meses, todos frequentando, no mínimo, o 7.º ano de escolaridade.

A contínua e crescente influência do Pisa é visível através da sua própria expansão, “quer do ponto de vista geográfico [sendo constatável através do número crescente de países aderentes], quer do ponto de vista funcional, quando se observa a amplificação do inquérito” (Costa, 2011, p. 275), e reforça a ideia da influência que o PISA tem nas políticas educativas dos países, num “enquadramento conceptual aceite internacionalmente” (GAVE, sítio consultado em 1 de março de 2012).

Os domínios académicos avaliados pelo PISA “foram definidos por uma equipa de investigadores internacionais que concordaram que os itens do teste deviam refletir o conhecimento funcional e competências necessárias para uma participação ativa na sociedade” (Peter et al., 2010, p. 250), ou seja, avaliar a prestação dos alunos na resolução de situações da vida real, tais como a reprodução de competências básicas medidas através de procedimentos rotineiros e aplicação de técnicas, a conexão e a reflexão (Yildirim & Berberoglu, 2009).

Tal como o TIMMS, o PISA destacou-se dos restantes estudos por não se limitar a recolher dados para avaliar a *performance* dos alunos nas diferentes áreas sob a forma de testes (Wößmann, 2010), mas, também, por recolher dados extensos, através de questionários, para estudar a influência de algumas variáveis nesses resultados, tais como a estrutura familiar (nível de escolaridade dos pais, o estatuto na ocupação parental, entre outros dados), características do professor e metodologia de trabalho em contexto de sala de aula e a autonomia da escola (Peter et al., 2010; Tshering & Prain, 2011; Wößmann, 2010). Isto é, a informação recolhida não serve apenas para a supervisão das aprendizagens, mas, também, para descobrir os fatores que concorrem para o sucesso educativo (Costa, 2011), tais como o background familiar (nível socioeconómico e cultural), o estatuto de imigrante e o número de livros que possuem (Dobbins & Martens, 2012; Wößmann, 2010). Verde e Wiborg (2005, citados por Doyle, 2008, p. 206) elogiam estes estudos comparativos, pela possibilidade de avaliarem “os efeitos de várias medidas de política sobre as últimas décadas em relação à redução da desigualdade educacional”.

No que concerne às críticas positivas, para além das referidas anteriormente, na área específica da Matemática, Amit e Fried (2008, p. 387) referem-se a estes testes comparativos como “um fenómeno fascinante para a educação matemática”, na medida em que, tal como acontece nas restantes áreas, fomentam e motivam as reformas nas matemáticas. Seguramente que estes testes colocaram e colocam a “educação matemática diretamente na agenda pública e têm despertado debate público, político e académico: pressupostos básicos sobre o ensino e aprendizagem da

matemática, sobre as prioridades e os objetivos centrais da educação matemática e os meios de alcançar estes objetivos” (Amit & Fried, 2008, p. 387), ou seja, são uma mais-valia na medida em que funcionam como impulsionadores das reformas na educação matemática.

As variadas “reações e medidas reformistas nos sistemas educativos em todo o mundo (...) aplicam-se tanto a países com resultados acima da média, tais como, a Nova Zelândia e Finlândia, mas, também, naqueles com resultados pouco satisfatórios tais como a Alemanha ou a Suíça” (Dobbins & Martens, 2012, p. 24). No caso particular da Matemática, apesar de “não haver um relatório que descreva realmente em que medida os alunos de um dado sistema estão a aprender o currículo de Matemática que o seu sistema lhes oferece” (Kilpatrick & Keitel, 1999, p. 72), percebemos que a aplicação destes testes e a divulgação de resultados provocam reformas nos currículos nacionais em diferentes parâmetros. Por exemplo, Amit e Fried (2008, p. 387) referem que a alteração dos temas a abordar nos currículos da Matemática, na forma e conteúdo tal como são apresentados no TIMMS e no PISA, deve-se à “assunção de que o que consta dos testes internacionais são importantes para serem ensinados”. Os mesmos autores apresentam, como exemplo, o caso de Israel que “criou programas especiais e recursos didáticos baseados nos problemas presentes nestes testes, de forma a preparar os alunos para os próximos testes internacionais” (Amit & Fried, 2008, p. 387). Outro exemplo é referido por Oates (2011) em relação a Inglaterra que, com os testes internacionais, identificou um dos problemas no currículo nacional na área da matemática ao perceber que, por exemplo no estudo da álgebra, não havia sincronia com os restantes países líderes no *ranking*. “Nos EUA, por exemplo, os professores foram pressionados a voltar a um currículo baseado nos ‘conhecimentos básicos’ em Matemática, para imitarem os sistemas, presumivelmente mais eficazes, dos países asiáticos” (Kilpatrick & Keitel, 1999, p. 75).

Em Portugal, como refere Costa (2011), foram tomadas algumas diligências por parte do governo português como consequência dos resultados no PISA e com vista a melhorar a prestação dos nossos alunos, dos quais destaca a Reforma Curricular do Ensino Básico de 2001. Entre outras alterações relacionadas com o currículo escolar, destacamos ainda: a introdução das Provas de Aferição Nacionais como forma de avaliação do próprio Currículo Nacional; o surgimento dos testes intermédios; a criação do Plano de Ação da Matemática, com início no ano letivo de 2005-2006; a elaboração de planos de escola para o combate do insucesso na Matemática; a formação contínua para os docentes; a publicação de brochuras de apoio científico e pedagógico para docentes dos vários ciclos do ensino básico; o Novo Regime de Avaliação do Desempenho Docente de 2007 e, mais recentemente, a prova de avaliação de conhecimentos e capacidades para os docentes sem vínculo à função pública e com menos de 5 anos de tempo de serviço docente.

Oates (2011, p. 134) refere que os testes internacionais podem “chamar a atenção dos países para questões aparentemente simples, tais como a idade apropriada para o ensino de alguns conteúdos como, por exemplo, frações, álgebra ou termos científicos específicos”. Chung, Atkin e Moore (2011) atribuem, também, aos testes internacionais, o aparecimento do *Masters in Teaching and Learning* (MTL), em Inglaterra, em 2010. Chung et al. (2011, p. 2) refere que a *Training and Development Agency for Schools* considerava que o MTL visava “aumentar o status da profissão docente e caminhar a par dos sistemas de educação com o melhor desempenho do mundo”. Também em Portugal, aquando da publicação dos resultados do PISA, na comunicação social (Público de 5/12/2004, Jornal de Notícias, 30/1/2005 e Expresso, 18/3/2006, citados por Costa, 2011), a questão da formação dos nossos professores foi fator de destaque pela negativa, motivando uma reação defensiva da classe docente atestando a sua qualidade profissional.

Até ao momento, colocámos em destaque uma vertente supostamente positiva dos testes comparativos, mas, tal como refere Goldstein (2004, citado por Peter et al., 2010, p. 258), referindo-se ao PISA em particular, os resultados dos testes comparativos internacionais apresentam algumas preocupações, nomeadamente, a tentativa de equivalência cultural através dos itens do teste e a utilização de modelos estatísticos que tendam para a unidimensionalidade e subestimação da complexidade das diferenças entre países. No que respeita a esta situação, Oates (2011, p. 125) sugere uma avaliação cuidadosa com o objetivo de conduzir a “uma revisão baseada em evidências do currículo nacional – e que essa revisão deve efetuar a mudança apenas quando justificada”, ou seja, não deverá haver uma substituição das políticas existentes por políticas de empréstimo dos países com melhores desempenho nestes testes comparativos somente por terem tido as melhores prestações, dado que “estas opções têm um sucesso limitado” (Amit & Fried, 2008, p. 387). Vários autores consideram estas transferências inapropriadas, uma vez que os contextos culturais, económicos e ideológicos não são tidos em consideração (Amit & Fried, 2008; Ball, 1998; Bulle, 2011; Chung et al., 2011; Doyle, 2008; Kilpatrick & Keitel, 1999; Lingard, 2010; Oates, 2011; Sung, 2011).

Os dois países mais mencionados pela comunicação social foram Singapura e Finlândia, que apresentavam boas prestações nestes testes comparativos internacionais, o que impulsionou o interesse dos restantes países pelos recursos didáticos que utilizavam, pelos manuais escolares, pela metodologia de ensino, bem como pelos sistemas de avaliação, que consideravam ser a fonte do sucesso dos seus alunos (Amit & Fried, 2008).

No que concerne ao caso de sucesso da Finlândia, Chung et al. (2011) realçam, mais uma vez, os aspetos culturais dos países, atribuindo a prestação dos seus alunos a “fatores históricos, sociais e culturais do país no seu desenvolvimento educacional” (p. 2), tais como:

- A população de pequena dimensão, como sucede com outros países bem posicionados no *ranking*, constituindo uma característica importante na promoção de estratégias de mudança (Bulle, 2011; Lingard, 2010; Oates, 2011).
- O papel desempenhado pela própria sociedade que, por possuir “uma longa história de níveis altos de alfabetização e envolvimento na leitura” (Oates, 2011, pp. 134-135), possibilita, também, um alto nível de envolvimento dos pais na aprendizagem dos alunos pelo apoio e incentivo que lhes proporcionam.
- A sólida formação profissional dos professores finlandeses que, segundo Chung (2009) e Lingard (2010), citados por Chung et al. (2011), e Costa (2011), contribuiu para o formidável sucesso no PISA, dado que todos os professores tinham o grau de mestre e uma parte significativa o grau de doutor (Lingard, 2010).
- Lingard (2010, p. 140) reforça ainda o papel dos professores no sucesso finlandês referindo a respeitabilidade que esta carreira tem neste país, constituindo uma opção profissional futura para os estudantes.
- Em consonância com aquele aspeto, outro fator de destaque é o elevado nível de autonomia das escolas, bem como o facto da população estudantil ser etnicamente homogénea (Lingard, 2010; Oates, 2011). Oates (2011) refere mesmo que as famílias finlandesas adotam a posição radical de retirar as crianças da escola quando estas apresentam diversidade cultural.

Em resumo, a Finlândia possui características sociais e culturais específicas que a distingue dos outros países e, conseqüentemente, fomentam uma pré-disposição dos alunos para a obtenção de bons resultados escolares (Bulle, 2011; Chung et al., 2011; Lingard, 2010; Oates, 2008).

Uma outra questão cultural que influencia certamente o desempenho dos alunos nos testes internacionais, surge de alguns países do Oriente (Japão, Coreia e Singapura), onde os alunos “têm muito tempo extra para estudarem Matemática, em explicações privadas ou em escolas especiais, fora das escolas oficiais” (Kilpatrick & Keitel, 1999, p. 78). No Japão, “nos primeiros seis anos de escolaridade, 77% dos alunos, em média, têm explicações ou aulas privadas” (Kilpatrick & Keitel, 1999, p. 79).

Apontamos agora um caso de insucesso, a França, que, inicialmente dedicou pouca atenção aos testes internacionais comparativos, sendo, talvez, encarado como o país mais cético na metodologia do PISA (Dobbins & Martens, 2012). Num desses testes, este país surgia com os níveis de literacia tão baixos e chocantes tais como “ $\frac{3}{4}$  da população francesa não conseguir desempenhar tarefas simples do dia-a-dia tais como ler um jornal, escrever uma carta ou compreender um pequeno texto” (Guérin-Pace & Blum, 2000, citados por Dobbins & Martens, 2012, p. 28). Este facto levou a que

o próprio ministro da educação francês se insurgisse contra os resultados “colocando em causa não só a objetividade e a credibilidade da OCDE, mas, também, a metodologia aplicada no teste internacional” (Guérin-Pace & Blum, 2000, citados por Dobbins & Martens, 2012, p. 28). Os representantes do governo francês defenderam-se, também, fazendo referência à sua organização escolar, justificando a desvantagem dos alunos franceses nestes testes internacionais pelo facto de uma grande percentagem de alunos com 15 anos, possivelmente não estarem no mesmo nível académico em relação a outros países. Mesmo assim, França adotou algumas medidas para otimizar o seu sistema educativo (Dobbins & Martens, 2012). Contudo, segundo Dobbins & Martens (2012, p. 29), os resultados estimularam o debate público sobre as deficiências do sistema francês, que passou a apresentar exemplos de boas práticas estrangeiras e, talvez por isso, se aceite que “o PISA tenha influenciado as políticas educativas em França mais do que outro teste internacional anterior”. No entanto, Bulle (2011, p. 513) revela estranheza naqueles resultados pois “há um quarto de século (...), o sistema educativo francês era considerado um dos melhores do mundo” e, nos inícios dos anos 80, num teste aplicado pela IEA com 20 países participantes, a França obteve resultados excelentes.

Além de todos os constrangimentos acerca da individualidade cultural dos países, as questões técnicas na aplicação destes testes internacionais também foram alvo de críticas, quer ao nível da composição do teste, quer das pessoas envolvidas na aplicação do mesmo. Em relação aos itens que constituem o teste, é apontada a existência de *diferenciais de funcionamento do item* (DIF) quando comparadas versões em diferentes línguas que, apesar de os testes seguirem processos de tradução profundamente rigorosos durante a fase de adaptação (Yildirim & Berberoglu, 2009), o número de itens em que se verificava o DIF não era de todo irrelevante (Arim & Ercikan, 2005, e Gierl et al., 1999, citados por Yildirim & Berberoglu, 2009), podendo mesmo “comprometer a validade e a imparcialidade dos resultados” (Yildirim & Berberoglu, 2009, p. 109). Um caso exemplificativo desta situação ocorreu no Canadá onde Gierl, Rogers e Klinger (1999, citados por Yildirim e Berberoglu, 2009, p. 109), relataram a existência de 52% de itens com DIF comparando o teste em Inglês e em francês. Yildirim e Berberoglu (2009) apontam ainda a fragilidade de avaliar as habilidades cognitivas através dos itens dos testes, apresentando, como exemplo, a existência de alguns itens no PISA que não eram familiares aos estudantes turcos pelo facto de o sistema educativo da Turquia privilegiar outros processos de aprendizagem.

Ao nível das pessoas envolvidas na realização dos testes, Kilpatrick e Keitel (1999, p. 74) apontam a existência de alguma parcialidade, pelo facto de as posições de liderança do TIMMS serem ocupadas por pessoas “oriundas dos países ricos que financiaram o estudo com todas as consequências que essa influência acarreta”. A amostragem dos alunos também constitui uma questão duvidosa para Kilpatrick e Keitel (1999, p. 78), que mencionam a ausência de garantias de

uma amostragem correta para validar a experiência realizada e, ainda, “que as médias não tenham sofrido um abaixamento devido às condições em que o teste foi aplicado em alguns países em vias de desenvolvimento”. Para estes autores, as diferentes condições climáticas, físicas ou materiais em que os testes são aplicados podem influenciar diretamente os seus resultados.

Apesar da existência dos problemas técnicos que foram descritos anteriormente, vários autores apontam para as culturas específicas de cada país como sendo o maior entrave para uma comparação justa (Amit & Fried, 2008; Chung et al., 2009; Kilpatrick & Keitel, 1999; Oates, 2011; Peter et al., 2010).

Em suma, a aplicação destes testes comparativos internacionais e as consequências que advêm da publicação dos resultados, evidenciam aspetos positivos e negativos como descrevemos anteriormente. Em consequência disso, Duru-Bellat e Suchaut (2005, citados por Doyle, 2008, p. 206), referem que os testes comparativos internacionais “podem ser considerados com uma ferramenta heurística para comparações internacionais com a cautela necessária em qualquer pesquisa empírica”. Os valores e as possíveis ilações retiradas dos testes podem ser, por vezes, fruto de situações que os testes internacionais não conseguem contemplar e que não podem ser rejeitadas (Doyle, 2008; Wößmann, 2010) e, por este facto, não se deve tratar o PISA como uma espécie de Jogos Olímpicos (Doyle, 2008). A sua proliferação (e mobilização) deverá ser compreendida num contexto social e cultural onde a educação e a qualificação desempenham um papel decisivo (Broadfoot, 2000, citado por Costa, 2011), marcado por concepções de competitividade económica global. Assim, o *ranking* destes estudos comparativos é legitimado pelo “pressuposto de que a comparação dos sistemas educativos permite melhorar a sua eficiência e competitividade económica dos países, argumento que é, aliás, mobilizado pelas próprias organizações” (Carvalho et al., 2009, Rochex, 2006, citados por Costa, 2011, p. 35), ou seja, a publicação desse *ranking* constitui um objetivo para satisfazer interesses eminentemente políticos (Ball, 1998; Bulle, 2011; Lingard, 2010). Assim, justifica-se o interesse crescente da comunidade política “pelos estudos internacionais e pelos indicadores comparados, provenientes das Organizações Internacionais” (Rochex, 2006, citado por Costa, 2011, p. 36).

### **Investigação científica**

A investigação matemática em constante e rápido crescimento obriga à adequação de termos, à introdução de novos conceitos e à apropriação de uma linguagem mais precisa, concisa e consensual por parte do ensino pré-universitário, que permita uma continuidade entre o ensino secundário e o ensino universitário. Portanto, torna-se uma necessidade para as universidades e para os alunos, uma atualização dos saberes e do domínio de linguagem matemática que não esteja já obsoleta, ou que

seja fundamental para a continuação de estudos superiores (Amit & Fried, 2008). Apela-se a uma estreita relação entre a investigação matemática universitária e os professores de matemática das escolas básicas e secundárias (Amit & Fried, 2008). Esta adequação nem sempre é pacífica por parte dos executores dos programas, os professores, que se revelam muitas vezes resistentes às mudanças programáticas. Dieudonné (1959, citado por Amit & Fried, 2008) relatou a resistência por parte das escolas secundárias francesas, na introdução de novos conceitos, terminologias e linguagem matemática, e a desesperada defesa da linguagem obsoleta e desadequada que vigorava.

Na opinião de Magendzo (2008), o currículo deve ser equilibrado no sentido de não estar sobrecarregado de conteúdos, mas abarcando apenas aqueles que permitam a expansão do conhecimento, ou seja, os conhecimentos básicos fundadores e estruturantes que possibilitem uma aprendizagem autónoma que permita ao aluno conhecer os métodos que o conhecimento tem para se expandir, e os conhecimentos que fomentem o desenvolvimento do pensamento crítico. Isto é, os saberes que se requerem para o exercício de uma cidadania democrática, ativa e deliberante, entre outras intencionalidades educativas.

As alterações ao nível dos conteúdos dos programas escolares nem sempre acompanham as reformas curriculares, mas, embora tenham sofrido, no último século, uma verdadeira expansão, mesmo assim, não conseguem abarcar toda a produção científica relevante (Delval, 2006). Este é, talvez, um motivo de clara distinção entre o conhecimento produzido no último século, definido como um processo em permanente expansão e renovação, e o conhecimento de outrora, encarado como sendo lento, escasso e estável (Magendzo, 2008).

Magendzo (2008), baseando-se em pesquisas efetuadas, refere ainda que, atualmente, face à produção diária de conhecimento científico, quer na área da ciência e tecnologia, quer na área das ciências sociais, a riqueza global de conhecimento acumulado duplica em cinco anos e que, no caso que nos interessa, na matemática, são publicados todos os anos 200 000 novos teoremas. Esta situação permite perceber a necessidade de atualizar o currículo escolar para que o mesmo não caia na obsolescência, exigindo aos desenhadores e elaboradores do currículo uma cuidadosa seleção dos conteúdos curriculares e a criação de mecanismos que permitam aos estudantes viver numa sociedade global e democrática, ou seja, serem capazes de responder eficazmente às novas problemáticas impostas pela sociedade e contribuir para a manutenção da coesão nacional e social (Magendzo, 2008).

As investigações científicas, na área da matemática, proporcionam o abandono de certas realidades/verdades para a atualização de novas descobertas. Um exemplo, profundamente controverso na altura (início do século XIX), foi a descoberta das geometrias não-euclidianas. A Matemática tem de ser considerada “como dinâmica e constantemente nova, e não como uma coisa

antiga e assente que tem necessariamente que ser aceite como é” (Shirley, 2000, p. 73), até porque “a Matemática foi mudando e crescendo ao longo dos anos” (Shirley, 2000, p. 73). Por exemplo, nas últimas alterações curriculares que ocorreram no nosso país, e que constam do PMEB (2007), foram introduzidos diagramas de caule e folhas e diagramas de extremos e quartis, que são produções de final do século passado (Shirley, 2000, p. 74). Este autor refere a frequente menção dos manuais escolares aos egípcios, babilónicos, gregos e europeus dos séculos XVI a XIX, e a escassa referência às descobertas dos últimos anos (Shirley, 2000).

### **Avanços tecnológicos**

A tecnologia tem sido um tema central nos movimentos da reforma na matemática, quer como ferramenta para aprender matemática, quer para proporcionar a necessidade de novos saberes, não só ao nível dos conteúdos mas, também, da destreza na manipulação das novas tecnologias imprescindíveis no mundo novo (Amit & Fried, 2008). A tecnologia está associada ao mundo moderno, ao futuro, e é considerada uma ferramenta potente no ensino da matemática (Amit & Fried, 2008). O NCTM (2008) refere-se à tecnologia como essencial para o ensino e aprendizagem da matemática pelo facto de influenciar a matemática que é ensinada e como forma de promover a aprendizagem dos alunos. Flamarich (2000, p. 60) corrobora estas afirmações e acrescenta dizendo que “os avanços tecnológicos provocam, na actualidade, a maioria das mudanças curriculares”. Este autor apresenta, como exemplo, o uso da tecnologia para melhorar a perceção espacial e o estabelecer de relações que permitam passar para o nível seguinte, o imaginar e classificar, ou, ainda, a calculadora que, para além de facilitar “os cálculos que já se dominam, permite investigar relações e padrões numéricos, resolver problemas por tentativa” (Flamarich, 2000, p. 61), entre muitos outros apontados. Shirley (2000) indica, como exemplo, o auxílio eficaz dos computadores para tornar possível alguns cálculos que proporcionaram o desenvolvimento, por exemplo, da estatística, para a demonstração de algumas teorias como o conhecido teorema das quatro cores, ou para tornar possível a visualização de certos objetos matemáticos complexos como o fractal de Mandelbrot.

Na actualidade, a tecnologia de que falamos no parágrafo anterior, assume uma enorme importância, visível através dos inúmeros estudos e publicações que apontam os benefícios do uso de ambientes de geometria dinâmica com vista a melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática, em especial da geometria. Um exemplo de um destes programas é o *Geogebra* que tem sido fortemente divulgado pela comunidade educacional (Cabrita, Neto, Breda & Santos, 2013) e sobre o qual têm incidido inúmeros estudos (e.g., Breda, Trocado & Santos, 2013; Hohenwarter, 2013; Gafanhoto & Canavarro, 2011; Silveira & Cabrita, 2013).

### **Investigação em educação Matemática**

Existe, claramente, uma íntima relação de proximidade entre a investigação matemática ao nível da pedagogia com os avanços tecnológicos, ou seja, o uso das calculadoras, do computador e de *software* adequado, como ferramentas em prol do construtivismo na sala de aula, a teoria de aprendizagem com mais peso na atualidade.

As ciências da educação têm contribuído fortemente na investigação em educação matemática e têm vindo a ganhar terreno nos últimos anos, no sentido de perceber como se ensina e como se aprende nesta área do conhecimento. Neste sentido, goza da capacidade de constituir um fator impulsionador de reformas na matemática escolar, tal como constata Ginsburg et al. (1998, citados por Clements, 2008, p. 594), que diz que a investigação, “nomeadamente psicológica, teve um papel substancial na educação [matemática]. Não apenas na produção de materiais para o ensino, mas na interpretação do fenómeno da educação matemática”. Por exemplo, a teoria associada ao construtivismo é vista pelo NCTM como proeminente na questão das atividades apresentadas aos alunos: situações-problema e o saber matemático associado ao fazer matemática (Amit & Fried, 2008). Desta forma, o aluno afasta-se cada vez mais do seu papel passivo, recetor de informação e aproxima-se da nova visão que o encara como sujeito ativo e responsável pela construção do seu próprio saber (Casqueiro, 2007). Ao longo dos anos têm surgido várias teorias de aprendizagem que importa fazer uma breve referência, para, posteriormente, as enquadrarmos na contextualização histórica dos movimentos reformistas.

Recuámos, então, até ao período da segunda guerra mundial, mais propriamente a 1940, para perceber a evolução das correntes psicológicas que foram atuando no desenvolvimento do currículo, desde esse período até aos nossos dias. Nessa altura, surge uma nova forma de comportamentalismo: o comportamentalismo operante, defendido por Skinner (1904-1990), que tem por base a teoria do reforço. Esta teoria de aprendizagem distinguia-se do conhecido comportamentalismo clássico, lançado por Watson em 1913, que encarava a aprendizagem como dependente da repetição de um comportamento até este se tornar automático, tal como a experiência protagonizada por Pavlov com animais (Lima & Capitão, 2003). Ambas as formas de comportamentalismo estavam, segundo Skinner, presentes na aprendizagem e influenciaram fortemente as práticas escolares durante e após o término da segunda guerra mundial. A primeira forma, o comportamentalismo clássico, por induzir uma resposta imediata perante um estímulo determinado, e a segunda forma, o comportamentalismo operante, por ser condicionado pelas suas consequências podendo, deste modo, ser moldado através de um sistema de reforços positivos (recompensando) e negativos (não-reforço ou não recompensa) (Eysenck, Arnold & Meili, 1982;

Milhollan & Forisha, 1978). Skinner acreditava que este último era o mais presente na aprendizagem (Milhollan & Forisha, 1978).

As décadas seguintes do século XX foram marcadas por outras correntes relevantes na área da psicologia da educação e do desenvolvimento, fruto da natural evolução das ciências e do crescente número de investigações nesta área. Assim, nas décadas de 50, 60, 70 e 80, devemos referir o aparecimento das abordagens cognitivistas por insatisfação dos psicólogos face às teorias comportamentalistas em vigor e a sua posterior aceitação e prevalência dominante. Pode-se destacar, por exemplo, os trabalhos de Miller (1920-2012), Piaget (1896-1980) e Vygotsky (1896-1934) com a *Teoria de Processamento de Informação*, *Estádios de Desenvolvimento Intelectual* e *Teoria de Desenvolvimento Social*, respetivamente (Lima & Capitão, 2003). Piaget defendia que a aprendizagem devia respeitar o estágio de desenvolvimento do aluno, como forma de garantir que as suas estruturas cognitivas estivessem 'preparadas' para aquisição de novos conhecimentos, e Vygotsky estabeleceu dois níveis associados ao processo de aprendizagem: o nível "sociocultural" e o nível "individual", ou seja, a aprendizagem dependente não só dos aspetos cognitivos mas, também, dos aspetos sociais (Lima & Capitão, 2003).

A década de 90 foi marcada pela teoria construtivista da aprendizagem, segundo a qual, a aprendizagem é vista numa perspetiva cognitiva e social, como anteriormente, mas reconhece-se a influência da própria cultura e interação da base de conhecimento do aluno com as novas experiências de aprendizagem (Lima & Capitão, 2003). Neste ponto de vista, o aluno passa a ter um papel ativo na construção do seu próprio saber.

A investigação na área do ensino e aprendizagem da matemática tem sido o foco central e o principal motivo de alterações ao nível do programa da matemática, no que concerne às metodologias e estratégias do ensino desta área do saber. A atenção muito direcionada para as questões pedagógicas do ensino da Matemática tem deixado ao abandono uma questão fundamental para muitos autores – a importância do conhecimento científico (Price e Ball, 1997; Shulman, 1986; Stodolsky, 1988).

Em concordância com esta perspetiva, surge Schwab (1963, citado por Haltenhoff, 2004), referindo que a acumulação de evidências, discussões e polémicas sobre os processos de aprender e de ensinar, graças à legitimação crescente da investigação psicológica, despoletaram o abandono da reflexão sobre o carácter, os desenvolvimentos e as funções dos conteúdos da matemática escolar. A título de exemplo, Haltenhoff (2004, p. 17) relatou a preparação dos professores ao nível das metodologias, aquando da introdução das "novas matemáticas", enquanto careciam totalmente de preparação na organização radical dos conteúdos que essas "novas matemáticas" exigiam, originando sérias dificuldades na sua implementação. O mesmo autor acrescenta que a escola no século XX

dedicou muito do seu tempo e do seu espaço ao desenvolvimento da psicologia educativa e pedagógica, subvalorizando o desenvolvimento do conhecimento científico das diferentes áreas do saber, seja na formação de professores, seja no processo de ensino-aprendizagem.

Para término deste ponto do nosso estudo, podemos acrescentar que a construção dos novos programas surge do encontro de ideias dos impulsionadores referidos anteriormente. A escola e a educação ao sabor dos novos paradigmas da sociedade são influenciadas por vários agentes e agências, quer na reformulação dos sistemas educativos, quer nas reformas curriculares, abrangendo muitas vezes os conteúdos programáticos e a metodologia do ensino, consoante o *tempo curricular*.

### **As reformas curriculares na Matemática escolar**

Neste momento, começaremos por fazer uma breve resenha histórica sobre alguns dos acontecimentos mais importantes que motivaram as reformas curriculares, do período pós segunda guerra mundial até aos nossos dias.

As reformas curriculares são provenientes, como já referimos, da influência de vários fatores que ditam a necessidade de atualizar os elementos presentes no currículo, com vista à resposta eficaz dos alunos aos desígnios da sociedade, no sentido de promover a sua própria evolução. O currículo da Matemática não é uma exceção. Ao longo do texto que se segue faremos referência ao currículo da Matemática que abarca as mesmas linhas conceptuais do currículo escolar, mas referente a esta área específica da Educação, e ao programa de Matemática, seguindo a definição de Roldão (1999), que entende este documento como um elemento ou instrumento do currículo, descrevendo os conteúdos programáticos, as metodologias e as estratégias a utilizar no processo de ensino-aprendizagem, bem como a metodologia de avaliação, entre outros.

Iniciaremos, então, este capítulo por uma breve abordagem aos movimentos internacionais e aos movimentos nacionais que influenciaram as reformas curriculares nesta área, contextualizando-os e relacionando-os cronologicamente. Focar-nos-emos, tal como anteriormente, no período pós segunda guerra mundial até aos nossos dias, devido ao facto de este período ser um marco histórico no que concerne à rutura com o dito ensino tradicional, nas vertentes de *o que ensinar e como ensinar*.

As reformas no currículo da Matemática têm sofrido ao longo dos tempos diversas alterações, umas mais marcantes que outras, em função das necessidades da própria sociedade (Casqueiro, 2007; Feitera & Pires, 2008; Zabala, 2010). Os três grandes movimentos internacionais, com menor ou maior visibilidade nacional, que resultaram em reformas curriculares na Matemática, foram o Movimento da Matemática Moderna (MMM), o movimento *Back-to-Basics* e o movimento

protagonizado pelo NCTM, através da publicação das *Normas para o Ensino e Aprendizagem da Matemática*.

A preocupação dos países no ensino da Matemática, para Wielewski (2008, p. 1), era já visível no início do século XX, e manifestou-se “mais intensamente durante o IV Congresso Internacional de Matemática, realizado em Roma no ano de 1908, em que foi criada uma comissão internacional para analisar o ensino de Matemática desenvolvido em diferentes países”. O mesmo autor conta-nos que, nesse congresso, Félix Klein divulgou a experiência com o *Meraner Reform*, que ocorreu na Alemanha, e que, quase 50 anos depois, serviu de referência para desencadear “o primeiro projecto de internacionalização do ensino de Matemática, denominado de Movimento da Matemática Moderna (MMM)” (Wielewski, 2008, p. 1). Ora, *Meraner Reform* foi um movimento de professores que tinha como objetivo modernizar e unificar o ensino da Matemática no ensino secundário, dado que, neste país, cada Estado independente possuía o seu próprio sistema educativo.

Até aos anos 50, Schoenfeld (1996, citado por Casqueiro, 2007) descrevia a prática da sala de aula de Matemática como um espaço onde se privilegiava o conhecimento de factos e técnicas rotineiras, levando os estudantes à sua memorização sem a compreensão dos conceitos ou das técnicas de aplicação. Em Portugal, Feiteira e Pires (2008) referem a ausência de capacidade dos alunos relacionarem os conceitos e Ponte (2003b) aponta a ênfase nas técnicas de cálculo e caracteriza o ensino dos anos 40 e 50 do século passado como marcado pela memorização e mecanização. Este autor refere ainda que “os programas da época eram pouco mais do que uma lista de conteúdos a tratar” (Ponte, 2003b, p. 11).

Esta época é também marcada pelo fim da segunda guerra mundial que desencadeou uma nova conjuntura mundial. Este período e os 10 anos seguintes são caracterizados por grandes êxitos científicos e tecnológicos (Ponte, 2003b; Zabala, 2010), pelas novas condições socioeconómicas (Feiteira & Pires, 2008; Zabala, 2010), pelo fomento da comunicação social e o acesso à informação (Zabala, 2010), assim como por outras iniciativas “de natureza variada e com propósitos diversificados” (Guimarães, 2003, citado por Casqueiro, 2008, pp. 34-35), que tinham como desígnio modificar os currículos do ensino da Matemática visando a atualização e adequação dos temas matemáticos ensinados no ensino liceal e no ensino universitário, bem como a introdução de novas metodologias de ensino (Guimarães, 2003, citado por Casqueiro, 2008; Ponte, 2003a). Nesta conjuntura mundial, também Portugal sofreu alterações económicas, sociais e culturais, referidas por Matos (2008), como as mais significativas no espaço europeu, consequência do desenvolvimento da indústria e do crescimento das cidades que, por sua vez, originaram um aumento da população escolar.

Assim, a inadequação do currículo da matemática para responder às várias problemáticas associadas ao desenvolvimento da tecnologia (Herrera & Owens, 2001; Malaty, 1988), ao avanço das

próprias matemáticas e o avanço das ciências aplicadas (Malaty, 1988) exigiam uma mudança profunda no ensino da Matemática a nível internacional (Casqueiro, 2008; Feiteira & Pires, 2008). A somar às necessidades descritas anteriormente, o lançamento do satélite russo Sputnik pela União Soviética, em 1957, criou a impressão de que os Estados Unidos estavam atrasados no que concerne à tecnologia e ao poder militar em relação à Rússia, pelo que catapultou o movimento de modernização da Matemática que já havia começado (Herrera & Owens, 2001; Malaty, 1988; Ponte, 2003b). Assim, segundo Matos (2006, citado por Feiteira & Pires, 2008), surge em Royaumont, no ano de 1959, um encontro de sessenta professores de vinte países, sob o auspício da OCDE, para lançar as bases para uma reforma do ensino da Matemática pré-universitária, e que deu origem ao MMM. Malaty (1988) especifica esta informação, apontando o ano de 1952 para o nascimento deste movimento pela Universidade de Illinois, que não se tornou uma realidade por não reunir apoios suficientes.

O MMM constituía uma reforma curricular que procurava renovar fundamentalmente o ensino da Matemática e ocorreu um pouco por todo o mundo entre a segunda metade dos anos 50 e a primeira metade dos anos 70 do século passado (Ponte, 2003b). Algumas das suas ideias prendiam-se com a necessidade de rigor lógico e o afastamento da intuição e da memorização sem compreensão (Zabala, 2010).

Os principais objetivos do MMM prendiam-se com a mudança de conteúdos e a promoção de novas abordagens dos assuntos tradicionais (Matos & Valente, 2010; Ponte, 1994) porque os educadores, e o público em geral, reconheciam “a necessidade de mais competências técnicas e matemáticas para impulsionar a era do desenvolvimento tecnológico” (Herrera & Owens, 2001, p. 84). Do ponto de vista dos conteúdos programáticos, o ensino universitário reclamava “a necessidade de o ensino da Matemática, nos níveis mais elementares, preparar os alunos para os estudos” (Feiteira & Pires, 2008, p. 184) neste nível superior. Este motivo e a preocupação em centrar o estudo nas grandes estruturas que na época se pensava estarem na base de toda a Matemática conhecida (Ponte, 2003b) privilegiaram o estudo, por exemplo, de Estruturas Algébricas, Teoria dos Conjuntos, Topologia, Transformações Geométricas, Lógica e a Teoria de Probabilidades (Feiteira & Pires, 2008; Wielewski, 2008). A par desta nova realidade, as grandes estruturas matemáticas encontravam similitudes com as estruturas básicas da cognição, teorizadas por Piaget, ou seja, houve a preocupação em compatibilizar os currículos de matemática com os trabalhos deste psicólogo (Matos, 2010; Matos & Valente, 2010; Ponte, 2003b; Westwood, 2011). A teoria Piagetiana “enfatizou a importância dos exemplos concretos e materiais manipuláveis” (Herrera & Owens, 2001, p. 85). “Esperava-se, assim, que os novos programas fossem psicologicamente mais simples e matematicamente mais sólidos que os anteriores” (Matos, 2010, pp. 154-155), em paralelo com os

novos métodos de ensino *por descoberta*, em prol de um papel ativo, tanto quanto possível, por parte do estudante na redescoberta dos conceitos (Matos & Valente, 2010; Ponte, 2003b). O ensino pela descoberta foi baseado nos estudos de Bruner (1960) sobre a importância de os “alunos poderem investigar e descobrir em vez de lhes serem apresentados os conceitos relevantes e pretenderem que pratiquem as competências” (Herrera & Owens, 2001, p. 85). Contudo, “o ideário que defendia a modernização do ensino teria que ser absorvido pelos professores, os quais teriam que se adaptar a um novo roteiro de conteúdos e de metodologias” (Wielewski, 2008, pp. 1-2). Para tal, foram criados em alguns países, grupos de trabalho formados por professores de Matemática, educadores e psicólogos, com o objetivo de estudar, divulgar e implantar o MMM nas escolas. Desses grupos, destacamos o “American School Mathematics Study Group (criado em 1958), responsável pela publicação de livros textos de Matemática e pela divulgação do ideário modernista em vários países” (Wielewski, 2008, pp. 1-2).

Em suma, “a forma rápida e quase sem luta como a nova reforma se instalou e generalizou, um pouco por todo o mundo, parece ser um convincente indicador de que essa crise existia e era reconhecida como tal” (APM, 2009, p. 10). Em Portugal, o MMM ocorreu no mesmo período de tempo que em outros países, mas mais pausadamente, iniciando a sua influência a partir de meados dos anos 60 do século passado. Matos (2010, p. 150) atribui aquele facto à possível “resistência a quaisquer mudanças no sistema educativo por parte da tendência mais conservadora do regime” que vigorava na altura. Até aí, os programas de Matemática datavam de 1947 e eram apoiados por livros únicos escolhidos pelo Ministério da Educação e usados por todo o país” (Feiteira & Pires, 2008, p. 185), como forma de limitar o acesso à informação e promover uma apertada rede de controlo ideológico, bem como a difusão de comportamentos, valores e atitudes que o Estado tinha interesse em fomentar (Menezes, 2010). Contudo, é de salientar que, apesar de estarmos no regime Salazarista que impunha diversas condicionantes, desde meados dos anos 50, com a influência de algumas personalidades “adeptas de um reforço da industrialização do país” (Matos, 2010, p. 138), foram tomadas, gradualmente e durando vários anos, algumas diligências que modificaram o próprio sistema educativo. A atestar isto estão o:

alargamento da escolaridade básica obrigatória, a unificação curricular para todos os alunos dos primeiros dois anos após os quatro do ensino primário, a adopção da co-educação terminando com a separação entre os dois sexos na escola, a reforma do ensino universitário e em particular da formação de professores. (Rosas, 1994, e Teodoro, 1999, citados por Matos, 2010, p. 138)

O MMM, segundo Ponte (2003b), conheceu em Portugal dois momentos distintos:

- a) Uma primeira fase, de carácter experimental, sob orientação do professor José Sebastião e Silva (1914-1972), que incidiu sobre o então chamado 3.º ciclo do ensino liceal, correspondente aos atuais 10.º e 11.º anos de escolaridade. Esta fase começou a ser implementada em 1963 em três turmas-piloto em que os professores e alunos eram cuidadosamente seleccionados (Matos, 2006). Sebastião e Silva construiu um manual e um “livro guia”, cuja edição era feita pelo Ministério da Educação, com a cooperação da OCDE, e foi distribuído em fascículos aos alunos e professores (Feiteira & Pires, 2008). Nestes documentos, Sebastião e Silva já apelava para a modernização da Matemática não só quanto aos programas<sup>6</sup> mas também quanto aos métodos, referindo-se aqui ao método expositivo tradicional em que o papel dos alunos era cem por cento passivo (Silva, 1964, citado por Guimarães, 2007). A experiência realizou-se inicialmente “em 3 turmas-piloto, uma em cada liceu normal (Lisboa, Coimbra e Porto) e regidas por elementos da Comissão<sup>7</sup> (...) preparados directamente pelo mestre [Sebastião e Silva]” (Lima, 1997, p. 103). Os professores eram “cuidadosamente seleccionados” (Abreu, 2011, p. 13) e “reuniam-se periodicamente com Sebastião e Silva para tirar dúvidas e fazer sugestões” (Abreu, 2011, p. 10). As turmas-piloto eram constituídas por alunos de ciências, com bom aproveitamento na disciplina de Matemática que, através de convites dirigidos aos encarregados de educação, aceitavam espontaneamente fazer parte da experiência (Lima, 1997). Estas turmas tinham mais um tempo letivo do que as restantes turmas que seguiam o programa tradicional (Abreu, 2011, p. 14).
- b) A segunda fase desta reforma curricular ocorreu nos anos 70 com “a Matemática Moderna para todos!” (Feiteira & Pires, 2008, p. 185), ou seja, “generalizou-se a todos os níveis de ensino”, alunos e professores (Porfírio, 1998, p. 35). Foram, então, elaborados novos programas e novos manuais escolares e desenvolvidas várias ações de formação com o intuito de atualizar cientificamente os professores (Ponte, 2003b).

Em relação à Geometria, conteúdo matemática em que se foca este trabalho, o MMM relegou-a para segundo plano originando a que esta fosse “encarada como um (...) «parente pobre» da álgebra linear; as actividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, dando como exemplo a disciplina de Educação Visual” (Abrantes, 1999, p. 3).

Matos (2010, pp. 151-152) refere que, aquando da revolução de 25 de abril de 1974, a Telescola emitia (desde 1965), aulas de Matemática Moderna e que o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário seguia, desde o início do seu funcionamento, em 1968, os preceitos da Matemática Moderna, definidos

---

<sup>6</sup> Repare-se que a palavra “programa” é aqui utilizada como lista de conteúdos programáticos a lecionar.

<sup>7</sup> Comissão criada, em 1963, pelo Ministério da Educação intitulada “Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática no 3.º ciclo de Ciências dos liceus portugueses”, presidida pelo professor José Sebastião e Silva.

por Sebastião e Silva. Esta revolução acelerou as mudanças previstas e foram introduzidas outras, tais como a perda de distinção entre os Liceus e Escolas Técnicas, numa tentativa de igualar oportunidades de ensino para todos, e, conseqüentemente, segundo Grácio (1985, citado por Matos, 2010, p. 140), “romper com a dualidade ensino liceal-ensino técnico, que exprimia e reforçava a dualidade trabalho intelectual-trabalho manual, e a dualidade dominante-dominado, e romper com a separação entre a escola e a comunidade, e a educação formal e a não formal”.

No ano letivo de 1975/76, um estudo feito a inúmeras escolas do país, constituindo 83% do total de escolas existentes, concluiu que as aulas de Matemática começaram tardiamente por falta de profissionais qualificados nesta área, sendo este apontado pelos “Conselhos Directivos como um dos mais sérios obstáculos ao cumprimento dos objectivos educativos” (Matos, 2010, pp. 145-146), ou seja, à reforma educativa.

A generalização do ensino unificado até ao 9.º ano de escolaridade foi acompanhada pelo Projeto de Avaliação do Ensino Secundário Unificado que decorreu entre 1976 e 1981. Neste período, foram publicados inúmeros relatórios e estudos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, sendo referenciados como os primeiros trabalhos de grande dimensão sobre a aprendizagem da Matemática em Portugal (Matos, 2010). Esses programas, com pequenos reajustamentos após o 25 de abril, atribuindo sempre um grande peso ao domínio das técnicas, acabaram por vigorar até 1991 (Feiteira & Pires, 2008; Ponte, 2003b).

Ora, Portugal implementava ainda as reformas influenciadas pelo MMM, quando os pontos fracos resultantes do cumprimento dos objetivos a que este movimento se propôs, começaram a despoletar dúvidas e constrangimentos em vários países (Feiteira & Pires, 2008; Matos, 2010). O desencanto pela filosofia da Matemática Moderna foi desencadeado pelas dificuldades de aprendizagem, pela desmotivação e grandes limitações dos alunos no raciocínio, na resolução de problemas, mesmo simples, e pela notória ausência de competências aritméticas básicas (Feiteira & Pires, 2008; Malaty, 1988; Matos, 2010; Ponte, 2003b). A Matemática Moderna, para muitos, e segundo Shirley (2000), enfatizava demasiado o rigor e a abstração.

Na verdade, a substituição do “ensino *mecanicista* da Matemática (...) pela perspectiva estruturalista da chamada ‘Matemática Moderna’”, originou um conjunto de fatores que foram assinalados em diversos documentos, tais como, “a falta de interesse dos alunos, a quebra de rendimento escolar mesmo nas técnicas matemáticas elementares e, sobretudo, a pobre preparação que o ensino proporcionava para os estudos superiores” (APM, 2009, p. 10). Feiteira e Pires (2008), Ponte (2003b) e APM (2009) apontaram a massificação do ensino e as próprias modificações sociais da época, como fatores de insucesso do movimento da Matemática Moderna, dado que “a juventude tinha pouca apetência pelo esforço intelectual” (Feiteira & Pires, 2008, p. 4), e não se adequava ao

rigor de linguagem imposto pelas orientações deste movimento que, conseqüentemente, originava novos tipos de exercícios, muitas vezes estéreis e irrelevantes. Em consequência destas insatisfações, face aos inúmeros e complexos problemas que o MMM não conseguiu responder e às consequências visíveis nas competências dos alunos provenientes desta reforma, descritos anteriormente, surge, em inícios dos anos 70, ou mesmo antes, o movimento *Back-to-Basics*. Este movimento reclamava um retorno à primazia dessas competências básicas que haviam sido, durante muito tempo, os grandes pilares da Matemática escolar (APM, 2009; Herrera & Owens, 2001; Ponte, 2003b), e “ao estabelecimento de níveis de competência mínima em exames para passagem de ano e para concessão do diploma final do ensino secundário” (Ponte, 2003b, p. 13).

É importante salientar que “não foi a opinião dos especialistas sobre as fraquezas da nova matemática que proporcionou uma oportunidade para o movimento *Back-to-Basics*; o fator principal foi a opinião pública e os *media*” (Malaty, 1988, p. 58). Segundo Malaty (1988) e, Herrera e Owens (2001), a opinião pública era essencialmente atribuída aos pais que desconheciam a nova matemática, sentindo-se incapazes para ajudar os filhos no estudo e, ao mesmo tempo, apercebiam-se das fraquezas dos mesmos nas competências aritméticas. Nesta altura, mais especificamente em 1973, o matemático Morris Kline publicou um livro opositor da nova matemática e que se tornou célebre por *Why Johnny can't add*.

A Matemática Moderna esteve em vigor num curto período de tempo (10-15 anos) (Herrera & Owens, 2001; Malaty, 1988) e as investigações nunca provaram que as competências aritméticas diminuíram no tempo da *nova matemática*. Contudo, apesar de os especialistas acharem que os conteúdos lecionados na universidade pudessem ser ensinados nas escolas, sabe-se que essa experiência não resultou (Malaty, 1988).

O Movimento *Back-to-Basics* começou nos Estados Unidos e na Inglaterra e rapidamente foi-se espalhando aos restantes países (APM, 2009). Os defensores deste movimento reclamavam a adequação da Matemática à vida quotidiana e em torná-la mais prática do que teórica (Malaty, 1988) como acontecia até à data.

Em Portugal, este Movimento passou quase despercebido e não havia razões para a comunidade portuguesa reclamar maior destaque para as competências de cálculo, pois, na realidade, apesar das alterações curriculares ditadas pelo Movimento da Matemática Moderna, o treino das competências de cálculo continuavam a ser fundamentais para ultrapassar com sucesso os exames de acesso à Universidade e “nunca chegaram a perder por completo o seu lugar” (Ponte, 2003b, p. 12).

A nível mundial, o movimento *Back-to-Basics* depressa entra em declínio, provocado por forte oposição dos educadores matemáticos, argumentando que as competências básicas em Matemática não se limitavam ao simples domínio do cálculo mas que incluíam outros aspetos, tais como a

resolução de problemas, estando este item em grande destaque (Clements, 2000; Herrera & Owens, 2001; Ponte, 2003b; Westwood, 2011). Outro aspeto, apontado por Herrera e Owens (2001), referia a insatisfação no aprofundamento de certas áreas da Matemática que se revelavam importantes face às novas exigências da sociedade e que não estavam refletidas nos programas da Matemática escolar. Mais uma vez, os congressos e as conferências deram voz às preocupações da comunidade matemática sobre a visão que o currículo, defendido pela reforma e levada a cabo pelo movimento *Back-to-Basics*, tinha acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática (Herrera & Owens, 2001). Estes autores referem que os relatórios provenientes do debate da comunidade matemática sobre o currículo da matemática em vigor levaram, na década de 80 do século passado, à publicação de alguns documentos com vista ao desenvolvimento da Matemática escolar. Um exemplo dessas publicações foi *An Agenda for Action* (1980), publicada pelo NCTM e conhecido como o primeiro passo para uma nova reforma (Herrera & Owens, 2001). Neste documento era destacada a resolução de problemas e a “necessidade de alargamento do conceito de capacidades básicas em Matemática de modo a contemplar mais do que a competência em cálculo” (Canavarro, 2003, p. 138).

Todavia, o seu impacto não foi suficiente e o NCTM, reunindo um conjunto de especialistas desde a matemática elementar até à matemática universitária, incluindo Matemáticos e outros investigadores, insistiu na sua pretensão através da publicação de um conjunto de normas para a matemática escolar: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989); *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991); *Assessment Standards for School Mathematics* (1995); *Principles and Standards for School Mathematics* (2000) (Herrera & Owens, 2001). Nestes documentos, a reforma implícita defende mudanças na educação matemática, quer ao nível dos conteúdos quer ao nível pedagógico (Herrera & Owens, 2001). As normas não especificam os conteúdos a serem abordados, mas apresentam as linhas gerais com exemplos clarificadores do que a matemática escolar deve conter, atribuindo importância a algumas áreas tais como a geometria, às conexões entre temas e a vida quotidiana (Herrera & Owens, 2001). Este facto deriva da intencionalidade das normas na promoção de um núcleo comum de matemática a todos os alunos, em qualquer lugar onde se ensine matemática (Clements, 2000). Ao nível pedagógico, as normas descrevem as práticas de ensino fomentando o envolvimento ativo do aluno, o uso de material concreto, o trabalho de grupo, a promoção do raciocínio e comunicação matemática, o uso do contexto real e o papel de professor como mediador do discurso de sala de aula e facilitador das experiências de aprendizagem (Herrera & Owens, 2001).

O movimento reformista desencadeado pela publicação das normas para o ensino da Matemática pelo NCTM foi, tal como no MMM, dominado pelo entusiasmo para a promoção da reforma na Educação Matemática (Walmsley, 2003). Em sequência desse entusiasmo, os editores começaram

a modificar os seus textos baseados nas normas, foram financiados projetos de experimentação nas escolas, houve elogios por parte dos políticos, entre outras ações, e, embora tivesse havido reações contraditórias vindas de várias partes, não foram significativas ao ponto de poderem travar a aplicação das normas à Matemática escolar (Kilpatrick, 2009b).

Nesse período, mais especificamente, em julho de 1986, foi aprovada, em Portugal (precisamente o ano em que a APM foi fundada), a Lei de Bases do Sistema Educativo (publicada a 14 de outubro), cuja consequência foi a renovação dos currículos do Ensino Básico (APM, 2009). Em 1988, a recém-criada Associação de Professores de Matemática edita o documento *Renovação do Currículo de Matemática* (Feiteira & Pires, 2008; Ponte, 2003b), onde constava um conjunto de textos construídos num seminário em Vila Nova de Mil Fontes, que reuniu cerca de vinte e cinco professores e investigadores, e onde se abordavam a renovação do currículo e os programas da Matemática (Guimarães, 2008). Neste livro, para além dos pressupostos, princípios e orientações do currículo para a educação matemática e dos objetivos para o ensino da matemática, é dada ênfase ao *novo* papel do professor, à resolução de problemas, ao tipo de atividades a desenvolver e ao uso das novas tecnologias no apoio ao ensino e à aprendizagem.

A resolução de problemas torna-se, então, o centro das atenções, a nível nacional e internacional, influenciando fortemente os programas portugueses de 1990/91. “Esta noção, embora frequente na literatura educacional desde o início do século, foi teorizada e aprofundada por Pólya (1945) como um aspecto essencial da actividade matemática” (Ponte, 2003b, p. 13). Em Portugal, já em 1943, Silva Paulo publicara, na *Gazeta de Matemática*, um artigo sobre as quatro famosas etapas da resolução de problemas (Guimarães, 2007). Contudo, “até ao início dos anos 80, a resolução de problemas não tinha ainda entrado no discurso curricular em Portugal” (Guimarães, 2007).

Em relação ao tema matemático que nos importa realçar, a Geometria, houve um desinteresse na leção desta matéria até à apresentação dos programas de 1990 e de 1991. Duarte, em 1988, na revista da APM, escrevia “a Geometria como que ‘mete água’, para não dizer que está prestes a ‘ir ao fundo’” (Duarte, 1988, p. 1), para realçar que este tema não era considerado relevante ou mesmo importante para os professores, consequência, talvez, da falta de vontade destes na sua leção e, por isso, quando não havia tempo de lecionar todos os conteúdos do programa, era a Geometria a sacrificada (Serrazina, 1988). Esta situação originou “carências graves quer nas aprendizagens matemáticas dos alunos quer na preparação dos professores, provocando em muitos destes uma certa insegurança” (Velo & Pinheiro, 1994, p. 21).

Em 1988, um dos números da revista *Educação Matemática* da APM deu particular ênfase ao ensino da geometria no que concerne aos “conteúdos, métodos e actividades geométricas a incluir no necessário novo currículo da Matemática” (Duarte, 1988, p. 2). Serrazina (1988) defendia o ensino da

Geometria pelo facto de esta estar “intimamente ligada com a realidade, uma vez que é o estudo do espaço e das formas que o constituem e a nossa vida diária envolve inúmeras relações espaciais” (p. 3). Ainda, neste ano, mas numa publicação posterior à referida anteriormente, da mesma revista, foi apresentada a transcrição de uma entrevista da *Educação e Matemática* (Tudichum & Nunes, 1989) a Brigitte Tudichum que era coordenadora da equipa de trabalho responsável pela elaboração dos novos programas de Matemática do 5.º ao 12.º anos de escolaridade, constituída em março de 1988 e formada por 7 elementos (Tudichum & Nunes, 1989). Questionada sobre o reconhecimento da geometria no programa então em vigor e no novo programa (a publicar em 1990 para o 1.º CEB e em 1991 para os 2.º e 3.º CEB), Tudichum declarou que “a extensão e organização dos programas [de então] fazia relegar a Geometria sistematicamente para segundo plano, dado encontrar-se sempre na última parte dos programas que são extensos” (Tudichum & Nunes, 1989, p. 24). Desta forma, era reconhecido que a Geometria acabava por não ser “leccionada ou era tratada a ‘correr’” (Tudichum & Nunes, 1989, p. 24). Tudichum referia nesta entrevista que a Geometria era a grande preocupação da equipa de trabalho, salientando a relevância do seu papel no novo programa que estavam a elaborar (Tudichum & Nunes, 1989, p. 24). Os novos programas (1990/1991) revelaram assim uma revalorização da Geometria generalizada a todo o ensino básico (Ponte, 2003b).

Na véspera da anunciada generalização dos novos programas, o editorial da revista *Educação e Matemática* abre com o título: “Finalmente os programas antigos vão acabar!” (Guimarães, 2007). Em julho de 1991, é publicado o programa de Matemática, com a aplicação do mesmo, no ano letivo de 1992/1993, aos 5.º, 7.º e 10.º anos de escolaridade em todo o país. Segundo Lobato (1991, p. 3), estes programas apresentavam “fundamentalmente, uma diferença, com todas as consequências dela decorrentes: considera-se como conteúdos do programa e portanto objecto de todo o processo de ensino-aprendizagem, não só os conhecimentos a adquirir, mas igualmente as capacidades e as atitudes a desenvolver”. Esta citação vem ao encontro do que foi referido anteriormente no que concerne a dois aspetos: um referente à mudança do paradigma da matemática escolar com o fim único de preparação para cursos superiores para constituir um meio com vista ao desenvolvimento de interesses e aptidões de cada indivíduo sendo o aluno, como pessoa, o centro e o agente de todo o processo (Lobato, 1991) e, outro, que se prende com a já referida confusão entre programa e lista de conteúdos matemáticos a lecionar. Neste último aspeto, o parecer da APM sobre o novo programa de Matemática (1991) aponta nesse sentido quando refere que “um programa de Matemática, hoje, não deve ser nem correr o risco de ser interpretado essencialmente como uma *lista de matérias a dar*” (APM, 1989).

Vários documentos (e.g., Canavarro, 2010; Lobato, 1991; Marques, 2011; Pessoa, 2010; Ponte et al., 2007; Ponte & Serrazina, 2008) citavam, neste contexto, o papel do professor claramente

distinto ao que estes estavam habituados, com o intuito de contribuir para que “os alunos sintam a Matemática mais próxima e sintam gosto pelo desafio de trabalhar com números e figuras” (Lobato, 1991, p. 4).

Este programa estava organizado em quatro temas base, Geometria, Números e Cálculo, Funções e Estatística, que se inter-relacionavam e se aprofundavam gradualmente em diferentes unidades de cada ciclo e tinham um peso aproximado de, respetivamente, 43%, 40%, 6% e 11% no segundo ciclo do Ensino Básico (Lobato, 1991). A valorização da Geometria, visível no peso que lhe foi atribuído, reflete, para muitos autores (Abrantes et al., 1999; APM, 1989; Bastos, 1999; Veloso & Pinheiro, 1994) uma evolução bastante positiva tentando recuperar da séria crise do tratamento deste tema na Matemática escolar (Lobato, 1991). Neste programa de 1991, além do destaque que lhe foi dado, ao contrário do que passava anteriormente, a Geometria era o primeiro tema a ser lecionado (Guimarães, Segurado, Matos, Barão & Torres, 1991) e apresentava-se como proposta de associação ao “mundo que nos rodeia e a sua forte ligação aos outros temas da Matemática” (Lobato, 1991, p. 5), apesar de as transformações geométricas, no Ensino Básico, serem “tratadas de forma intuitiva e apenas como transformações de figuras” (Lobato, 1991, p. 5). Contudo, em 1999, Ponte, num artigo sobre o Encontro sobre Ensino e Aprendizagem da Geometria<sup>8</sup>, escrevia que a geometria “está hoje no centro das grandes preocupações educativas e carece de uma análise cuidada nas suas vertentes de ensino, aprendizagem e formação de professores” (Ponte, 1999, p. 7). Alguns participantes neste encontro referiram a necessidade de a Geometria ocupar, também, um lugar destacado nas licenciaturas, pós-graduações e mestrados (Ponte, 1999). No ano seguinte, 2000, realizou-se, no Fundão, um novo Encontro de professores, investigadores e futuros alunos, sendo a temática central a Geometria (Boavida, 2000). Devemos aqui referir que, em 1995, a APM criou, por sugestão de um grupo de sócios e de elementos da direção da associação, o Grupo de Trabalho de Geometria (GTG), por “se ter constatado que não havia muitas ideias sobre o que deveria ser a geometria dos programas de Matemática dos ensinos básicos e secundários” (GTG, 2006, p. 25).

Em 2001, foi publicado “o Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (CNEB), que passou a coexistir com os programas de 1991” (Feiteira & Pires, 2008, p. 186). Segundo este novo currículo, “todo o edifício se constrói baseado nas competências que se espera que os alunos adquiram no fim de cada ciclo de estudos. Tudo deve ser ajustado ao que se espera que o aluno seja capaz de fazer, das atitudes que se espera que seja capaz de ter” (Feiteira & Pires, 2008, p. 187).

---

<sup>8</sup> Encontro organizado pelo Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em colaboração com a APM, nos dias 4 e 5 de fevereiro de 1999 intitulado “Encontro sobre o Ensino e Aprendizagem da Geometria” (Ponte, 1999, p. 7).

No ano letivo de 2003/2004, entrou em vigor uma nova reforma do ensino secundário com a criação de três novas disciplinas de Matemática (Matemática A, Matemática B e Matemática aplicada às Ciências Sociais), como forma de adequar os currículos aos diferentes percursos académicos ou profissionais dos alunos (Feiteira & Pires, 2008).

Em 2006, Rita Bastos escreve um artigo para a revista *Educação e Matemática* a apontar dificuldades por parte dos professores relativamente ao conceito de simetria e reconhecendo a importância das transformações geométricas na resolução de problemas, remetendo-se para a nova abordagem deste tema no novo programa de Matemática do Ensino Básico que estava em preparação.

Em dezembro de 2007, foi homologado o Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, que tenta fazer uma ligação entre os programas de 1990/91 (Ponte & Sousa, 2010) e o CNEB (Feiteira & Pires, 2008).

### **Programa de Matemática do Ensino Básico (2007).**

O programa de Matemática do Ensino Básico (2007), ainda em vigor em alguns anos de escolaridade, está organizado por ciclos e em torno de quatro grandes temas matemáticos (Números e operações, Geometria, Álgebra e Organização e tratamento de dados) e três capacidades transversais fundamentais (Resolução de problemas, Raciocínio e Comunicação).

Ponte e Serrazina (2009), dois dos autores do PMEB (2007), referem a presença neste documento de nove objetivos gerais para o ensino da Matemática, sendo os dois primeiros referentes aos conhecimentos básicos e à importância da compreensão na aprendizagem da Matemática, e os restantes referentes às capacidades transversais que têm, neste documento, um papel de grande destaque.

A ideia de o PMEB (2007) se assumir como “um reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico, datado do início dos anos noventa” (Ponte et al., 2007), “introduzindo mudanças mais ou menos profundas nos aspectos que se consideram mais importantes” (Ponte & Sousa, 2010, p. 98), é contrariada por alguns autores dos quais destacamos Kilpatrick (2009a) e Canavarro, Tudella e Pires (2009). Kilpatrick (2009a) referia simplesmente que este novo programa parecia não ser uma mera atualização do programa anterior por existirem formulações completamente novas das finalidades e objetivos, de as capacidades transversais surgirem como complemento aos conteúdos matemáticos e de existirem quatro eixos que organizavam os temas que atravessam os três ciclos de escolaridade. Por estes aspetos, Kilpatrick (2009a) acreditava poder haver alguma confusão instalada nos professores pela forma como os dois programas se podiam relacionar. Ainda em 2009, Canavarro

et al. escreviam que o PMEB (2007) “não constitui apenas um reajustamento do programa antigo (...) e o carácter de novo [programa] justifica-se por vários argumentos” (Ponte et al., 2007, p. 1), sendo um deles relacionado com os temas matemáticos, pois, apesar de muitos tópicos já estarem contemplados nos programas antigos, “outros não estavam ou, estando, são agora abordados sob diferentes perspectivas” (p. 1). Os outros argumentos apresentados por estes autores (Canavarro et al., 2009) são o carácter de *novo* no apelo que faz à experiência matemática dos alunos, *novo* na sintonia com as atuais orientações curriculares internacionais para o ensino da Matemática, e *novo* no estatuto que este PMEB (2007) confere às capacidades transversais que já eram referidas no programa antigo mas que neste “surtem valorizadas e assumindo-se também como conteúdos” (Ponte et al., 2007, p. 1). De realçar que os programas antigos alargaram o conceito de conteúdo, enquanto componente do currículo, não se restringindo aos conhecimentos mas contemplando os valores, as atitudes, as capacidades e as aptidões a desenvolver (Rodrigues, 2009).

No PMEB (2007), denota-se a preocupação crescente internacional com o ensino da Geometria que apela a uma ideia central associada ao desenvolvimento do sentido espacial (Ponte et al., 2007; Ponte & Serrazina, 2009; Ponte & Sousa, 2007), ou seja, dando ênfase à visualização, às transformações geométricas e à demonstração (Ponte & Serrazina, 2009; Ponte & Sousa, 2010). Walle (2004, citado por Fernandes, 2011, p. 13) apresenta uma definição de sentido espacial como sendo “uma intuição sobre as formas e as relações entre as formas (...) [que] inclui a capacidade para visualizar mentalmente objetos e relações espaciais” e Ponte, Nunes e Quaresma (s.d., p. 5) consideram o sentido espacial “como um conhecimento intuitivo do meio envolvente e dos objectos que nele existem (NCTM, 1991), incluindo a capacidade para visualizar mentalmente objectos e relações espaciais, por exemplo, rodando objectos na nossa mente (Walle, 2007)”.

Valorizando as ideias defendidas no livro *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, publicado pelo NCTM em 2008, o PMEB (2007) dá ênfase às transformações geométricas e ao uso das simetrias para enriquecer as experiências matemáticas dos alunos. As transformações geométricas são abordadas nos três ciclos de ensino de forma crescente (Fernandes, 2011), iniciando-se no 1.º ciclo de um modo informal, e lecionadas, nos ciclos seguintes, com maior aprofundamento (Dâmaso et al., 2010; Janela, 2012; Ponte & Sousa, 2010) mesmo ao nível da formalização.

Analisaremos, agora, as alterações ocorridas relativamente a este tópico específico que são as transformações geométricas, apresentando um quadro comparativo (ver Tabela 1) entre os conteúdos programáticos e os objetivos em cada um dos ciclos, e em cada um dos programas, o homologado em 1990/1991 e o homologado em 2007. Nestes quadros são adotadas as terminologias mencionadas nos próprios programas. Relativamente ao PMEB (2007), os tópicos e objetivos específicos são

“complementados por notas que procuram esclarecer o seu alcance e proporcionar sugestões metodológicas para o professor” (Ponte et al., 2007, p. 2) e às quais faremos algumas referências.

**Tabela 1.** Quadro Comparativo dos Programas de 1990 e 2007 para o 1.º CEB

Programa de 1990 (pp. 180-184)	Programa de 2007 (pp. 22-23)
<p><b>Especificação dos temas</b></p> <p>Forma e espaço (Iniciação à Geometria)</p>	<p><b>Tópicos</b></p> <p>Figuras no plano e sólidos geométricos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reflexão</li> </ul>
<p><b>Objectivos</b></p> <p><u>1.º ano</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Explorar simetrias utilizando livremente espelhos.</li> <li>- Construir figuras simétricas através de dobragens e recortes.</li> </ul> <p><u>2.º ano</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fazer desenhos decorativos:               <ul style="list-style-type: none"> <li>o frisos em papel quadriculado;</li> <li>o rosáceas contornando a base circular de um objecto.</li> </ul> </li> <li>- Desenhar figuras simétricas, em papel quadriculado, escolhendo um eixo de simetria.</li> </ul> <p><u>3.º ano</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fazer transformações de figuras geométricas planas (utilizando diferentes meios e materiais: recorte e colagem, dobragem, geoplano, tangram).</li> <li>- Desenhar frisos e rosáceas.</li> <li>- Fazer uma composição a partir de um padrão dado.</li> <li>- Desenhar, em papel quadriculado, a figura simétrica de uma figura em relação a um eixo horizontal.</li> </ul> <p><u>4.º ano</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fazer transformações de figuras geométricas planas segundo algumas regras (utilizando diferentes meios e materiais: dobragens, geoplano...).</li> <li>- Desenhar frisos e rosáceas.</li> <li>- Fazer uma composição a partir de um dado padrão.</li> </ul>	<p><b>Objectivos específicos</b></p> <p><u>1.º e 2.º anos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo.</li> <li>- Desenhar no plano figuras simétricas relativas a um eixo horizontal ou vertical.</li> </ul> <p><u>3.º e 4.º anos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar no plano eixos de simetria de figuras.</li> <li>- Construir frisos e identificar simetrias.</li> <li>- Construir pavimentações com polígonos.</li> <li>- Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais.</li> </ul>

No 1.º CEB, relativamente aos 1.º e 2.º anos de escolaridade, são propostas, no PMEB (2007), a utilização de miras e espelhos para a exploração de reflexões, dobragens e recortes com papel quadriculado para exploração de figuras simétricas e é, ainda, sugerido que se dê e peça “exemplos que evidenciem reflexões como simetrias axiais no meio natural e físico” (Ponte et al., 2007, p. 22).

Para os 3.º e 4.º anos de escolaridade, é suposto o docente propor “a exploração de frisos identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta)” (Ponte et al., 2007, p. 23). É ainda sugerida a exploração de pavimentações utilizando polígonos e a descoberta de polígonos regulares que possam pavimentar o plano.

No programa de 1990, as transformações geométricas eram trabalhadas de um modo intuitivo, mas, no programa (2007), a noção de reflexão admite um carácter matematicamente mais aprofundado. Pessoa (2010), na qualidade de professora do 1.º CEB e de uma turma-piloto do 4.º ano de escolaridade na implementação do programa (2007), corrobora esta afirmação apontando o estudo das transformações geométricas como sendo uma alteração significativa neste novo programa dado que, com o programa anterior, este estudo se restringia à reflexão de eixo vertical e, em alguns casos, de eixo horizontal. Apesar de os objetivos do programa de 1990 referirem a construção de transformações geométricas utilizando diferentes meios e materiais, esta docente fala na introdução do estudo das isometrias como um ponto de distinção dos dois programas, pelo facto de não estudarem apenas a reflexão, mas também a reflexão deslizante, a translação e a rotação. Pessoa (2010) mencionou ainda o estudo dos frisos como uma base para atividades de justificação e argumentação e como uma importante “fonte de exploração de simetrias, possibilitando o estudo das isometrias de uma forma motivadora e esclarecedora” (p. 26). Este aspeto é reforçado pelo facto dos frisos serem representações que permitem analisar e operar com as quatro isometrias quer para a construção quer para a sua caracterização.

O GTG (2007) defende o uso de espelhos, dobragens em papel e representações gráficas para a exploração dos movimentos, como translações, reflexões e rotações como forma de aproveitar algumas noções informais com que as crianças chegam à escola e impulsionar a aquisição de conhecimentos mais formais e sintetizados.

Em suma, no 1.º ciclo, há uma clara distinção entre os dois programas, havendo, no de 2007, a abordagem das quatro transformações geométricas e do estudo da simetria que, no programa anterior, se limitava ao estudo da reflexão chamada de simetria, e com a particularidade de a noção de simetria adotar, agora, uma concetualização claramente distinta da abordada anteriormente.

No quadro comparativo dos programas de Matemática de 1991 e de 2007 (ver Tabela 2), relativamente ao 2.º CEB, podemos observar que é neste ciclo de ensino que ocorrem as maiores modificações, valorizando, no PMEB (2007), tal como refere Segurado (s.d., p. 1), “aspectos da Matemática que andavam ‘esquecidos’”, dando como exemplo as transformações geométricas.

No programa de 1991, a simetria era a única transformação geométrica, no plano, estudada e de uma forma claramente distinta, sob o ponto de vista concetual, do proposto no programa de 2007.

**Tabela 2.** Quadro Comparativo dos Programas de 1991 e 2007 para o 2.º CEB

Programa de 1991	Programa de 2007 (p. 38)
<p><b>Especificação dos temas</b></p> <p>Simetria em relação a uma recta</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Eixos de simetria</li> <li>- Bissetriz de um ângulo</li> </ul>	<p><b>Tópicos</b></p> <p>Reflexão, rotação e translação</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Noção e propriedades da reflexão, da rotação e da translação</li> <li>- Simetria axial e rotacional</li> </ul>
<p><b>Objectivos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Descobrir e traçar eixos de simetria de figuras geométricas simples.</li> <li>- Reconhecer que a bissetriz de um ângulo é um eixo de simetria.</li> <li>- Construir, em papel quadriculado a simétrica de uma figura simples.</li> </ul>	<p><b>Objectivos específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado.</li> <li>- Construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias.</li> <li>- Compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias numa figura.</li> <li>- Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias.</li> <li>- Identificar as simetrias de frisos e rosáceas.</li> <li>- Construir frisos e rosáceas.</li> </ul>

Em 1991, particularizava-se o estudo da bissetriz, que agora surge mencionado nas notas, talvez porque o estudo da reflexão é bastante mais aprofundado em termos matemáticos do que no programa anterior, e a abordagem às isometrias ter já sido iniciada no ciclo anterior. No PMEB (2007), não se estuda apenas a reflexão, como outrora, mas as restantes isometrias – rotação, translação e reflexão deslizante –, estando, esta última, implícita nos objetivos específicos ao fazer referência à composição de isometrias. O programa, neste ciclo de ensino, não menciona a reflexão deslizante, talvez pelo facto de esta transformação exigir que o eixo de reflexão seja paralelo ao vetor de translação e, neste ciclo, não haver menção ao conceito de vetor. Repare-se que estes conceitos estão a ser revisitados e aprofundados.

Ainda neste programa, é de salientar o aprofundamento do conceito de simetria através do estudo dos frisos e das rosáceas, mencionadas nos objetivos específicos, e que carece de uma exploração cuidada por estarem associados a conhecimentos matemáticos que não se reduzem ao que era explorado no 1.º ciclo do programa de 1991, mas a uma identificação das isometrias presentes nestas figuras.

Rodrigues (2007, p. 26) refere a “importância da formação de professores e a produção de material de apoio, particularmente, para a abordagem da nova temática de rotações e translações”, aludindo especialmente ao 2.º CEB por ser um tema novo neste ciclo.

As notas referentes ao 2.º CEB, no PMEB (2007), propõem o uso de obras de arte e artesanato, o estudo da relação entre o número de eixos de simetria e a classificação de triângulos, a construção de figuras com mais do que um eixo de simetria e o uso de figuras obtidas através da composição de isometrias (Ponte et al., 2007). É interessante verificar que uma destas notas remete para um assunto que constava dos objetivos definidos no programa anterior, ou seja, para o reconhecimento da reta que contém a bissetriz como sendo um eixo de simetria do ângulo respectivo (Ponte et al., 2007). No que concerne à rotação, este novo programa apela à indicação dos elementos associados a esta isometria como sendo o centro, o sentido e a amplitude do ângulo de rotação, o que, precisamente, no programa anterior estava destinado ao 9.º ano de escolaridade. No desenvolvimento das aprendizagens referentes às rosáceas, o PMEB (2007) propõe ao professor “considerar a divisão do círculo num número par e ímpar de sectores, desenhar uma figura (motivo) num dos sectores e, por decalque ou por dobragem, preencher os sectores seguintes segundo uma regra (rodar ou reflectir)”, fazer uso de dobragens em papel, espelhos, das representações gráficas e do recurso às novas tecnologias de que são exemplos os *applets* (Ponte et al., 2007, p. 38). Repare-se que o recurso às novas tecnologias surge, agora, nas notas do programa do 2.º CEB, por proporcionarem ao aluno um envolvimento ativo com os conceitos geométricos, no sentido de tornarem possível a formulação e exploração de conjecturas, e de beneficiarem a capacidade de visualização e o raciocínio espacial (GTG, 2007). Nesta matéria, e no que concerne ao 1.º ciclo, a proposta de utilização dos computadores não surge nas notas, mas aparece como recursos potenciadores de explorações que possam enriquecer as aprendizagens da geometria (Ponte et al., 2007).

No quadro comparativo dos programas de Matemática de 1991 e de 2007 (ver Tabela 3) são visíveis grandes diferenças.

No programa de 1991, são abordadas, pela primeira vez, as translações e as rotações mas, no programa de 2007, pressupõe-se o retomar do estudo destas isometrias e centrá-lo agora nas suas propriedades e especificidades levando à necessidade de estudar o conceito de vetor. A associação da translação ao estudo dos vetores e a comparação das propriedades das isometrias aprendidas nos ciclos anteriores eleva o nível de formalização neste ciclo de ensino (Janela, 2012).

No programa de 1991, as translações e as rotações eram abordadas no 3.º CEB, mais especificamente nos 8.º e 9.º anos, respetivamente, e neste programa de 2007 são estudadas no 2.º CEB de forma não intuitiva.

Vários objetivos apresentados para o 3.º CEB no programa de 1991, surgem, agora, implícitos no programa de 2007 em ciclos anteriores. Por exemplo, um dos objetivos referentes ao 9.º ano de escolaridade - *identificar rotações de polígonos regulares, em torno do seu centro* - é agora trabalhado no 2.º CEB com o estudo das rosáceas, podendo, mesmo, ser abordado no 1.º CEB.

**Tabela 3.** Quadro Comparativo dos Programas de 1991 e 2007 para o 3.º CEB

Programa de 1991 (pp. 44 e 57)	Programa de 2007 (p. 53)
<p><b>Especificação dos temas</b></p> <p>Translação (8º ano)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Imagem de uma figura numa translação dada</li> <li>- Propriedades das translações</li> <li>- Vector</li> <li>- Composição de translações: adição de vectores</li> </ul> <p>Rotação (9º ano)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Simetrias numa circunferência</li> <li>- Rotações</li> <li>- Isometrias</li> </ul>	<p><b>Tópicos</b></p> <p>Isometrias</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Translação associada a um vector</li> <li>- Propriedades das isometrias</li> </ul>
<p><b>Objectivos</b></p> <p><b>8º ano</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar translações na vida quotidiana.</li> <li>- Efectuar translações de figuras em quadriculas.</li> <li>- Construir a imagem de uma figura numa translação definida por um vector dado.</li> <li>- Reconhecer propriedades das translações.</li> <li>- Resolver problemas simples que envolvam translações.</li> <li>- Compor translações, relacionando com a adição de vectores.</li> <li>- Utilizar instrumentos de medição e de desenho na construção de figuras.</li> <li>- Decorar uma região plana, usando translações.</li> </ul> <p><b>9.º ano</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar e traçar eixos de simetria de uma circunferência.</li> <li>- Identificar rotações de polígonos regulares, em torno do seu centro.</li> <li>- Construir figuras, utilizando instrumentos de medição e desenho.</li> <li>- Comparar propriedades das rotações, translações e simetrias axiais.</li> <li>- Identificar diferentes isometrias, em decorações figurativas.</li> <li>- Utilizar isometrias na decoração de uma região plana.</li> </ul>	<p><b>Objectivos específicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Compreender as noções de vector e de translação e identificar e efectuar translações.</li> <li>- Identificar e utilizar as propriedades de invariância das translações.</li> <li>- Compor translações e relacionar a composição de translações com a adição de vectores.</li> <li>- Reconhecer as propriedades comuns das isometrias.</li> <li>- Reconhecer que a translação é a única isometria que conserva direcções.</li> </ul>

As notas referentes ao 3.º CEB dão principal enfoque a atividades relacionadas com translação associada a um vetor e às características deste (sentido e direção). Relativamente à translação, é

proposta a sua construção “em papel quadriculado (com instrumentos de medição e desenho) ou usando software de Geometria Dinâmica” (Ponte et al., 2007, p. 53), incentivando o professor a propor translações em papel e a considerar “situações da vida quotidiana (como papéis de parede, tecidos, azulejos ou frisos decorativos)” (p. 53). No que concerne aos vetores, as notas propõem a apresentação de atividades que contemplem a “adição geométrica de apenas dois vetores e a determinação do simétrico de um vector” (p. 53).

As transformações geométricas são dos temas do PMEB (2007) com que a maioria dos professores dos 1.º e 2.º ciclos nunca lidaram e que exigem aprofundamento teórico; para além disso, existem termos utilizados no programa de 1991 e no de 2007 cujo significado sofreu alterações sob o ponto de vista concetual de que é exemplo a *simetria* (Canavarro, 2010; Grupo de Trabalho do 2.º CEB – GT2, 2010).

No âmbito geral, no que se refere ao 1.º ciclo, no PMEB (2007), salienta-se o estudo das isometrias através dos frisos (Vieira, Ferreira & Mamede, s.d.) e é valorizado o estudo das pavimentações e das transformações geométricas (Pires & Martins, 2010).

No 2.º ciclo, o PMEB (2007) refere que os alunos devem ser capazes de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria, onde é aprofundado o estudo da reflexão e rotação para a exploração das noções de simetria axial e rotacional, bem como a identificação das simetrias de uma dada figura (Dâmaso et al., 2010; Janela, 2012). Ainda no 2.º ciclo, o PMEB (2007) aponta para a importância de os alunos entenderem o significado das propriedades das isometrias (Dâmaso et al., 2010) e de conseguirem identificar relações e estabelecer conexões. No 3.º ciclo, o novo programa propõe que se adote, a partir das aprendizagens do ciclo anterior, raciocínios hipotético-dedutivos (Janela, 2012), destacando-se a translação associada a um vetor (Dâmaso et al., 2010).

No programa de 1991, o estudo da reflexão, da translação e da rotação, na sua primeira abordagem, terminava no 9.º ano de escolaridade, ou seja, no final do 3.º CEB. No programa de 2007, a abordagem das isometrias é feita nos dois primeiros ciclos de ensino e não se limita ao estudo das quatro transformações geométricas no plano euclidiano (reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante), como no programa de 1991, estando, também, referida a identificação de simetrias em frisos, em pavimentações e em rosáceas (Dâmaso et al., 2010).

A inovação curricular relativa aos conteúdos programáticos, especificamente ao tema das Isometrias e, em particular, às simetrias de uma figura, descrito no PMEB (2007) dos 1.º e 2.º CEB, envolveu a introdução de novas transformações isométricas nestes ciclos de ensino, que outrora pertenciam ao 3.º CEB, e a alteração de algumas conceções. Candeias (2007) corrobora com esta afirmação, dizendo que é visível que a lecionação de alguns tópicos da geometria, no programa de 2007, fora antecipada um ciclo em relação ao programa de 1991.

Em 1998, Veloso reclamava a ênfase nas transformações geométricas do plano para o ensino da geometria por considerar um tema essencial nesta matéria e Bastos (2007) também referia a sua importância, quer pelo destaque que as mesmas têm tido na história da matemática recente, quer por constituírem “um campo rico de conexões uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço” (p. 23). Igualmente, Loureiro (2007) nos remete para uma comparação implícita entre os dois programas e entre temas matemáticos. Esta autora faz um paralelismo entre a aprendizagem do número e da geometria da seguinte forma: se nos anos iniciais se vai trabalhando

com números para um dia olhar para todos eles e começar a organizá-los (...) porque é que na geometria procedemos de maneira inversa? A tendência dominante é para começarmos por dizer o que é uma figura geométrica e depois afirmarmos logo o leque de figuras. (...) Nos níveis mais elementares, o que se pode fazer com um quadrado? Dar um nome? Dizer o que é? (Loureiro, 2007, p. 25)

Loureiro (2007, 2009) aponta também para a necessária valorização nas ações sobre os objetos matemáticos para que estes ganhem identidade e não fiquem sujeitos à sua identificação, por parte das crianças, pelo seu aspeto ou posição. Este ideal vai ao encontro do que é valorizado pelo PMEB (2007): “a demonstração, a argumentação e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos” (Fernandes, 2011, p. 13).

A par dos conhecimentos científicos que acabamos de referir, estão as diretrizes do PMEB (2007), no sentido de fomentar uma dinâmica de sala de aula apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem socioconstrutivista, e, para tal, a destreza na manipulação de recursos estáticos e dinâmicos é considerada uma necessidade a que os professores devem recorrer (Ponte et al., 2007). Nesta vertente, Feiteira e Pires (2008) destacam neste programa o estímulo à realização de experiências matemáticas ricas, tais como jogos, pequenas investigações e trabalhos de projeto/grupos, mesmo estando convencidos da extensão do programa, como forma de melhorar as aprendizagens dos alunos.

O Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 começou a ser implementado em algumas escolas no ano letivo de 2009/2010 e, no ano letivo seguinte, foi implementado em todas as escolas do país (Alpalhão, 2010) para o 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos (Ponte, 2011). Assim, no ano letivo de 2011/2012, em todos os anos de escolaridade do 1.º e 2.º CEB e nos primeiros dois anos do 3.º CEB, estava a ser desenvolvido este *novo* programa de Matemática. Somente no ano letivo 2012/2013 os alunos do 9.º ano de escolaridade trabalharam o *novo* PMEB (2007).

O desenvolvimento deste programa podia adotar dois percursos temáticos de aprendizagem que constituíam “possíveis sequências para o desenvolvimento do trabalho lectivo com o novo programa de Matemática” (ME, s.d.). A escola tinha a autonomia para seleccionar o percurso temático a seguir.

### **Programa de Matemática do Ensino Básico (2013).**

Neste momento, apesar de não estar previsto quando iniciamos e desenvolvemos esta investigação, encontra-se em vigor um novo programa de Matemática para o Ensino Básico, homologado em 17 de junho de 2013. Consideramos pertinente analisá-lo, na temática central deste trabalho, comparando-o com o anterior e registando as suas principais alterações. Na Tabela 4 encontram-se os conteúdos a abordar sobre as simetrias e as transformações geométricas ao longo do Ensino Básico.

Este programa de Matemática de 2013, comparativamente com o anterior, apresenta, mais uma vez, diferenças significativas no estudo das simetrias e das transformações geométricas, das quais destacamos:

- A ausência de referência às rosáceas e aos frisos ao longo de todo o Ensino Básico;
- No 1.º CEB, só se aborda a simetria de reflexão;
- No 2.º CEB, reforça-se o estudo da reflexão e inicia-se o estudo da rotação e das simetrias de rotação e de reflexão;
- No 3.º CEB, inicia-se o estudo da translação e da simetria de translação e retoma-se o estudo das três simetrias anteriormente abordadas.
- A reflexão deslizante e a simetria de reflexão deslizante, que era referida no programa anterior nas notas referentes ao 1.º CEB e no texto introdutório da Geometria do 2.º CEB, surgem agora referenciadas somente no 3.º CEB.

Apesar de, ao longo de todo o ensino básico, não haver qualquer referência ao estudo das rosáceas e dos frisos, as primeiras estarão implicitamente presentes quando se abordarem as simetrias de rotação e segundas quando se abordarem as simetrias de translação. Contudo, apesar de as rosáceas e os frisos serem aprendizagens subjacentes aos objetivos preconizados neste programa de 2013, pelo facto de não constar deste documento, a sua abordagem dependerá do desenvolvimento que o professor quiser dar ao próprio programa mas dificilmente terão o lugar de destaque alcançado no programa anterior. Esta opinião ou preocupação é partilhada pelos docentes da Escola Superior de Educação de Lisboa (2013).

**Tabela 4.** As simetrias as transformações geométricas no programa de Matemática do Ensino Básico homologado em junho de 2013

<p><b>1.º Ciclo do Ensino Básico</b></p> <p><b><u>2.º ano</u></b></p> <p><b>Figuras geométricas:</b> Construção de figuras com eixo de simetria</p> <p><b><u>3.º ano</u></b></p> <p><b>Figuras geométricas:</b> Identificação de eixos de simetria em figuras planas</p>
<p><b>2.º Ciclo do Ensino Básico</b></p> <p><b><u>6.º ano</u></b></p> <p><b>Isometrias do plano</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reflexão central como isometria; invariância da amplitude de ângulo;</li> <li>- Mediatriz de um segmento de reta; construção da mediatriz utilizando régua e compasso;</li> <li>- Reflexão axial como isometria; invariância da amplitude de ângulo; eixos de simetria; a bissetriz de um ângulo como eixo de simetria;</li> <li>- Rotação de sentido positivo ou negativo como isometria; invariância da amplitude de ângulo;</li> <li>- Imagem de um segmento de reta por uma isometria;</li> <li>- Construção de imagens de figuras planas por reflexões centrais e axiais e por rotações;</li> <li>- Simetrias de rotação e de reflexão;</li> <li>- Problemas envolvendo as propriedades das isometrias e utilizando raciocínio dedutivo;</li> <li>- Problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação e de reflexão axial.</li> </ul>
<p><b>3.º Ciclo do Ensino Básico</b></p> <p><b><u>7.º ano</u></b></p> <p><b>Paralelismo, congruência e semelhança</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Isometria e semelhanças</li> </ul> <p><b><u>8.º ano</u></b></p> <p><b>Vetores, translações e isometrias</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Translações como isometrias; caracterização pela preservação da direção e sentido dos segmentos orientados e semirretas;</li> <li>- Reflexões deslizantes como isometrias;</li> <li>- Ação das isometrias sobre as retas, as semirretas e os ângulos e respetivas amplitudes;</li> <li>- Classificação das isometrias do plano;</li> <li>- Problemas envolvendo as propriedades das isometrias do plano;</li> <li>- Problemas envolvendo figuras com simetrias de translação, rotação, reflexão axial e reflexão deslizante.</li> </ul>

Repare-se, também, que o estudo da translação se inicia somente no 3.º CEB e no 1.º CEB se induz somente o estudo da simetria de reflexão retrocedendo, em termos de abordagem, o previsto nos programas de 2007 e de 1990.

No ano de 2013, era ainda frequente a apelação de *novo* ao programa de Matemática homologado em 2007 que esteve em vigor por tão pouco tempo.

O estudo que aqui se apresenta foi desenhado e desenvolvido em período anterior à sua implementação pelo que a referência ao programa de Matemática homologado em 2013 assumirá pequenas proporções em comparação com o programa de Matemática em vigor de 2007 até 2013. Nos próximos capítulos e para não suscitar dúvidas, qualquer abordagem ao Programa de Matemática do Ensino Básico será precedida do ano de homologação do mesmo.

## CAPÍTULO 3

### PROFESSORES

Os professores têm um papel preponderante no processo de reprodução social e cultural (Nóvoa, 2007) e, implicitamente, no desenvolvimento do currículo traduzido que está dependente de um conjunto de variáveis que tornam este processo claramente distinto de professor para professor. Teixeira (2004) associa a ação do professor como o resultado da sua formação inicial e conseqüente evolução na sua formação contínua destacando assim estes dois domínios do desenvolvimento profissional. Outros autores (e.g., Gess-Newsome, 2001; Mellado, 2011) vão mais longe referindo-se a características intrínsecas a todo o ser humano que influenciam a sua forma de agir, em particular o professor, tornando o processo de ensinar particular e idiossincrático. Neste sentido, Nóvoa (2007, p. 33) refere a impossibilidade de, no professor, se separar as dimensões pessoais e profissionais e adequa um conhecido provérbio para realçar esta individualidade, escrevendo: “Diz-me como ensinas, dir-te-ei quem és”.

A modelação do currículo, por parte do professor, está dependente das suas crenças, emoções, conhecimentos e objetivos, valores, história do indivíduo, antecedentes escolares, capacidade de fazer previsões, tomar decisões e agir em conformidade das situações momentâneas (Gess-Newsome, 2001; Mellado, 2011). Assim, o ato de ensinar é considerado como profundamente complexo, intelectual e uma atividade prática em que o professor se mune das suas experiências e do seu repertório de estratégias de ensino e representações, que considera mais apropriada aos seus propósitos (Turner-Bisset, 1999). Por exemplo, as experiências escolares e académicas, que todos os professores possuem quando iniciam a sua carreira, constituem o ponto de partida para a atuação na sala de aula (Mellado, 2011; Turner-Bisset, 1999), pois estas permitem-lhes formalizarem uma ideia, crenças e conceções de como se aprende e se ensina (Mellado, 2011). As perceções mais comuns dos professores enquanto estudantes são que “ensinar é dizer e mostrar; aprender é memorizar” (Calderhead, 1992, citado por Turner-Bisset, 1999, p. 45) remetendo para o ensino tradicional a que os professores estiveram submetidos enquanto alunos.

A par de toda a complexidade do ato de ensinar associado ao aspeto intrínseco e pessoal do indivíduo, a competência do professor sob o ponto de vista profissional tem sido, ao longo dos anos, um tema forte nas investigações em Educação com ênfase em algum domínio específico consoante as correntes de investigações protagonizadas nas diferentes épocas.

Os anos 80 do século passado marcam o início de uma visível preocupação de vários países com a formação e o ensino da matemática e das ciências que, apoiados no novo modelo construtivista, incentivaram uma mudança na dinâmica da sala de aula e do papel do professor, especialmente nos ciclos de estudos elementares e médios<sup>9</sup> (Huberman & Middlebrooks, 2000; Price & Ball, 1997). As reformas contemporâneas nos Estados Unidos da América, à luz deste modelo e com vista ao melhoramento da literacia matemática, insistiam na necessidade de uma mudança profunda no ensino e aprendizagem da matemática (Price & Ball, 1997), com particular ênfase na ação dos professores, por serem estes “a componente crucial para o sucesso do actual movimento reformista da educação matemática” (Battista, 1986, citado por Gresham, 2008, p. 171). Contudo, estas reformas não se limitaram a provocar alterações no ensino pré-superior. Em consequência do movimento reformista na formação inicial de professores da Educação Básica que ocorreu nos Estados Unidos e Canadá e da crença na existência de uma base de conhecimento para o ensino, muitos estudos foram publicados na esfera internacional com o intuito de melhorar a própria formação inicial (Almeida & Biajone, 2007).

No período referido, bem como atualmente, há uma preocupação social com a educação matemática, reconhecendo-se que o desempenho dos alunos pode ser influenciado pela competência dos professores na área curricular que lecionam (Henderson & Rodrigues, 2008). Aliás, já em 1963, Conant, citado por Henderson e Rodrigues (2008, p. 95), alertou para a possibilidade de um professor “mal-informado poder promover o desenvolvimento de conceitos imprecisos ou uma perspectiva limitada da pretendida aprendizagem, podendo mesmo influenciar, de forma não intencional e negativa a aprendizagem dos alunos”.

A preocupação com a educação matemática que caracterizou esta época originou a criação de modelos que pudessem identificar os saberes docentes e as especificidades da sua profissão e tinham, como objetivo, facilitar a condução de investigações na área e contribuir para o fortalecimento profissional dos próprios professores (Allain, 2005). A definição do saber docente não é unânime e não será uma discussão que traremos para esta investigação. Destacaremos assim a definição apresentada por Tardif (2002, citada por Almeida & Biajone, 2007, p. 286), como sendo “um saber plural, formado pela amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais”. Neste ponto será pertinente fazer a distinção, apontada por vários autores (e.g., Mamede, Candeia, Ferreira & Vieira, 2012; Martins, 2011; Santos, 2007), entre o conhecimento formal da disciplina, neste caso particular da Matemática, e o conhecimento escolar, constituindo, este último, uma “integração e a interação adequadas do conhecimento do conteúdo com o conhecimento didático da Matemática” (Mamede et al., 2012, p.

---

<sup>9</sup> Considere-se por anos elementares os nossos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico e o Ensino Médio o 3º Ciclo do Ensino Básico.

211). O conhecimento matemático de um utilizador é distinto do conhecimento matemático de um professor. Nesta matéria, Turner-Bisset (1997 citado Turner-Bisset, 1999) exemplificou esta distinção através de uma situação de aula lecionada por um especialista em música que tinha como tarefa ensinar o conceito de composição musical. O especialista referido apresentou a definição e, de seguida, simplesmente propôs aos alunos uma tarefa de composição, esperando que os alunos pudessem passar do conceito para a prática de forma imediata.

Ainda na década de 80, Lee Shulman (1986) protagonizou uma investigação que pretendia compreender quais os conhecimentos que o docente mobilizava para ensinar aos alunos um dado conteúdo, nomeadamente, o que estes sabiam sobre os conteúdos que ensinavam, onde e quando adquiriram esses saberes, como e porquê esses saberes se transformaram durante a sua formação e como deviam ser utilizados concretamente na sala de aula. Assim, através da observação do trabalho de 21 professores em início de carreira, ao longo de 1 ou 2 anos, foi-lhe possível conhecer e diferenciar os tipos de conhecimento necessários para o desempenho de profissional docente.

As conclusões deste estudo de Shulman foram publicadas, em 1986, no artigo *Those who understand: knowledge growth in teaching*, e motivaram o interesse dos investigadores mundiais. O aparecimento de inúmeras pesquisas e trabalhos de investigação neste campo (Caseiro, 2010; Gomes, 2012; Hill et al., 2008) tem sido, desde então, apontado por inúmeros autores nos seus trabalhos de investigação de que são exemplos, Allain (2005), Almeida e Biajone (2007), Facci (2004), Gess-Newsome (2001), Gomes (2003), Gomes (2012), Hashweh (2005), Henderson e Rodrigues (2008), Hill et al. (2008), Lüdke et al. (2007), Ma (2009), Mamede et al. (2012), Martins (2011), Mellado (2011), Price e Ball (1997), Ryan e Cooper (2010), Turner (2012) e Viiri (2003).

Os estudos de Shulman, neste âmbito, centraram-se na investigação sobre o “conhecimento que os professores têm dos conteúdos de ensino e o modo como estes se transformam no ensino” (Almeida & Biajone, 2007, p. 289), ou seja, “a base de conhecimentos necessários ao ensino das disciplinas escolares” (Batista & Souza, 2011, p. 4) e, com estes, apresenta uma “classificação acerca dos tipos de conhecimento do professor e das formas que esse conhecimento tem de se organizar” (Lüdke et al., 2007, p. 29). Por este facto, interessa-nos abordar os estudos deste investigador por fornecerem suporte teórico fundamental para os desígnios deste trabalho.

Iniciaremos então este debate pela referência aos aspetos essenciais relatados no artigo referido de Shulman (1986) e posteriores aprofundamentos do próprio autor (Shulman, 1987, 2005), cujas conclusões serão frequentemente revisitadas.

## O Contributo de Shulman (1986, 1987, 2005) para a Identificação dos Saberes Docentes

Neste subcapítulo, faremos um resumo das partes essenciais do já citado artigo de Shulman (1986), *Those who understand: knowledge growth in teaching*, de forma a poder utilizar as ideias protagonizadas por este investigador no desenvolvimento das temáticas principais sobre os saberes docentes relevantes para o nosso trabalho de investigação.

O artigo de Shulman (1986, p. 4) começa com uma crítica à conhecida metáfora de Bernard Shaw: “*quem sabe faz, quem não sabe ensina*”, sendo considerada por Shulman como um “calamitoso insulto para a nossa profissão”, por induzir a ausência de conhecimentos, por parte dos professores, para o exercício da sua profissão. A partir daqui, no artigo, Shulman elabora uma comparação entre o que era valorizado como competência essencial no corpo docente em 1875, através de documentos da época referentes à avaliação de professores, e à data da publicação do artigo, em 1986, como forma de contextualizar historicamente a importância atribuída, pela sociedade, a conhecimentos em áreas específicas por parte do professor.

Em 1875, refere Shulman (1986), nos Estados Unidos da América, os professores estavam sujeitos a provas de avaliação compostas por questões relacionadas com os conhecimentos específicos sobre a matéria que ensinavam e por questões do foro pedagógico e associadas ao ato de ensinar, tendo os primeiros um peso de 95% da pontuação total do teste. Ou seja, à época, era valorizado essencialmente as competências do professor sob o ponto de vista científico<sup>10</sup> no sentido do domínio do conteúdo a ensinar. Assim, em 1875, o conhecimento do conteúdo atingia o seu expoente máximo em detrimento das questões pedagógicas que eram, na época, praticamente ignoradas, até porque a “definição das características da realização pedagógica se reduziam ao conhecimento do conteúdo” (Shulman, 1986, p. 7).

Passado cerca de um século, em 1986, o conteúdo era conspicuamente ausente e a ênfase era atribuída a aspetos relacionados com questões pedagógicas, ou seja, a forma como os professores geriam a sala de aula, organizavam atividades, distribuíam o tempo, estruturavam a sequência das tarefas, planificavam as aulas e avaliavam (Shulman, 1986). A avaliação dos docentes, refere Shulman, dava especial enfoque à capacidade de ensinar e pouca ou nenhuma atenção ao conhecimento do conteúdo.

Para Shulman (1986, p. 6), “na tentativa de simplificar as complexidades do ato de ensinar, os investigadores ignoraram um aspeto fundamental para o desenvolvimento da dinâmica de sala de aula: o conteúdo”, a que Shulman e os seus colegas apelidaram de *o paradigma ausente*, alertando

---

<sup>10</sup> Esta expressão *Conhecimento científico* será utilizada, várias vezes, como sinónima de *conhecimento do conteúdo* ou *conhecimento da matéria*.

para “as consequências sérias da ausência deste paradigma, quer ao nível das políticas quer para a investigação”. Os responsáveis políticos justificariam este facto pela relevância desta matéria nas investigações emergentes cujo relevo era atribuído a questões do foro pedagógico, tal como também por nós foi referido no capítulo anterior aquando da contextualização histórica da evolução curricular.

Shulman (1986, p. 8) sublinha que “não tem pretensão de denegrir a importância do conhecimento ou competência pedagógica no desenvolvimento do professor”, mas considera evidente que, na literatura da época, mais especificamente nas investigações sobre o ensino, as questões centrais sobre o conteúdo não eram valorizadas, dando como exemplo o tipo de questões colocadas e a explicação oferecida pelo professor, intimamente relacionadas com o domínio do conhecimento do conteúdo. Shulman (1986) indaga sobre a possibilidade de Shaw ter proferido a referida metáfora pela antevisão do estado do ensino em 1986 e talvez quisesse dizer: “*quem sabe faz; quem não sabe, mas domina os procedimentos pedagógicos, ensina*” (p. 5).

Ao longo dos tempos, como vimos no capítulo anterior, um ou outro domínio do conhecimento ganhou terreno em matéria de reconhecimento, despoletando diversos estudos nesses âmbitos e consequentes movimentos reformistas dos currículos escolares, e outros perderam terreno. A preocupação com questões relacionadas com a pedagogia em geral, segundo Nóvoa (2007), adquiriu importância após os anos 60 do século passado pela expansão da escola e a profissionalização do ensino que insinuava que, “no fundo, o essencial era o domínio das técnicas e dos processos pedagógicos: saber planificar, saber organizar, o trabalho dos alunos, ter uma boa relação, possuir competências de comunicação, ser capaz de avaliar com rigor, etc.” (p. 35). A investigação na área da educação no âmbito do ensino e da aprendizagem tem alternado historicamente entre períodos em que o interesse pelo conteúdo científico das disciplinas é o tema central dos trabalhos e outros, cujo conteúdo quase desaparece a favor de uma procura dos princípios de instrução que transcende as fronteiras disciplinares (Shulman & Sherin, 2004). Esta realidade está patente e é claramente evidente na comparação que Shulman (1986) faz das ocorrências em 1875 e 1986.

Neste âmbito, e dado o panorama mundial, Shulman (1986), tendo consciência da complexidade do processo de conhecer e transmitir um dado conteúdo, reconheceu a ausência de um quadro teórico e coerente nesta matéria. O questionamento constante ao longo da investigação que efetuou com os professores em início da carreira e que foi descrevendo no decorrer do seu artigo, sobre a temática dos saberes docentes, levou-o a distinguir três categorias do conhecimento base para o ensino: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular do conteúdo. O conhecimento do conteúdo, frequentemente referido como conhecimento científico refere-se, segundo Shulman (1986, p. 8), à “quantidade e organização do conhecimento em si, na mente do professor [que] permitirá ir para além dos factos ou conceitos de determinado domínio”.

O professor precisa de compreender não apenas que algo é assim, o professor precisa de compreender porque é assim; o professor precisa de entender o porquê de ser assim, em que circunstâncias pode ser afirmado e em quais pode ser fragilizado ou mesmo negado. Mais ainda, espera-se que o professor perceba a razão de determinado domínio ser particularmente central numa disciplina e outro seja periférico. (Shulman, 1986, p. 9)

Em 2005, Shulman (p. 12) acrescenta ainda que, “perante a diversidade dos alunos, o docente deve possuir uma compreensão flexível e multifacetada, que lhe permita conceber explicações alternativas dos mesmos conceitos ou princípios.” Ou seja, o docente deve ter a capacidade de “transformar o seu conhecimento da matéria em formas que sejam didaticamente impactantes e assim adaptáveis à variedade que apresentam os seus alunos no que concerne a habilidades e bagagens” (Shulman, 2005, p. 21). Este autor realça ainda a influência da comunicação, através de atitudes e valores, e o entusiasmo face ao que está a ser ensinado e a relação direta que o professor demonstra face ao conteúdo lecionado, na compreensão dos seus alunos.

O domínio do conhecimento do conteúdo, da forma descrita anteriormente, será fundamental para posteriores julgamentos acerca do conhecimento pedagógico e curricular do conteúdo, pois Shulman (1986) defende a necessidade de um bom professor possuir um conhecimento sólido da matéria que ensina, na medida em que este será o suporte para o desenvolvimento dos conceitos básicos e para a compreensão dos princípios da disciplina.

O conhecimento pedagógico do conteúdo vai além do conhecimento pedagógico para ensinar, pois consiste na capacidade de transmitir o conhecimento do conteúdo de forma a ser compreensível para os alunos, “o que inclui as formas mais úteis de representação, as poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações” (Shulman, 1986, p. 9). O domínio deste conhecimento inclui também a noção da dificuldade ou facilidade na aprendizagem de determinado tópico, as conceções e preconceções dos alunos das diferentes idades, as suas implicações e a capacidade do professor em reorganizar o conhecimento dos aprendizes (Shulman, 1986). Em suma, o professor compreende aquilo que é suposto os alunos aprenderem e como se deve ensinar, iniciando-se assim o processo de aprendizagem (Shulman, 2005).

Num outro artigo publicado em 1987, Shulman remeteu para a necessidade de analisar o conhecimento pedagógico do conteúdo na perspetiva específica das disciplinas, ideia que foi trabalhada por Ball (1991, 1993) e Lampert (1990) na área da Matemática e cujos trabalhos são particularmente relevados por Shulman e Sherin (2004).

No que concerne ao terceiro domínio do *Knowledge Base*, o conhecimento curricular do conteúdo, Shulman (2005) refere que, no processo de aprendizagem, o professor desenvolve “um

conjunto de atividades durante as quais se apresentam aos alunos conhecimentos específicos e lhes oferece oportunidades para aprender” (p. 9). Neste âmbito, o conhecimento curricular do conteúdo, refere-se aos materiais instrucionais disponíveis para o ensino de determinado ciclo de estudos que inclui, por exemplo, os conteúdos programáticos, materiais didáticos e sugestões de uso do currículo. Shulman (1986) realça a importância de o professor conhecer o currículo pré e pós-tópico de aprendizagem, referentes a anos anteriores e posteriores, bem como os materiais que os incorpora.

Em suma, Shulman (1986, p. 14) afirma que a competência suprema para ensinar repousa na capacidade de o professor transformar o seu conhecimento em algo compreensível, rejeitando a metáfora de Shaw e corrigindo-a para com “*quem sabe faz, quem compreende ensina*”. Este aforismo de Shulman (1986) é explicado por Nóvoa (2007) dizendo que

esse autor punha claramente a tónica na compreensão dos conteúdos, momento prévio da sua reformulação e transformação em produtos de ensino. Não se tratava de regressar a uma definição dos professores como meros transmissores de saber, mas sim de sublinhar que o saber de referência da profissão docente não pode ser construído à margem da lógica da produção científica das várias disciplinas. (Nóvoa, 2009, p. 35)

Além dos três conhecimentos descritos anteriormente, Shulman (1986, 1987) reconhece a importância de outros domínios do conhecimento relevantes para o professor, tais como o conhecimento dos alunos e da aprendizagem, o conhecimento dos contextos educativos, o conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos. Estes conhecimentos prendem-se com questões de natureza geral e comum ao ensino de todas as disciplinas e não serão abordados neste trabalho.

Este admirável texto de Shulman (1986) e posteriores investigações, além de mundialmente conhecidas e referenciadas, serviram de base para as reformas educativas em vários países e para a promoção da consolidação da

corrente *knowledge base* ao desenvolver o seu próprio programa de pesquisas, tendo como foco as seguintes questões: Qual conhecimento da matéria ensinada que os professores têm em sua mente? Quais são as fontes dos conhecimentos dos professores? O que um professor sabe e quando ele ou ela vem a saber disso? Como um novo conhecimento é adquirido, o velho conhecimento é revisto e ambos, combinados, formam uma base de conhecimentos? (Almeida & Biajone, 2007, p. 287)

Em 2005, Shulman apresenta quatro fontes principais para o *knowledge base* para o ensino. O primeiro refere-se à formação académica da disciplina a ensinar e o segundo ao conhecimento dos materiais institucionais disponíveis para o exercício da docência. Os dois restantes referem-se à experiência profissional e aos fenómenos socioculturais que influenciam a prática docente. No que

concerne à formação académica, Shulman (2005, p. 12) associa-a ao conhecimento do conteúdo: “o saber, a compreensão, as habilidades e as disposições que devem adquirir os alunos” e que se apoia em duas bases: “a bibliografia e os estudos acumulados em cada uma das disciplinas, o saber académico histórico e filosófico sobre a natureza do conhecimento nestes campos de estudo” (p. 12).

### Os Trabalhos de Shulman em Outras Investigações

O estudo de Shulman sobre os saberes docentes não é único e muitos outros autores, tais como Tardif (2004), Gauthier (1991, citado por Almeida & Biajone, 2007), Garcia (1999, citado por Almeida & Biajone, 2007), Perrenoud (1993) e Turner-Bisset (1999) efetuaram trabalhos de investigação onde apresentaram e defenderam um reportório de saberes próprios para o ensino, claramente distintos dos apresentados por Shulman (1986, 1987, 2005) sob o ponto de vista concetual e metodológico (Almeida & Biajone, 2007).

Na investigação da temática dos saberes docentes na área específica da Matemática, encontramos uma quantidade relevante de estudos que focavam, essencialmente, a importância do papel do professor na leção da Matemática na sala de aula, no sentido a que Shulman chama “conhecimento pedagógico da matéria”, e uma ínfima quantidade de estudos que abordam a questão do “conhecimento do conteúdo”. Esta disparidade é, possivelmente, atribuída às correntes temporais a que investigação educacional dá relevo.

O conhecimento pedagógico do conteúdo está relacionado com aspetos pedagógicos que envolvem tanto os saberes curriculares como os pedagógicos (Allain, 2005). Aquele domínio induz uma dialética entre os domínios do conhecimento do conteúdo (o que sabem sobre o que ensinam) e do conhecimento pedagógico (o que sabem sobre o ensino) (Allain, 2005), a que Perrenoud (1993) designou por transposição didática, e que Ryan e Cooper (2010, p. 179) muito resumidamente e de forma perentória e direta clarificam como “muito simples, métodos de ensino para conteúdos específicos”. Também Fernandes (2007) abordou esta questão dizendo que “a investigação tem evidenciado que a natureza das acções pedagógicas e didáticas pode ter uma influência decisiva nas aprendizagens dos alunos” (p. 1).

Nesta matéria, destacamos também Hashweh (2005) que engrandeceu o trabalho de Shulman (1986), em especial o dedicado ao conhecimento pedagógico do conteúdo, classificando-o como um importante contributo para a investigação ao longo dos 20 anos seguintes, de desenvolvimentos concetuais deste tipo de conhecimento. Contudo, apesar de os domínios do *knowledge base* serem

fortemente referenciados na esfera mundial, há vozes discordantes da distinção entre conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo, proposta por Shulman (1986). Turner-Bisset (1999), por exemplo, apresenta a conclusão de muitas investigações reconhecendo que, quer o conhecimento do conteúdo, quer o conhecimento pedagógico do conteúdo, afetam a prática de sala de aula e são modificados e influenciados pela prática (Turner-Bisset, 1999). Contudo, citando Cochran et al. (1993), Turner-Bisset (1999) remete este facto para a possibilidade de o “conhecimento pedagógico do conteúdo ser mais um saber em acção, como se se tratasse de um processo ativo em vez da combinação de conjuntos de conhecimentos base” (p. 42). Ao longo do seu artigo, Turner-Bisset (1999) vai dando a conhecer vários autores que discordam da separação desses conhecimentos, cuja argumentação repousa no facto de não acreditarem ser possível, na prática, distinguir claramente estes dois domínios, ou de defenderem que todos os conteúdos eram apresentados, de uma forma ou de outra, pedagogicamente na sala de aula. Turner-Bisset (1999) critica, também, o conhecimento curricular proposto por Shulman, dizendo que os professores devem ser críticos em relação àquilo que lhes é proposto e que devem ser capazes de produzir o seu próprio material. Para Turner-Bisset (1999, p. 44), os materiais curriculares não são apenas o que está disponível comercialmente ou por prescrição do governo, mas que o conceito vai muito para além disso.

Em Portugal, encontramos trabalhos de investigação e artigos que abordavam a temática do conhecimento matemático para ensinar sob diversos pontos de vista: pedagógicos, curriculares, centrados na utilização de materiais interativos e manipuláveis e alguns sobre o próprio conhecimento do conteúdo. Por exemplo, Caseiro (2010), no seu trabalho sobre o ensino da Estatística, atribuiu principal relevo aos três conhecimentos apresentados por Shulman (1986), considerando este autor um pioneiro no que concerne ao conhecimento docente. Ao longo da sua revisão bibliográfica, apresentou alguns subdomínios dos domínios propostos por Shulman (1986), com o único intuito de reconhecer o papel do professor como o elemento chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula, e que passa pela organização em termos de recursos e opções metodológicas que facilitem a aprendizagem dos seus alunos.

Muitos outros trabalhos de investigação e documentos descritivos, reflexivos ou conclusivos, remetiam-nos para a aplicação do Plano de Formação Contínua de Matemática levada a cabo por várias instituições do ensino superior, antes da entrada em vigor do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (e.g., Canavarro et al., 2009; Pires & Martins, 2008). Muitos destes estudos são relevantes e, apesar de apontarem a necessidade de se aumentar o conhecimento do conteúdo por parte do professor, debruçam-se sobre diversas particularidades que combina a teoria com a prática.

**O conhecimento do conteúdo: contributos e interpretações para a mesma discussão**

Kilpatrick, Swafford e Findell (2001, citados por Henderson & Rodrigues, 2008, p. 94) defendem que o facto de haver a preocupação de tornar a matemática acessível a todos “aumenta a necessidade de proficiência em matemática, e, conseqüentemente, uma necessidade de um ensino de qualidade”, no qual o domínio do conhecimento do conteúdo desempenha um papel fundamental na forma como esta área científica, em particular, é ensinada (Amaral, Ralha & Gomes, 2011; Carvalho & Gil-Peréz, 1998, citado por Allain, 2005; Gomes, 2012; Henderson & Rodrigues, 2008; Hill et al., 2008; Ma, 2009; NCTM, 2008; Polya, 1981; Price & Ball, 1997; Shulman, 1986). Referimo-nos ao conhecimento do conteúdo para a instrução que assume, em vários estudos realizados com base em alegações lógicas e em observações de aulas, um carácter fundamental (Hill et al., 2008).

Nos últimos anos, o interesse privilegiado, por parte da comunidade internacional, pelo conhecimento pedagógico da matéria tem conduzido o interesse pelo conhecimento do conteúdo para segundo plano (Askew et al., 1997, citado por Henderson & Rodrigues, 2008; Shulman, 1986) não deixando, contudo, de ser considerado por estes, um conhecimento fundamental. Por exemplo, Hashweh (2005, p. 279) atribui uma enorme importância ao conhecimento pedagógico do conteúdo repetido no início da frase no uso de novos materiais manipuláveis e metodologias de ensino, mas, reconhece que este “não resulta de um profundo conhecimento de uma categoria única de conhecimento”, remetendo-o para o necessário conhecimento do conteúdo. Também Lorenzato (2006), em prol desta realidade, reconhece a importância do domínio da pedagogia para ensinar, mas

ninguém consegue ensinar o que não sabe, ... ninguém aprende com aquele que dá aulas sobre o que não conhece. (...) Mesmo quando os alunos conhecem menos que um professor que dá aulas sem o domínio do assunto, eles percebem, no mínimo, a insegurança do professor. (...) Poderia ele [um professor que não conhece matemática] sentir o prazer de ensiná-la? (...) Em contrapartida, o professor que ensina com conhecimento conquista respeito, confiança e admiração de seus alunos. (Lorenzato, 2006, pp. 3-4)

Os autores pesquisados são consensuais na importância deste domínio para o ensino da Matemática e estabelecem diferentes implicações ou relações entre o conhecimento do conteúdo e outros domínios ou ações, como podemos constatar nos próximos parágrafos. Assim, neste subcapítulo, vamos dar particular ênfase ao conhecimento do conteúdo na área específica do ensino da Matemática através do recurso a trabalhos e investigações, nacionais e internacionais, nesta matéria. Contudo, corroborando com Hashweh (2005), estamos conscientes de que “o conhecimento do conteúdo isoladamente não é suficiente” (p. 279), “não basta saber Matemática para saber ensinar Matemática, mas o que o professor sabe vai influenciar o que os alunos aprendem” (Monteiro, Costa &

Costa, 2004, p. 171) e o saber científico, específico de cada área, é a base de todo o conhecimento docente (Shulman, 1986).

Uma ideia partilhada por todos, incluindo professores, é a de que o domínio do conteúdo a ensinar é o primeiro critério, pois esta exigência desempenha o papel principal para que o professor, de qualquer área científica, seja considerado um profissional competente, ou seja, um professor cientificamente instruído (Allain, 2005; Facci, 2004; Hill et al., 2008; Gomes, 2012; Lorenzato, 2006; Shulman, 1986). Gomes (2012, p. 234) acredita ter sido Hill et al. (2008), o primeiro grupo de investigadores “a abordar esta questão com sucesso tendo recolhido evidências da influência do conhecimento do conteúdo por parte do professor no seu ensino”. Este trabalho, semelhante ao de Sulman (1986) nas evidências recolhidas, distingue-se deste pelo público-alvo considerado, ou seja, Shulman (1986) investigou futuros professores e Hill et al. (2008), professores profissionalizados e no ativo.

Dada a escassez de estudos reais realizados sobre esta matéria, muitos investigadores aludiram a uma hipotética relação entre o domínio do conteúdo, a sua instrução por parte do professor e a respetiva aprendizagem por parte dos alunos. Esta hipótese leva-nos a uma outra questão que é a de saber se é possível afirmar que a qualidade do conhecimento do conteúdo por parte do professor modifica a sua forma de ensinar e, conseqüentemente, estimula e promove a melhoria da aprendizagem dos alunos. Hill et al. (2008) referem que

alguns estudos publicados no período de 1990-1995 (...) definiram uma fase marcada pela preocupação dos representantes políticos sobre a qualidade do trabalho realizado na aula de matemática. Em cada estudo deste género, os autores observaram erros matemáticos significativos ou imprecisões durante a instrução nas aulas, desde metáforas inapropriadas para procedimentos matemáticos (Heaton, 1992) às definições incompletas (Stein et al., 1990), aos enganos matemáticos comuns (Putnam et al., 1992). Outros estudos foram além dos erros para tentarem identificar padrões emergentes na instrução dos professores com menos conhecimentos. (p. 433)

Acreditava-se, assim, que o conhecimento do conteúdo por parte do professor poderia levar a formas de conhecimento mais relacionadas com o ensino e, desta forma, poder promover a aprendizagem dos alunos (Hill & Ball, 2004).

A publicação pelo NCTM (2008) dos *Princípios e normas para a matemática escolar* dá ênfase ao conhecimento do conteúdo pelo facto de poderem conferir segurança e confiança aos professores, influenciando, deste modo, o que eles ensinam e a forma como ensinam. Este documento não podia esquecer a componente pedagógica, remetendo, também, para o professor, o papel das suas conceções na medida em que determinam a escolha das tarefas matemáticas, os ambientes de aprendizagem que criam e o discurso a utilizar nas aulas (NCTM, 2008).

Hill et al. (2008), NCTM (2008) e Turner (2012) também associam aos conhecimentos profundos do conteúdo a ensinar, por parte do professor, a promoção de ambientes ricos e propícios à aprendizagem dos alunos, que inclui uma forma de comunicação matemática, onde o tipo de questionamento assume um papel fundamental e, em conjunto, favorecem o desenvolvimento do raciocínio matemático (Hill et al., 2008; NCTM, 2008; Turner, 2012).

Amaral, Ralha e Gomes (2011, p. 12) também defendem que o conhecimento sólido da matéria “suporta a autoconfiança com que um professor aborda o seu ensino e justifica as suas opções, num verdadeiro exercício de autonomia profissional”.

Henderson e Rodrigues (2008) e Price e Ball (1997), nos estudos efetuados, concluíram pela existência de uma limitação ao nível da comunicação em sala de aula, mais especificamente no tipo de questionamento proporcionado por professores com pouco domínio do conteúdo abordado. As questões colocadas por estes professores provinham dos textos de apoio ou dos manuais escolares e eram marcadas e orientadas para respostas pouco alargadas sob o ponto de vista concetual (Henderson & Rodrigues, 2008; Price & Ball, 1997), evitando, desta forma, riscos “devido à sua incapacidade de questionar algo acima de um nível superficial” (Henderson & Rodrigues, 2008, p. 95).

O conhecido trabalho de Polya (1981), sobre a resolução de problemas e inspirado na sua larga experiência como professor de Matemática, propõe os *Dez mandamentos para professores*, onde, nos dois primeiros, dá relevo à motivação pelo conteúdo e o domínio do conhecimento. Estes são, também, referidos por Ball (1991), como proveitosos para a aprendizagem, remetendo-os para a relação pessoal do professor com esta disciplina em termos emocionais e atitudinais.

O estudo de caso realizado por Hill et al. (2008) com 5 professores, permitiu detetar, tal como já referimos, a existência de uma forte relação entre a qualidade da instrução e o nível de conhecimento matemático. Estes autores reconhecem que a oferta aos alunos de “boas explicações matemáticas e representações, descrições explícitas de natureza disciplinar, acesso equitativo ao pensamento matemático, a uma matemática precisa e atividades matemáticas ricas, em sala de aula, resultou em oportunidades para os estudantes aprenderem matemática” (p. 496). E, ainda, que a “ampla variação na qualidade matemática das aulas observadas parecem ser, mais provavelmente, uma variável dependente do que estes professores sabem, matematicamente” (p. 499). Ora, Hill et al. (2008) observaram aulas de professores com grande conhecimento matemático e cuja instrução era marcada pela apresentação de ricos e variados exemplos matemáticos, pela forma como respondiam aos alunos, pela escolha de exemplos inteligentes que pudessem assegurar a compreensão de todos, entre outros. Contrariamente, os mesmos autores, observaram que os professores com baixo conhecimento do conteúdo apresentavam muitas vezes aulas pobres, erros matemáticos incluindo erros na linguagem, atividades pobres no que concerne à promoção do desenvolvimento da dinâmica

da sala de aula, ou, a realização de atividades com os alunos que nem os próprios professores as compreendiam. Apesar de tudo o que acabamos de referenciar, Hill et al. (2008) dizem não poderem afirmar que quanto maior é o conhecimento matemático mais rica é a instrução na sala de aula, mas dizem que podem afirmar, com este estudo, haver uma forte correlação destas duas variáveis, ou seja, que existe uma poderosa relação entre o que um professor sabe, como mostra o que sabe e o que pode fazer na sala de aula.

Outros autores evidenciam, também, a existência de constrangimentos por parte dos professores que possuem um conhecimento do conteúdo pobre, limitado ou apresentando erros inocentes de caráter científico.

O conhecido caso de Mrs. Oublier é apresentado por Cohen (1990) e citado em muitos trabalhos de investigação. Mrs. Oublier é uma professora com pouco conhecimento matemático, cujo trabalho em contexto de sala de aula é marcado pela aceitação de palpites imprecisos por parte dos alunos, sem tentar melhorar ou desenvolver as suas respostas, pela incapacidade de aproveitar as oportunidades para promover a compreensão dos alunos e por não fomentar discussões que levem a uma visão alargada da matemática. Do mesmo modo, Heaton (1992) destacou Sandra Stein pelos seus comportamentos indesejáveis na instrução matemática, nomeadamente no uso de metáforas inapropriadas e uma visível falta de consciência matemática. Também Stein, Baxter e Leinhardt (1990) apresentaram o caso de uma professora que possuía um limitado conhecimento das funções matemáticas, cuja definição, por si elaborada, apresentava ausência de elementos fundamentais ou analogias que limitavam a extensão futura do tema. Estas realidades permitem afirmar que o conhecimento limitado do professor restringe a sua capacidade de promover uma aprendizagem concetual entre os estudantes (Ma, 2009) e compromete o conhecimento pedagógico do conteúdo que, conseqüentemente, pode ter efeitos negativos sobre a instrução e o progresso dos alunos e, portanto, sobre a aprendizagem (Gomes, 2012, pp. 234-235).

Gresham (2008) acrescenta aos vários aspetos limitativos, referidos anteriormente, o incremento dos níveis de ansiedade por parte do professor quando se sente inseguro ao nível dos conhecimentos científicos, originando implicações na sua prática docente de que é exemplo a tendência para o ensino tradicional, tais como a leitura, o ensino através do manual escolar, a memorização e o ensino de competências básicas em vez de conceitos matemáticos.

A relação entre o domínio do conhecimento do conteúdo e a forma como o professor faz uso do manual escolar, é, também, evidenciado nos trabalhos de Allain (2005) e Price e Ball (1997), ou seja, no caso de o professor possuir carência de conhecimentos da matéria, este torna-se num mero “transmissor mecânico dos conteúdos do livro-texto” (Carvalho & Gil-Peréz, 1998, citado por Allain, 2005, p. 47). No caso de possuir conhecimento profundo sobre a matéria que ensina, o professor é

capaz de adaptar e usar as ideias dos manuais de um modo mais produtivo sob o ponto de vista matemático, e o seu uso não é sinónimo de limitação por parte do professor (Hill et al., 2008; Price & Ball, 1997). Estes últimos autores engrandecem os manuais escolares da altura pela diversidade e riqueza das atividades propostas e afirmam que, com estes, os professores não precisam de procurar criar novas atividades mas antes saber usar o manual de forma proveitosa e em prol de uma aprendizagem significativa. Fernandes (2007) refere que, na realidade portuguesa, os professores usam o manual escolar como uma “utilização rotineira, pouco crítica página-a-página” (p. 1), defendendo uma seleção de tarefas desafiadoras que suscitem a mobilização e integração de conhecimentos e de capacidades que permitam aprendizagens profundas e diversificadas.

O chamado *ensino tradicional* não está somente associado aos conhecimentos científicos redutores por parte do professor, está, também, como já referimos, associado às vivências escolares e académicas e nas próprias experiências profissionais que prevaleceram durante largos anos (Mabuchi, 2000). Em consonância com este assunto, Domingos (2007) fala da necessidade de mudança do *paradigma da transmissão*, que acreditava, na altura, continuar a prevalecer nas salas de aulas, para o *paradigma da interação*, que privilegia a comunicação entre professor e aluno à luz dos ideais apoiados no socio-construtivismo, onde as aprendizagens são socialmente construídas. Ponte e Sousa (2010) falam da mudança da aula expositiva para a aula exploratória, ou seja, “do ensino direto para um ensino-aprendizagem exploratório” (Santos, 2011, p. 33), onde a comunicação surge como um elemento fundamental da qual fazem parte, indiscutivelmente, as questões colocadas pelo professor: “boas perguntas e de tipos diversos” (Ponte & Sousa, 2010, p. 103). Para Ponte e Sousa (2010), estas questões podem ser de focalização (orientação para um certo aspeto), confirmação (de resposta correta ou de domínio de certos conhecimentos básicos) ou de inquirição (permitem ao professor e alunos compreender um certo raciocínio), sendo estas últimas as que “melhor evidenciam o raciocínio e mais favorecem a sua compreensão da matemática” (p. 104).

Rocha (2009) também nos remete para a mesma discussão, mas utilizando outro vocabulário, nomeadamente, a existência, ainda, da “visão de professor como um *técnico*, alguém que transmite conhecimentos, um *tradutor*, alguém que traduz (para os alunos), procurando simplificar, o conhecimento científico já produzido e qual *treinador* procura que os seus alunos através da repetição de exercícios tipo adquiram certas destrezas. Estas técnicas de treino nem no futebol já têm o mesmo valor” (p. 21).

Em suma, o domínio por parte do professor do conhecimento do conteúdo influencia a ação deste e, conseqüentemente, a qualidade da instrução na sala de aula, visível através da seleção das atividades, uso de estratégias apropriadas, a forma e natureza das questões colocadas, a capacidade de responder apropriadamente, a avaliação da compreensão dos alunos e a promoção de uma atitude

positiva face à Matemática, no próprio esforço e habilidade do professor para ajudar os alunos a aprender (Caseiro, 2010; Henderson & Rodrigues, 2008; Hill et al., 2008).

Nesta matéria, Goulding (2003) vai mais longe, distinguindo duas ramificações do conhecimento do conteúdo, também defendida por Ball (1991):

- o conhecimento substantivo (factos chave, conceitos e princípios) que pode adotar duas formas:
  - o conhecimento proposicional (tópicos, procedimentos e conceitos);
  - o conhecimento processual que inclui a capacidade de o professor estabelecer relações entre tópicos, procedimentos e conceitos;
- o conhecimento sintático (veracidades e provas próprias da disciplina).

Estas ramificações são utilizadas igualmente por Henderson e Rodrigues (2008) no estudo elaborado com alunos da formação inicial do curso de professores de matemática do ensino elementar, na Escócia, acrescentando que,

se os professores acreditam que a matemática é simplesmente uma progressão de regras que devem ser aplicadas numa certa ordem, não serão capazes de fazer conexões, nem de passar do familiar para o desconhecido. Os professores devem ter uma sólida compreensão dos conceitos do conhecimento substantivo que ensinam para que possam fazer, eles próprios as conexões. (p. 95)

Este estudo foi um de vários relacionados com o conhecimento matemático dos professores que fizeram emergir os problemas relacionados com os conhecimentos elementares de matemática por parte dos professores (Hill et al., 2008), principalmente nos primeiros anos de escolaridade. Vários estudos comprovam que as dificuldades dos alunos dos anos elementares, ao nível das concetualizações, resultam do fraco conhecimento matemático dos professores (Thaqi, Giménez & Rosich, 2011). Mesmo na matemática elementar, o professor deve possuir um conhecimento vasto, profundo e flexível para poder ensinar (Ball, 1990, citado por Henderson & Rodrigues, 2008; Ma, 2009; Mamede et al., 2012; Martins, 2011; Turner, 2012).

Gomes (2012) apresenta-nos um artigo centrado nos professores do ensino elementar (1.º e 2.º CEB), a quem atribui “um papel crucial na introdução de ideias matemáticas e conceitos básicos, mas fundamentais (...) [para] iniciar um processo de aprendizagem matemática, com cada estágio altamente dependente do anterior” (p. 233) e que marca o “início formal do percurso matemático dos indivíduos” (Gomes et al., 2012, p. 761).

Ma (2009), Martins (2011) e Gomes (2012) defendem uma atenção especial a dar à Matemática elementar e apontam para a necessária posse de conhecimentos matemáticos sólidos e eficazes, por parte do professor, por aqueles constituírem os anos basilares para a construção dos alicerces da

futura aprendizagem matemática, uma vez que muitos conceitos serão essenciais no desenvolvimento dos ramos mais avançados da disciplina.

Nápoles (2007) relembra que, “para ensinar seja o que for, independentemente do seu domínio e grau de dificuldade, é preciso saber muito mais além do que se pretende ensinar”. Mas, “muitas vezes parte-se do princípio que pelo facto dos tópicos de Matemática escolar serem tão básicos devem também ser fáceis de ensinar” (Martins, 2011, p. 98). Talvez por este facto, durante muito tempo em Portugal, tivesse havido pouca preocupação com a formação matemática do professor do 1.º ciclo, e que este desígnio pudesse estar a cargo de qualquer professor generalista (Mamede et al., 2012).

No que concerne à formação inicial de professores para o ensino da Matemática Elementar, Rowland, Martyn, Barber e Heal (2000) descobriram que os futuros professores sem um forte conhecimento sobre a matéria, mesmo depois de terem finalizado o curso, quando avaliados, apresentavam um desempenho pobre no ensino desta área científica. Por este facto, Goulding (2003) relata a preocupação de políticos e estudiosos na necessidade de os cursos de formação inicial assegurarem que os futuros professores adquiram capacidades e competências para usar o conhecimento do conteúdo de uma forma eficaz e em prol do uso de pedagogias apropriadas. Por exemplo, Leung e Park (2002) e Ma (2009) atribuem a alta literacia e competência matemática dos alunos de Hong Kong, Coreia e China, pelo menos, em parte, à competência dos seus professores. Ma (2009) vai ainda mais longe referindo que em termos de anos de escolarização, os professores americanos apresentam um ensino mais alargado do que os professores chineses mas com um domínio da matemática elementar fortemente inferior ao dos chineses e afirma que “o conhecimento dos professores chineses mostrou-se coerente, enquanto o dos americanos claramente fragmentado” (Ma, 2009, p. 189).

Outro estudo, desta vez na Noruega, através do relatório NOKUT<sup>11</sup> de 2006, revela dados de uma pertinência extraordinária. Este relatório descreveu a maior avaliação feita aos cursos de educação para os anos elementares e concluiu que havia um declínio ao nível das qualificações dos estudantes que frequentavam os cursos a aspirantes a professores (Munthe, Malmo & Rogne, 2011). Em 2005, foi levado a cabo uma medida que proibia a entrada nestes cursos de alunos com baixas classificações a Matemática ou a língua materna no ensino secundário. Se esta medida tivesse sido aplicada nos anos anteriores, previa-se que 30% a 50% dos alunos atualmente a frequentá-los não teriam sido admitidos (Munthe, Malmo & Rogne, 2011). Nesta corrente, em Portugal, Santos (2007), em entrevista à revista Educação e Matemática (EeM) da APM, afirma que “nem sempre os alunos que

---

<sup>11</sup> Agência Norueguesa para Garantia da Qualidade na Educação.

entram para a formação inicial de educadores de infância e de professores do 1.º ciclo têm uma formação matemática base desejável” (p. 91).

No nosso país, desde a entrada do processo de Bolonha, os cursos de formação inicial para o ensino dos primeiros anos, é composto por três anos de licenciatura em Educação Básica, seguida de um mestrado profissionalizante com uma duração que varia entre 1 a 2 anos, consoante seja para a lecionação de 1.º ciclo (1 ano), pré-escolar (1 ano), pré-escolar e 1.º ciclo (1,5 anos) ou 1.º e 2.º ciclos (2 anos) (Decreto-Lei n.º 43/2007). Os alunos que concluírem o mestrado para professores dos 1.º e 2.º ciclos de Ensino Básico, ficarão com habilitação profissional para as áreas de Matemática, Língua Portuguesa, Ciências da Natureza e História e Geografia de Portugal, pelo que são designados por cursos de formação para professores generalistas<sup>12</sup>. Os cursos pré-Bolonha eram constituídos por 4 anos de licenciatura, quer para Professores do 1.º CEB, quer para os cursos de 1.º e 2.º CEB em simultâneo. Relativamente a estes, Nápoles (2007), observou que o tempo dedicado à Matemática era largamente prejudicado, não somente para o 1.º ciclo, mas, também, nos cursos de formação inicial do 2.º ciclo, defendendo ser nestes “níveis de ensino que se lançam as primeiras pedras para a construção do pensamento matemático, o que acarreta uma enorme responsabilidade na atitude futura dos alunos em relação à Matemática” (p. 92). Em concordância com este facto, Veloso (2007) aponta para “a existência de uma preparação matemática dos professores insuficiente para um desempenho aceitável da profissão”, baseando-se na sua experiência como formador de cursos de formação contínua nos últimos 20 anos, referindo que essa realidade é, agora, mais evidente. Esta constatação de Veloso não se limita à formação inicial dos primeiros anos, mas, também, ao nível do 3.º ciclo e secundário, na medida em que os primeiros sobressaem pela ausência de componente matemática suficiente, e os últimos pelo grau de formalização das matérias e escassa relação estreita com a prática.

Esta realidade não deixa de ser preocupante e remete-nos para a necessidade de a formação inicial para a docência dar maior ênfase ao domínio (Nápoles, 2007; Veloso, 2007) desta área do saber. No entanto, a formação inicial é apenas o início de um processo de construção e identidade profissional que inclui, obviamente, o conhecimento científico (Tempera, 2010), remetendo-nos para a necessidade da formação contínua ao longo dos anos de lecionação.

Na apresentação pública dos resultados do PISA 2003, a Ministra da Educação de então, Maria de Lurdes Rodrigues, anunciou algumas medidas de combate aos resultados destas avaliações e das provas nacionais de aferição realizadas no âmbito da Matemática (Mamede et al., 2012). De salientar que, segundo os dados divulgados nos relatórios elaborados pelo GAVE sobre as provas de aferição

---

<sup>12</sup> Estes mestrados, por decisão recente do ministério de Educação, serão novamente alterados regressando à organização anterior mas continuando com a tipologia de mestrado profissionalizante, ou seja, surgirão dois mestrados profissionalizantes, um para conferir profissionalização para Português e História e Geografia de Portugal e outro para conferir profissionalização para Matemática e Ciências da Natureza.

realizadas ao 6.º ano de escolaridade, nos últimos 10 anos, a Geometria é o tema onde os alunos apresentam sistematicamente maiores dificuldades (Rebello & Gomes, 2012).

Uma das medidas anunciadas pela ministra foi um programa de formação contínua para professores de Matemática do 1.º ciclo do Ensino Básico, que se iniciou em outubro de 2005 (Mamede et al., 2012; Pinheiro & Cabrita, 2012; Rocha, 2006). No ano letivo seguinte, tal programa foi alargado ao 2.º CEB (Pinheiro & Cabrita, 2012). Este programa de formação envolveu todas as instituições do ensino superior responsáveis pela formação inicial de professores destes ciclos, que o concretizaram seguindo um plano de ação definido pela Comissão de Acompanhamento<sup>13</sup>, cujo “primeiro objectivo [era] promover um aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores do 1.º ciclo envolvidos, tendo em conta as actuais orientações curriculares neste domínio” (programa elaborado para esta Formação Contínua citado por Rocha, 2006, p. 18), de forma a melhorar as condições de aprendizagem da Matemática e a valorizar as competências dos professores nesta disciplina (Perez, 2008). Rocha (2006) relata-nos que a sessão de trabalho com os coordenadores das equipas de formação, promovida pela Comissão de Acompanhamento, tentava “criar consensos acerca do que deve ser e como se desenvolve, o conhecimento matemático do professor do 1.º ciclo em articulação com o seu conhecimento didático e curricular” (p. 18). Aqui, o conhecimento matemático era privilegiado porque, por exemplo, através deste, o professor utilizaria formas adequadas e compreensíveis, mas rigorosas, das definições matemáticas, adotando uma postura crítica em relação às definições e representações veiculadas em materiais de ensino, nomeadamente, o manual escolar.

A Comissão de Acompanhamento do PFCM, reconhecendo a ausência de textos científicos, escritos em língua portuguesa e especialmente dirigidos aos professores do 1.º ciclo, que lhes permitisse uma atualização e aprofundamento de conhecimentos científicos, proporcionou a produção de quatro brochuras, sendo uma delas dedicada à Geometria e Medida (Rocha, 2006).

O Plano de Ação da Matemática (PAM) surge de forma semelhante à da Formação Contínua em Matemática, ou seja, após a análise e reflexão dos resultados obtidos no exame nacional pelos alunos do 9.º ano de escolaridade em 2005, e com a mesma finalidade: a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática (Santos, 2008; Santos & Pires, 2009). O Plano da Matemática (PM) foi uma das 15 medidas contempladas nas seis ações que integram PAM. Das ações referidas, destacamos o Novo programa de Matemática para o Ensino Básico e a promoção da formação contínua em Matemática para todos os ciclos do Ensino Básico e Secundário (Santos, 2008). O PM foi previsto para vigorar durante três anos letivos (Santos, 2008) e um dos grandes investimentos deste projeto foi a

---

<sup>13</sup> Esta Comissão foi constituída em Maio de 2003, precisamente um mês depois do anunciado Programa pela Ministra da Educação. Esta Comissão elaborou o programa de formação que apresentou às IES, para discussão, cerca de um mês após.

constituição de pares pedagógicos, que passava por ter dois professores na sala de aula ou na aula de estudo acompanhado, para tornar possível a realização de “tarefas de natureza mais aberta, de usar materiais e tecnologias ou realizar um apoio mais individualizado” (Santos & Pires, 2009, p. 1). Por estes motivos, o PM era distinto de contexto para contexto, conferindo-lhe um caráter de autonomia consoante cada realidade (Santos, 2008).

No trabalho desenvolvido por Pires e Martins (2008), são descritas as linhas orientadoras presentes no PFCM, cujos autores fazem a analogia dos três principais domínios do conhecimento profissional com os três domínios do conhecimento definidos por Shulman (1986), centrando o restante documento na evidência da mudança das práticas de ensino dos formandos.

### **As Mudanças Conceituais do Professor**

O assunto em que se apoia este trabalho de investigação diz respeito ao conhecimento matemático dos professores sob o ponto de vista formal e às suas dificuldades ou constrangimentos em se atualizarem cientificamente, por consequência, ou não, dos movimentos reformistas, especificamente relacionados com alterações ao nível dos conteúdos programáticos. Neste subcapítulo, daremos a conhecer alguns estudos sobre o papel do professor nas reformas curriculares.

As reformas escolares são altamente baseadas em pressupostos teóricos que implicam desafios no sentido de aprender e ensinar. Apesar de exigirem do professor um processo de adaptação custoso, o sucesso destas reformas “depende muito da forma como os professores compreendem e interiorizam as teorias que fundamentam as alterações pedagógicas propostas” (Shulman & Sherin, 2004).

Alguns autores (Huberman, 1994, citado por Kennedy, 2002; Fisher, 2007; Martins, 2011; Price & Ball, 1997) denunciam uma resistência dos professores às mudanças, ficando agarrados a velhos hábitos, pois a mudança faz com que se sintam desconfortáveis. Contudo, “não é possível modificar a escola contra ele, [o professor], ou apesar dele” (Ponte, 1994, citado por Martins, 2011, p. 33) e Priestly (2003, citado por Fisher, 2007) acredita que os problemas relacionados com a implementação das reformas serão “mitigados a partir do momento em que os professores se acostumem aos novos programas e a orientação aumente” (p. 106).

Fisher (2007), num pequeno estudo sobre a reação dos professores na reforma educativa do ano 2000, em Inglaterra, com vista a melhorar a qualidade do ensino e a providenciar aprendizagens significativas através de uma mudança nas abordagens e conteúdos, relatou que “mais de 70% dos

professores discordavam ou discordavam seriamente que as reformas pudessem encorajar abordagens flexíveis e inovadoras para ensinar e aprender e tinham reservas consideráveis após o primeiro ano” (p. 106) da sua implementação. Mais ainda, Fisher (2007) verificou que os três professores de Matemática que participaram no estudo, de uma amostra de dezassete docentes de várias áreas, modificaram “o estilo de ensino e aprendizagem na sua área específica (...) mas para pior” (p. 108) e que, nesta área, “a preocupação estava mais centrada em “passar nos exames do que num envolvimento genuíno com a matéria” (p. 108). Apesar de haver professores que atribuíam ao novo currículo alguns benefícios, “aproximadamente, dois terços destes professores sentiam que o seu ensino estava ‘comprometido’” (p. 109) e metade sentiam-se aborrecidos e infelizes com as mudanças e menos entusiasmados a lecionar os novos conteúdos.

Huberman (1994, citado por Kennedy, 2002), num estudo baseado em biografias de professores já reformados, apercebeu-se do desencanto dos mesmos no início da implementação das reformas e constatou que aqueles que não fizeram grandes esforços na implementação das reformas e foram fazendo apenas uns ajustes à dinâmica das suas aulas revelaram-se bastante mais satisfeitos no final da sua carreira.

Kennedy (2002), num trabalho com 45 aulas gravadas e analisadas e posteriores entrevistas aos professores observados sobre as mesmas, percebeu a notável influência das reformas curriculares nas carreiras dos professores. Apesar de neste estudo não se ter baseado nos conhecimentos estabelecidos por Shulman (1986), Kennedy (2002) estabeleceu, também, três campos necessários no âmbito do conhecimento do conteúdo, sendo um deles “o conhecimento sistemático que é adquirido essencialmente através de escolas e universidades [60% em programas de desenvolvimento profissional e 9% em cursos universitários], artigos de pesquisa, jornais [8%] e associações profissionais [3%] e que tende a ser mais teórico, codificado e abstrato” (p. 357). As percentagens citadas anteriormente referem-se às mencionadas pelos professores nos vários episódios de aulas, havendo ainda a destacar a aprendizagem através dos colegas (15%) e através das Normas para o Ensino Profissional do NCTM (5%) (Kennedy, 2002).

As reformas anteriores, referidas por Price e Ball (1997), tinham promovido alterações curriculares tais como a inclusão de tópicos como probabilidades, geometria e teoria dos números e, estrategicamente, a redução da importância atribuída à velocidade na resolução das atividades matemáticas e aos exercícios de memorização, para dar ênfase ao significado das próprias ideias matemáticas. O estudo que estes autores elaboraram pretendia tirar ilações sobre as mudanças ocorridas no professor aquando de uma das reformas curriculares e teve lugar numa escola onde foram distribuídos aos docentes, textos com ideias, sugestões e um guião de orientação curricular conceitual para a sua atualização. A coordenadora de matemática dessa escola sabia que “um texto

com boa informação era necessário para muitos professores que não tivessem um background matemático suficiente [mas a] (...) grande questão que se colocava era o que os professores 'sem background matemático' poderiam fazer com esta 'boa informação'" (p. 644). Apesar de os professores estarem a usar os documentos orientadores da reforma, Price e Ball (1997) repararam na existência de "poucos recursos que pudessem sustentar uma verdadeira mudança", havendo mesmo mais recursos disponíveis para o ensino da língua materna do que para o ensino da matemática. Estes estavam "mais inclinados para o acréscimo do uso de materiais manipuláveis e para a relevância da resolução de problemas no ensino da matemática" (p. 639), remetendo-nos, novamente, para o *paradigma perdido* referido por Shulman ou para o *conteúdo importa* mencionado por Stodolsky (1988). Price e Ball (1997) concluíram que apenas 1 dos 11 professores estava profundamente envolvido nas ideias da reforma da matemática pelo que as mudanças eram apenas aparentes. Muitos alunos continuavam a aprender de um modo tradicional, marcado pela memorização e execução de procedimentos rotineiros, resolução de exercícios, em aulas centradas no professor que falava e em que os alunos escutavam e praticavam (Price & Hall, 1997). As questões colocadas pelo professor provinham dos textos de apoio ou dos manuais escolares, cujo questionamento era orientado e marcado por respostas pouco alargadas sob o ponto de vista concetual (Price & Ball, 1997).

Esta realidade remete-nos para a existência de um paradoxo no esforço para efetuar a reforma, induzindo, por consequência, uma visão da prática escolar e do significado de literacia matemática para a sociedade (Price & Ball, 1997). É evidente a crença da necessidade de uma maior atenção para o conteúdo específico de cada área de ensino, sendo este um dos aspetos pelo qual "as reformas na matemática podem ter poucas possibilidades de germinar" (Price & Ball, 1997, p. 639).

Se a instrução matemática for pobremente apoiada em termos de recursos, e sendo uma fase de difícil mudança, quer pela alteração do currículo instalado, quer pela necessidade de aprendizagem, ou mesmo pela ausência de um suporte teórico substancial nos professores para tentar perceber a razão das mudanças promovidas, em muitas escolas, o currículo e as experiências matemáticas dos alunos ficam condenados à mesma prática de há 50 anos atrás, apesar das várias retóricas e preocupações (Price & Ball, 1997). Estes autores concluíram que, apesar da publicação de inúmeros documentos orientadores destas reformas, considerados documentos-chave para a promoção das mudanças no ensino e aprendizagem da Matemática, os efeitos desejáveis não foram alcançados. Os professores precisam de oportunidades para aprenderem mais matemática em profundidade, de forma a poderem implementar uma nova dinâmica de sala de aula, isto é, para "os professores modificarem a sua forma de ensinar direcionada para as reformas precisam mais do que empacotar os velhos livros e desempacotar os novos" (Price & Ball, 1997, p. 650). Esta afirmação surge com o estudo de Price e Ball (1997), mas não é o único, como veremos de seguida, pois existem

diversos estudos cujo objetivo é sustentado na análise da implementação destas e outras reformas em Portugal e em outros países.

Os programas de formação contínua são um exemplo do esforço dos professores e dos governantes em promover a atualização de saberes e práticas educativas, não apenas nas fases de reformas educativas. Hill et al. (2008) deram, também, a conhecer vários estudos sobre as implicações de programas de formação contínua no âmbito de conteúdos específicos a serem lecionados, tais como a geometria, números racionais e operações numéricas, registando melhorias na prática docente. Estes autores acreditavam e concordavam com a proposta de Shulman (1986), que a solução estaria na formação contínua dos professores em matemática elementar cujo conhecimento seria a chave para a adoção de uma rigorosa e rica matemática.

A preocupação ao nível internacional, também é partilhada por especialistas em educação do nosso país. Por exemplo, Matos (2010, p. 193) alerta para a necessidade de a aplicação das novas orientações curriculares no terreno ter de começar a ser vista como um processo fortemente problemático, pois a sua aplicação na atividade letiva corrente não depende da simples adesão concetual do professor, mas requer um contexto favorável (em termos de escola) e um suporte formativo que forneça ao professor estímulos e oportunidades de trocas de experiências e de reflexão.

Santos e Serrazina (2013) destacam, também, o papel fulcral que os programas de formação contínua de professores desempenham na implementação de novas práticas nos docentes, abarcando aspetos relacionados com o conhecimento do conteúdo, conhecimento didático e conhecimento curricular que, conseqüentemente, visam a melhoria das aprendizagens em Matemática.

Nos últimos anos, o programa de formação contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º CEB e o plano de ação da Matemática (Plano da Matemática I e II) surgiram em grande escala nos anos letivos de 2005/2006 e 2006/2007, respetivamente, alargando-se até ao ano letivo de 2010/2011 e 2011/2012 (Santos & Serrazina, 2013). A Tabela 5 compara a percentagem de professores portugueses cujos alunos participaram no TIMSS2011 e que afirmam ter tido formação em cada um dos domínios referidos anteriormente, comparativamente com os valores globais.

**Tabela 5.** Percentagem de professores que afirmaram ter tido formação nos dois anos prévios ao TIMSS2011 em cada um dos domínios (Santos & Serrazina, 2013)

Dominios	Percentagem global	Percentagem em Portugal
Conhecimento matemático	44	58
Conhecimento didático	46	54
Conhecimento do currículo	41	61

Retirado de Mullis, I.V. S., Martin, M. D., Foy, P. & Arora, R. (2012). *TIMSS2011 International Results in Mathematics*. IER, Lynch School of Education, Boston College.

Repare-se que a percentagem dos professores portugueses que afirmam ter tido formação nos dois anos antes da realização do TIMMS em 2011 é superior à percentagem global em todos os domínios: conhecimento matemático, conhecimento didático e conhecimento do currículo.

Estas medidas, acreditam as autoras, podem ter contribuído para um incremento nas prestações dos alunos portugueses nos testes de avaliação internacionais (PISA, TIMMS e PIRLS), quando comparadas com a fraca prestação observada no PISA, em 2003. O relatório do TIMMS (2011) faz essa referência estabelecendo uma relação de correlação entre a formação contínua em matemática, pelos professores, e os resultados obtidos pelos alunos portugueses (Santos & Serrazina, 2013). A melhoria da prestação dos alunos portugueses não se verificou somente nos estudos internacionais, mas, também, nas escolas portuguesas, conforme regista Viana (2013), realçando as consequências nefastas que o fim do plano de ação da matemática pode ter nas escolas e nas aprendizagens dos alunos.

Na introdução dos novos conteúdos, nos programas da Matemática de diversos países, oriundos do Movimento da Matemática Moderna, um dos erros apontados foi a falta de preparação docente (Malaty, 1988) para a abordagem com sucesso dos novos temas. Herrera e Owens (2001) particularizam dizendo que

as alterações curriculares na escola elementar foram mais morosas e difíceis de implementar do que nos programas escolares avançados. Poucos professores da matemática elementar eram especialistas em matemática e os ainda estudantes da formação inicial ofereceram-se para os ajudar a compreender e a implementar as ideias do novo currículo e materiais. (p. 87)

A implementação da reforma da Matemática Moderna em Portugal também apresentou alguns constrangimentos nesta matéria. Matos (2010) revela alguns dados sobre a sua avaliação que conclui que o

fraco desempenho dos alunos na questão das relações binárias parece poder ser atribuído antes a dois factores: falhas no processo de ensino e dificuldade intrínseca. Dito de outro modo, é muito provável que, não tendo contactado com relações binárias durante a sua formação inicial, os professores tendessem a não leccionar esta temática ou a leccioná-la de um modo desadequado. (p. 167)

A dificuldade intrínseca, acredita Matos (2010), estaria no facto da abordagem da temática referida anteriormente não ser apropriada à idade mental dos alunos.

Mais tarde,

as transformações ao nível do currículo tornam-se particularmente salientes num país como o nosso, que assistiu, no início da década de 90, à substituição de um currículo baseado ainda nas perspectivas da Matemática Moderna por um currículo que incorpora muitas das novas orientações do movimento da educação Matemática internacional. (Ponte & Santos, 1998, p. 1)

A alteração dos programas, datada de 1990/1991, apelou para a necessidade de formação do professor como meio indiscutível para a boa implementação do mesmo.

Abrantes e Ponte (1992, citado por Ponte, 2005) apelam à necessidade da formação contínua como forma de “promover acções de ‘reciclagem’ (actualização científica) de tempos a tempos, nomeadamente quando há alterações nos programas com introdução de novas matérias” (p. 3), e à valorização da “reflexão do professor ‘sobre a sua própria experiência e para estudar e aprofundar temas” (p. 3). Esta realidade ocorre, por exemplo, com a importância realçada do ensino da Geometria, que tem sido alvo de inúmeras preocupações e registos de fragilidades ao nível do conhecimento docente, das quais destacaremos algumas, como já referimos no capítulo anterior.

Contrariamente ao ocorrido em alguns países já referidos, após três anos de generalização do programa de 1990/1991 (quatro anos para o 1.º CEB), num encontro de professores de matemática, a APM realizou um inquérito que contou com 444 respostas que tinha como objetivo perceber o sentimento global dos docentes face à reforma educativa e ao programa que estavam a aplicar (Nunes & Guimarães, 1994). De notar que, neste inquérito 40% dos professores estavam a lecionar o novo programa pelo segundo ano consecutivo (Nunes & Guimarães, 1994). A amostra procurou, com sucesso, conseguir uma diversidade regional e um número equilibrado de respostas por ciclo. Este estudo constatou que 63% dos inquiridos tinham um sentimento positivo, sendo em todos os ciclos a percentagem superior aos 50%. Contudo, “presente-se, podemos dizer, um certo desconforto dos professores com os programas” (Nunes & Guimarães, 1994, p. 33). Os aspetos positivos apontados pelos professores foram as inovações ao nível dos conteúdos, das metodologias, da organização do documento e da sua ligação com a realidade. Ao nível dos conteúdos, em todos os níveis de ensino, os professores destacam, pela positiva, a introdução de tópicos de geometria. Relativamente aos aspetos negativos foram destacados, entre outros, a falta de apoio ao trabalho do professor e à sua formação, como, “por exemplo, o ‘desinteresse do Ministério’, a ‘falta de estruturas de apoio’ ou deficiente funcionamento do circuito informativo, provocando a escassez de informações ou a sua má divulgação [e] ‘falta de preparação’ para a mudança suposta pela introdução dos novos programas” (p. 29). Neste interessante estudo, os professores também mencionaram alguns temas relativos à Geometria que não iriam conseguir abordar parcial ou totalmente. Os professores do 1.º CEB não responderam a esta questão porque afirmaram lecionar todo o programa.

Relativamente a eventuais temas que deviam ser excluídos do programa, a geometria é a área mais referida, com a referência de exclusão de um ou mais tópicos. No 1.º CEB não há praticamente propostas de exclusão de tópicos. No 2.º CEB, o estudo identificou 86 referências para a exclusão de temas da geometria, sendo 45 referentes a *volumes*, 16 a *triângulos*, 12 a *ângulos* e 9 a *simetrias*. No 3.º CEB, as 82 menções sobre geometria propõem maioritariamente a exclusão das *translações* (33) e, ainda, das *semelhanças* (25) e dos *lugares geométricos* (21). Estes números levam os autores a questionar: “porquê a incidência tão frequente na Geometria; será porque aparece muitas vezes na parte final dos programas?” (p. 33).

Ainda no âmbito do estudo em apreço, em 1994, Batista e Barros, duas docentes de duas escolas secundárias, elaboraram um artigo para a revista EM sobre as rubricas do programa a não lecionar defendendo que “é mais importante desenvolver atitudes e capacidades de interesse geral que ganhar maior quantidade de conhecimentos” (p. 9) pois “uns abandonam os estudos e outros seguem o ensino secundário em várias opções” (p. 9). As rubricas eram *semelhanças de figuras*, *lugares geométricos*, *estatísticas*, *translações*, *espaço – outra visão* e *rotações e isometrias*, cujas autoras salientam que “o tema ‘Geometria’ não fica enfraquecido uma vez que, do que foi retirado, o essencial é integrado nos temas ‘Número e Cálculo’ e ‘Funções’” (p. 10).

Os estudos que temos vindo a relatar referem a exclusão de alguns temas justificados pelos professores pela falta de tempo para os lecionar, dada a extensão do programa. Ainda assim verificou-se uma redução do número de horas letivas para Matemática que originaram uma introdução polémica deste documento (Santos, Canavarro & Ponte, 2000).

Outros autores, nesta revista, apontam para o abandono da visualização espacial e para a problemática da Geometria ser trabalhada sob o ponto de vista algébrico (Freitas, 1993; Saraiva, 1992).

O PMEB (2007) veio alterar as conceções do que é ensinar e aprender Matemática, conduzindo a alterações profundas no processo de ensino-aprendizagem, exigindo, portanto, uma redefinição dos papéis desempenhados quer pelos alunos quer pelos professores (Pessoa, 2010).

As alterações das valências ao nível científico e pedagógico exigem, por parte dos docentes, um investimento pessoal no sentido de atualizar as suas competências, não só metodológicas, mas essencialmente científicas (Assude, s.d.; Bastos, 2006; Canavarro, 2010; GT2, 2010). Ao nível das metodologias de ensino, devemos reconhecer que, para os professores, “é difícil mudar formas de ensinar porque a mudança exige um processo de desaprender e aprender novamente” (Mousley, 1990, citado por Handal & Herrington, 2003, p. 4), provocando “sentimentos de desconforto que podem ser desagradáveis e intimidantes” (Martin, 1993, citado por Handal & Herrington, 2003, p. 4). No que concerne ao conhecimento científico, a introdução de novos conteúdos e de novas conceitualizações

características das reformas programáticas, tais como as transformações geométricas, exige uma atualização dos saberes científicos por parte dos professores para os poderem ensinar (Assude, s.d.; Bastos, 2006; Canavaro, 2010).

O PMEB (2207) generalizou-se a todo o país no ano letivo 2010/2011, o que foi tido por muitos como o grande acontecimento da educação matemática em Portugal (Canavaro et al., 2009). De notar que, nas recomendações dos seus autores ao Ministério da Educação para que as finalidades do mesmo fossem atingidas, incluem-se elementos a formação de professores e a criação de materiais de apoio à sua implementação (Ponte & Serrazina, 2009). Os materiais de apoio ao processo de desenvolvimento curricular, “na maior parte dos países (...) assume uma importância muito maior do que a elaboração de um novo programa” (Ponte & Sousa, 2010, p. 106) e estes autores dão conta da produção, por parte do ME, de diversos materiais para a sala de aula, dos quais referem uma coleção de tarefas e materiais de apoio à sua implementação e brochuras com as ideias matemáticas e didáticas essenciais relativas a cada tema e às capacidades transversais.

No ProfMat2009, Carvalho e Dias (2009) auscultaram, através de um inquérito, as opiniões dos professores acerca do PMEB (2007) e constataram que, um dos aspetos que os preocupavam foi “a inconsistência nas terminologias usadas ao longo do documento mesmo quando dizem respeito ao mesmo conceito, dando como exemplo o caso de isometria” (p. 96). Esta inconsistência poderá ser o resultado da, ainda, falta de compreensão dos novos conceitos, uma vez que as terminologias usadas são matematicamente consistentes. No cômputo geral, 73% dos professores respondentes tinham expectativas claramente positivas relativamente à generalização do PMEB (2007), sendo os professores do 2.º ciclo os que tinham as expectativas mais elevadas. A reação de não oposição ao novo programa, segundo os mesmos autores, é semelhante ao verificado aquando da implementação do programa de 1990/1991, havendo, no entanto, uma diferença significativa nestes sentimentos. Assim, na implementação do programa de 1990/1991, as expectativas dos professores eram muito baixas e, relativamente ao programa atual, as expectativas eram otimistas. Esta diferença, acreditam Carvalho e Dias (2009), pode dever-se à ampla divulgação do novo programa, à oferta de formação, ao Plano de Ação da Matemática que decorria na altura nas escolas, aos recursos existentes nas mesmas e ao material disponibilizado na Internet relativo ao PMEB (2007).

O estudo de Marques (2011) baseado na implementação do novo programa num 7.º ano de escolaridade, no ano letivo de 2009/2010, revelou a existência de alguns constrangimentos por parte das duas professoras, tais como, a adaptação dos professores e alunos às novas dinâmicas de sala de aula, ao número de horas letivas da disciplina, à falta de manual escolar e ao acesso tardio aos materiais disponibilizados pela DGIDC sendo este “o único material de suporte existente” (p. 147).

Contudo, o PMEB (2007) revelou-se potenciador de uma melhor qualidade de ensino e aprendizagem dos alunos.

### **Os Professores e a Geometria**

O lugar da geometria nos currículos escolares tem sido alvo de grandes controvérsias, à escala mundial, observando-se uma tendência geral de revalorização deste tema nos programas de Matemática (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Bastos, 1999; Fujita & Jones, 2003; NCTM, 2008; Jones, 2000; Veloso, 1994; Xistouri & Pitta-Pantazi, 2009). As consequências de a geometria ter sido vista, durante décadas, como uma parente pobre da álgebra linear e, por isso, encarada como uma área sem grande interesse para o prosseguimento de estudos, fez praticamente desaparecer aspetos da geometria ligados à observação, experimentação e construção (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 67). Os professores que aprenderam geometria nos currículos que a descuidaram ficaram com falta de bases nesta matéria, o que faz com que tenham tendência a descuidar o ensino da geometria aos seus alunos (Costa, 2005).

Esta realidade é notória quando procuramos referências bibliográficas sobre a geometria escolar, pois a “investigação em ensino e aprendizagem da Geometria é ainda muito escassa quando comparada com as investigações feitas noutros campos, nomeadamente Números e Operações ou Álgebra” (Gomes, 2012, p. 235).

Os trabalhos realizados em Portugal, no âmbito do ensino da Geometria, relacionam-se fundamentalmente com as metodologias dedicadas ao ensino desta área da Matemática, marcadas pelas novas correntes pedagógicas, onde a ênfase no currículo predominantemente teórico deu lugar ao desenvolvimento de competências matemáticas que implicava uma mudança da metodologia de ensino e aprendizagem (Gomes, 2003). Assim, os trabalhos de investigação e artigos encontrados e publicados em Portugal, relacionados com Geometria, centram-se em três aspetos principais: o benefício do uso de instrumentos de apoio à aprendizagem, do desenvolvimento de estratégias de ensino potenciadoras da aprendizagem e do desenvolvimento das capacidades transversais e o ensino da geometria na formação inicial e contínua (PFCM ou PAM). Ao nível dos instrumentos de apoio à aprendizagem, destacamos três tipos de estudos, muito presentes na literatura nacional e internacional, que se centram no uso das novas tecnologias (e.g., Bravo, 2006; Costa, 2005; Silvestre & Ponte, 2008; Veloso, 1999) ou uso dos materiais manipuláveis (e.g., Pires, 1995; Vale, 1999; Velosa, 2008). No que concerne às estratégias de ensino, destacamos as atividades de investigação (e.g.,

Branco, 2011; Martins, 2010; Silvestre & Ponte, 2008) e a aprendizagem colaborativa (Almeida, Dias, Morais & Miranda, 2000; Santos, 2011), que são mencionadas no programa de Matemática (2007), bem como o necessário desenvolvimento das capacidades transversais com diversos trabalhos publicados (e.g., Boavida & Menezes, 2012; Janela, 2012; Rodrigues, 2009). Por fim, os variados trabalhos publicados em Portugal, dando relevo ao ensino da Geometria nos cursos de formação inicial e contínua (e.g., Gomes, 2003; Gomes, 2012; Pinheiro & Cabrita, 2012; Santos, 2008; Santos & Pires, 2009; Tempera, 2010).

Estes estudos abordam o trabalho realizado com os professores nas novas práticas educativas mas não dão grande destaque ao conhecimento do conteúdo por parte destes. Tempera (2010), no seu trabalho de investigação, aborda superficialmente o conhecimento dos professores no ativo em Geometria, mas o seu enfoque é na formação inicial.

A importância atribuída à geometria no programa de 1990/1991 foi destacada por vários investigadores e professores dos quais enunciamos alguns. Eduardo Veloso (1994) pronunciou-se sobre a sua lecionação dizendo,

mas de que serve conferir esse lugar em teoria à geometria quando depois se ouve dizer aos professores que 'não deram nenhuma geometria no 10.º ano' ou que 'saltaram sobre a geometria sintética e só deram a analítica'. A tentação é dizer: aí está a causa de todo o fracasso é a falta de preparação dos professores. É isso, fogem da geometria como o diabo da cruz. (...) É conhecido, e ninguém o nega, que os professores têm que fazer um grande esforço de formação em geometria, dado o abandono a que esta foi votada nos últimos anos. (p. 29)

Também Rita Bastos (1999) afirma:

Apesar de termos programas a nível nacional, penso que não estarei muito longe da verdade se afirmar que as formas de implementação desses programas, no que respeita ao ensino da geometria, variam enormemente, desde as que adiam sempre os capítulos referentes a este tema, às que lhe dedicam mais tempo e aprofundam mais do que o previsto, passando pelas que a reduzem a um conjunto de procedimentos tipo que os alunos treinam e mecanizam. (p. 1)

Os “resultados do PISA, das provas de aferição e exames nacionais (GAVE, 2010) mostram que este [tema, a Geometria,] é um campo onde os alunos revelam variadas dificuldades” (Gomes et al., 2012) e, curiosamente, “alguns estudos (e.g., Gomes & Ralha, 2005; Ribeiro & Gomes, 2010) revelam carências no conhecimento geométrico dos professores, o que se poderá relacionar, também, com as dificuldades evidenciadas pelos alunos e que urge colmatar” (Gomes et al., 2012, p. 761).

Lorenzato (2006, p. 5), além-fronteiras, também nos relata uma realidade semelhante, pronunciando-se relativamente ao ensino da Geometria, dizendo que “é comum os professores se

dizerem com o direito de não [a ensinar] (...) por se sentirem inseguros; não conhecer o assunto a ser ensinado não gera direitos ao professor, mas sim o inevitável dever de aprender ainda mais”.

O caso particular do estudo da simetria e das transformações geométricas, constituindo um tema que sofreu diversas alterações sob o ponto de vista conceitual e dos temas a tratar nos programas dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico de 2007, não é uma exceção ao panorama geral da geometria, como veremos no próximo capítulo.



## CAPÍTULO 4

### TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

As transformações geométricas são um tema da Geometria que se revela fundamental para o desenvolvimento de um vasto conjunto de competências nos alunos do ensino básico. O estudo das transformações geométricas começa no estudo das simetrias através da sua associação à natureza e à capacidade do homem em a identificar e a admirar. Estas e outras curiosidades revelam, na contextualização histórica deste tema, o interesse de outras áreas do saber pela simetria e, conseqüentemente, pelas transformações geométricas. Neste capítulo iniciaremos com uma abordagem histórica sobre o tema, a sua evolução e a sua importância sob dois pontos de vista fundamentais: o da ciência e o da vida, do ser humano. É, nesta última, que o ensino desta temática ganha relevo quer pela motivação que pode originar no ensino desta e de outras matérias, quer pela beleza nas relações existentes entre os vários conceitos e realidades do quotidiano e culturais.

#### A Simetria

O conceito de simetria acompanhou o homem ao longo dos tempos quer pelo seu reconhecimento popular quer pelo significado científico que foi adquirindo nas várias ciências. Popularmente, qualquer indivíduo reconhece a simetria nas produções humanas e na natureza (Washburn & Crowe, 1998). Shirali (2001) diz que é na natureza que se encontram as formas mais requintadas de simetria dando como exemplo as borboletas, as flores, o pólen. Sob o ponto de vista científico, este conceito abrange diversas áreas do saber (Oliveira, 1997; Shirali, 2001) tais como a Psicologia, a Antropologia, a História, a Matemática (Washburn & Crowe, 1998), a Cristalografia e a Física (Bouckaert, s.d.; Oliveira, 1997; Shirali, 2001; Veloso, 1998), a arte (Shirali, 2001), a biologia, a química (Bouckaert, s.d.; Giannouli, 2013), a pintura, a escultura, a arquitetura, a prosa e a música (Giannouli, 2013) que lhe atribuíam distintas concetualizações. A repetição, que caracteriza a simetria, é uma propriedade ubíqua da natureza, da ciência, da arte, da música e da vida em geral (Liu & Toussaint, 2011).

O termo *simetria* provém do grego *symmetria* que significa a mesma medida (Hargittai & Hargittai, 1999) e, numa fase inicial da sua utilização, estava associado à beleza e à harmonia das

proporções (Hargittai & Hargittai, 1999; Washburn & Crowe, 1998; Weyl, 1989), adotando, por isso, um caráter de subjetividade nos julgamentos. Nesta fase, a existência de simetria era pronunciada, muitas vezes, como sinónimo de simetria axial sendo este o primeiro conceito geométrico de simetria (Washburn & Crowe, 1998; Weyl, 1989) justificado pelo reconhecimento da simetria axial como um estímulo intrínseco à percepção humana visual (Washburn & Crowe, 1998).

O facto de o olho humano e as estruturas consistentes da nossa mente possuírem a capacidade inata ou o notável dom de identificarem padrões ou formas particulares (Hargittai & Hargittai, 1999; Washburn & Crowe, 1998), mesmo quando existem irregularidades ou omissões num padrão global (Hargittai & Hargittai, 1999), pode estar na origem do interesse pela simetria demonstrado por diversas áreas (Hargittai & Hargittai, 1999; Washburn & Crowe, 1998). Em “todos os aspectos da vida somos atraídos para as regularidades e muitas vezes tentamos interpretar situações procurando, ou mesmo impondo, padrões” (Borrvalho, Cabrita, Palhares & Vale, 2007, p. 194). Talvez por este facto, tenham sido os psicólogos os primeiros a demonstrar interesse por este fenómeno, que torna evidente a interação do sujeito com o ambiente da qual faz parte a conceção que a criança tem da geometria no espaço e, em particular, das transformações geométricas que influenciam as capacidades percetuais (Lindquist & Shulte, 1987).

A percepção visual de padrões, da qual faz parte o reconhecimento da simetria, é um processo através do qual o indivíduo recolhe informação sobre o ambiente, que prevê que a mesma imagem possa ser diferentemente vista e interpretada consoante o conhecimento e as necessidades, que são distintas de indivíduo para indivíduo (Washburn & Crowe, 1998). Neste âmbito, torna-se “importante perceber quais os aspetos do processo visual – como a informação é recebida, digerida, armazenada e recuperada – estão relacionados com fatores culturais e quais são universais” (Washburn & Crowe, 1998, p. 15). Assim se elevou a importância da simetria para a Psicologia (Washburn & Crowe, 1998) e, em particular, assumiu um papel de relevo nas teorias comportamentalistas da Gestalt (Clements & Battista, 1992; Giannouli, 2013; Washburn & Crowe, 1998).

Nas teorias da Gestalt, “a simetria constituía um princípio que contribuía para a ordem e estrutura num padrão, ou seja, a simetria contribuía para o ‘melhor’ do padrão” (Washburn & Crowe, 1998, p. 16). Matematicamente, simetria não constitui o melhor de um padrão mas a propriedade de invariante (Washburn & Crowe, 1998). Este caráter intrínseco ao ser humano na descoberta de padrões poderá ser aproveitado para promover uma aprendizagem rica e motivadora, no âmbito da própria matemática, que ajudará os alunos a perceber as percepções que temos da realidade (Devlin, 2003).

Giannouli (2013) refere que a simetria, atuando como um agente da visão humana, percebe os objetos pela sua organização em grupos e não pela soma das suas partes, constituindo uma

característica fundamental para a memorização por facilitar o uso de mnemônicas, bem como a faculdade de os reconhecer e os lembrar. Crowe e Thompson (1987) dão como exemplo a observação de produções humanas, constituídas por figuras geométricas e visíveis em padrões repetitivos, que não permitem a sua análise isolada mas pela consideração de um todo, de forma a tornar possível o seu estudo consoante as simetrias que possuem de forma a identificar o padrão de repetição existente.

O reconhecimento de padrões começa com a extração de características de observação visual, nas quais estão presentes a simetria e a orientação, que permite perceber a relação entre as partes e o objeto, ou mesmo o processo de criação do modelo (Washburn & Crowe, 1998). Os dois processos de aprendizagem, que permitem ao indivíduo perceber as diferenças e semelhanças perante padrões, são, primeiramente a aprendizagem de discriminação e, posteriormente, a aprendizagem por generalização (Washburn & Crowe, 1998). A aprendizagem de discriminação permite distinguir um padrão de outro e a aprendizagem por generalização permite agrupar os padrões equivalentes (Washburn & Crowe, 1998). É neste segundo processo que reside o processo de classificação e categorização que permitirá ao observador reconhecer diferentes exemplos de padrões como pertencentes a uma classe de padrões (Washburn & Crowe, 1998).

O termo padrão, em permanente evolução (Devlin, 2003), integra “uma multiplicidade de sentidos, mesmo quando restringimos apenas ao campo da matemática” (Borralho et al., 2007, p. 210). Genericamente, padrão é um “arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades” (Borralho et al., 2007, p. 193).

Neste trabalho, utilizaremos o termo padrão restrito à geometria e associado à repetição, de forma regular, de uma figura inicial (motivo do padrão) que obedece a uma determinada disposição que o caracteriza (E. Santos et al., 2011; Veloso, 1998). Aqui, utilizaremos o termo padrão na geometria plana, nas rosáceas, nos frisos e nos papéis de parede pelo motivo supracitado.

Nas várias áreas, o conceito de simetria possui diferentes significados pelo que a tentativa de uniformização do conceito e a sua aceitação generalizada permitirá elevar a sua importância e obterá maior consistência no que concerne às propriedades básicas do termo (Washburn & Crowe, 1998, p. 14). Um exemplo disso é a obra que temos citado de Washburn e Crowe (1998), que explora este conceito simultaneamente na matemática e na antropologia. A antropóloga Washburn e o matemático Crowe uniram-se para fazer a conexão entre as duas ciências no sentido de perceber o uso dos princípios geométricos da simetria para a descrição e compreensão de formas decorativas. Nesta obra, a simetria assume ser, sem dúvidas, uma propriedade matemática que resulta em padrões de repetição que podem ser estudados e categorizados, permitindo olhar para a cultura de um modo diferente (Washburn & Crowe, 1998). Na cristalografia, o termo *simetria* empregue pelos especialistas

define as propriedades dos cristais que não se restringem à simetria axial (Veloso, 1998). Aqui, e em outras áreas, por exemplo, os objetos adquirem maior ou menor importância consoante as simetrias que exibem (Oliveira, 1997). Nas produções humanas, Washburn e Crowe (1998) mostraram, através de vários exemplos, que “diferentes sociedades escolhem e usam preferencialmente diferentes simetrias para estruturar os seus padrões” (p. 34) e, por este motivo, não podemos sustentar a existência de simetria simplesmente pela presença de simetria bilateral. Assim, a associação da simetria unicamente à simetria axial, como foi usado e explorado nos programas de Matemática anteriores, tratou-se de um tratamento muito popular do termo e para uma concetualização restritiva, que deve ser abandonada para acompanhar a aceção corrente na literatura estrangeira (Veloso, 1998).

O estudo das formas de arte culturais, observadas tanto na antiguidade clássica como na arte contemporânea, exige um conhecimento matemático sobre simetria como pré-requisito para a compreensão e funcionamento dos princípios geométricos (Washburn & Growe, 1998). A existência de padrões nos objetos produzidos pelas várias culturas constitui, para alguns professores, uma base trabalho para a exploração deste tipo de regularidades geométricas (Veloso, 1998). Um exemplo, particularmente interessante na exploração deste tema, são os frisos e os motivos presentes nos tapetes de Arraiolos, que, apesar de serem de origem persa, são tradicionalmente construídos em Portugal e muito apreciados por pessoas de diferentes nacionalidades (Veloso, 1998). Outro exemplo, frequentemente visível e reconhecido por qualquer pessoa, são as rosáceas existentes nos vitrais e em outras representações decorativas das catedrais góticas, que podem constituir um interessante elemento de estudo e análise (Nascimento, Benutti & Neves, 2007).

Em suma, podemos afirmar que perceber regularidades nas produções culturais exige que também se reconheça a simetria como uma entidade matemática com propriedades específicas que a definem (Washburn & Crowe, 1998). Na generalidade, o interesse de vários domínios científicos no conceito de simetria e nas suas propriedades faz elevar a importância deste estudo tornando-a uma estrutura consistente nos diferentes domínios.

### **Perspetiva Histórica**

As grandes civilizações do mundo antigo demonstravam através da sua arte, na pintura, na escultura, nos trabalhos têxteis, pavimentos, cerâmicas, cestaria, madeira, pedra (Washburn & Growe, 1998), o interesse e a motivação pela criação de motivos simétricos. Era assim no passado e continua

a ser um comportamento espontâneo visível no interior dos sistemas culturais. Nos próximos parágrafos, mencionaremos momentos importantes que foram despertando o estudo matemático das simetrias e das transformações geométricas.

Na era dos hominídeos, estudos paleoantropológicos reportaram a descoberta de construções simétricas de instrumentos que, talvez, nos levem a pensar nas suas preferências por estruturas com estas características (Giannouli, 2013).

Mil anos antes dos gregos, já os Egípcios usavam motivos simétricos a uma (frisos) e a duas dimensões (papéis de parede) (Washburn & Growe, 1998).

Situamos na Grécia do século V a.C. a origem dos estudos matemáticos superiores, tais como os modelos a duas dimensões que exibiam a presença de complexas simetrias (Speiser, 1927, citado por Washburn e Growe, 1998). Nessa altura, os gregos eram um povo com provas dadas de serem detentores de conhecimentos geométricos profundos (Washburn & Growe, 1998), materializados na construção simétrica dos seus peristilos e colonadas, bem como dos seus frisos. Acrescente-se, ainda, que os gregos desenvolveram, a alto nível, a teoria das representações finitas na forma de polígonos regulares, especialmente o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular e o hexágono regular (Washburn & Growe, 1998). Destacamos, especialmente, Pitágoras (570 a.C.-495 a. C.) e Euclides (325 a.C.-265 a. C.), que deixaram contributos notáveis para a Matemática que ainda hoje são referenciados e utilizados.

Pitágoras considerou o círculo e a esfera os objetos geométricos mais perfeitos pelo facto de exibirem uma completa simetria rotacional (Weyl, 1989).

Euclides, o autor de *Os Elementos*, foi reconhecido mundialmente por ter realizado a “primeira compilação de um conjunto de definições, postulados, proposições e respectivas provas matemáticas sobre a geometria (...) e teoria dos números” (Maia, 2011, p. 1), que eram conhecidos na altura. Esta obra promoveu o desenvolvimento lógico da geometria e de outros ramos da matemática, e foi de uma importância extrema durante 2000 anos, até se descobrir a existência de outras geometrias (Maia, 2011), conhecidas por geometrias não euclidianas. Num dos livros de *Os Elementos*, foram apresentadas cinco noções comuns das quais destacamos: *coisas que coincidem uma com a outra são iguais* que, segundo Oliveira (1997), remetem para a noção geral de congruência que, convenientemente, se define através do conceito de isometria do plano. Segundo Veloso (1998) a descoberta de novos resultados no período moderno da história da matemática teve, na sua base, as propriedades geométricas descobertas por Euclides e outros matemáticos gregos (Veloso, 1998).

Após os registos gregos, e sob o ponto de vista matemático, Washburn e Crowe (1998) destacam os trabalhos dos artesãos Bizantinos de Revenna, de Constantinopla e os seus sucessores em Veneza e, ainda, os motivos Islâmicos realizados ao longo de todo o mediterrâneo e a Este da

Índia. Apesar destes trabalhos não serem considerados sob o ponto de vista matemático, os seus métodos e resultados são vistos como importantes registos geométricos e simétricos (Washburn & Growe, 1998).

Durante o tempo do Renascimento, os artistas italianos usavam, frequentemente, representações simétricas. Destes, destacamos Leonardo Da Vinci (1452-1519), que, conscientemente, estudava e determinava “todas as simetrias possíveis dos edifícios monumentais com vista a projectar de maneira harmoniosa eventuais extensões e acrescentos” (Oliveira, 1997). A decoração de nichos e altares em capelas circulares ou poligonais, mantendo a simetria na parte central e no seu todo era uma preocupação daquele artista (Veloso, 1998; Washburn & Growe, 1998). O conhecido *Teorema de Leonardo* regista a conclusão a que Da Vinci chegou sobre as simetrias de rotação e de reflexão serem as únicas possíveis nas representações finitas de apenas uma cor (Washburn & Growe, 1998).

Em 1872, Félix Klein (1849-1925) publicou o *Erlanger Programm* que teve grande influência na comunidade matemática mundial por descrever a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações (Boyer, 1998). Klein foi um notável matemático que reconhecia a geometria das transformações como o tema de base no ensino da geometria (Akay, 2011; Marchini & Vighi, 2011), que permitia associar as propriedades das transformações às propriedades dos objetos, e podia ser caracterizada como o estudo geométrico de objetos no plano (Akay, 2011). O conceito de grupo era, então, “um meio conveniente para caracterizar as várias geometrias que tinham aparecido durante o século” (Boyer, 1998, p. 379), remetendo-nos para uma definição de geometria plana euclidiana como sendo o “estudo das propriedades das figuras, inclusive área e comprimento, que ficam invariantes sob o grupo de transformações (...) ditas rígidas” (pp. 379-380).

Em 1892, conforme nos relata Washburn e Growe (1998), Fedorov (1853-1919) publicou um trabalho na Rússia onde enumerou os 17 tipos de padrões (papéis de parede), que se tornou mundialmente conhecido apenas em 1920 através dos trabalhos de Niggli (1924, 1926) e Polyá (1924). Também em 1920 foram conhecidos os primeiros trabalhos de Escher (1898-1972) relacionados com a pavimentação de superfícies, usando animais e pessoas, que resultaram em trabalhos magníficos com registos simétricos, mundialmente conhecidos na atualidade e frequentemente publicados nos manuais escolares em Portugal. Escher, que não era um matemático, apercebeu-se que os seus trabalhos eram comandados pelo grupo de isometrias e debruçou-se, neste estudo, na literatura disponível e que lhe era acessível, nesta matéria, conseguindo chamar a atenção de alguns géometras para a maravilha dos seus trabalhos sob o ponto de vista matemático (Schattschneider, 1978).

Em 1948, Shepard apresentou a existência de apenas sete tipos de frisos (Washburn & Growe, 1998). Recentemente, e apesar de não existirem muitos estudos nesta área, os trabalhos realizados acrescentaram importância, àqueles estudos. A bibliografia existente, reforçada com estudos produzidos ultimamente sobre estas matérias, refletem perspectivas de abordagem matemática que varia entre o mais simples e o mais complexo (Veloso, 2012; Washburn & Growe, 1998).

Também nos anos 70 do século passado, foram valorizadas as transformações geométricas e o movimento das formas como uma abordagem para a compreensão das provas de teoremas euclidianos (Outhred & Owens, 2006).

### **A Importância do Estudo da Simetria e das Transformações Geométricas no Currículo Escolar**

A importância atribuída ao estudo da simetria e das transformações geométricas tem vindo a oscilar, a nível mundial, consoante a importância atribuída à própria geometria. Esta oscilação tem sido visível nos programas de matemática dos anos elementares em vários países. Por exemplo, em Portugal, no programa de 2007, este tema ocupa um lugar de destaque e, no programa de 2013 uma perda de importância. Nos próximos parágrafos, tentaremos fazer uma contextualização histórica do relevo dado a este tópico de aprendizagem em alguns programas de matemática de vários países, iniciando com o Movimento da Matemática Moderna, tal como no 1.º capítulo.

O Movimento da Matemática Moderna, com a intenção de impulsionar o ensino da geometria, tentou seguir os ideais de Klein que as associou a um grupo de transformações geométricas (Veloso, 1998). O referido fracasso deste movimento foi visível nesta matéria pela perspectiva estritamente formal das transformações geométricas apresentadas a jovens de 12/13 anos (Veloso, 1998).

A era marcada pelo aparecimento das normas do NCTM (2008) destacava a abordagem deste tema, desde o pré-escolar ao 12.º ano de escolaridade, referindo que os programas de ensino “deverão habilitar todos os alunos para (...) aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas” (p. 44), uma vez que “a ênfase adequadamente atribuída ao tema da simetria fornece aos alunos discernimento no campo da matemática e no da arte e estética” (p. 46).

Apesar de os currículos escolares apresentarem variações consideráveis no que concerne às temáticas a abordar no estudo da geometria (Hoyles, Foxman & Küchemann, 2002, citados por Fujita & Jones, 2003), foram vários os países que, recentemente, destacaram ou introduziram o estudo das transformações geométricas e das simetrias nos programas de Matemática do Ensino Básico, tais

como, os Estados Unidos da América, a Inglaterra, Singapura, Irlanda, Holanda, Turquia (Babadogan & Olkun, 2006), África do Sul (Bansilal & Naidoo, 2012) e Portugal. Este tópico é considerado difícil e, usualmente, surge no final do programa fazendo com que, muitas vezes, não seja abordado ou seja superficialmente abordado pelos professores de matemática (Mashingaidze, 2012).

Este tema da geometria possui grandes potencialidades para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem pois, além de fomentar a construção e o desenvolvimento do pensamento geométrico, os objetivos principais do ensino da geometria (Bansilal & Naidoo, 2012; Matos & Cabrita, 2012), contribuem “para o desenvolvimento do raciocínio e capacidade de argumentação por parte dos alunos” (Yanik, 2011, p. 231). Assim, a introdução destes temas no ensino básico permite que os alunos desenvolvam o espírito de observação e de deteção de regularidades, constituindo uma possibilidade de estes exprimirem livremente o seu espírito criativo, e tornar possível a transposição do estudo intuitivo para a aprendizagem natural das transformações geométricas (Velooso, 1998). A procura de padrões motiva o aluno para o desenvolvimento da capacidade de formular e testar conjecturas, apresentar justificações e fazer generalizações (Matos, 2011), descobrir características básicas das isometrias e desenvolver competências espaciais (Yanik, 2011).

O estudo das transformações geométricas permite, também, estabelecer conexões entre outras áreas da matemática, tais como a álgebra e a trigonometria, e conexões dentro da mesma área, tais como conectar diferentes geometrias em relação a aprendizagens relacionadas com o espaço, forma e a medida (Bansilal & Naidoo, 2012). Para além disso, permite desenvolver a capacidade de visualização e o pensamento geométrico que são ferramentas muito úteis e que podem contribuir para o sucesso na resolução de problemas (Bansilal & Naidoo, 2012).

Em Portugal, o programa ainda em vigor (2007) prevê o estudo das isometrias no plano euclidiano nos 1.º e 2.º CEB, constituindo este um tema de destaque, que tem sido, dentro da própria Geometria, um tema de realçada importância pelo facto de permitir uma nova perspetiva na introdução de noções geométricas e de resolução de problemas (Velooso, 1998). A “capacidade de interpretação e resolução de problemas aumentou consideravelmente quando passamos a dispor do método das transformações geométricas” (Velooso, 1998, p. 60).

O estudo das transformações geométricas permite uma abordagem moderna do ensino da geometria que, nos primeiros anos de escolaridade, facilita o seu tratamento sob o ponto de vista sintético e o afastamento da vertente analítica, tal como defendia Lacroix (1765-1843) ao dizer que a álgebra e a geometria “deveriam ser tratadas separadamente, tão longe quanto possível uma da outra; e que os resultados em ambas deveriam servir para mútua iluminação, correspondente, por assim dizer, ao texto de um livro e sua tradução” (Boyer, 1998, p. 330). Hawking (1999, citado por Mashingaidze, 2012), acredita que as equações, que modelam a geometria, “são a parte aborrecida da

matemática” (p. 198). Esta realidade é uma das razões que torna as transformações difíceis de perceber, sendo, por isso, fundamental que inicialmente os alunos as percebam representando-as e visualizando-as (Mashingaidze, 2012).

Bansilal e Naidoo (2012) referem que, muitas vezes, no nível secundário, a percepção de que os alunos não percebem as transformações geométricas se deve à dificuldade dos mesmos na manipulação das regras algébricas mas, na verdade, mesmo quem as manipula corretamente, não percebe, em termos visuais, o que na realidade está a executar. Esta tendência para a manipulação algébrica da geometria provoca, nos aprendizes, uma certa relutância no uso da visualização na matemática (Bansilal & Naidoo, 2012).

Portanto, “apesar de a geometria, através da álgebra, constituir uma técnica maravilhosa para provar, de uma forma convincente e rápida, uma variedade de teoremas na geometria Euclidiana, raramente produz muitas percepções visuais” (Timmer & Verhoef, 2012, p. 217). Assim, em vez de os alunos desenvolverem uma visão global dos conceitos geométricos através da própria geometria, eles estão a operar com a mesma, mas em domínios isolados, cuja manipulação de fórmulas faz perder a essência desta área e dá origem a que os conceitos com que estão a trabalhar, por detrás dessas fórmulas, não sejam percebidos (Timmer & Verhoef, 2012). Desta forma, a álgebra tornou-se um fim por si próprio (Timmer & Verhoef, 2012).

A ser assim, a “adopção do ensino da álgebra moderna nos diversos campos da Matemática contribuiria para que o ensino da geometria sofresse um processo de descaracterização, levando-o ao seu quase abandono na sala de aula” (Miguel, Fiorentini & Miorim, 1992, p. 52). Este facto acabou por criar inconvenientes quer à geometria, pelo seu abandono, quer à álgebra que assumiu um carácter austero, formal e estéril aos olhos dos alunos (Miguel, Fiorentini & Miorim, 1992). Desta forma, a “noção de transformação, que acrescenta uma perspetiva funcional da geometria, passou a constituir um meio poderoso de estudo, de organização dos conceitos geométricos e mesmo de definição de geometria” (Veloso, 1998, p. 60).

Nas várias referências consultadas, a importância das abordagens das transformações geométricas na Matemática escolar, em particular na matemática elementar, para além dos aspetos referidos anteriormente, é atribuída a três pontos essenciais: (1) o estudo das propriedades das figuras (Bansilal & Naidoo, 2012; Bouckaert, s.d.; Booth, 1984, citado por Outhred & Owens 2006; Clements & Battista, 1992; Cooper & Krainer, 1990, citados por Outhred & Owens, 2006; Crowe & Thompson, 1987; Fischbein, 1987, citado por Clements & Battista, 1992; Frostig & Horne, 1964, citados por Lindquist & Shulte, 1987; Fujita & Jones, 2003; Fujita, Jones & Yamamoto, 2004; Ilaslan, 2013; Lindquist & Shulte, 1987; Loureiro, 2007; NCTM, 2008; Tóth, s.d.), (2) a sua associação (ainda que intuitiva) ao estudo das funções (Bouckaert, s.d.; Hollebrands, 2003, citada por Yanik, 2011;

Hollebrands, 2004; Jackson, 1975, citado por Thaqi, 2009; Matos, 2011; Oliveira, 1997; Schattschneider, 1978; Stylianou & Grzegorzcyk, 2005; Thaqi, 2009; Yanik, 2011), e, (3) como ferramenta motivadora para análise de representações culturais e do cotidiano nos quais a simetria adquire um papel de relevo. Estes pontos estão interligados e somente o seu reconhecimento e conexão permitem um entendimento completo desta matéria (Figueira, Loureiro, Lobo, Rodrigues & Almeida, 2007; Gordon, 1996; Gorini, 1993; Gura, 1996; Liu & Toussaint, 2011; Marchis, 2009; Matos, 2011; Matos & Cabrita, 2012; Nascimento, Benutti & Neves, 2007; NCTM, 2008; Stylianou & Grzegorzcyk, 2005).

No que concerne ao ponto (1), e a um nível mais primário ou elementar, mas essencial no prosseguimento de estudos nesta matéria, a abordagem das transformações geométricas permite uma visão da geometria assente numa perspectiva global e não local, ou seja, em vez de a observação se centrar nas figuras geométricas, centrar-se-á nas transformações geométricas aplicadas a estas figuras (Crowe & Thompson, 1987). Este aspeto está descrito no primeiro nível de compreensão geométrica definido pelo modelo de Van Hiele, onde a imagens mentais dos conceitos têm um papel primário, e que são suportadas pelas representações visuais que cada indivíduo possui (Tóth, s.d.). Vários estudos reforçam a ideia de que crianças de tenra idade evidenciam, nos seus desenhos, uma ideia intuitiva de simetria e de padrão (Booth, 1984, citado por Outhred & Owens 2006).

Frostig e Horne (1964, citados por Lindquist & Shulte, 1987), tal como Van Hiele, apresentaram sete competências espaciais que consideraram de grande relevância para o desenvolvimento do pensamento geométrico, das quais destacamos: a perceção de figuras num plano, a perceção da congruência, a perceção da posição no espaço e a perceção de relações espaciais.

A perceção de figuras num plano refere-se ao “ato visual de identificar um figura específica (...) numa imagem (...) que não se distrai pela existência de estímulos visuais irrelevantes” (Lindquist & Shulte, 1987, p. 128). Por exemplo, reconhecer a sobreposição de figuras nas semelhanças e diferenças, completar figuras, entre outras. Esta competência é fundamental e pode constituir um *handicap* para a própria criança se não for adquirida (Lindquist & Shulte, 1987).

A perceção da congruência consiste na “habilidade de reconhecer que um objecto possui invariantes propriedades tais como o tamanho e a forma apesar da possível variabilidade quando é observado de um ponto de vista distinto” (Lindquist & Shulte, 1987, p. 128). Por exemplo, um indivíduo que possua esta competência é capaz de reconhecer um cubo visto através de um ângulo oblíquo, mesmo que o olho reconheça uma imagem distinta (Lindquist & Shulte, 1987). Os indivíduos que não possuem esta competência têm dificuldade, por exemplo, em reconhecer ângulos retos em outras posições que não sejam a posição *standard* (um lado na vertical e o outro na horizontal), mesmo após algum exercitamento (Clements & Battista, 1992; Cooper & Krainer, 1990, citados por Outhred &

Owens, 2006), ou identificam o triângulo retângulo somente quando o ângulo reto possui um dos lados na vertical e o outro na horizontal (Clements & Battista, 1992) ou, ainda, identificam um quadrado somente quando um dos lados é horizontal (Clements & Battista, 1992). Estas preconcepções erradas são as imagens conceituais que os alunos têm dos objetos geométricos e que estão relacionados com a intuição geométrica dos mesmos (Fischbein, 1987, citado por Clements & Battista, 1992). O desenvolvimento desta competência, segundo Frostig e Horne (1964, citados por Lindquist & Shulte, 1987), “depende, em parte, das aprendizagens e experiências provenientes de atividades de natureza geométrica” (p. 128) que lhes devem ser propostas.

A percepção da posição no espaço consiste na habilidade para determinar a relação entre dois objetos e perceber que duas figuras são congruentes se se deslizar, rodar ou virar uma esta se transformar na outra (Lindquist & Shulte, 1987), ou seja, permitem a abstração da sua posição e orientação para a identificação das propriedades comuns das figuras. Assim, os objetos geométricos podem ser analisados e interpretados nomeadamente na identificação das propriedades dos polígonos, e perceber que estas não são dependentes da sua localização e orientação (Loureiro, 2007; NCTM, 2008). Em defesa do benefício da aprendizagem das transformações geométricas para o estudo das propriedades das figuras, vem o projeto que Michel Demal desenvolveu com crianças dos 5 aos 14 anos desde 1984 até aos nossos dias (Bouckaert, s.d.).

Os cinco níveis de compreensão geométrica definidos pelo modelo de Van Hiele, sequenciais e hierarquicamente posicionados (Bansilal & Naidoo, 2012; Clements & Battista, 1992), não atribuem à memorização uma posição de destaque em qualquer um dos níveis, mas, sim, dão relevo à compreensão (Clements & Battista, 1992). Estes níveis mencionam, direta ou indiretamente, as transformações geométricas. Segundo Bansilal e Naidoo (2012), Outhred e Owens (2006) e Dindyal (2007), citados por Patsiomitou e Emvalotis (2009), estes níveis resumem-se ao nível 1 – visualização/reconhecimento (unicamente percepção visual) – onde constam o reconhecimento das formas, a observação das propriedades, o imaginar e reconhecer sobre diferentes ângulos. O objeto é visto como um todo onde as propriedades individuais não são distinguidas (Bansilal & Naidoo, 2012). No Nível 2 – análise – o objeto pode ser identificado pelas suas propriedades e relações. No nível 3 – dedução informal (a significância das propriedades é realizada) – os objetos são determinados pelas suas propriedades. No nível 4 – dedução formal – classificação, reconhecimento de propriedades essenciais como critério, descrever padrões, formular e testar hipóteses, fazer inferências. No nível 5 – rigor – com aplicação dos resultados geométricos ao quotidiano.

Em suma, as percepções visuais são fundamentais para o sucesso escolar dos primeiros anos, pela sua importância para o desenvolvimento da compreensão do espaço e do processo de apropriação da informação visual por parte da criança. Estas percepções visuais são apelidadas de

*intuição geométrica* ou *olho geométrico*, como lhe chamou Charles Godfrey em 1910 (Godfrey, 1910, citado por Fujita & Jones, 2003). A capacidade de visualização é muito importante na geometria, nomeadamente para a resolução de problemas que prevê “a habilidade de [o indivíduo se] abstrair mentalmente da figura, detetar elementos particulares, e criar conjecturas suficientemente boas acerca das suas relações para potenciar outras experiências e o uso de ferramentas analíticas” (Goldenberg, Cuoco & Mark, 1998, citados por Fujita, Jones & Yamamoto, 2004, p. 2).

A geometria é uma área da matemática onde a intuição é frequentemente mencionada (Fujita & Jones, 2003) e encarada como essencial para a aprendizagem, mas cujo desenvolvimento exige uma aprendizagem deliberada por não ser inata ao ser humano (Clements & Battista, 1992; Fujita, Jones & Yamamoto, 2004), mas que não pode ser reduzida a um conglomerado de imagens sensoriais (Fischbein, 1987, citado por Clements & Battista, 1992). O ambiente físico, social, cultural e o currículo da matemática escolar que cada aluno vivencia provocam diferenças culturais visíveis nas realizações geométricas, ou seja, são resultado de uma aprendizagem deliberada ou apreendida (Clements & Battista, 1992).

Todavia, Piaget e Van Hiele atribuíram pouco mérito à intuição geométrica (Fujita & Jones, 2003). Piaget afirmava que a intuição diminuía durante o desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem do aluno sob o ponto de vista geométrico (Beth & Piaget, 1966, citados por Outhred & Owens, 2006). Contrariando esta ideia estão a alguns géometras profissionais, tais como Hilbert (1862-1943) e Poincaré (1854-1912) (Fujita & Jones, 2003). Por exemplo, Hilbert (1932, citado por Fujita & Jones, 2003) referiu que “continua a ser verdade como sempre foi, que a intuição desempenha um papel importante”. Recentemente, o matemático Atiyah (2001, citado por Fujita & Jones, 2003) referiu que a “intuição espacial ou a percepção espacial é uma ferramenta enormemente poderosa e é por isso que a geometria é atualmente uma parte poderosa da matemática. (...) A nossa intuição é a nossa ferramenta mais poderosa” (p. 56).

Godfrey (1910) acreditava que o *olho geométrico* podia representar uma ferramenta potente para a construção efetiva da intuição geométrica (Godfrey, 1910, citado por Fujita & Jones, 2003) que permitia ao aluno reconhecer propriedades geométricas, relacionar imagens com conceitos e teoremas da geometria, bem como facilitar a resolução de problemas geométricos através da criação e manipulação de figuras na sua mente (Fujita, Jones & Yamamoto, 2004). A ação mental é deveras importante para a aprendizagem da geometria pela maioria das perspetivas teóricas (Clements & Battista, 1992).

Assim, na matemática elementar, este tema possibilita o estudo das propriedades das figuras abstraindo-se da sua posição como elemento constituinte da própria e, na matemática do 3.º ciclo e secundário, permite uma nova abordagem para além do carácter analítico que tem sido o objeto final do

seu ensino nos últimos anos (Clements & Battista, 1992; Veloso, 1998). Usiskin (1987, citado por Clements e Battista (1992) refere que os alunos do 3.º ciclo do EB e do secundário não estão preparados para essa abordagem formal da geometria porque, no nível elementar, não ficam a perceber geometria o suficiente para terem sucesso. “Os alunos precisam de aprender a alterar, quer física quer mentalmente, a posição, a orientação e a dimensão dos objetos de forma sistematizada, à medida que vão desenvolvendo os seus conhecimentos sobre congruência, semelhança e transformações” (NCTM, 2008, p. 48). Esta fraca prestação pode ser atribuída ao currículo da matemática escolar, quer pelos tópicos que são tratados, quer pela forma como são tratados (Clements & Battista, 1992). “Aparentemente, muita da aprendizagem de conceitos geométricos deixou de ser um hábito” (Clements & Battista, 1992, p. 422) e as “propriedades, inclusões, relações e implicações não são, geralmente, percebidas” (Mayberry, 1983, citado por Clements & Battista, 1992).

Também Bansilal e Naidoo (2012) elaboraram um estudo com 40 alunos do ensino secundário e perceberam que a maior parte destes, apesar de recorrerem ao método analítico para a resolução das tarefas propostas no âmbito das transformações geométricas, revelavam uma ação limitada na interpretação visual do procedimento que estavam a realizar. Estes autores defendem que é crucial a conexão entre a vertente analítica e a visual para haver um entendimento profundo da matéria.

Desta forma, o estudo das transformações relaciona as suas propriedades com as propriedades dos objetos, pois permite descobrir e provar as propriedades dos objetos geométricos no plano que permitem a formação de frisos, rosáceas, padrões em papéis de parede, classificar objetos e perceber a sua quiralidade (Ilaslan, 2013).

O ponto (2) representa a visão da geometria à luz da concetualização matemática contemporânea, onde o plano representa um conjunto infinito de pontos e as figuras, conjuntos de pontos que são subconjuntos do plano, ou seja, figuras não separáveis deste (Hollebrands, 2003, citada por Yanik, 2011). As transformações geométricas são aplicações a todos os pontos do plano e não somente a um único objeto (Yanik, 2011). No caso particular das simetrias, constituem uma função que representa um automorfismo (Bouckaert, s.d.).

Hollebrands (2004) defende que um entendimento completo das transformações requer que se perceba a relação de bijeção entre os pontos do plano (domínio), os elementos associados a cada transformação e as relações e as propriedades das mesmas. A visão das transformações como funções e não como movimentos é, para Hollebrands (2004), uma compreensão importante para o desenvolvimento do raciocínio. Com o intuito de promover o abandono da conceção dos alunos de que as transformações são ações ou movimentos aplicados a uma figura, Hollebrands (2004), no estudo efetuado com 6 alunos do 10.º ano de escolaridade, trabalhou unicamente com pontos isolados do plano para dar a ideia de que todos os pontos do plano sofreriam a mesma transformação.

No trabalho de investigação elaborado por Thaqi (2009), eram descritas as semelhanças e as diferenças que a formação docente no Kosovo e na Catalunha, influenciada pelas condições socioeconômicas, produziam na abordagem das transformações na matemática elementar. Nesse trabalho, Thaqi (2009), menciona a relevância do estudo das transformações geométricas na matemática elementar atribuindo-lhe benefícios por grau de importância. Em primeiro lugar, era mencionada a possibilidade de este tema se relacionar com as funções, uma vez que as transformações geométricas são aplicações das funções na geometria e permitem, assim, um tratamento fundamental para toda a matemática (Jackson, 1975, citado por Thaqi, 2009). As transformações geométricas induzem um aparente movimento que representa fisicamente a correspondência entre pontos no plano (Matos, 2011). Os restantes benefícios relacionavam-se com a natureza dinâmica que este tema permite na realização de tarefas geométricas não estáticas e o desenvolvimento de aspetos intuitivos e informais que permitem a apropriação de ideias geométricas por parte dos alunos (Geddes, 1992, citado por Thaqi, 2009).

A noção de simetria em Matemática assume um papel de elevada importância pela sua íntima associação à noção algébrica de grupo (Oliveira, 1997). Stylianou e Grzegorzcyk (2005) desenvolveram um curso de exploração das transformações geométricas e simetrias, induzindo os alunos ao necessário conhecimento da estrutura de grupo que, reconhecido pelos próprios, lhes permitiu ganhar novas visões relativamente à matemática e à arte.

O cruzamento de aspetos elementares das transformações e teoria de grupos, para além de engrandecer o estudo destes temas matemáticos, origina uma série de vantagens sob o ponto de vista não matemático que os torna especialmente apelativos (Schattschneider, 1978). A análise de um desenho repetitivo, a forma como é construído e a criação de desenhos originais usando as poderosas ideias matemáticas que os assistem, é um motivo forte para o estudo destes grupos (Schattschneider, 1978). Schattschneider (1978) refere que o termo simetria possui um significado aplicado tanto na matemática como no meio artístico e dá como exemplo os trabalhos de Escher, que foram considerados, porventura, o maior testemunho do poder que a teoria de grupos nos deixou.

Os objetos culturais e do quotidiano são, para muitos autores, o mote para o desenvolvimento matemático das transformações geométricas e das simetrias, pois permite a aplicação de conceitos científicos à realidade, e “olhar e compreender o mundo que nos rodeia” (Figueira et al., 2007, p. 6). Assim, no ponto (3) encontramos várias referências que se centravam na associação da matemática, em particular da geometria e, neste trabalho, mais especificamente a simetria e as transformações geométricas, a outras áreas de interesse, tais como a arte, a cultura, o *design*, a etnografia, entre outras. Nestes, a simetria é encarada como um dos conceitos fundamentais em Geometria (Marchis, 2009, p. 57), pois “fornece discernimento no campo da matemática e no da arte e da estética” (NCTM,

2008, p. 46) e “é um aspeto da matemática que está fortemente relacionada com a arte e o design” (Stylianou & Grzegorzcyk, 2005, p. 30). A simetria é importante na aprendizagem da matemática e pode ser aplicada a outras áreas dentro da própria matemática bem como a outras áreas do saber (Son, 2006).

A conexão entre a matemática e outras áreas do saber possibilita o desenrolar de experiências de aprendizagem ricas e motivadoras que permitem o estabelecimento de uma relação mais efetiva e empática com a própria matemática (Matos & Cabrita, 2012). Os estudantes, segundo Gura (1996), especialmente aqueles que não são “fortes em matemática” (p. 40), apresentam uma intuição geométrica pouco desenvolvida e estas conexões ajudam-nos a desenvolver essa intuição, assim como a autoestima, a vontade de enfrentar questões difíceis, a perseverança e a motivação.

Na conexão entre a arte e a matemática, Stylianou e Grzegorzcyk (2005) destacam os trabalhos de Escher e Fomenk, respetivamente um artista que desenhava inspirado em ideias matemáticas sobre as quais lia e um matemático que usava a arte como forma de expressar a abstração matemática. Estes autores referem mesmo que os estudantes que participaram no projeto *Escher World* “desenvolveram uma forte compreensão do conceito de simetria e o desenvolvimento geral das competências relacionadas com a resolução de problemas” (p. 32).

A etnomatemática, frequentemente referida nos nossos dias, surgiu na década de 70 para defender o estudo da matemática nos diferentes contextos culturais e prevê o aproveitamento da relação entre a Matemática e a Cultura para possibilitar a aprendizagem, por parte dos alunos, não só de conceitos matemáticos mas, também, de elementos culturais (Marchis, 2009).

São vários os trabalhos que utilizaram elementos culturais para a exploração destes temas da matemática e que relatam os benefícios deste tipo de abordagens nesta área. Por exemplo, Liu e Toussaint (2011) deram ênfase às estruturas geométricas e padrões de repetição de objetos ou estruturas específicas da Catedral de Siena, nomeadamente nos imensos mosaicos no pavimento, nas paredes e no teto, por a considerarem uma das mais belas do mundo. Nascimento, Benutti e Neves (2007) realçam a relação histórica entre as mandalas e as rosáceas e a natural atração pelas mesmas que origina uma motivação espontânea pelo tema e, conseqüentemente, um aprofundamento dos conceitos e princípios nelas envolvidos. Sendo que o desenho das mandalas tem como base uma estrutura geométrica que consiste em processos de divisão da circunferência em partes iguais, alia o uso necessário da geometria ao cálculo rigoroso e cuidadoso necessário à sua construção, ao estudo dos polígonos regulares, dos polígonos côncavos e convexos e dos polígonos estrelados que constituem temas imprescindíveis no processo educacional. Também Marchis (2009) relata a associação da Arte e da Etnografia através da Matemática, em particular através do conceito da

simetria que está relacionada com a natureza e com objetos do dia-a-dia tais como mobílias, prédios e carros.

Gordon (1996), Gorini (1993), Gura (1996) e Stylianou e Grzegorzcyk (2005) experimentaram, com sucesso, a lecionação de cursos de formação abordando temas da matemática com recurso à arte e ao estudo de objetos do quotidiano. Se Gordon (1996) utilizou o papel de parede, Gorini (1993) usou a análise visual de obras de arte e Gura (1996) serviu-se da análise de motivos simétricos em objetos variados. Gorini (1993) revela que esta experiência permitiu que os alunos descobrissem, por si mesmos, a conexão entre estas duas áreas e percebessem que a beleza de alguns trabalhos artísticos provém da beleza da própria matemática. Huntley (1970), citado por Gura (1996), já afirmava o mesmo quando dizia que “a matemática deve atrair os adolescentes não apenas porque lhes interessa mas também porque lhes satisfaz o seu sentido de beleza” (p. 338), ou seja, uma forma de os cativar para os temas da matemática é cativá-los para o sentido do belo.

Gordon (1996) refere que a riqueza do estudo de estruturas repetitivas, tais como o papel de parede, é uma ferramenta rica, acessível, transcultural e recheada de tópicos de estudo que provocou nos seus alunos, num primeiro impacto, um grande entusiasmo. Gura (1996) tem a percepção de que os alunos acabaram o curso com uma ideia do mundo matemático com mais conexões com outras áreas do que eles próprios pensavam. Stylianou e Grzegorzcyk (2005) exploraram padrões geométricos e conceitos matemáticos nos objetos trazidos pelos próprios alunos provenientes da arte clássica e contemporânea. Estes cursos iniciaram-se tomando como ponto partida das preconcepções dos conceitos trabalhados pelos próprios alunos. Por exemplo, todos os alunos do curso ministrado por Stylianou e Grzegorzcyk (2005) possuíam uma ideia de simetria, mas não conseguiam defini-la verbalmente, contudo, identificaram a simetria como simetria axial ou como sendo uma simples reflexão sem reconhecerem matematicamente as restantes. No final deste curso, o reconhecimento das quatro simetrias era notável e verificava-se inclusivamente o uso de termos específicos e propriedades familiares da teoria de grupos.

No término dos cursos referidos anteriormente, o fascínio dos alunos era visível (Gordon, 1996; Gorini, 1993; Gura, 1996) quer pela simetria em particular (Gura, 1996), quer pela outra visão do mundo que consistia em encontrar simetrias nos padrões que viam nos objetos do quotidiano (Gordon, 1996). Os alunos de Gura (1996) estavam tão fascinados pela descoberta das regularidades em objetos tão comuns como as jantes das rodas dos carros, que muitos adotaram estas análises como passatempo mental enquanto caminhavam. Cerca de 80% dos alunos de Stylianou e Grzegorzcyk (2005) apresentavam-se, inicialmente, como pouco motivados para a matemática e, no final, aumentou para 48% o número daqueles que apresentaram um sentimento positivo face a esta área científica. O curso ministrado por Gura (1996) permitiu a abordagem de áreas da matemática que os alunos nunca

havam estudado, e permitiu-lhes, mesmo àqueles com um *background* matemático limitado, percebê-las e apreciá-las.

Considerando que o *International Mathematics and Sciences Study* (1998), referido por Thaçi (2009), aponta, na generalidade, para um baixo nível de aprendizagem das transformações por parte dos alunos, as propostas de Gura (1996), Gorini (1993) e Gordon (1996) descrevem uma forma de as explorar tendo como base as mais diversas representações de arte ou mesmo de objetos do quotidiano. A integração da arte com a matemática constitui uma ferramenta tangível que pode animar as turmas e ser motivadora em especial para aqueles alunos que não se identificam com os currículos adotados ou com os conceitos abstratos da matemática ou, ainda, cuja pedagogia se revelou infrutífera (Stylianou & Grzegorzcyk, 2005). Como vimos, os autores destacam os benefícios da aprendizagem da Matemática através da arte e consideram-na uma ponte para as aprendizagens matemáticas. A simetria, para além de fazer parte do mundo real, é, também, um conceito científico (Bulf, 2009; Bouckaert, s.d.) e, neste âmbito, as conexões são um bom motivo para a exploração das várias áreas. O desenvolvimento da criatividade matemática em cada estudante é um dos propósitos da matemática escolar e uma componente básica para a construção do conhecimento (Lev-Zamir & Leikin, 2011).

No que concerne à própria matemática, o estudo das simetrias das figuras está implicitamente conectada com as transformações geométricas e fornece “ferramentas que podem ser muito úteis na resolução de problemas geométricos” (Santos et al., 2011, p. 3). Para além disso, permitem ajudar os alunos a compreender a simetria e todas as propriedades das figuras que daí possam advir (NCTM, 2008) e permite fomentar a expressão livre do seu espírito criativo. Neste sentido, Matos e Cabrita (2012) realçam o reconhecimento de padrões e regularidades por detrás de algumas estruturas (quer sejam numéricas, figurativas, geométricas ou sonoras) e a capacidade de os reproduzir, continuar, completar e identificar conjuntos de repetição. Estas ações permitem conhecer o mundo à nossa volta, aproveitando, assim, o poder da própria matemática, e tornam-se fundamentais para formular e testar conjecturas, produzir generalizações e justificações (Matos, 2011; Matos & Cabrita, 2012).

A resolução de problemas que constitui uma capacidade transversal no ensino da Matemática, plasmada quer nos documentos legais do Ministério da Educação de Portugal, quer em vários referenciais estrangeiros de que é exemplo o NCTM, passa a contemplar a simetria e as transformações geométricas como uma estratégia de resolução, verdadeiramente notável e raramente utilizada. Neste âmbito, realçamos o magnífico trabalho de Leikin, Berman e Zaslavsky (2000), que apresentou alguns exemplos da aplicação de diferentes tipos de transformações geométricas na resolução de problemas permitindo o destaque deste conceito matemático. Para estes autores, este tema “desempenha um papel extremamente importante como técnica de resolução de problemas” (p.

799) e possibilita a conexão entre várias áreas da matemática, tais como a geometria, a álgebra, a probabilidade e a análise matemática. Também Polya (1981), conhecido internacionalmente pelos trabalhos publicados sobre a resolução de problemas, corrobora esta opinião dizendo que “qualquer isometria encontrada nos dados ou nas condições do problema poderá espelhar a [sua] solução” (p. 161). Levav-Waynberg e Leikin (2012) destacam, igualmente, a importância da exploração de múltiplas hipóteses de resolução de problemas geométricos como forma de aumentar o sucesso dos alunos na própria geometria e concluíram que o uso das isometrias, apesar de pouco usuais na resolução de problemas, representa uma estratégia considerada diferente mas relevante na resolução de problemas da vida real.

Em consonância com estes pontos, a geometria ultrapassa a fronteira de ser um conjunto de definições para se tornar uma ferramenta fundamental para a identificação e descrição de relações que permite raciocinar cuidadosamente sobre as noções geométricas (NCTM, 2008).

### **Algumas Particularidades desta Nova Abordagem das Transformações Geométricas**

O estudo das isometrias já abordadas em programas de Matemática anteriores a 2007, a translação, a rotação e a reflexão, poderá não suscitar grandes dúvidas porque, muito provavelmente, os professores, em algum momento da sua formação, estudaram estas transformações. Os programas de Matemática, desde 1968 e até aos dias de hoje, registam referências às transformações geométricas, pelo menos ao nível do ensino secundário<sup>14</sup>.

A dificuldade, na atualidade, poderá estar na abordagem das novas conceitualizações e das representações que destas novas abordagens surgiram. Referimo-nos especialmente ao conceito de reflexão deslizante e de simetria e das suas representações (rosáceas e frisos), que fazem parte do programa de Matemática do Ensino Básico de 2007. E é sobre estas particularidades que queremos dar ênfase nesta investigação. Também, neste momento, consideramos importante fazer alguma ligação entre esta temática e as suas referências nos manuais escolares dado ser este um recurso que possui um papel determinante no processo de ensino e aprendizagem (Guimarães, 2009), nomeadamente, pela sua frequente utilização por parte dos professores (Botas, 2008; Duarte, 1999; Pires, 2009). Assim, neste ponto específico do trabalho de investigação e, como forma de preparar a

---

<sup>14</sup> Os programas da década de 60 e 70 podem ser consultados em Gonçalves (2007). A referência ao estudo das transformações geométricas no programa anterior a 1991 pode ser consultada em Duarte (1988).

justificação do conteúdo do questionário tratado no capítulo seguinte, sentimos necessidade de proceder a uma breve abordagem teórica, centrada nas particularidades das transformações geométricas no que concerne aos novos tópicos: reflexão deslizante, simetria, rosáceas e frisos.

O tema das transformações geométricas, como já referimos na revisão da literatura, tem “uma relação íntima com a teoria de grupos” (Veloso, 2012, p. 40) e com as funções (Araújo, 2002), cujas conexões tornam-se vantajosas para a compreensão, por parte do professor, de inúmeros factos relacionados com esta temática.

A associação das aplicações às isometrias permite um certo distanciamento da ideia da existência de um movimento físico, aplicado a um ponto ou a uma figura, quando se aplica uma isometria e de algumas limitações que esta ideia fomenta. Tal movimento não existe mas é uma representação física desta correspondência aplicada a todos os pontos do plano (Cabrita, Pinheiro, Pinheiro & Sousa, 2008). São vários os autores que definem transformação geométrica à custa das funções. Por exemplo:

- Araújo (2002, p. 95) – Uma transformação geométrica é “uma função que faz corresponder a cada ponto de  $E$  um novo ponto de  $E$ ; normalmente exigimos que essa função seja bijectiva (cada ponto de  $E$  é a imagem de um e um só ponto de  $E$ ), e que preserve as figuras geométricas básicas”. Este autor diz, ainda, que, pela definição acima referida, “qualquer isometria transforma cada figura numa figura congruente” (p. 96).
- Franco de Oliveira (1997, p. 47) – Uma transformação geométrica é “uma aplicação bijectiva<sup>15</sup> (permutações) de um plano (ou espaço) sobre si mesmo”.
- Cabrita et al. (2008) – Uma transformação geométrica é uma correspondência biunívoca de todos os pontos no plano (ou espaço) sobre si próprio.

No que respeita à teoria de grupos, o conjunto das isometrias, munido da operação de composição, possui a estrutura de grupo, ou seja, verifica as propriedades de fecho, associatividade, existência de elemento neutro e existência de elemento inverso. Esta associação das transformações geométricas à Teoria de Grupos permite perceber algumas características particulares do conjunto das isometrias, nomeadamente,

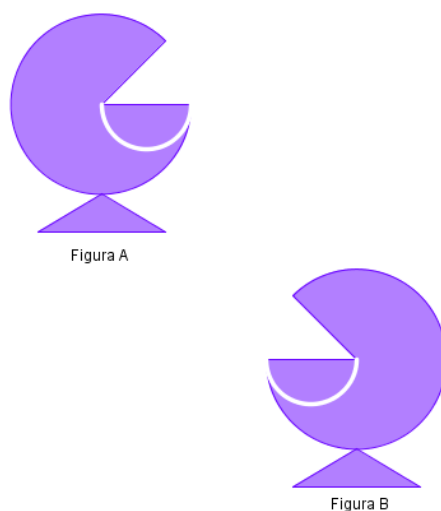
- A pertinência do estudo da reflexão deslizante, pela verificação da propriedade de fecho no grupo das isometrias no plano;
- A identificação da transformação identidade, que é uma isometria, como o elemento neutro do grupo das isometrias no plano (Palhares, 2004).

---

<sup>15</sup> Cada ponto do plano é a imagem de um e um só ponto do plano.

Assim, a reflexão deslizante não é apenas a composição de duas das três isometrias já conhecidas dos programas anteriores ao de 2007. Nas ações de formação sobre este tema e desenvolvidas pela investigadora, os professores questionavam a necessidade do estudo desta nova isometria por acreditarem ser esta a composição de outras duas já abordadas. O claro entendimento da resposta a esta questão está na estrutura de grupo do conjunto das isometrias. Ora, o “grupo das isometrias é por vezes designado por grupo de congruências. A razão para isto é que a partir de agora se pode definir que dois entes geométricos são congruentes se existir uma isometria que transforme um no outro” (Palhares, 2004, p. 358). Neste âmbito, vejamos na imagem seguinte o exemplo das duas Figuras A e B que, sendo congruentes, terá de existir uma isometria que transforme uma na outra. Assim, podemos interrogar: Que isometria poderá transformar a Figura A na Figura B (ver Figura 1)?

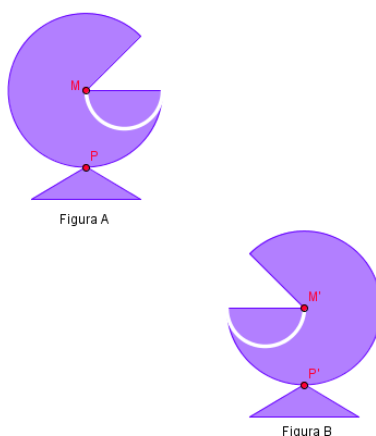
**Figura 1.** Figuras Isométricas com Orientações Distintas



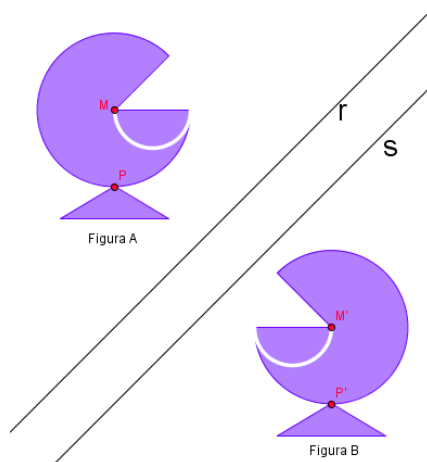
Dado que a Figura B não preserva a orientação da Figura A, a transformação em causa não pode ser uma translação nem uma rotação (isometrias positivas).

Vamos ver se pode ser outra isometria.

Se as três isometrias estudadas nos programas anteriores (reflexão, rotação e translação) fossem suficientes para transformar uma figura em outra congruente, a isometria que transformaria a Figura A na Figura B seria, então, a reflexão. Assim sendo, considerando  $M'$  a imagem de  $M$  (ver Figura 2), a reflexão teria como eixo, a mediatriz de  $[MM']$ . Ora, esta seria coincidente com a mediatriz de  $[PP']$  onde  $P'$  é a imagem de  $P$  na transformação que leva os pontos da Figura A nos pontos da Figura B.

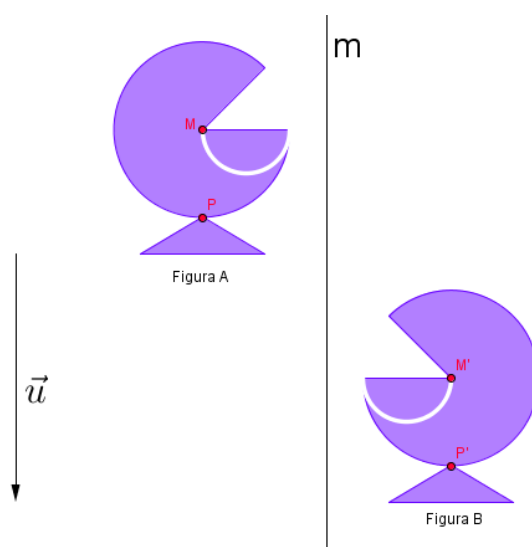
**Figura 2.** Figuras Isométricas por reflexão?

Representando as mediatrizes dos segmentos de reta, referidos anteriormente, que podem ser visualizadas na Figura 3 e que designamos por  $r$  e  $s$ , respetivamente, podemos verificar que as mediatrizes  $r$  e  $s$  não são coincidentes pelo que podemos afirmar não se tratar de uma reflexão, na medida em que não existe um único eixo da reflexão que transforme os pontos da Figura A nos pontos correspondentes da Figura B.

**Figura 3.** Mediatrizes de  $[MM']$  e  $[PP']$ 

Terá, portanto, de existir outra isometria, para além das três referidas anteriormente. Essa isometria é a reflexão deslizante (ver Figura 4).

Os pontos da Figura A são transformados nos pontos da Figura B através de uma reflexão deslizante que é a composição de uma reflexão com uma translação, em que o vetor de translação e o eixo da reflexão têm a mesma direção. Neste caso, o eixo da reflexão é  $m$  e o vetor de translação  $\vec{u}$ .

**Figura 4.** Reflexão Deslizante

Os traçados geométricos para a identificação destes elementos no plano, eixo da reflexão e vetor de translação, podem ser visualizados em Veloso (2012).

Assim, no plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , existem quatro isometrias: a translação, a reflexão, a rotação e a reflexão deslizante, a que Veloso (2012, p. 30) chama de *isometrias básicas*, e que permitem afirmar que uma figura e a sua transformada pela aplicação são congruentes. A composição de quaisquer duas destas isometrias é, ainda, uma isometria pelo que a propriedade de fecho desta estrutura é verificada. As demonstrações das composições referidas anteriormente podem ser consultadas em Veloso (1998, 2012).

Veloso (2012) refere ainda que

está completamente fora de questão a introdução do conceito de grupo aos alunos do ensino básico. No entanto, a presença dos grupos e das suas propriedades surge constantemente no estudo das transformações geométricas e da simetria, pelo que os professores de Matemática que ensinam estes tópicos têm o máximo interesse em adquirir alguns conhecimentos sobre esta estrutura tão importante, o que lhes permitirá um muito melhor domínio deste tópico do programa. (p. 22)

Consideramos importante procurar a informação presente em alguns manuais escolares sobre a reflexão deslizante, nomeadamente sobre a particularidade de o vetor de translação e o eixo de reflexão serem paralelos. Em alguns deles, não havia sequer a menção à reflexão deslizante, mas encontramos dois manuais que a mencionaram e referiam essa propriedade.

Como se vê no excerto de um manual apresentado na Figura 5, a nota destinada aos professores realça a necessidade de a direção da translação ter de ser paralela ao eixo da reflexão.

**Figura 5.** A Reflexão Deslizante num Manual do 6.º Ano de Escolaridade**Reflexão deslizante**

Reflexão deslizante é uma transformação geométrica resultante da composição de uma reflexão de eixo  $r$  com uma translação cujo vetor é paralelo a  $r$ .

Podemos, ainda, verificar, que a planificação anual, parte integrante deste manual escolar, também destaca esta propriedade (ver Figura 6).

**Figura 6.** A Reflexão Deslizante na Planificação Anual de um Manual Escolar A (6.º Ano de Escolaridade)

Objetivos	Notas
Compreender que a reflexão deslizante é uma composição de duas isometrias: uma reflexão e uma translação com a direção do eixo da reflexão.	Sugere-se chamar a atenção dos alunos de que a direção da translação tem de ser paralela ao eixo de reflexão para que se obtenha uma reflexão deslizante.

Outro manual do 6.º ano de escolaridade também definia reflexão deslizante mencionando a referida propriedade (ver Figura 7).

**Figura 7.** Definição de Reflexão Deslizante em outro Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade

Uma **reflexão deslizante** é uma transformação geométrica que consiste:

- numa reflexão de eixo  $r$ , seguida de uma translação ao longo do eixo de reflexão.
- ou numa translação seguida de uma reflexão de eixo  $r$  paralelo à direção da translação.

Alargando o âmbito desta consulta a dois manuais escolares do 8.º ano de escolaridade, quando se revisita este tema das isometrias, também é mencionada a reflexão deslizante com a propriedade atrás referida (ver Figuras 8 e 9).

**Figura 8.** Definição de Reflexão Deslizante num Manual Escolar do 8.º Ano de Escolaridade

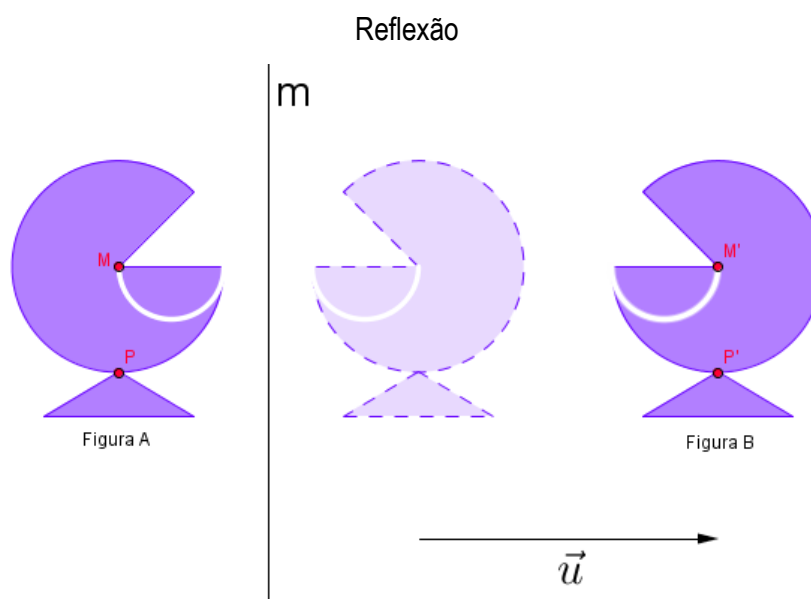
Uma **reflexão deslizante** é uma transformação geométrica que combina uma reflexão com uma translação na direção do eixo de reflexão.

**Figura 9.** Definição de Reflexão Deslizante em outro Manual Escolar do 8.º Ano de Escolaridade

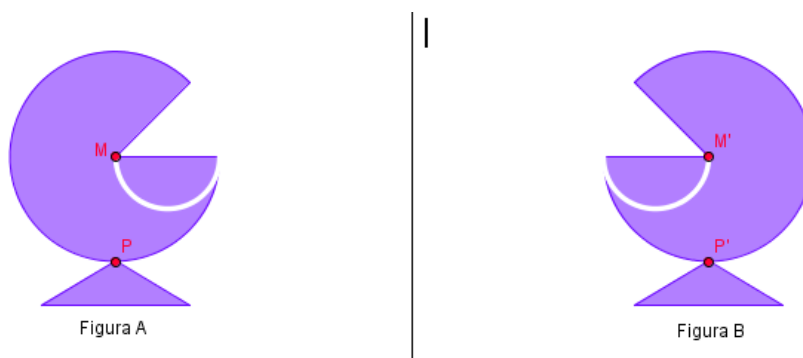
**Translação** é uma isometria em que todos os pontos da figura se deslocam segundo uma mesma direção, o mesmo sentido e percorrem uma mesma distância.

Quando numa figura se faz uma reflexão seguida de uma translação, com a mesma direção do eixo de reflexão, diz-se que a isometria é uma **reflexão deslizante**.

Esta propriedade de paralelismo entre o vetor de translação e o eixo de reflexão garante que se está, de facto, perante uma reflexão deslizante. Nem todas as composições de uma reflexão com uma translação representam uma reflexão deslizante. No exemplo da Figura 10 apresentamos a composição de uma reflexão e de uma translação com o vetor de translação com direção perpendicular ao eixo da reflexão. Pretendemos assim apresentar um exemplo da composição de uma translação com uma reflexão, cuja imagem não será obtida através da reflexão deslizante da figura original (Figura A).

**Figura 10.** Composição de uma Reflexão com uma Translação na Direção Perpendicular ao Eixo da

Neste caso particular, a Figura B é a imagem da Figura A pela reflexão de eixo  $l$  (ver Figura 11) e não por uma reflexão deslizante.

**Figura 11.** Reflexão de eixo l

Outro aspeto importante do estudo das isometrias é a compreensão da relação entre as próprias isometrias. É fundamental perceber, por exemplo, que a reflexão é a isometria fundamental, uma vez que, através desta, se podem obter por composições ou produtos de reflexões, todas as outras isometrias (Veloso, 2012). Acrescentamos, ainda, muito resumidamente, que o produto de duas reflexões terá como resultado uma translação ou uma rotação (isometrias positivas), e o produto de três reflexões resultará numa reflexão ou numa reflexão deslizante (isometrias negativas) (Veloso, 2012). Deste modo, “toda a isometria se pode escrever como a composta de não mais que três reflexões” (Araújo, 2002, p. 114). Portanto, relevamos que esta relação entre as reflexões e as restantes isometrias pode ser um auxílio importante na identificação das simetrias nos frisos e nas rosáceas.

A noção de simetria explorada no programa de Matemática de 2007 é claramente distinta da noção de simetria explorada nos programas que lhe são anteriores. Durante anos, a simetria era entendida como reflexão axial, como já referimos na revisão da literatura, e, atualmente, o conceito de simetria é bastante alargado, podendo referir-se a uma simetria de reflexão, simetria de translação, simetria de rotação ou simetria de reflexão deslizante. Esta mudança concetual é das tarefas mais difíceis com que os professores se deparam, por terem explorado, durante praticamente toda a sua carreira profissional e enquanto alunos, o conceito de simetria de uma forma claramente distinta da atual. Eduardo Veloso (2012) menciona este facto no livro publicado com o título *Simetrias e Transformações Geométricas* onde escreve

o leitor deve fazer um esforço por abandonar a noção estreita de simetria que muito possivelmente adquiriu na sua aprendizagem da geometria – a se simetria bilateral ou axial – pois estamos a caminho de definir um conceito diferente. Note que, nos capítulos anteriores [(estudo das isometrias)], por esta razão, não usámos nunca o termo “simetria”, tendo-o substituído por reflexão, designação que deverá adoptar definitivamente. (p. 41)

Considerando, então, a nova conceitualização, uma simetria pode ser definida do seguinte modo:

- “Se  $S$  é uma isometria do plano, seja  $F'$  a imagem de  $F$  por meio de  $S$ . Quando  $F'=F$ ,  $S$  diz-se simetria de  $F$ ” (Velo, 2012, p. 56).
- “Dada uma figura plana  $F$ , chama-se simetria de  $F$  toda a isometria  $S$  do plano que deixe  $F$  (globalmente) invariante, isto é,  $S(F)=F$ ” (Velo, 2012, p. 56).
- “Dizemos que uma isometria  $f$  é uma simetria para a figura  $F$ <sup>16</sup> se  $f$  fixa (deixa invariante) essa figura, isto é, se  $f(F) = F$ ” (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011, p. 74).

Atualmente, tal como refere Velo (2012),

o conceito de simetria implica sempre a consideração de uma figura. Quando procuramos simetrias, estamos sempre a referir-nos a uma determinada figura  $F$ . As simetrias de  $F$  são sempre uma parte -  $\text{Sim}(F)$  - do conjunto de todas as simetrias do plano. (p. 57)

Ora, o conjunto constituído por todas as simetrias de uma figura  $F$ , munido da operação de composição de transformações geométricas, admite a estrutura de grupo – o grupo de simetrias de  $F$  (Breda et al., 2011; Velo, 1998; Velo, 2012). Por outras palavras, o grupo de simetria de uma dada figura, é o conjunto de todas as simetrias que deixam a figura invariante (Matos, 2011) ou globalmente invariante, como quis especificar Velo (2012). Esta especificidade de Velo (2012) prende-se com a necessidade de “salientar que esta definição não implica que todos os pontos de  $F$  fiquem invariantes para a isometria  $S$ , mas sim que a imagem de  $F$  por meio de  $S$  coincide com  $F$  (daí a palavra globalmente)” (p. 56). Esta estrutura de grupo, tal como acontece com o conjunto das isometrias, tem a particularidade de a identidade ser o elemento neutro, sendo, por isso, elemento pertencente aos conjuntos considerados.

Analogamente ao referido para as isometrias considera-se a “teoria elementar dos grupos, essencial para a compreensão e estudo” das simetrias (Velo, 1998, p. 182) a fim de tornar perceptíveis determinadas características e particularidades das simetrias de uma figura.

O estudo das rosáceas foi outro tópico da Matemática introduzido no programa de Matemática do Ensino Básico (2007) com grande destaque. O reconhecimento destas representações dependem do reconhecimento das simetrias de rotação e, implicitamente, do conceito atual de simetria.

---

<sup>16</sup> É “muito importante notar que uma figura  $F$  é simplesmente um conjunto de pontos do plano” (Velo, 2012, p. 49).

No caso particular das rosáceas, definidas como figuras simétricas com simetrias de rotação, para além da identidade, que não contêm simetrias de translações nem de reflexão deslizante. Apresentam-se, ainda, como grupos finitos onde estão incluídos os grupos de simetrias dos polígonos.

Tal como ocorre com o grupo das isometrias, a teoria de grupos ajuda a perceber a razão da inclusão da simetria identidade no conjunto das simetrias de uma dada figura. A “simetria identidade (que fixa todos os pontos do plano)” (Velo, 2012, p. 56) é “assim simetria de qualquer figura, por pouco ‘simétrica’ que seja!” (p. 54).

Em todas as ações de formação desenvolvidas pela investigadora nesta temática, a dúvida instalada nos docentes acerca da inclusão da identidade no conjunto das simetrias de uma dada figura, foi colocada por um número significativo de profissionais. As suas reservas apoiavam-se no facto de a simetria identidade estar sempre presente e, por este motivo, interrogavam-se sobre o sentido matemático em a considerar. Para alguns daqueles professores, e principalmente para aqueles que conheciam a estrutura de grupo, a associação com o conjunto das simetrias poderá ter ajudado a esclarecer esta dúvida. Nestas atividades formativas, os professores presentes levantaram uma outra questão: se uma figura possuir apenas a simetria identidade (para além das restantes características), ela é uma rosácea?

Ora, baseando-nos em Breda et al. (2011, p. 96), “uma dada figura  $F$  possui *simetria rotacional* de ordem  $n$ , com  $n > 1$ , quando o grupo de simetrias dessa figura possui  $n$  rotações com centro num mesmo ponto,  $O$ , e de amplitudes  $\frac{360^\circ \times k}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ”. Esta definição permite-nos responder à questão colocada, dado que tal simetria de rotação é considerada se tiver ordem superior a 1.

Fomos procurar saber junto dos manuais escolares, se lá havia esclarecimentos suficientes que apoiassem os professores na dissipação desta dúvida. Nesses manuais, examinamos a existência de definições ou informações referentes às rosáceas e simetrias de rotação, que servissem de apoio e ajuda no esclarecimento destas particularidades.

Na maioria daqueles compêndios não se vislumbra uma definição de rosácea, sugerindo somente a realização de atividades práticas, depois da abordagem teórica às simetrias axial e rotacional. Contudo, um dos manuais apresentava numa dada página, e na sua margem esquerda, onde constava informação destinada aos professores, uma breve nota sobre as rosáceas (ver Figura 12).

**Figura 12.** Uma nota sobre Rosácea num Manual Escola do 6.º Ano de Escolaridade

**Professor (nota)**

As rosáceas têm sempre simetria de rotação; e quando têm também simetria de reflexão, têm o mesmo número de simetrias de reflexão e de rotação.

Em outro manual escolar era feita uma referência análoga à anterior (ver Figura 13) que era antecedida de uma definição de simetria de rotação (ver Figura 14).

**Figura 13.** Rosácea num Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade

Uma **rosácea** é uma figura com um **número finito de simetrias de rotação**. Pode ter também simetrias de reflexão.

Assim, observa-se que uma rosácea é composta por diversos módulos congruentes que se repetem, por rotação em torno de um mesmo ponto, sempre com a mesma medida de amplitude.

**Figura 14.** Simetria de Rotação num Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade

Uma figura tem **simetria de rotação de centro O e medida de amplitude  $\alpha$**  se o transformado da figura pela rotação é a própria figura.

Nenhum dos manuais consultados especifica a problemática atrás mencionada, e, também, não contém qualquer proposta de atividade com soluções que pudesse ajudar a esclarecer aquela especificidade. Esta situação é deveras pertinente uma vez que o recurso mais utilizado pelos professores na preparação das suas aulas acaba por ser o próprio manual escolar.

A página do manual escolar do qual se extraiu a Figura 15 remete-nos para os dois tipos de rosáceas existentes: as cíclicas e as diedrais, mas encontrámos apenas um único manual do 6.º ano de escolaridade que as mencionava explicitamente (ver Figura 15).

**Figura 15.** Rosáceas Cíclicas e Diedrais num Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade

As rosáceas podem ser de dois tipos:

- as **rosáceas cíclicas**, que possuem apenas simetrias de rotação;
- as **rosáceas diedrais**, que possuem apenas simetrias de rotação e simetrias de reflexão, em igual número.

Numa rosácea existe sempre um ponto do plano que é fixo para todas as simetrias da figura, o centro utilizado nas simetrias de rotação.

Como sabemos, a denominação das rosáceas em cíclicas ou diedrais provém, também, da teoria dos grupos (Veloso, 2012). As rosáceas diedrais permitem identificar o número de simetrias de rotação e de reflexão, pela identificação, por exemplo, de apenas uma destas, já que são sempre em igual número. Já as rosáceas cíclicas possuem apenas simetrias de rotação, para além da identidade, e não possuem simetrias de reflexão. Portanto, as rosáceas diedrais possuem, para além das simetrias de rotação, simetrias de reflexão.

A associação dos polígonos regulares ao estudo das rosáceas é uma conexão que adquire um elevado grau de importância por dois motivos apontados por Veloso (1998) e Palhares (2004), a saber:

- os “polígonos regulares são figuras com um elevado grau de simetria” (Veloso, 1998, p. 187);
- o estudo das simetrias dos polígonos regulares permite estabelecer uma relação entre o número de simetrias existentes e o seu número de lados. Assim, “um polígono regular terá sempre um grupo simétrico diédrico de ordem igual a duas vezes o número de lados” (Palhares, 2004, p. 362).

Todavia, o PMEB (2007), nesta matéria, propõe a identificação das simetrias numa figura onde se poderá incluir qualquer polígono, mas, nas *notas* é realçada a identificação dos eixos de simetria nos triângulos e a influência do número de simetrias para a respetiva classificação (ver Figura 16).

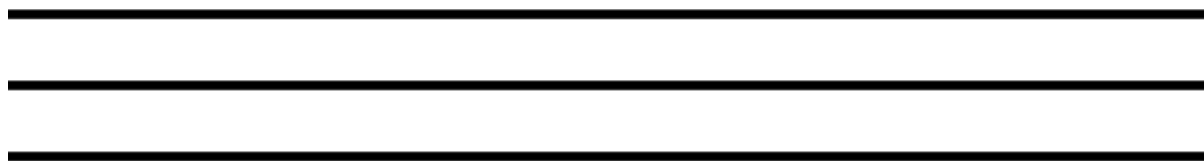
**Figura 16.** Simetrias nos Polígonos no PMEB (2007)

<p><b>Reflexão, rotação e translação</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção e propriedades da reflexão, da rotação e da translação</li> <li>• Simetrias axial e rotacional</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar, prever e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado.</li> <li>• Construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias.</li> <li>• Compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias numa figura.</li> <li>• Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias.</li> <li>• Identificar as simetrias de frisos e rosáceas.</li> <li>• Construir frisos e rosáceas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No estudo das isometrias recorrer à exploração de obras de arte e artesanato.</li> <li>• Usar imagens obtidas por composição de isometrias.</li> <li>• Fazer notar que a recta que contém a bissetriz de um ângulo é um eixo de simetria desse ângulo.</li> <li>• Na identificação dos eixos de simetria de uma figura, dar particular relevo ao caso dos triângulos.</li> <li>• Considerar o número de eixos de simetria na classificação de triângulos.</li> <li>• Propor a construção de figuras com mais de um eixo de simetria.</li> </ul>
---	---	--

Por último, abordaremos o caso dos frisos, outras representações que dependem do reconhecimento das simetrias de translação. Os frisos podem ser definidos como grupos infinitos que contêm translações numa só direção. O conjunto das simetrias dos frisos contém uma característica que sobressai de outras representações, ou seja: “existe uma infinidade de simetrias de translação

numa única direcção, uma das quais, tem módulo diferente de 0" (Veloso, 2012, p. 75). Por este motivo, a representação da Figura 17 não é considerada um friso.

**Figura 17.** Representação que não é um Friso



Os frisos permitem uma exploração completa de todas as simetrias, pois, ao contrário das rosáceas, um friso pode possuir simetria de rotação, simetria de reflexão, simetria de reflexão deslizante e simetria de translação.

Os frisos constituem um novo tópico introduzido no programa de Matemática do Ensino Básico, que, até ao ano letivo 2012/2013<sup>17</sup> (inclusive), era explorado no 1.º CEB de forma intuitiva, sem o objetivo específico de identificar as simetrias presentes nestas representações. Existem apenas sete tipos de frisos contendo diferentes conjuntos de simetrias. Mas podemos interrogar: porquê apenas sete tipos de frisos? No livro de Veloso (2012), o autor faz a demonstração da existência de apenas sete tipos de frisos e justifica a importância dessa demonstração dizendo que

as capacidades de visualização são essenciais no tratamento da simetria no ensino básico. A razão para apresentarmos a demonstração, bastante longa, é o facto de os raciocínios que estão presentes nos ajudarem a ganhar uma maior intuição e um maior conhecimento do tema da simetria. (p. 93)

Perceber o motivo da existência de apenas estes sete tipos de frisos torna mais rica a exploração deste tema que permite, por exemplo, o reconhecimento de algumas simetrias em função de outras ou a impossibilidade da existência de umas pela existência de outras. Por exemplo, permite concluir que, se um dado friso possuir simetria de reflexão de eixo horizontal e simetria de eixo vertical, possui também simetria de rotação. Ou, ainda, ajuda a perceber que não existe simetria de rotação se o friso possuir simetria de reflexão de eixo horizontal, mas não possuir simetria de reflexão de eixo vertical. A referência a *eixo horizontal* e *eixo vertical* foi adotada, pelos mesmos motivos que Veloso o fez na sua obra datada de 2012, ou seja, para facilitar a escrita sem se perder, contudo, a generalidade. Ainda neste âmbito, importa saber se um friso com simetria de reflexão de eixo horizontal possui simetria de reflexão deslizante. Vejamos o exemplo do friso da Figura 18.

<sup>17</sup> Em 19 de junho de 2013 foi homologado o novo programa de Matemática pelo Ministério de Nuno Crato.

**Figura 18.** Friso com Simetria de Translação, Simetria de Reflexão de Eixo Vertical e Eixo Horizontal e Simetria de Rotação



Podemos assinalar que este friso, para além da simetria de translação, possui simetria de reflexão de eixo horizontal, mas não possui simetria de reflexão deslizante porque esta é trivial, e, por isso, não pode ser considerada caso contrário, como refere Veloso (2012), todos os frisos com simetria de reflexão de eixo horizontal teriam, também, simetria de reflexão deslizante. Assim, num friso, o facto de haver simetrias de reflexão horizontal não implica a existência de simetrias de reflexão deslizante, bem como, se o friso possuir simetrias de reflexão deslizante, tal não significa que tenha simetrias de reflexão horizontal. Pelo contrário, a existência de uma destas implica a inexistência da outra.

Veloso (2012), dissertando sobre esta matéria afirma que um friso que possua simetrias de reflexão horizontal

tem simetrias de reflexão deslizante, mas apenas triviais. Este último ponto é importante: as simetrias de reflexão deslizantes triviais, que existem em todos os frisos que têm simetria de reflexão horizontal, não acrescentam nada de novo à simetria do friso, e por isso não contam, por assim dizer, na classificação que estamos a fazer dos tipos de frisos existentes. (p. 102)

Todavia, sabemos que recorrendo a materiais manipuláveis para a identificação das simetrias, em particular os acetatos ou o papel vegetal, as manipulações efetuadas com estes recursos induzem que um friso com simetria de eixo horizontal possui, também, simetria de reflexão deslizante.

Ora, mais uma vez e neste assunto da simetria de reflexão deslizante ser não trivial, constatamos que, após mais uma pesquisa ao desenvolvimento dos conteúdos nos manuais escolares adotados por algumas escolas, se concluiu pela ausência de referências a este tema. Em alguns daqueles manuais registamos, inclusivamente e frequentemente, na solução dos exercícios propostos, a identificação, no mesmo friso, de simetrias de reflexão horizontal e de reflexão deslizante, como podemos ver na Figura 19.

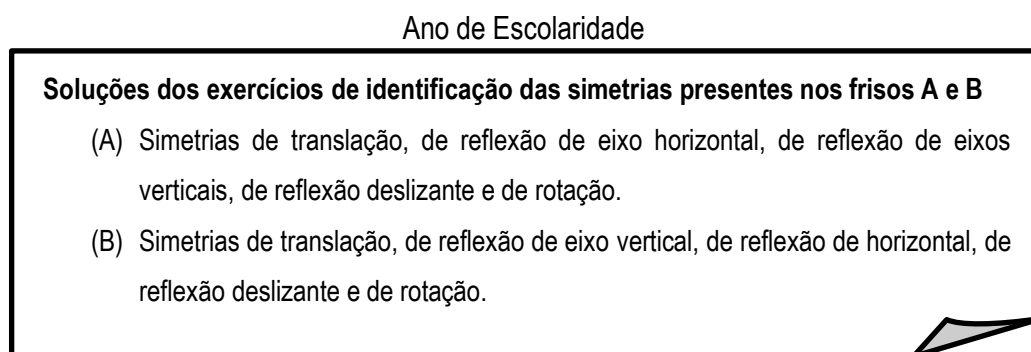
**Figura 19.** Soluções das Simetrias Existentes em Dois Frisos de m Manual Escolar do 6.º Ano de Escolaridade

(A) Friso gerado por reflexão de eixo vertical: pm11

Sublinhamos, ainda, que em nenhum dos manuais escolares consultados, quer do 6.º ano quer do 8º ano de escolaridade, era mencionado a existência de apenas sete tipos de frisos.

Na visita que efetuamos a um dos manuais escolares com a intenção de saber mais sobre este tema, verificamos que este continha uma faixa específica para professores com soluções de atividades, e onde constava a indicação da designação adotada por Washburn e Crowe (1998) para a classificação dos frisos, e que já referimos na revisão da literatura. Na nossa opinião, o conhecimento desta designação, pelo menos por parte do professor, ajuda a identificar as simetrias presentes no friso e a perceção da impossibilidade da existência de outras mais difíceis de identificar visualmente, de que é exemplo a existência em simultâneo das simetrias de eixo horizontal e de reflexão deslizante. Também detetamos que um dos manuais escolares apresentava a dita designação várias vezes, na parte destinada ao professor (ver Figura 20).

**Figura 20.** Exemplo do Uso da Designação de Washburn e Crowe (1998) num Manual Escolar do 6.º



Contudo este manual não explorava o significado e a interpretação desta designação.

## O Ensino e Aprendizagem das Transformações Geométricas

Iniciaremos esta temática pela referência ao conhecimento prévio existente quer nos alunos, quer nos professores, que são, muitas vezes, resistentes à mudança e impeditivos da aprendizagem de novas ideias (Yanik, 2011). O “conhecimento prévio pode ser considerado como uma combinação de conhecimentos, competências e crenças acerca de como a matemática funciona” (Yanik, 2011, p. 232), ou seja, constitui um conjunto de saberes que o indivíduo possui antes de ser formalmente introduzido ao tópico considerado. O conhecimento acerca de entidades matemáticas, segundo Yanik (2011, p. 232), “pode ser formal ou informal e pode ser parcialmente correto ou errado quando

comparado com as normas científicas” e pode ainda consistir uma “fonte de informação pessoal, competências, experiências, crenças e memórias” (Alexander, Shallert & Hare, 1991, citados por Yanik, 2011, p. 232).

As preconceções “desempenham um papel importante nas aquisições de conceitos matemáticos por parte dos aprendizes” (Yanik, 2011, p. 233), sendo, por isso, importante conhecê-las, quer nos alunos, quer nos professores, e perceber as estruturas desse conhecimento inocente para poder desenvolver um ambiente de aprendizagem favorável (Yanik, 2011).

Em consonância com o que acabámos de referir e, no caso particular das transformações geométricas mencionadas no PMEB (2007), o GTG (s.d.) da APM e Canavarro (2010) mostram preocupação sobre a abordagem deste tema no seu aspeto científico, dando como exemplo o conceito de *simetria* que acreditam continuar a designar, para os professores, a transformação geométrica que atualmente se designa por reflexão. Canavarro (2010) dá conta que “em muitas escolas continua-se a perpetuar o erro de identificar a isometria reflexão com a simetria e a dizer que as duas mãos são simétricas uma da outra” (p. 1). É necessário um aprofundamento teórico destes novos temas por parte dos professores (Canavarro, 2010; GT2, 2010) e encontrar modos de propor e apresentar, aos docentes, oportunidades que visem a sua entrada e instalação na sala de aula (Loureiro, 2007), pois é urgente colmatar a prevalência de conceitos e significados erróneos, já muito enraizados e generalizados como são os exemplos relatados (Canavarro, 2010). Não “devemos perder de vista a forte possibilidade que existe de as conceções dos professores interferirem no ensino que realizam e na aprendizagem dos seus alunos” (Vasconcellos, s.d., p. 1). Nomeadamente, segundo Costa (2008), o confronto entre a inovação curricular e as conceções dos professores pode provocar um desconforto nestes que os leva a evitar temas que não dominam ou onde se sentem inseguros ou, ainda, com falta de confiança (Curi, 2004).

Ao nível do primeiro ciclo, prevê-se uma exploração intuitiva das quatro isometrias, contudo, mesmo assim, a formação em Matemática é considerada fundamental. Segundo Dâmaso et al. (2010, p. 3) os “docentes terão que estar preparados para o fazer, sob pena de que a mesma não passe de uma exploração com um mero propósito estético” e para Ponte, Nunes e Quaresma, (s.d.)

o conhecimento da Matemática é indispensável, a começar pelos tópicos que surgem de novo neste programa (por exemplo, (...) os frisos e as rosáceas (...)). Não se trata, naturalmente, de estudar Matemática pela Matemática, mas sim de estudar a Matemática relevante para o ensino da disciplina. (p. 17)

O GTG (s.d.) defende, assim, a existência de um glossário no programa sobre os termos e objetos a estudar, em particular as isometrias, bem como algumas notas esclarecedoras sobre o que mudou neste programa relativamente ao anterior. Os conceitos relacionados com as transformações

geométricas, como é o caso da reflexão e da simetria, são agora trabalhados numa perspetiva mais alargada do que vinha a ser feito no programa anterior.

A nova abordagem das transformações geométricas no PMEB (2007) foi, para Veloso (2012), uma causa próxima do incentivo para a publicação do livro *Simetria e Transformações Geométricas. Textos de Geometria para Professores*. Este autor refere que, na fase de “experimentação do novo programa e no acompanhamento da sua generalização, foi esquecida a formação matemática dos professores relativamente à simetria e às transformações geométricas, não se tendo em conta que na formação inicial dos futuros professores, tanto nas Escolas Superiores de Educação como nas Universidades, esses temas têm sido habitualmente ignorados ou então abordados de forma inadequada, surgindo muitas vezes incluídos em tópicos de Álgebra Linear” (p. 2). Veloso dá-nos conta, também, em função desta realidade, da preocupação da APM de proporcionar ações de formação para colmatar as previsíveis dificuldades por parte dos professores. Loureiro (2009) também faz um apelo neste sentido, considerando esta temática crítica, sob o ponto de vista dos conceitos matemáticos que deverão ser objeto de especial atenção, quer pela formação de professores, quer pela disponibilização de materiais de apoio a este tópico.

Em 2012, havia, apenas, duas obras de referência publicadas em português: uma de Sebastião e Silva e outra de Franco de Oliveira, que se distinguem da de Eduardo Veloso, como o próprio confirma, pelo carácter menos formal e mais apoiado em aspetos visuais, permitindo a sua acessibilidade aos professores dos primeiros anos de ensino. Seguidamente, faremos algumas referências ao conteúdo deste livro de Eduardo Veloso (2012), por se caracterizar, segundo o próprio, como sendo um livro de matemática e não de didática, mas que “se destina a leitores que têm como missão despertar e acompanhar a experiência matemática dos alunos sobre os temas tratados” (p. 2).

O livro de Veloso (2012) inicia-se com o estudo das transformações geométricas limitado ao plano da Geometria Euclidiana pelos desígnios referidos anteriormente. Neste capítulo, Veloso, aconselha o leitor a apoiar a sua leitura num programa de geometria dinâmica como forma de visualizar e experimentar as ocorrências referidas. O uso das tecnologias tem uma forte vantagem no uso das isometrias (Thaqi, Geménez & Rosich, 2011).

No seu capítulo 3, *Simetria de uma figura plana*, Veloso (2012, p. 41) faz um apelo à mudança concetual do termo *simetria*, apelando ao “leitor para abandonar a noção estreita de simetria que muito possivelmente adquiriu na sua aprendizagem da geometria – a de simetria bilateral ou axial – pois estamos a caminho de definir um conceito diferente”, alertando para o uso, nos capítulos anteriores (Transformações Geométricas e Isometrias), do termo *reflexão* e nunca o de *simetria*, devido ao abandono completo do mesmo nas situações referidas anteriormente. Veloso, na introdução a este capítulo, refere-se ao estudo mais alargado das simetrias de uma figura plana em associação com o

estudo das transformações geométricas a que, no programa anterior, era dado um tratamento limitado e superficial. Veloso acrescenta, ainda, que, na verdade, o PMEB (2007) não pretende estudar “diferentes aspectos do conceito de *simetria* em matemática, mas sim a abordagem geométrica da noção de simetria de uma figura plana, tal como surgiu quando a matemática tentou interpretar, no mundo visual que nos rodeia, a realidade milenária da arte decorativa” (p. 41).

Os trabalhos de investigação sobre o ensino e aprendizagem das transformações geométricas estão pouco representados em Portugal (Gomes, 2012), em particular sobre o conhecimento dos professores no ativo, mas mencionaremos um conjunto de referências que encontramos sobre esta matéria.

O ensino das isometrias é uma das mais difíceis mas também um dos mais bonitos temas do ensino da matemática (Tóth, s.d.).

Na perspetiva do professor, vamos separar os estudos realizados com futuros professores de matemática elementar e os estudos com professores de matemática no ativo. Relativamente aos primeiros, o estudo de Yanik (2011) revela que os futuros professores, além de considerarem as figuras geométricas separadas do plano, possuíam um conhecimento incompleto desta matéria e revelavam a presença de preconceções erróneas e baseadas ora no senso comum, ora nas experiências do quotidiano, ou ainda no que havia sido ensinado em outras áreas, tais como a Física. Estes futuros professores tinham uma preconceção da translação associada à rotação como aprenderam na Física (por exemplo, no movimento dos corpos celestes), bem como diferentes conceitualizações do plano consoante a transformação usada. Esta realidade manifestava-se nas dificuldades em descrever e realizar as transformações.

O facto da abordagem das transformações geométricas ao nível do ensino secundário ser predominantemente de carácter analítico origina a que o raciocínio dos alunos dos anos elementares e do secundário não apresente grandes diferenças (Yanik, 2011). Ada e Kurtulus (2010) também estudaram as preconceções de 126 futuros professores sobre as transformações geométricas. Este estudo revelou que os alunos conheciam as representações analíticas das transformações (translações e rotações), mas pareciam não entender o seu significado geométrico – somente 16% deles conseguiram explicar o significado geométrico da translação e apenas 10% conseguiram apresentar uma explicação correta do significado da rotação.

Os futuros professores estudados por Thaqi et al. (2011) também viam as transformações geométricas como um movimento e os comentários sobre este tema eram baseados nas suas intuições.

Desmond (1997, citado por Yanik, 2011) estudou 83 futuros professores que revelaram dificuldade em identificar corretamente a translação, assumida como o movimento de uma figura, e o

vetor associado a ela, constatando que apenas 17% deles conseguiam identificar a distância e a orientação do vetor da translação.

Harper (2003, citado por Yanik, 2011) também identificou em futuros professores, dificuldades em identificar e executar corretamente as translações, o uso de vocabulário informal no uso das translações e a percepção da translação associada ao movimento de uma figura.

Portnoy et al. (2006, citados por Yanik, 2011) investigaram 19 futuros professores do ensino médio e secundário que, também, “encaravam numa fase inicial as transformações geométricas como procedimentos a aplicar a figuras geométricas (e.g., deslizar, refletir, e rodar). A translação era considerada como um deslizar de uma figura no plano ou ‘pegar em algo e colocá-lo em outro lugar do plano’” (p. 236).

Thaqi (2009), Thaqi, Giménez e Rosich (2011), estudaram dois grupos de alunos, um da Catalunha e outro do Kosovo, todos futuros professores, cujos países apresentam um currículo nesta matéria semelhante ao nosso. As pesquisas bibliográficas destes autores permitem-lhes afirmar algumas particularidades deste tópico de matemática, as transformações geométricas, nomeadamente que, a nível mundial, “o fraco conhecimento matemático do professor e a sua falta de confiança são factores que contribuem para a fraca prestação dos seus alunos nas avaliações” (p. 1), bem como a menção a algumas dificuldades apresentadas pelos futuros professores sobre as transformações geométricas na sua formação inicial, das quais constam a dificuldade na identificação de transformações em figuras e as noções de simetria na resposta a tarefas de isometria. Estes estudos concluíam que os estudantes do Kosovo e de Espanha, mais especificamente da Catalunha, apresentavam, em geral, baixas prestações na matéria das transformações geométricas, marcadas pela ausência de um conceito completo de transformação, não conseguindo identificar todas as propriedades das isometrias e não reconhecendo a estrutura de grupo nas isometrias. “A simples visualização não é suficiente para desenvolver estes conceitos” (Thaqi, Giménez e Rosich, 2011, p. 7) e, na sua generalidade, e em ambos os grupos, é visível um nível baixo na capacidade do futuro professor raciocinar, justificar, argumentar, comunicar e expressar o processo de transformação geométrica (Thaqi, 2009). Para além de nem metade dos alunos reconhecer a importância do uso de elementos culturais e históricos para o estudo das transformações geométricas, nenhum aluno estudado mostra um nível alto de capacidade para ensinar este tópico (Thaqi, 2009). Esta afirmação é, também, corroborada por Gomes (2012) no seu trabalho que versa os conhecimentos sobre transformações geométricas de futuros professores de Matemática, em Portugal, onde as conclusões revelam que os futuros professores inquiridos não foram capazes de resolver a totalidade das questões retiradas dos manuais escolares do 4.º ano de escolaridade e revelaram muitas dificuldades em todas as isometrias.

O nosso interesse na referência a estes trabalhos com futuros professores prende-se com a realidade descrita por Rowland et al. (2000), ou seja, um professor com um fraco conhecimento matemático em determinada área, mesmo depois de acabar o curso, apresenta um desempenho pobre no desenvolvimento da mesma.

Os estudos com professores de matemática no ativo são escassos e aqui mencionaremos as investigações no âmbito das transformações geométricas, o trabalho de Hill et al. (2008), Ilaslan (2013) e as investigações de outros autores por ele citados, o de Mabuchi (2000) e o de Mashingaidze (2012).

Ilaslan (2013) lamentou, também, a escassez de estudos nesta matéria. Ilaslan (2013), na sua tese de mestrado, estudou seis professores no ativo e as suas dificuldades nesta matéria. Este autor revelou que os professores possuíam um baixo conhecimento das transformações geométricas e tinham consciência dessa situação, que era visível pelo facto de não conseguirem apresentar uma definição completa para os conceitos (reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante), de apresentarem dificuldades de visualização (por não terem aprendido estes tópicos), de possuírem falta de confiança no ensino de algumas transformações (principalmente a rotação) e ausência de conexão com outras áreas. Estas fragilidades dos professores, associadas à escassa quantidade de materiais e do uso da tecnologia, são fatores que podem contribuir para as dificuldades de aprendizagens das transformações geométricas por parte dos alunos (Ilaslan, 2013). O trabalho de Ilaslan (2013) é, também, interessante pelas conclusões relativamente à atualização científica por parte dos professores. Afirma que, quando novos tópicos são introduzidos nos programas de matemática, a formação de professores tem sido subestimada (Ilaslan, 2013). Keleş's (2009, citado por Ilaslan, 2013) refere que, principalmente nestes casos, é necessária a formação contínua dos professores porque nestas novas matérias os professores possuem um reduzido conhecimento. Esta afirmação é corroborada pelos próprios participantes no estudo de Ilaslan (2013) que reclamam falta de apoio por parte do Ministério da Educação, ao nível da formação disponível aos professores, e da falta de suporte teórico no portal oficial do ministério. Ou seja, os professores reconheciam que tinham problemas com os novos tópicos, em especial com as transformações geométricas, e que deviam ser apoiados neste sentido para que os problemas na instrução pudessem ser minimizados e o ensino do tópico ser mais eficazmente lecionado, apesar de acreditarem que, com o tempo e a experiência, superariam estas dificuldades. Os professores reconhecem a importância de uma boa compreensão sobre as transformações para a implementação de um ambiente de aprendizagem que promova o desenvolvimento de ideias matemáticas rebuscadas (Yanik, 2011). Ora, neste ambiente surgem frequentemente afirmações e generalizações dos alunos que é preciso analisar cuidadosamente à luz dos conceitos e das propriedades do que se está a estudar.

Mason, Burton e Stacey (1988, citados por Vila e Callejo, 2006), falam especificamente do processo particularizar-generalizar como um processo de resolução de problemas. Segundo Vila e Callejo (2006), a revisão global da análise deste processo utilizado em determinadas situações particulares permite, entre outras ações, vislumbrar possíveis generalizações do resultado ou do processo, permitindo ao estudante ser um gerador de conhecimentos se a aprendizagem for significativa. Contudo, apesar de a generalização de factos ser uma necessidade para o domínio das diversas ciências, tais generalizações “devem ser realizadas com extremo cuidado para não se perder os detalhes e a riqueza do particular” (Filho, 2005, p. 5). Também por este motivo, a generalização é considerada um obstáculo no processo de aprendizagem, porque “leva os estudantes a generalizarem conceitos e conclusões obtidas sobre uma realidade[,] a outras” (Filho, 2005, p. 5). Estas situações, frequentes em contexto escolar, devem ser bem resolvidas e explicadas por parte do professor, que deverá ter as ferramentas teóricas ao nível do conhecimento do conteúdo necessárias para atestar a veracidade ou clarificar a falsidade dessas generalizações. Assim, é também aqui, que a atualização científica dos professores torna-se fundamental na abordagem aprofundada destas novas matérias.

Ersoy (2006, citado por Ilaslan, 2013) refere que a fonte mais procurada para a atualização científica é o manual escolar, sobretudo quando a biblioteca ou a *Internet* não satisfazem as necessidades educacionais. Contudo, os professores não consideram o manual escolar suficiente em muitos aspetos: conteúdo, exemplos, exercícios insuficientes. Neste âmbito, Ilaslan (2013) aponta para a necessidade de reformular a informação presente nos livros e colocá-la, também, na ótica do professor.

Hill et al. (2008), num trabalho de formação contínua de professores nos Estados Unidos da América, relata-nos o caso da professora Anna, com 10 anos de experiência no ensino da matemática elementar e um mestrado em Currículo e Instrução. Apesar da Anna revelar dificuldades ao nível dos conteúdos matemáticos, não evita de os lecionar. As dificuldades da Anna eram visíveis quando eram abordadas situações específicas de algum conteúdo, tais como a interpretação de algoritmos não convencionais e o grande esforço que fazia com as terminologias e as definições. As aulas eram marcadas pelos erros matemáticos, erros de linguagem e na qualidade das respostas dadas aos alunos. Por exemplo, quando questionada sobre o motivo de um prisma não ser uma pirâmide, Anna respondeu: “Porque não são congruentes (...). Não são a mesma coisa, são formas totalmente diferentes” (p. 480). Outro exemplo vem da exploração do conceito de *simetria*. Nas suas aulas, Anna utilizava quase sempre o manual e, após a leitura de um problema, desenvolveu o seguinte diálogo com os alunos:

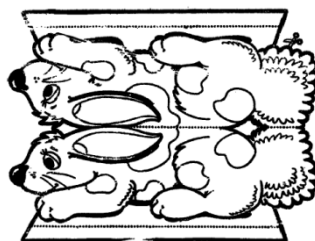
“Anna: Em primeiro lugar, o que é simetria?”

Aluno: É dividir ao meio.

Anna: Dividir ao meio. Iguamente, certo? É simetria." (Hill et al., 2008, p. 481)

Além da definição estar incompleta, nem sequer é precisa pois, nesta perspetiva, Anna teria de aceitar que a diagonal de um retângulo propriamente dito também seria um eixo de simetria. Mas, a confusão da Anna é transportada para os alunos, quando esta decide levar para a aula uma atividade que não estava no manual. Notava-se que, quando a Anna se afastava do manual, a qualidade das suas aulas descia drasticamente. A atividade partiu da discussão da Figura 21:

**Figura 21. "Um coelho simétrico" (Hill et al., 2008, p. 485)**



Anna referiu constantemente que "se este coelho é simétrico este coelho é congruente" (p. 485), indo contra a definição de simetria e revelando a sua imensa confusão deste conceito com o de reflexão.

Mashingaidze (2012) realizou um *workshop* com professores de matemática que manifestaram pouco prazer no ensino das transformações geométricas, uns porque não as percebiam e outros porque o tempo a elas dedicado era muito escasso por serem lecionadas no final do programa.

Mabuchi (2000) elaborou um trabalho de investigação sobre o ensino das transformações geométricas, nomeadamente os conhecimentos teóricos de 34 professores no ativo e a lecionar a disciplina de Matemática no ensino básico, numa fase de introdução das transformações geométricas no programa de Matemática no Brasil. Estes professores frequentavam um curso de formação contínua sobre transformações geométricas e esta investigação incidiu sobre a reflexão. No início do curso, foram auscultados sobre o seu *background* em geometria da sua formação escolar e académica e constatou-se que 41% não estudaram Geometria no ensino básico e secundário, 50% tiveram alguma abordagem apenas no ensino superior e 19% em momento algum. No decorrer do curso, Mabuchi reparou que

embora grande parte do grupo de professores lecionasse há bom tempo e trouxesse alguma bagagem de conhecimentos geométricos, muitos dos docentes apresentaram procedimentos semelhantes aos assinalados em pesquisas feitas com alunos do ensino fundamental. Observamos que a escolha de diferentes valores das variáveis didáticas, como, por exemplo, a posição do eixo de simetria, a complexidade da figura, o tipo de papel e a posição relativa eixo-objeto favoreceu ou dificultou a

resolução dos problemas, fazendo surgir concepções e erros semelhantes aos dos alunos das pesquisas. (Mabuchi, 2000, pp. 201-202)

Além do referido anteriormente, os professores demonstraram, também, pouca autonomia na exploração de novas situações problema ou mesmo em situações semelhantes às que já tinham explorado e dificuldades na construção de argumentos válidos para os procedimentos usados (Mabuchi, 2000). Diz o autor que esta dificuldade pode provir da falta de domínio dos conhecimentos matemáticos e pelo ensino tradicional por eles vivido e aplicado. No final deste curso de formação contínua, 3% ainda precisaram de dobrar, ou imaginar dobrar, a folha para justificar a existência ou não de simetria da figura. Dos que conseguiram acertar, 9% deles utilizaram argumentos válidos para as conclusões, “34% fizeram-no de forma razoável e 57% não conseguiram ou não responderam a essa parte da questão” (p. 199).

Outra realidade está relacionada com a resolução de problemas e o uso das simetrias e das transformações geométricas. O uso destas ferramentas não está muito enraizado nas mentes dos professores, que não demonstram predisposição para a sua utilização na resolução de problemas, como nos relatam os artigos de Leikin, Berman e Zaslavsky (2000) e Leikin (2003). Leikin, Berman e Zaslavsky (2000) e Leikin (2003) mencionam a existência de muitas investigações que demonstram que os professores de matemática das escolas secundárias não estão suficientemente informados sobre a importância desta elegante ferramenta de resolução de problemas influenciando, fortemente, o tipo de experiências, nesta matéria, apresentadas aos alunos. Estes professores recorriam ao uso das derivadas para a resolução de alguns problemas propostos (Leikin, 2003), mas, quando a exploração do problema os levava a resolvê-lo através das transformações geométricas, os professores manifestavam a sua tristeza, quer por não os ensinarem os seus alunos, quer por nunca lhes terem ensinado (Leikin, 2003). Um dos objetivos principais para o ensino das isometrias é o uso destes conhecimentos para a resolução de problemas, dos quais se destacam os problemas geométricos complexos e problemas de otimização (Tóth, s.d.).

Na visão do aluno, destacamos alguns estudos que relatam particularidades e dificuldades nesta matéria.

No caso geral do ensino da Geometria, em 1991, Toumasis referia que esta área é, indiscutivelmente, a área da matemática escolar mais difícil e controversa, em particular, o ensino de aspetos teóricos e demonstrativos da geometria euclidiana pela estrutura rigorosa que pressupõem e que exigem, naturalmente, um conjunto de saberes prévios sob o ponto de vista elementar para atingir este nível de formulação. Atendendo à contextualização histórica que desenvolvemos no segundo capítulo deste trabalho, nessa época os programas eram distintos dos atuais nessa matéria de

formalização. No caso particular das isometrias, Tóth (s.d.) afirma que, para a grande maioria dos alunos, este tópico não está relacionado com o mundo real nem com outros temas da geometria e, neste sentido, lhes causa dificuldade em memorizar definições por serem demasiado complexas. Para além disso, e por diversos motivos, não são utilizados meios que permitam aos alunos visualizar as isometrias a ocorrer, originando que apenas os melhores alunos consigam identificar de forma estática figuras congruentes, semelhantes e as transformações que ocorreram entre as figuras (Tóth, s.d.). Assim, para o desenvolvimento da nova visão do ensino da geometria, Sinclair (2001) destaca a necessidade de os teoremas e os conceitos geométricos serem vistos através de uma nova perspectiva, ou seja, através da compreensão visual e espacial que permitirão percebê-los, aplicá-los e relacioná-los.

Bulf (2009) relata a existência de algumas incompreensões e resistências relacionadas com o conceito de simetria ou com outras transformações do plano. Na abordagem destas últimas, o estudo de Hollebrands (2004) concluiu que a reflexão era a transformação mais familiar para os alunos apesar de o grau de dificuldade da tarefa aumentar quando o eixo de reflexão era oblíquo. Hollebrands (2004), apesar de conhecer estudos com indicações opostas, refere que a transformação mais difícil para os seus alunos era a translação, talvez pelo facto de esses não conhecerem o conceito de vetor e se sentirem inseguros com a sua aplicação. Hollebrands (2004) aponta também a dificuldade dos alunos não identificarem claramente os elementos necessários a cada transformação, nem as suas propriedades, e não relacionarem as pré-imagens com as imagens obtidas. A contrastar com este último, Bossé, Adu-Gyamfi e Cheetham (2011), no estudo que fizeram com alunos e professores, concluíram que estes últimos consideravam a translação uma transformação geométrica, na sua generalidade, bem compreendida pelos seus alunos.

Xistouri e Pitta-Pantazi (2009) estudaram 93 alunos com idades compreendidas entre os 9 e os 12 anos e as suas habilidades em resolver tarefas relacionadas com as transformações geométricas e como estas se relacionam com o aspeto cognitivo. Estes autores concluíram que a translação e a reflexão eram transformações igualmente difíceis para os alunos, sendo a rotação a mais difícil de todas.

Em jeito de conclusão, os vários autores citados sobre a formação inicial revelam uma grande dificuldade dos futuros professores na exploração de tópicos relacionados com a Geometria (e.g., Nápoles, 2007; Gomes, 2012; Thaqi (2009); Thaqi, Giménez e Rosich, 2011; Veloso, 2007; Veloso, 2012) e, em particular, com as transformações geométricas. Alguns formadores também relatam, nas suas experiências na formação contínua, que os professores que ensinam a matemática correspondente aos nossos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico apresentam dificuldades nesta temática (e.g., Canavarro, 2010; Dâmaso et al., 2010; GT2, 2010; Loureiro, 2007; Lorenzato, 2006; Veloso,

2012). Consequentemente, estas situações induzem determinados comportamentos na lecionação com implicações na aprendizagem da Geometria por parte dos alunos que revelam as maiores dificuldades (e.g., Gomes et al., 2012; Rebelo & Gomes, 2012). Sendo a Geometria um tema sensível para os professores, a inclusão do novo tema das transformações geométricas pressupõe novas abordagens, atualização científica e destreza no raciocínio matemático para poder promover experiências de aprendizagens ricas nesta matéria (Hill et al., 2008; Price & Ball, 1997; Rocha, 2006).

O estudo das transformações geométricas nos anos elementares torna-se crucial para o desenvolvimento da intuição geométrica e da capacidade de visualização e como ferramenta para a resolução de problemas, características básicas para o sucesso dos alunos na geometria e na própria matemática. “A simetria e as transformações geométricas são dois assuntos inseparáveis e muito pouco conhecidos pelos professores tanto do ponto de vista matemático como didático” (Figueira et al., 2007, p. 51). A aproximação da geometria à álgebra originou o extremo, ou seja, a redução da geometria a procedimentos algébricos e a sua consequente perda de significado visual (Miguel, Fiorentini & Miorim, 1992; Timmer & Verhoef, 2012). Manipulam-se equações que simbolizam entidades geométricas, abstraindo-se do seu próprio significado, sendo estes os procedimentos preferidos na resolução de problemas no 3.º CEB e no ensino Secundário, originando a perda de identidade da própria geometria (Clements & Battista, 1992; Veloso, 1998). A escassa falta de exploração visual dos objetos geométricos produz um desenvolvimento pobre da intuição geométrica e um incremento de preconceções erróneas (Clements & Battista, 1992), resultado de anos de escolaridade onde as figuras surgem estáticas (Geddes, 1992, citado por Thaqi, 2009) e onde o apelo à imaginação dos alunos para que as mesmas se tornem dinâmicas se revelou infrutífero.

## CAPÍTULO 5

### ENQUADRAMENTO METODOLÓGICO

A descrição da metodologia de investigação adotada na parte empírica deste trabalho refere-se à exposição das diretrizes que orientaram toda a investigação. Desta forma, começaremos por apresentar o *design* da investigação que retrata a abordagem desenvolvida sob o ponto de vista metodológico: a elaboração do questionário, a sua aplicação, o tratamento de dados e a análise descritiva e inferencial, sempre que possível, destes dados. Por último, faremos referência às opções e procedimentos de carácter metodológico praticados com vista à recolha dos dados. Neste último ponto, referiremos as aulas observadas com vista à elaboração do questionário, a sua aplicação e recolha de dados, bem como a sua análise e tratamento.

#### ***Design do Estudo***

No trabalho empírico procede-se à recolha de dados que se transformará em informação quantitativa, qualitativa ou mista, conforme as opções metodológicas do próprio investigador. Qualquer um dos métodos quantitativo ou qualitativo são merecedores de credibilidade na medida em que, sob o ponto de vista do rigor e das consequentes conclusões circunscritas a estes dados, estão dependentes dos níveis de precisão e de fidedignidade dos elementos recolhidos (Pardal & Lopes, 2011). A falsa dicotomia, defendida por vários autores, entre a investigação qualitativa e quantitativa (Eisner, 1991, citado por Newman & Benz, 2001) originou que, em tempos distintos da história humana, tenha prevalecido uma ou outra consoante as correntes dominantes nas épocas (Newman & Benz, 2001).

Neste trabalho de investigação, adotaremos o método misto, composto por uma parte de natureza qualitativa e outra de natureza quantitativa. A parte qualitativa refere-se às observações efetuadas em contexto de sala de aula que permitiram construir o inquérito por questionário que foi, posteriormente, analisado adotando um tratamento quantitativo. Este último permitiu atingir os objetivos deste trabalho e tentar responder às questões orientadoras referidas anteriormente.

As raízes epistemológicas da investigação quantitativa estão no empirismo e no positivismo (Hartas, 2010). O paradigma positivista, assente na Filosofia de Auguste Comte (1798-1857), defende o olhar para o mundo como um produto de factos observáveis e mensuráveis (Thomas, 2003). Neste

âmbito, a investigação quantitativa prevê a “recolha de um conjunto de dados numéricos que são posteriormente submetidas a análise usando procedimentos estatísticos” (Picciano, 2004, p. 51) de onde podem surgir, para além de um texto rico sob o ponto de vista descritivo de um determinado tema, tabelas, gráficos e outros esquemas, com o fundamento de descrever, comparar e relacionar um conjunto de variáveis (Picciano, 2004). Para a investigação quantitativa, a atenção centra-se na medição e nas quantidades que podem ser observadas, ou seja, em números e métodos estatísticos (Thomas, 2003).

Os três métodos de investigação quantitativa mais populares são os estudos descritivos, os correlacionais e os causal-comparativos, classificados por alguns autores como métodos não-experimentais pelo facto de não haver manipulação das variáveis (Hartas, 2010; McMilan, 2004, citado por Picciano, 2004, p. 51; Muijs, 2011). Nos estudos descritivos, “procede-se a uma narrativa ou descrição de factos, situações, processos ou fenómenos que ocorrem (...) [e que são] identificados e caracterizados através de material empírico relevante” (Afonso, 2005, p. 43).

Nesta investigação, procedemos a uma recolha de informações, através da aplicação de um questionário, com o intuito de descrever factos e situações referentes, essencialmente, ao domínio do conhecimento científico e ao conhecimento didático e curricular, por parte do professor, das simetrias e das isometrias que estão contempladas no programa de Matemática de 2007. Damos principal ênfase às informações referentes ao domínio do conhecimento do conteúdo que caracterizam a maioria das questões orientadoras desta investigação. Nos restantes domínios do conhecimento, didático e curricular, também são analisados os aspetos que consideramos mais importantes e que já foram salientados no capítulo 3, mais especificamente no subcapítulo *Os Professores e a Geometria*.

Este estudo investigativo adotará dois caminhos no que concerne ao tratamento dos dados: o descritivo e o inferencial. Em todas as questões haverá uma análise descritiva dos dados que, por vezes, será complementada com uma análise inferencial. Cada uma destas análises será desenvolvida abordando as suas características e objetivos.

Os estudos descritivos podem ser quantitativos ou qualitativos (Anderson & Arsenault, 2005) e, no caso de serem quantitativos, como a parte mais significativa do nosso trabalho, “são baseados em contagens ou medidas que são, geralmente, reduzidas a indicadores estatísticos tais como frequências, médias, desvios padrão e intervalos” (p. 100), que funcionam como uma via conveniente para a descrição.

As investigações do tipo descritivo, quer sejam de teor qualitativo ou quantitativo, podem adotar diferentes estratégias com várias designações distintas de autores para autores. No caso particular desta investigação, reunimos um conjunto de características que nos permite identificar o nosso

trabalho como um *Survey*, que possui três objetivos principais básicos – descrever, explicar e explorar, pois:

- traduz-se numa “recolha de informação de uma amostra de indivíduos através da resposta destes a um conjunto de questões” (Check & Schutt, 2012);
- “usa dados numéricos para descrever e interpretar eventos, condições ou situações que ocorrem no presente” (Picciano, 2004, p. 52);
- o instrumento principal de uma investigação *Survey* é o questionário (Marsden & Wright, 2010; Check & Schutt, 2012; Freitas, Oliveira, Saccol & Moscarola, 2000; Punch, 2009), porque tem um maior impacto na forma como as questões individuais são interpretadas e respondidas implicando, deste modo, um desenho cuidadoso do mesmo (Check & Schutt, 2012);
- a obtenção de dados, com vista à produção quantitativa, é realizada a partir de um determinado grupo, representante de uma população-alvo (Freitas et al., 2000);
- é apropriada quando procura responder a questões do tipo – O quê? Como?, não se pretendendo manipular as variáveis, e quando o objeto de interesse ocorre no presente ou passado recente (Freitas et al., 2000);
- tem o propósito da produção de estatísticas acerca de alguns aspetos da população através da colocação de questões aos indivíduos (Fowler, 2003);
- Os dados obtidos nesta estratégia de investigação devem ser analisados por meio de ferramentas estatísticas para a obtenção das informações desejadas, independentemente de as variáveis serem qualitativas ou quantitativas (Freitas et al., 2000).

A investigação *Survey* pode ainda ser classificada em:

- descritiva, quanto ao propósito, uma vez que procura identificar situações presentes em grupos da população (Freitas et al., 2000);
- transversal, quanto ao momento, uma vez que a recolha dos dados, com pretensões de descrever e analisar o estado de uma ou mais variáveis, ocorreu num dado momento e não em dois ou mais (Freitas et al., 2000; Punch, 2009).

Apesar de uma investigação em educação não ser uma sucessão de etapas estereotipadas que se cumprem como se estivessem alinhadas em linha reta (Pardal & Lopes, 2011), as etapas para a concretização do nosso *Survey* revêem-se no esquema da Figura 22, proposto por Bravo e Eisman (1998, p. 179), por adaptação de um outro esquema de Cohen e Monion (1980, p. 95).

Figura 22. Etapas para a concretização de um Survey

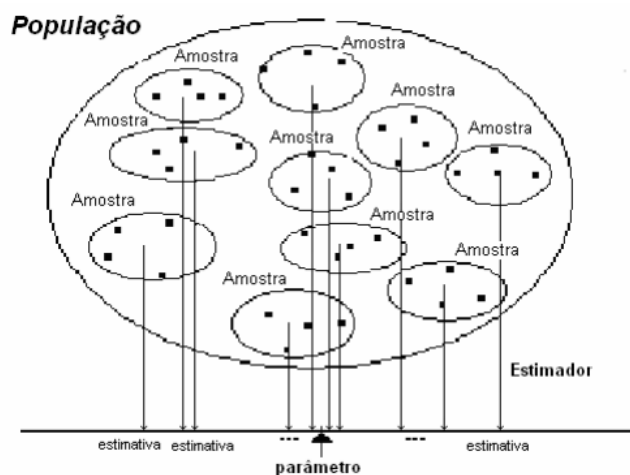


Numa primeira fase, definimos o objetivo da investigação e a população a estudar, a que se seguiu o traçado de uma trajetória hipotética do nosso *design* de estudo que contemplava o método de exploração e recolha de dados bem como a amostra a utilizar. De seguida, procedeu-se à construção do inquérito por questionário, tendo em conta a informação necessária para os desígnios deste trabalho que teve contributos fortes da revisão da literatura feita previamente. O inquérito foi, numa fase inicial, aplicado a um pequeno conjunto de professores que poderiam constituir elementos da nossa amostra, pilotagem esta que nos obrigou a um aperfeiçoamento do mesmo em vários aspetos. A adequação do questionário à nossa amostra permitiu refinar o método de exploração e recolha dos dados e, por fim, procedeu-se à sua efetiva aplicação. Na última fase, procedeu-se à organização e

análise da informação recolhida de forma a permitir a interpretação dos dados e a redação da informação científica resultante.

No momento da análise e tratamento dos dados, aliou-se a estatística descritiva à estatística inferencial para que se possa conhecer, destacar e refletir sobre a significância dos valores obtidos e, em certos casos, perceber relações de dependência entre variáveis. No que concerne à inferência estatística, pretende-se “aferir acerca dos valores dos parâmetros da população teórica de onde foram obtidas amostras ou validar hipóteses (nas quais se fundamentam as teorias) acerca desses parâmetros” (Maroco, 2011, p. 35). Neste processo de raciocínio indutivo, procura-se tirar conclusões acerca das características de uma população, estudando apenas alguns elementos desta – a amostra (Martins, 2006). Assim, procuraremos através de diversos subconjuntos de professores de diversas escolas, aplicar testes de significância que permitam indicar a possibilidade de aferir resultados que possam ser generalizados para o conjunto dos docentes dessas escolas, em analogia com o esquema da Figura 23, apresentado por Martins (2006).

**Figura 23.** Inferência Estatística (Martins, 2006, p. 11)



A inferência estatística tem sido uma técnica cada vez mais utilizada nos estudos de investigação, que permite testar hipóteses e desenhar inferências a partir dos dados recolhidos. Esta conexão entre os estudos de investigação e a estatística inferencial, para além de ter aumentado consideravelmente nos últimos anos, tem adquirido um papel de destaque por permitir tirar ilações mais abrangentes e fornecer diretrizes mais credíveis sobre as variáveis em estudo (American Statistical Association, 2007). As técnicas de estatística são um forte contributo para a pesquisa científica, em particular da educação em Matemática, uma vez que fornecem orientações aos

educadores e políticos para melhorar a qualidade das atividades e dos programas de educação (American Statistical Association, 2007).

A definição do problema sobre o objeto de estudo foi o ponto de partida para o estabelecimento do percurso metodológico deste trabalho de investigação. A consequente definição dos objetivos do trabalho e das questões centrais e orientadoras permitiram desenhar o trabalho empírico que assume um papel preponderante, nomeadamente, com a definição da população a estudar, a seleção da amostra, a construção do questionário, a aplicação do instrumento de recolha de dados e respetivos análise e tratamento dos dados que permitirão tentar responder às questões inicialmente colocadas.

Nesta fase, a revisão da literatura permitiu a sustentação de algumas conceções que envolviam a temática deste trabalho, conhecer os trabalhos realizados nesta matéria e aprofundar os nossos próprios conhecimentos, bem como orientar, de forma mais refletida, os instrumentos de recolha de dados que serão a chave desta parte empírica. Nos próximos subcapítulos traçaremos uma explicação detalhada de cada um destes momentos.

### **Caracterização da População e da Amostra**

A população alvo deste trabalho é constituída pelos professores que lecionavam em vinte agrupamentos de escolas ou escolas não agrupadas que, no ano letivo 2011/2012, assumiam funções docentes no grupo 110 (1.º CEB), no grupo 230 (Matemática e Ciências da Natureza do 2.º CEB) ou no grupo 500 (Matemática do 3.º CEB), numa determinada região do país e que cumpriam as seguintes condições: a) possuírem a profissionalização para o ensino do 1.º CEB ou profissionalização para o ensino da Matemática do 2.º ou 3.º CEB ou Ensino Secundário (ES); b) estarem, no ano letivo de 2011/2012, a exercer funções docentes, com componente letiva, nos grupos disciplinares 110, 230 ou 500.

A primeira condição é determinada pelo facto de a simetria e as transformações geométricas (isometrias), como já referimos no segundo capítulo, começarem a ser lecionadas no 1.º CEB, serem aprofundadas no 2.º CEB e revisitadas com maior aprofundamento no 3.º CEB. Note-se também que os professores com profissionalização para o 3.º CEB possuem, também, habilitações profissionais para o ES. Assim, referir-nos-emos a estes, doravante, apenas como professores do 3.º CEB.

No que concerne à segunda condição, é de referir que os professores pertencentes ao grupo de docência 230 teriam de estar lecionar a disciplina de Matemática no ano letivo de aplicação do questionário ou no ano letivo anterior. Os professores pertencentes ao grupo de docência 500 teriam

de lecionar, pelo menos, num dos anos letivos 2010/2011 ou 2011/2012, no 3.º CEB. Os professores destes grupos disciplinares, sem colocação ou a desempenhar outros cargos que não a de lecionação, podiam de algum modo, estar afastados das exigências e alterações do programa de matemática de 2007 quer ao nível científico e concetual, quer ao nível das metodologias de trabalho, quer mesmo em relação às novas tendências para o ensino da Matemática e, deste modo, originar a subversão da realidade que pretendíamos descrever. A procura de professores no ativo permitia salvaguardar estas situações, tornar mais credíveis as conclusões do estudo e elevar o contributo desta investigação para a comunidade matemática.

Em termos numéricos, a nossa população era constituída por um número de docentes do 1.º CEB compreendido entre 450 e 500, 148 professores do 2.º CEB e 156 do 3.º CEB.

Estávamos conscientes da dificuldade da recolha dos dados por se tratar da aplicação de um inquérito por questionário a professores do Ensino Básico e Secundário, algo extenso (estimados 20 a 30 minutos para ser respondido) e constituído, quase exclusivamente, por questões de carácter científico/pedagógico. O facto de se estar a abordar assuntos de carácter científico e pedagógico produziu uma certa resistência e um certo constrangimento nos professores, que tentámos minimizar reconhecendo a dificuldade da abordagem destes temas que não foram explorados na formação inicial, pelo menos da forma como se aborda atualmente. O preenchimento do questionário exigia, por parte do professor, algum esforço sob o ponto de visto de raciocínio geométrico e capacidade de visualização pelas temáticas envolvidas. Por considerarmos que o preenchimento do questionário poderia ser comprometido pela dificuldade de acesso a estes profissionais, estudamos diversas formas de proceder a esta recolha de dados que se traduziram em momentos distintos e encontrando circunstâncias para predispor os professores ao seu preenchimento.

O projeto inicial desta investigação tinha como objetivo o estudo de professores do 2.º CEB no desenvolvimento da temática das *Simetrias e das Transformações Geométricas*, contudo, no primeiro momento da aplicação do questionário, encontravam-se presentes vários professores dos restantes ciclos de ensino pelo que optámos pela aplicação a todos os presentes. Se tivéssemos aplicado o questionário apenas aos professores que lecionavam no 2.º CEB, naquele ano letivo, gerar-se-ia certamente algum constrangimento, quer nos que respondiam, quer nos que estariam à espera que aqueles respondessem. De facto, na primeira sessão de preenchimento do questionário, estavam presentes mais de quarenta professores abrangendo todos os ciclos de ensino, mas a maior parte lecionava no 3.º CEB. A opção de aplicar aos professores dos outros ciclos de ensino acabou por enriquecer fortemente este trabalho de investigação pois permitiu também a análise de outros grupos de professores e a comparação entre os diferentes grupos de docentes.

A persecução dos objetivos desta investigação e a tentativa de garantir uma boa qualidade da amostra e com um número de elementos adequado originaram a que tivéssemos de ter cuidados especiais na sua seleção. Assim, a amostra selecionada foi constituída por: a) docentes que participaram em *Workshops* dinamizadas nas reuniões do Plano da Matemática II, a convite do professor acompanhante deste projeto e responsável pela escola onde o docente leciona; b) docentes a frequentar um mestrado destinado aos docentes do 2.º CEB mas na área das Ciências da Natureza; c) docentes de uma ação de formação sobre isometrias.

Dado que o período do dia em que foram dinamizadas as *Workshops* não permitiu a presença, em número significativo dos profissionais do 1.º CEB, o estudo elaborado com este grupo de docentes será apenas a nível descritivo, sem estabelecer ilações para a respetiva população.

A seleção dos professores que integraram a nossa amostra foi, pois, do tipo não probabilístico, ou seja, não aleatória, porque foi feita através de um critério específico, por conveniência. Esta forma de selecionar os elementos da amostra prendeu-se com a dificuldade da aplicação deste questionário ao grupo de trabalho específico, sendo um dos motivos contemplado por Freitas et al. (2000) para a opção de uma amostra por conveniência onde os participantes são escolhidos por estarem disponíveis. Apesar de a amostragem probabilística ser preferível em relação à amostragem não probabilística, em muitos cenários não é possível obter este tipo de amostras (Maroco, 2011).

No total, recolheu-se uma amostra de 154 inquéritos mas foram analisados somente 142 porque 12 inquéritos não reuniam as condições, por nós estabelecidas, para integrarem o grupo de docentes a estudar. Assim, dos 142 inquéritos considerados para este estudo, 12 são do 1.º CEB, 70 do 2.º CEB (48% da população) e 60 do 3.º CEB e ES (38% da população). Para a recolha de dados foram dinamizados quatro *workshops* onde se recolheu um total de 106 inquéritos, na ação de formação, contámos com 16 inquéritos preenchidos e, do curso de mestrado, recolhemos 20 inquéritos.

### **O inquérito por Questionário**

O inquérito por questionário é o instrumento de recolha de dados mais utilizado nos trabalhos de investigação (Fiorentini & Lorenzato, 2007; Pardal & Lopes, 2011), pela sua “forte capacidade de captar os aspetos contabilizáveis dos fenómenos” (Silva, 2007, p. 179) e permitir o tratamento estatístico dos mesmos, no sentido de descrever ou inferir sobre um domínio mais vasto de onde a amostra proveio (Pestana & Gageiro, 2008).

O inquérito por questionário, na sua aplicação sistémica,

consiste em colocar a um conjunto de inquiridos, geralmente representativo de uma população, uma série de perguntas relativas à sua situação (...) profissional, às suas opiniões, (...) ao seu nível de conhecimento (...) ou ainda sobre qualquer outro ponto que interesse aos investigadores. (Quivy & Campenhoudt, 2008, p. 190)

Desta forma, esta ferramenta permitirá aceder a um conjunto de informações acerca dos saberes científicos e metodológicos de um conjunto de professores do Ensino Básico.

O questionário consiste num conjunto de questões escritas que pressupõe um conjunto de respostas escritas (Takona, 2002). Fiorentini e Lorenzato (2007) e Takona (2002), as questões assumem essencialmente o papel de fechadas ou abertas. As primeiras, quando são propostas hipóteses de resposta sem a possibilidade, por parte do respondente, de ir além das indicadas, e as segundas, quando a resposta fica unicamente a cargo do inquirido. Pardal e Lopes (2011) falam ainda de outra possibilidade, as perguntas de *escolha múltipla de leque aberto*, a que Fiorentini e Lorenzato (2007) apelidam de *mistas*, como forma de combinar respostas fechadas com uma parte de resposta aberta, normalmente de curtas palavras. As questões a colocar num questionário devem levar a “respostas curtas, rápidas e objectivas” (Chizzotti, 1998, citado por Tozoni-Reis, 2010, p. 66).

A preparação da construção do nosso questionário exigiu cuidados especiais, bem como de um trabalho prévio de campo para a recolha das questões relevantes, de acordo com os referenciais teóricos mencionados na parte I deste trabalho.

### **A elaboração do questionário**

Na elaboração do questionário foram essenciais três fases que permitiram a criação de um instrumento de recolha de dados que melhor servisse os desígnios desta investigação e minimizasse potenciais erros humanos (Takona, 2002), a saber: a observação naturalista, não participante, de algumas aulas do 6.º ano de escolaridade, a visita de literatura sobre elaboração de inquéritos por questionário e o pré-teste aplicado a docentes dos três ciclos de ensino.

Numa primeira fase, fizemos uma pesquisa naturalista, onde os dados foram recolhidos diretamente do local em que o fenómeno acontece (Fiorentini & Lorenzato, 2007), ou seja, a sala de aula. Esta observação decorreu em diferentes agrupamentos, abarcando um total de seis aulas de três docentes que lecionavam o tema das isometrias do PMEB (2007) ao 6.º ano de escolaridade. Estas aulas decorreram em momentos distintos do ano letivo, consoante o percurso de aprendizagem escolhido pelo agrupamento/escola.

A observação das aulas assumiu uma *abordagem objetiva* (Bogdan & Biklen, 2013), ou seja, os professores tinham conhecimento das intenções do investigador e cooperavam com o mesmo, nomeadamente na marcação das aulas assistidas, com total liberdade para o investigador dentro do período de lecionação deste tema, previamente estabelecido.

Nesta observação, pretendia-se analisar o tipo de aulas desenvolvidas no que respeita à comunicação na sala de aula, às metodologias utilizadas, ao tipo de atividades propostas e respetiva reação dos alunos à mesma. Nestas observações, o investigador tinha a oportunidade de conhecer, na realidade, o diálogo estabelecido entre alunos e professor de forma a perceber as maiores dificuldades dos primeiros e o tipo de resposta e perguntas colocadas pelos segundos.

Para esta observação, não estruturada, foi previamente elaborado um guião de observação (ver Apêndice 1), onde foram registadas as situações supracitadas e onde o investigador era um mero espectador (observação não-participante). Várias situações observadas não estavam contempladas no guião supracitado mas foram, detalhadamente, registados com vista a um futuro aproveitamento. O uso do guião e a observação das situações não contempladas nestes documentos foram cuidadosamente planeadas de acordo com referenciais teóricos a que tivemos acesso na fase de preparação da observação (e.g., Afonso, 2005; Tozoni-Reis, 2010).

Esta fase foi particularmente importante porque constituiu um processo fundamental para a elaboração do próprio inquérito. Da observação recolhemos as práticas comuns referentes às metodologias de ensino, em contexto sala de aula, tais como o uso de materiais manipuláveis ou de programas de geometria dinâmica e que constam da parte II do questionário. Pudemos aceder ao tipo de perguntas colocadas pelos alunos, às suas dificuldades e à forma de esclarecimento por parte do professor, que foram fundamentais para a elaboração da parte III do questionário, em particular no que concerne às conjeturas, respostas ou afirmações proferidas pelos alunos.

Na fase seguinte, foram estudados diversas referências (Afonso, 2005; Gunther, 2003; Hill & Hill, 2008; Medeiros, 2005; Pardal & Lopes, 2011), que realçavam alguns aspetos e apontavam alguns cuidados na sua elaboração, de forma a permitir um tratamento dos dados com o menor número de constrangimentos possível. Estas leituras constituíram um trabalho prévio que resultou numa cuidada elaboração do questionário, tendo em consideração indicadores prescritivos das perguntas tal como aconselhou Pardal e Lopes (2011). Destas leituras, descrevemos alguns princípios que tivemos em consideração na elaboração do referido questionário:

- “A informação recolhida através da técnica do questionário consiste não no que as pessoas pensam, mas sim no que elas dizem que pensam” (Afonso, 2005, p. 103) e, neste contexto, o questionário possuía, apenas, três questões deste tipo relacionadas com as metodologias

usadas no desenvolvimento das isometrias pelos respetivos docentes<sup>18</sup>. Neste sentido, pensamos, tal como aconselha Afonso (2005), em proceder a um cruzamento das respostas através da colocação de outras questões, que permitissem aferir o grau de sinceridade das mesmas.

- A decisão da modalidade das perguntas a efetuar foi fortemente equacionada aquando da construção do questionário. Conscientes da complexidade do tratamento das questões de carácter aberto, quer pela variedade das respostas, quer pelo tempo que se exige para o seu tratamento (Pardal & Lopes, 2011), optámos por questões de *resposta curta (fill-in)*, de *respostas em listagem* (Tuckman, 1978, citado por Afonso, 2005), e de *escolha múltipla* como lhe chamou Pardal e Lopes (2011) e Takona (2002). Nestas últimas, Pardal e Lopes (2011) subdividem-nas em duas categorias das quais destacamos as *perguntas em leque*, onde o “inquirido é convidado a escolher uma ou várias respostas entre as diversas alternativas apresentadas” (p. 77). Desta categoria, os mesmos autores distinguem as perguntas de leque fechado, onde o inquirido somente escolhe uma entre várias alternativas apresentadas, e as *perguntas de leque aberto*, onde o inquirido pode optar por uma das opções que refere *outra* e o mesmo terá de acrescentar *qual*. Esta última possibilidade retira o “carácter de fechamento” relativamente às perguntas de leque fechado (Pardal & Lopes, 2011, p. 79) e, por isso, “oferece maiores dificuldades de tabulação” (p. 57). As questões de *escolha múltipla*, segundo Takona (2002), oferecem vantagens significativas em relação às restantes porque, usualmente, torna o questionário fácil de preencher e de rápida análise. O inconveniente do uso deste tipo de questões para alguns autores (Takona, 2002) prende-se com a limitação da resposta por parte do inquirido. Contudo, as questões de escolha múltipla de leque fechado que colocamos no nosso questionário apresentam possibilidades de resposta mutuamente exclusivas e as questões de escolha múltipla de leque aberto possuem a opção *outra* que permite o acrescento por parte do respondente de uma resposta não contemplada, pelo que o inconveniente referido anteriormente não se coloca.

O questionário por nós elaborado é constituído por questões de escolha múltipla de leque aberto e leque fechado, incluindo uma minoria de carácter aberto. A pouca representatividade de questões de carácter aberto prendeu-se com a consciência da sua complexidade no tratamento estatístico que, por vezes, se revela mesmo impossível de realizar (Takona, 2002).

- No questionário, na sua totalidade, fez-se uso de perguntas explícitas que visavam “uma informação direta e imediata sobre o assunto” (Pardal & Lopes, 2011, p. 81), podendo

---

<sup>18</sup> Ver questões 2.1, 2.3 e 2.4 do questionário (Apêndice 2).

conduzir a situações de embaraço por parte do respondente (Pardal & Lopes, 2011). Contudo, dado que o preenchimento se efetuou na presença de inúmeros professores que o realizavam de forma individual, com carácter anónimo, e tendo em conta as reações observadas, no nosso entendimento tal constrangimento foi minimizado. É que o carácter de anonimato, para muitos investigadores (Takona, 2002), provoca um sentimento de privacidade ao respondente que terá mais tendência para responder mais francamente.

- A ponderação da colocação da opção *Não sei*, nas questões de escolha múltipla, foi equacionada, mas dado o público-alvo em questão e às várias perguntas de foro científico, consideramos poder ser constrangedor para o respondente. Para além deste facto, concordamos com Takona (2002) que também aconselha a não colocação desta opção por poder incentivar a sua escolha, sendo preferível o uso de *outra* para que induza o preenchimento mais refletido.
- A ordem pela qual as questões seriam colocadas (Pardal & Lopes, 2011). Conscientes de que a ordem pela qual as questões são colocadas tem impacto na obtenção das respostas, tal como refere Pardal e Lopes (2011), Johnson e Christensen (2012) e Takona (2002), seguimos o conselho de Johnson e Christensen (2012) e preferimos as perguntas de carácter científico, claramente mais sensíveis, para a última parte do questionário.
- A obediência ao *princípio da clareza*, ou seja, a questão “deve ser estruturada de forma precisa, concisa e inequívoca, suscitando convergência de interpretações” (Pardal & Lopes, 2011, p. 82). As questões teriam de ser claras e colocadas sem ambiguidade de forma a não comprometer os resultados que podem aparecer mal interpretados (Takona, 2002).
- A obediência ao *princípio da coerência*, ou seja, a questão “deve estar em conexão com o indicador que a prescreve” (Pardal & Lopes, 2011, p. 83). Por este motivo, decidimos separar claramente as questões de foro do percurso profissional, da metodologia usada no desenvolvimento do programa e das questões de foro do conhecimento científico.
- O tempo de resposta do questionário foi o fator mais limitativo da sua construção. A nível dos conteúdos programáticos, na vertente científica, gostaríamos de ter colocado mais questões, mas estávamos conscientes de que tal tornaria o questionário mais extenso e, deste modo, além de poder não ser respondido na totalidade poderia causar cansaço (Pardal & Lopes, 2011) ou aborrecimento (Takona, 2002) no respondente e dificultar a disposição dos sujeitos para o responder (Fiorentini & Lorenzato, 2007). Fiorentini e Lorenzato (2007) referem-se a 30 minutos como o tempo máximo de preenchimento de um questionário sob pena de se verificar tais situações anteriormente referidas.

- A apresentação do questionário sob o ponto de vista estético mereceu, também, a nossa atenção uma vez que, segundo Medeiros (2005, p. 37), “uma boa apresentação estética pode ajudar (...) a transmitir a ideia de que a pesquisa é séria e cuidadosa”. Assim, o documento estava formatado com rodapé e cabeçalho com a identificação do estudo e do autor, os subtítulos foram colocados a negrito e utilizamos algumas imagens alusivas às questões formuladas.
- A existência de uma nota introdutória ao questionário, tal como aconselha Pardal e Lopes (2011) e Fiorentini e Lorenzato (2007), onde era explicado aos inquiridos o objetivo da investigação, as instruções claras para o seu preenchimento, a promessa de sigilo das informações e um agradecimento da colaboração.

Na última fase, após a construção desta primeira versão do questionário, ele foi aplicado como pré-teste, de modo a rentabilizar o seu potencial (Johnson & Christensen, 2012; Pardal & Lopes, 2011; Takona, 2002). A amostra de professores que colaboraram neste pré-teste era constituída por 10 docentes a lecionar no ciclo de ensino para o qual tinham profissionalização, o 1.º, 2.º ou 3.º CEB. Estes profissionais ajudaram-nos a corrigir questões de ordem técnica como pequenas gralhas na escrita, e questões de interpretação, quer do enunciado de algumas questões, quer das instruções de preenchimento. O tratamento das respostas a estes questionários permitiu efetuar alguns acertos que, em conjunto com as correções, referidas anteriormente, culminou no documento que foi aplicado.

Ainda devemos realçar o facto de algumas questões do foro científico terem sido construídas utilizando vocabulário específico e constante nas diversas referências com destaque neste assunto e, outras, tal como objetivamos, adaptadas de afirmações feitas pelos próprios alunos ou retiradas de manuais escolares. As últimas sete questões foram adaptadas das afirmações feitas pelos próprios alunos nas aulas observadas e uma parte significativa das restantes são provenientes de adaptações de questões presentes em manuais escolares. Por último, a calendarização da aplicação do questionário foi antecipada pelo convite endereçado aos investigadores para a dinamização de uma *workshop* sobre o tema das simetrias e das isometrias a grupos de professores do Ensino Básico. Sendo esta uma oportunidade que reuniria uma grande quantidade de docentes, decidimos aplicar o nosso questionário nesta iniciativa que surgiu num curto espaço de tempo. Após este *workshop*, outros se seguiram e constituíram a maior percentagem de professores que responderam ao questionário.

### **O documento final**

O nosso inquérito por questionário (ver Apêndice 2) está subdividido em três partes fundamentais e estratégicas:

- **Parte I** – referente à formação inicial e à situação profissional no momento da realização do questionário.
- **Parte II** – referente a questões de carácter didático no ensino e aprendizagem do conteúdo programático, as *Simetrias e Isometrias*, em que este trabalho se centra, nomeadamente, o uso de materiais manipuláveis e de ambientes de geometria dinâmica por parte do professor. Nesta parte também se questiona o professor sobre a inclusão deste tema no programa e a importância do uso de AGD para promover o ensino-aprendizagem deste tema e sobre as fontes usadas pelos professores para a sua atualização científica nesta matéria.
- **Parte III** – referente ao conhecimento científico no tema das *isometrias*. Esta parte do questionário adotou a característica de um *teste de avaliação*, como lhe apelidou Afonso (2004), pois pretendia aferir os conhecimentos científicos dos professores acerca dos conteúdos programáticos, referentes às *isometrias*, presentes no PMEB (2007). Assim, as respostas poderiam apenas estar certas ou erradas.

Esta parte, segundo Tuckman (1978, citado por Afonso, 2005), considera-se, no “plano técnico da definição de padrões” (p. 106), um teste com referência criterial, ou seja, um teste constituído “a partir dos objectivos programáticos (...) que operacionalizam os resultados esperados do ensino” (p. 106). Neste âmbito, a parte III do questionário estava subdividida em cinco tópicos principais da temática em causa. Os quatro primeiros relacionados com as quatro grandes temáticas abordadas no programa: *isometrias*, *simetrias*, *rosáceas* e *frisos*, e a última, com grande destaque, contendo algumas conjecturas/afirmações dos alunos sobre os temas referidos e aos quais o professor teria de manifestar a sua aceitação ou rejeição. Estas conjecturas/afirmações foram retiradas, com algumas adaptações, das aulas observadas de que falamos anteriormente.

### **Aplicação do questionário**

A aplicação do questionário ocorreu em diversos momentos, sempre na presença da investigadora e em locais distintos:

- Nas aulas do curso de mestrado referido, onde aplicamos o questionário aos estudantes que cumpriam as condições de pertencerem à nossa população.
- Numa ação de formação, por nós ministrada, destinada a professores do grupo 110 e do grupo 230. Os questionários foram respondidos por todos os formandos pois cumpriam as condições de pertencerem à população em estudo. Neste caso, o inquérito foi respondido na primeira sessão do curso.

- Por pedidos formalizados a profissionais com quem tivemos contacto ao longo da nossa vida profissional e que pertenciam à população em causa.
- Em quatro reuniões do Plano da Matemática II (PMII), que decorreram em escolas do Ensino Básico, entre fevereiro e maio de 2012, onde todos os seus participantes pertenciam à população em estudo. A presença da investigadora nestas reuniões deveu-se a convite dos acompanhantes do PMII com o intuito de a mesma apresentar uma sessão prática sobre isometrias. Aproveitando esta oportunidade, a investigadora solicitou aos formandos o preenchimento prévio do questionário para posterior apresentação teórica e prática do tema, que lhes permitisse refletir e esclarecer dúvidas suscitadas pelas questões presentes no questionário. Neste ponto é interessante mencionar que estas *workshops* foram previamente anunciadas e registaram um aumento do número de professores presentes relativamente à média das sessões realizadas anteriormente.

### **Validade e Fiabilidade do Estudo**

A abordagem investigativa que se desenvolveu neste estudo, ainda que assente numa base racionalista que caracteriza os estudos descritivos, segue uma metodologia que pretende assegurar os critérios de validade e de confiabilidade como sendo características que medem a qualidade ou o rigor científico de qualquer método de pesquisa (Schwab, 2005).

A investigação quantitativa, apelidada por Machado, Maia e Labegalini (2007) como abordagem quantitativa realista, que assume um papel preponderante neste estudo, baseia-se neste caso específico em valores imparciais, ou seja, valores que não são enviesados porque nada têm de senso comum e, como tal, são considerados fiáveis. Alguns defensores deste tipo de abordagem apresentam pontos irrefutáveis para a sua validade, tais como a objetividade, o rigor no método e nas regras dos procedimentos o emprego de mecanismos de controlo durante o processo investigativo (Lima, 2004). Assim, o investigador, não tendo influência sobre o tipo de respostas que são dadas neste tipo de questionário, define a objetividade e singularidade da investigação que é independente do investigador e, deste modo, é pautada pela validade e confiabilidade dos factos (Creswell, 2013).

São várias as formas de validade mencionadas na literatura de pesquisa com principal relevo para os aspetos de validade interna e externa. Os critérios de validade externa são salvaguardados pelo facto de os dados obtidos não dependerem da amostra escolhida e poder-se, deste modo, generalizar os resultados para os restantes professores dessas escolas. Assim, através de técnicas de

inferência estatística, testaremos as hipóteses colocadas que poderão permitir a generalizações de resultados para contextos semelhantes (Morais & Neves, 2007).

Uma investigação tem validade interna quando as *variáveis estranhas* são estritamente controladas pelo investigador e, assim, a capacidade de o instrumento de pesquisa medir o que o investigador pretende medir (Cooper & Schindler, 2001), remetendo para uma pesquisa válida, ou seja, produzindo conclusões verdadeiras (Schwab, 2005). Ora, no caso particular do nosso questionário, as respostas dadas foram individualizadas e não estiveram dependentes de qualquer ação por parte do investigador, pelo que, por esse lado, não há limitações à validade interna do instrumento.

Contudo e para além das particularidades que caracterizam o nosso estudo, assinalamos que a dialética sistemática entre o campo teórico e o campo empírico, que tem caracterizado a metodologia de investigação que aqui se apresenta, tem permitido garantir alguns critérios de validade interna. “O facto de a investigação ser sustentada por um quadro teórico de grande rigor conceptual e poder explicativo, constitui um aspecto fundamental de garantia da validade interna” (Morais & Neves, 2007, p. 85). Além deste facto, estas autoras defendem o alcance da validade interna através: (a) da consistência entre os objetivos da investigação e a recolha dos dados (conforme os objetivos do nosso estudo); (b) da introdução de diversas reformulações do instrumento de recolha de dados usado, de forma a maximizar a clareza das questões e as condições motivacionais para as respostas; (c) do confronto entre dados obtidos a partir de várias questões (triangulação) dentro do mesmo questionário, incluindo dados obtidos a partir de estudos semelhantes recolhidos e referenciados, quer de autores nacionais, quer de autores internacionais. A triangulação permitiria averiguar se as respostas dadas apresentavam coerência. No que respeita a este aspeto, a presença de um quadro teórico orientador da investigação poderá permitir uma análise reflexiva sobre os dados obtidos que se revele consistente relativamente aos aspetos teóricos seleccionados como importantes para a investigação e, dos quais destacamos:

- a análise das diferenças entre o programa de 1990/1991 e o programa de 2007 e a criação de questões que fizessem referência aos novos conteúdos abordados;
- as questões utilizadas na última parte do questionário foram recolhidas e minimamente adaptadas de frases proferidas pelos alunos em contexto de sala de aula, pelo que a autenticidade das questões colocadas neste contexto específico torna possível a sua proveniência real;
- outras questões foram baseadas em atividades ou informações presentes nos manuais escolares, por ser a fonte de atualização mais utilizada pelos professores, tal como apontaram estudos nacionais e internacionais;

- a presença de questões de controlo que permitem a triangulação de algumas observações, tais como a conceção de simetria presente à data de aplicação do inquérito;
- algumas questões eram direcionadas para uma resposta que procurava verificar se as preocupações evidenciadas em estudos nacionais e internacionais, associadas ao ensino das simetrias e das transformações geométricas, se verificavam no nosso grupo de trabalho;
- a utilização de uma linguagem acessível que pudesse ser entendida por qualquer professor de qualquer nível de ensino.

Consideramos que todas estas preocupações na elaboração do questionário são fatores que apontam para que este meça realmente o que se pretende medir, ou seja, garanta a validade interna do questionário.

A confiabilidade e a validade estão de certa forma relacionadas, onde a confiabilidade é um contribuinte necessário mas não é condição suficiente para a validade de um estudo.

A confiabilidade de um instrumento de recolha de dados refere-se à sua coerência, que é determinada através da consistência dos resultados, ou seja, refere-se ao grau em que uma aplicação repetida do instrumento produziria resultados semelhantes se fosse aplicado ao mesmo indivíduo, remetendo para corretos procedimentos da pesquisa (Cozby, 2003; Yin, 2005). Procurámos que o questionário que elaborámos cumprisse esta condição; estamos convictos de que se os professores o preenchessem de novo, em circunstâncias equivalentes às do nosso estudo, nomeadamente sem alteração dos conhecimentos que então possuíam, os resultados seriam os mesmos.

Além disso, para reforçar a confiabilidade, procedemos a uma explicitação de todas as fases da investigação, garantindo assim um dos critérios fundamentais da confiabilidade ao nível de uma abordagem quantitativa.

### **Questões de Natureza Ética**

As questões de ética nos trabalhos de natureza investigativa referem-se às “normas relativas aos procedimentos considerados corretos e incorretos por determinado grupo” (Bogdan & Birklen, 2013, p. 75). Numa qualquer investigação deve-se atender a preocupações de ordem ética, como sendo uma preocupação da comunidade científica internacional, em particular, por parte dos investigadores em educação (Simons & Usher, 2012). Na investigação, que aqui relatamos, seguimos algumas diretrizes principais associadas ao tipo de investigação traçada e descritas por alguns

especialistas tais como American Educational Research Association (2011), Bogdan e Birklen (2013) e Forentini e Lorenzato (2007), que de seguida sintetizamos:

- Anonimato – O questionário não carecia do preenchimento do nome do professor, nem da escola onde este lecionava pelo que as restantes informações não permitiriam identificá-lo. Por este motivo, no tratamento dos dados não fizemos referência a nenhum elemento identificativo dos indivíduos da amostra.
- Consentimento livre e esclarecido – Os sujeitos foram, em todos os momentos, tratados respeitosamente e os dados obtidos recolhidos com o seu consentimento e colaboração. No que concerne às aulas observadas, como já referimos, o professor conhecia o motivo da presença do investigador na sala de aula e informou inclusivamente os respetivos alunos do trabalho que estava a ser desenvolvido. A presença do investigador nas aulas tinha como principal objetivo recolher dados sobre as dificuldades dos alunos na temática das simetrias e das transformações geométricas que estava a ser explorada, as questões colocadas por estes, as conjeturas, as afirmações, as respostas às questões colocadas, o diálogo entre os grupos de trabalho, os materiais manipuláveis utilizados e o recurso a AGD. Apesar de este trabalho se centrar no conhecimento do conteúdo por parte do professor, as aulas observadas foram essencialmente centradas na observação do aluno que nos traria informações pertinentes para colocar no questionário. No que concerne ao questionário, no momento que antecedeu o seu preenchimento, os investigadores esclareceram os professores presentes do objetivo do preenchimento do questionário que estava descrito na primeira página deste documento. Os professores acederam ao seu preenchimento voluntariamente.
- Confidencialidade – A recolha e o tratamento dos dados obtidos foram elaborados unicamente pelos investigadores, sendo estes os únicos a terem acesso aos questionários preenchidos e à informação recolhida por observação direta. A divulgação dos dados reserva-se apenas para fins de investigação, tal como foi divulgado aos professores que colaboraram nesta recolha de dados, e assumem importância pelo valor coletivo que representam.
- Responsabilidade do investigador – Respeitar a integridade moral dos participantes no estudo ao não revelar elementos que os possam identificar mas, ao mesmo tempo, tentarmos ser devotos e fiéis aos dados recolhidos. Não tentamos, em momento algum, fazer manipulações dos valores obtidos ou estabelecer correlações que pudessem não corresponder à realidade. Neste estudo, limitamo-nos a descrever os dados obtidos relativamente a cada tema específico apresentado no inquérito por questionário.

## Tratamento de Dados

Os dados recolhidos através do inquérito por questionário foram submetidos a tratamento estatístico próprio de uma abordagem quantitativa, sendo um dos objetivos desta última, a descrição, a interpretação dos dados e a generalização destes à população em causa. Este tratamento efetuou-se com recurso a um *software* estatístico, o *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS), que permitiu analisar os dados quantitativos das respostas dadas, nomeadamente as frequências absolutas e relativas, e aplicar testes de significância para perceber se há diferenças significativas no que concerne à dependência entre variáveis.

No tratamento inferencial dos dados, foram aplicados testes de significância para os valores obtidos. Pela característica que assumem as variáveis utilizadas no questionário (em escala nominal) foram utilizados os testes não paramétricos do Qui-Quadrado ou o teste exato de Fisher, com um nível de significância de 5% ( $p < 0,05$ ). A aplicação do teste do Qui-Quadrado pressupõe a satisfação de algumas condições para que possa ser usado e interpretado com rigor: "(i)  $N^{19} > 20$ ; (ii) todos os  $E_{ij}^{20}$  sejam superiores a 1 e (iii) pelo menos 80% dos valores sejam superiores ou iguais a 5" (Maroco, 2011, p. 104). A aplicação do teste do Qui-Quadrado, por vezes, poderá indicar a existência de mais do que 25% das células com frequências *esperadas* menores do que 5. Quando isto ocorrer e sempre que possível procedíamos ao agrupamento de algumas respostas de forma a permitir a aplicação do teste do Qui-Quadrado ou do teste exato de Fisher (cruzamento de variáveis 2x2).

O teste do Qui-Quadrado foi aplicado para analisar a dependência entre duas variáveis categóricas.

No estudo da dependência entre variáveis tomou-se como hipótese nula:

$H_0$ : não existe uma relação de dependência entre as variáveis  $x$  e  $y$

E a hipótese alternativa:

$H_1$ : existe uma relação de dependência entre as variáveis  $x$  e  $y$

Se o valor- $p$  ( $p$ )  $> 0,05$  não rejeitamos a hipótese nula de independência entre as duas variáveis, caso contrário, se o valor- $p \leq 0,05$  assumimos a relação de dependência (Maroco, 2011).

A parte principal do nosso questionário, a parte III, tem as questões ordenadas por tema mas, no último subgrupo, apresentamos um conjunto de questões abordando todos os temas referidos anteriormente o que nos permitiu cruzar questões para obter conclusões mais acertadas.

A apresentação dos dados será efetuada recorrendo a tabelas e gráficos gerados no SPSS para realçar a informação mais relevante e facilitar a leitura e interpretação dos dados.

---

<sup>19</sup> Número de observações.

<sup>20</sup> Frequências esperadas.



## CAPÍTULO 6

### O INQUÉRITO POR QUESTIONÁRIO

O inquérito por questionário foi o método de recolha de dados por nós escolhido para dar sustento principal a este trabalho de investigação e, a partir do qual, tiraremos conclusões e tentaremos responder às questões orientadoras. Contudo, antes de se proceder à análise das respostas às questões presentes neste questionário é fundamental perceber a pertinência das mesmas e as opções de resposta contempladas. Assim, neste capítulo fazemos uma breve abordagem às partes I, II e III deste documento para tornar perceptível algumas opções tomadas relativamente à seleção e à construção das questões nelas presentes.

Na parte I, referimos a forma como as questões permitiram selecionar os elementos da nossa amostra, em consonância com as condições previamente estabelecidas, e mencionámos as alterações efetuadas no questionário após a primeira recolha de dados. Algumas das questões desta parte tinham como objetivo único a seleção dos indivíduos que viriam a constituir a nossa amostra não tendo, por isso, sido alvo de tratamento estatístico e não são mencionados no capítulo seguinte. Consideramos, então, que deveriam ser tratadas neste espaço.

A pertinência das questões pertencentes à parte II do questionário está relacionada com o conhecimento didático do conteúdo pelo que são centradas no uso de recursos de apoio à aprendizagem e as formas de atualização científica.

Na parte III, faremos um percurso breve pelas quatro temáticas principais (isometria, simetria, rosáceas e frisos), sob o ponto de vista científico, para justificar a pertinência das questões colocadas bem como o tipo de respostas presentes. Em cada um destes quatro últimos espaços e tendo em consideração os estudos referenciados sobre o uso do manual escolar por parte do professor, analisaremos a presença de algumas particularidades, destas temáticas, nestes recursos. Esta referência teórica permite a análise de algumas respostas à luz das novas concetualizações e novas temáticas.

#### Parte I

Esta parte engloba as questões elaboradas para a caracterização da amostra.

Inicialmente, como já referimos, o projeto de tese era direcionado a professores do 2.º CEB e, por isso, a primeira parte deste questionário menciona algumas especificidades relativas a este ciclo de ensino, ou seja, a questão referente à formação inicial e às disciplinas curriculares que estes lecionaram e lecionavam naquele momento. Estas duas questões tinham opções específicas da docência no 2.º CEB como podemos ver nas Figuras 24, 25 e 26.

**Figura 24.** Enunciado da Questão 1.1

1.1) Licenciatura:  PEB – Variante Mat./C.N.  Outra. Qual? \_\_\_\_\_.

**Figura 25.** Enunciado da Questão 1.4

1.4) Anos letivos como docente de Matemática 2º CEB:  <3 anos  ≥ 3 anos e ≤ 10 anos  >10anos

**Figura 26.** Enunciado da Questão 1.6

1.6) Disciplinas:  $Mat. \begin{cases} 5^\circ & \square 2010/2011 & \square 2011/2012 \\ 6^\circ & \square 2010/2011 & \square 2011/2012 \end{cases}$   $C.N. \begin{cases} 5^\circ & \square 2010/2011 & \square 2011/2012 \\ 6^\circ & \square 2010/2011 & \square 2011/2012 \end{cases}$

*Outras.* Refira quais, indicando o ano de escolaridade. \_\_\_\_\_

Na questão 1.1 (ver Figura 24) apresentamos como opção a licenciatura em PEB – Variante Matemática/Ciências da Natureza e *outra*. Esta segunda opção tornou possível o preenchimento do questionário por todos os professores inquiridos independentemente da licenciatura que possuíam. Analogamente, na questão 1.6 (ver Figura 26) especificaram-se as disciplinas que fazem parte do grupo de docência dos professores do 2.º CEB (Matemática e Ciências da Natureza), mas a opção *Outras* também permitiu o seu preenchimento por parte dos docentes de outros ciclos de ensino. Como já referimos, consideramos apenas os inquiridos de professores que tenham lecionado a disciplina de Matemática no ano letivo de 2010/2011 ou de 2011/2012, pelo que estas opções na questão 1.6 revelaram-se fundamentais. Os docentes do 1.º CEB e do 3.º CEB lecionaram obrigatoriamente a Matemática. Esta questão permitiu também retirar deste estudo os professores que lecionaram, nestes dois anos letivos, unicamente no ensino secundário.

As respostas à questão 1.6 não serão analisadas pois serviram apenas como fator de seleção dos elementos da amostra.

No primeiro momento de aplicação dos questionários e, perante a possibilidade de os professores de outros ciclos de ensino para além do 2.º CEB também participarem neste estudo,

solicitamos aos professores para ignorarem, na questão 1.4, a particularidade do 2.º CEB e responderem apenas o número de anos letivos como docente de Matemática independentemente do ciclo de ensino. Nos questionários aplicados posteriormente, subtraímos esta especificidade. Ainda nesta, o facto de referirmos anos letivos e não tempo de serviço prendeu-se com o facto de este último poder ser francamente menor e, na verdade, apenas nos interessava a primeira informação, ainda que o professor possuísse uma única turma em determinados anos letivos.

As restantes questões desta parte do questionário solicitavam informação relativa ao ano de conclusão da formação inicial e a respetiva instituição de ensino bem como o concelho onde os professores lecionavam. As respostas a estas questões não serão analisadas pois a sua função era auscultar as condições dos elementos da amostra.

Na caracterização da amostra tratamos apenas alguns dados desta parte do questionário que consideramos mais relevantes para o estudo a desenvolver, nomeadamente, os anos letivos da docência, a formação inicial e o ciclo de ensino em que lecionavam nos anos letivos solicitados.

## Parte II

Esta parte do questionário contém questões do foro do conhecimento didático do conteúdo ao nível dos recursos utilizados pelo docente e a forma de atualização científica. A questão referente à atualização científica do docente (ver Figura 27), que permitia a seleção de mais que uma opção, continha várias hipóteses referidas em trabalhos de investigação como recursos muito utilizados pelos professores.

**Figura 27.** Enunciado da Questão 2.2 do Questionário

2.2) Como adquiriu os seus conhecimentos sobre o tema isometrias? (Pode seleccionar mais do que uma opção)		
<input type="checkbox"/>	Possuo os conhecimentos adquiridos na formação inicial.	
<input type="checkbox"/>	Li sobre o tema nos manuais escolares.	<input type="checkbox"/> Li sobre o tema na Internet.
<input type="checkbox"/>	Li sobre o tema em outras referências bibliográficas. Exemplo: _____	
<input type="checkbox"/>	Frequentei uma ou mais ações de formação, creditadas ou não, sobre o tema (tempo somente dedicado às isometrias):	
<input type="checkbox"/>	<3h (horas)	<input type="checkbox"/> ≥ 3h e ≤ 10h
<input type="checkbox"/>	De outra forma. Qual? _____	

Aqui, a menção aos manuais escolares está relacionada com a utilização frequente deste recurso por parte dos professores de Matemática. Conforme constatam alguns autores (e.g., Carvalho,

2011; Moreira, Ponte, Pires & Teixeira, 2006; Ponte & Serrazina, 2004), o manual escolar continua a ser uma fonte privilegiada para o desenvolvimento do trabalho do professor em contexto de sala de aula e na preparação das mesmas, pelo que não seria surpreendente que recorressem a este recurso para se atualizarem cientificamente. Em 2008, o relatório *Matemática 2001*, feito pela APM, afirma que o manual escolar é o material didático mais utilizado pelos professores do 2.º e 3.º CEB, e que os professores do 1.º CEB também referem a sua utilização para o ensino da Matemática (Moreira, Ponte, Pires & Teixeira, 2006).

Nesta questão, com a referência às ações de formação contínua e com o registo do número de horas respetivas, pretendia-se averiguar se a seleção desta opção seria no âmbito do Plano da Matemática II ou se seriam ações de formação contínua com a tipologia de curso ou oficina<sup>21</sup>. A formação contínua de professores é fundamental e é realçada por vários autores<sup>22</sup> que, através de inúmeros estudos, registam melhorias na prática docente, de que é exemplo o ensino da geometria (Hill et al., 2008). Relembremos que Shulman (1986), Ma (2009), Hill et al. (2008), entre outros, acreditavam que a solução para a implementação de um ensino rico e rigoroso da Matemática estaria nestes cursos de formação contínua, a começar pela matemática elementar. A necessidade destes cursos para “promover acções de reciclagem” (Ponte, 2005, p. 2) adquire uma dimensão ainda maior “quando há alterações nos programas com introdução de novas matérias” (p. 2), como é o caso da temática em questão. Estas ações permitiriam ao professor estudar e aprofundar os temas (Ponte, 2005), nomeadamente da geometria, uma vez que já registava diversas fragilidades e que foram ampliadas com a introdução destas novas temáticas. Afinal, como refere Matos (2010), estas alterações curriculares devem começar a ser vistas como um processo altamente problemático já que a sua aplicação efetiva na prática docente não depende de uma simples adesão concetual do professor. Este autor e Ponte e Serrazina (2009), autores do PMEB (2007), para além dos cursos de formação contínua, referem a importância de um suporte formativo onde os materiais fornecidos pela DGIDC se poderão incluir para servir de apoio à implementação do programa.

Outra das opções, tal como não podia deixar de ser, era o recurso à Internet por ser um meio de informação facilmente acessível a todos os professores, apesar de, na Internet, nem sempre as informações estarem atualizadas sob o ponto de vista científico.

A utilização de referências bibliográficas é, na nossa opinião, também fundamental, porque existem, atualmente, algumas referências consideradas fundamentais e basilares para o estudo daqueles conteúdos, já referidos, mas interessava-nos conhecer aqueles que eram objeto da consulta dos docentes.

---

<sup>21</sup> Um Curso tem a duração de 25 horas e Oficina a duração de 50 horas, metade das quais correspondem a trabalho com os alunos.

<sup>22</sup> Revisão da literatura (e.g., o *Contributo de Shulman (1986, 1987, 2005) para a Identificação dos Saberes Docentes e Os Trabalhos de Shulman em Outras Investigações*).

Desta questão, poderíamos tirar algumas ilações sobre a aprendizagem autodidata do professor, analisando as fontes de atualização selecionadas.

No que concerne aos materiais utilizados em contexto de sala de aula, referimo-nos, nesta parte do questionário, a ambientes de geometria dinâmica e apresentamos como exemplo o *Geogebra* (ver Figura 28) e os recursos manipulativos. O *Geogebra* é um programa de geometria dinâmica com uma enorme divulgação nos encontros de matemática a nível nacional e a nível internacional. Há dois fatores que contribuem fortemente para este facto: a utilização do *software* em português e a sua disponibilidade para *download* de forma gratuita.

**Figura 28.** Enunciado da Questão 2.3 do Questionário

2.3) Acha relevante a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), por exemplo o Geogebra, em contexto de sala de aula? <input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não	Já usou? <input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não
---	--

A utilização de AGD consta como indicação metodológica para o desenvolvimento e prossecução dos objetivos específicos relacionados com a Geometria e são especificamente mencionadas no PMEB (2007), onde se propõe o uso de *applets* (1.º e 2.º CEB) para a realização de atividades de natureza interativa que favoreçam a compreensão dos conceitos e relações geométricas, e que permitam a realização de tarefas de natureza exploratória e de investigação (3.º CEB).

O exemplo do *Geogebra*, que consta no enunciado desta questão, tem sido fortemente divulgado e utilizado pela comunidade escolar e sobre o qual têm sido apresentados imensos trabalhos de investigação (e.g., Breda, Trocado & Santos, 2013; Hohenwarter, 2013; Gafanhoto & Canavarro, 2011; Silveira & Cabrita, 2013), que salientam a importância e reconhecem vantagens no uso desta ferramenta de trabalho. A referência ao *Geogebra* está também presente nos exemplos de “Recursos: sítios da internet e materiais” (p. 71), do próprio programa de Matemática em questão, pelo que o nome deste programa não constitui um fator de surpresa para os professores inquiridos.

No que concerne aos materiais manipuláveis, elaborámos a questão da Figura 29, onde era suposto os professores mencionarem uma atividade a realizar com esse material, como forma de validar a resposta dada.

**Figura 29.** Questão 2.5 do Questionário

2.5) No NPMEB, sugere-se a utilização de materiais manipuláveis, na exploração das isometrias. Indique dois materiais e, para cada um dos materiais, uma atividade que considere adequada para a exploração de isometrias:
• Material 1: _____ . Atividade: _____ _____ .
• Material 2: _____ . Atividade: _____ _____ .

A importância do uso dos materiais manipuláveis para o desenvolvimento de algumas competências matemáticas está plasmado em vários artigos científicos e outros trabalhos de investigação, como já referimos na revisão da literatura<sup>23</sup> deste trabalho. Por este motivo, os materiais manipuláveis passíveis de promoverem a compreensão e o conseqüente desenvolvimento das aprendizagens, nos temas matemáticos em questão foram também um ponto de destaque neste questionário. Nesta temática, essa importância vem acrescida, havendo mesmo a sugestão da sua utilização, no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, pelo papel importante que possuem na aprendizagem destas temáticas. Assim, neste documento, para o 1.º CEB<sup>24</sup> são apresentados alguns exemplos de materiais, tais como os espelhos e miras, a sugestão do uso das dobragens e recortes e, ainda, a utilização de imagens da vida real. Já no 2.º CEB<sup>25</sup> aconselha-se o uso dos espelhos, dobragens e o uso de obras de arte e de artesanato. No 3.º CEB, a abordagem geométrica desta temática iniciada nos ciclos anteriores “pode ser acentuada através da análise de exemplos ligados às artes decorativas” (Ponte, 2007, p. 52) de que são exemplos “situações da vida quotidiana (como papéis de parede, tecidos, azulejos ou frisos decorativos)” (Ponte, 2007, p. 53).

### Parte III

Esta parte engloba as questões referentes ao conhecimento do conteúdo nas matérias específicas do tema das transformações geométricas que aqui nos interessa abordar: as isometrias, as simetrias, as rosáceas e os frisos. Assim, com o objetivo de se perceber as opções tomadas relativamente ao conhecimento específico do conteúdo abordado em cada questão, torna-se essencial fazer uma breve abordagem teórica por cada um dos temas destacados e analisar, paralelamente, algumas informações presentes nos manuais escolares.

Esta parte do questionário inclui um conjunto de frases, com pequenas adaptações, que constituem afirmações/conjeturas/generalizações, feitas pelos próprios alunos, em resposta a questões colocadas nas aulas por nós observadas. As questões/propostas que originaram tais resoluções/respostas não eram necessárias para o claro entendimento das mesmas. Nestes itens pretendia-se avaliar a resposta do professor às referidas afirmações.

---

<sup>23</sup> Capítulo 2 (e.g., *Evolução Curricular da Matemática*), Capítulo 3 (*As Mudanças Conceituais do Professor e Os Professores e a Geometria*) e Capítulo 4 (e.g., *Algumas Particularidades desta Nova Abordagem das Transformações Geométricas*).

<sup>24</sup> Consultar página 22 do Programa de Matemática do Ensino Básico (2007).

<sup>25</sup> Consultar página 38 do Programa de Matemática do Ensino Básico (2007).

## Isometrias

A introdução ao estudo das isometrias, apresentada no capítulo quatro, permitiu-nos reunir um conjunto de informações que consideramos relevantes para o conhecimento profundo desta temática:

- A relação existente entre as composições de reflexões e as restantes isometrias.
- O estudo da reflexão deslizante no conjunto das isometrias e a existência de apenas quatro isometrias básicas.
- A orientação é preservada nas isometrias positivas e invertida nas isometrias negativas.
- Na reflexão deslizante, o vetor de translação é paralelo ao eixo da reflexão.
- Se duas figuras são congruentes, estas podem ser transformadas uma na outra através de uma reflexão, rotação, translação ou reflexão deslizante.

Estas informações foram um contributo importante para a origem das questões colocadas no questionário e, neste local, faremos uma breve explicação do conteúdo de algumas delas, justificando a pertinência da sua inclusão neste documento.


Iniciámos com a análise da questão 3.2 (ver Figura 30).

**Figura 30.** Questão 3.2 do Questionário

<p>3.2) O NPMEB fala de 4 isometrias. Da mesma forma que se fala da reflexão deslizante, porque não se fala, por exemplo, de uma <i>reflexão rotacional</i>?</p> <p><input type="checkbox"/> Porque as 4 isometrias referidas são suficientes para a maior parte das transformações isométricas.</p> <p><input type="checkbox"/> Porque a <i>reflexão rotacional</i> é equivalente a uma das 4 isometrias.</p> <p><input type="checkbox"/> Outra razão. Qual? _____.</p>
--

A questão da Figura 30 tentava indagar se os docentes reconhecem a existência de apenas quatro isometrias, pelo que lançamos o repto da existência da composição de uma rotação com uma translação a que apelidamos de *reflexão rotacional*, nome fictício, obviamente.

**Figura 31.** Questão 3.13 do Questionário

<p>3.13) <b>Aluno:</b> “Professora, a reflexão é o mesmo que a rotação de meia-volta.”</p> <p>Para exemplificar o aluno exibiu a imagem da fig. 2:</p> <p><input type="checkbox"/> Aceitaria a afirmação.    <input type="checkbox"/> Não aceitaria a afirmação, pois _____.</p>	 <p>Fig. 2</p>
--	---

A Figura 31 ilustra um exemplo retirado de uma das aulas observadas em que um aluno, perante um exemplo concreto, afirmou que a reflexão era o mesmo que a rotação de meia-volta. A imagem colocada na questão 3.13 é um caso particular em que esta afirmação se verifica, mas que na

generalidade não pode ser considerada verdadeira. A questão da orientação, referida anteriormente, seria uma justificação válida para refutar a possível generalização.

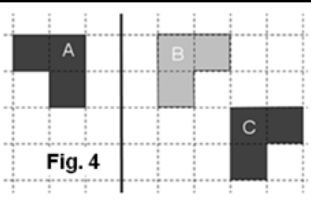
**Figura 32.** Questão 3.17 do Questionário

3.17) **Aluno:** “Professora, a figura C é uma reflexão deslizante da figura A, pois fiz uma reflexão da imagem A e depois deslizei a imagem obtida (B)” (ver fig. 4).

Aceitaria a resposta.

Não aceitaria a resposta pois \_\_\_\_\_

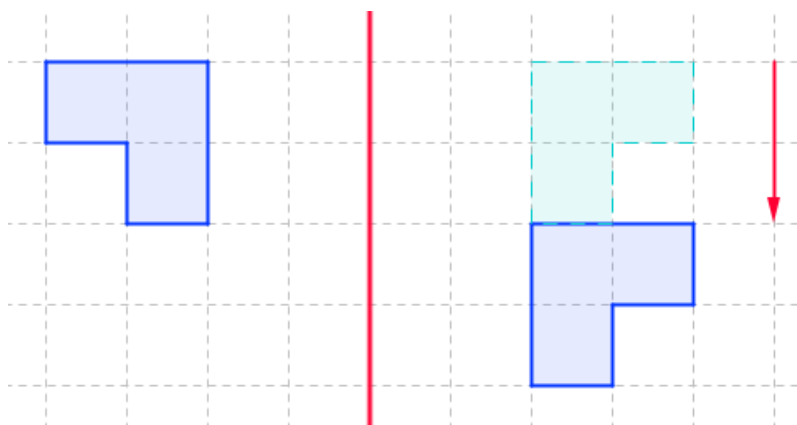
\_\_\_\_\_



**Fig. 4**


Com a formulação da questão 3.17 (ver Figura 32), pretendíamos que o professor alertasse o aluno para a particularidade do paralelismo entre o vetor de translação e o eixo da reflexão que caracteriza a reflexão deslizante. Estávamos conscientes de que a forma como a questão estava colocada permitia considerar ambas as opções. De facto, a Figura C é obtida através de uma reflexão deslizante da Figura A pelo que a opção *aceitaria a resposta* pode ser considerada parcialmente correta. Contudo, considerando o eixo da reflexão indicado, da resposta que considerávamos completa, devia constar a particularidade do paralelismo entre o vetor de translação e o eixo da reflexão, ou seja, o docente deveria rejeitar a afirmação solicitando ao aluno que encontrasse os elementos associados a essa transformação geométrica com a mesma direção. Neste caso particular, o facto de as imagens estarem em fundo quadriculado tornava a tarefa de identificação desses elementos bastante simples e permitia, também, a interessante oportunidade de se discutir uma estratégia para os encontrar (ver Figura 33).

**Figura 33.** Reflexão Deslizante no Quadriculado



Esta questão foi, também, retirada de uma aula observada onde a exploração da reflexão deslizante nunca foi acompanhada da particularidade do paralelismo que a caracteriza. Na referida aula, um aluno afirmava precisamente o mencionado nesta questão, sendo a figura da nossa autoria mas similar à desenhada pelo próprio aluno.

**Figura 34.** Questão 3.18 do Questionário

<p>3.18) <b>Aluno:</b> “Professora, há figuras que mesmo sendo congruentes não se podem obter através de isometrias, por exemplo estas duas” (ver fig. 5).</p> <p><input type="checkbox"/> Aceitaria a afirmação.</p> <p><input type="checkbox"/> Não aceitaria a afirmação.</p>	 <p>Fig. 5</p>
--	---

Na questão 3.18 (ver Figura 34), pretendíamos perceber se os professores reconheciam que a particularidade de duas figuras serem congruentes significa que podemos obter uma por aplicação de uma isometria *básica* à outra. Ainda que a capacidade de visualização do professor não permitisse identificar rapidamente a isometria que transformasse uma figura na outra, pelo facto de estas serem congruentes, saber-se-ia imediatamente que estávamos perante a existência de uma das quatro isometrias para essa transformação.

### Simetrias

Para uma cabal compreensão do tema, as três questões (ver Figuras 35, 36 e 37) que fazem parte desta secção, surgiram com o objetivo de indagar:

- o conceito de simetria que está a ser explorado pelos professores;
- se os professores fazem a distinção entre simetria e isometria;
- o que são as simetrias identidade para os professores.


**Figura 35.** Enunciado da Questão 3.3 do Questionário

<p>3.3) Que relação há entre o conceito de simetria e o conceito de isometria?</p> <p><input type="checkbox"/> Os conceitos, em sentido amplo, não apresentam diferenças.</p> <p><input type="checkbox"/> Qualquer simetria é uma isometria.</p> <p><input type="checkbox"/> Qualquer isometria é uma simetria.</p> <p><input type="checkbox"/> Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra.</p> <p><input type="checkbox"/> Outra. Qual? _____.</p>
--

Na questão 3.3 foram apresentadas algumas hipóteses que acreditávamos poderem fazer parte das crenças interiorizadas pelos professores. Assim, a opção *duas imagens são simétricas se existir*

uma isometria que transforma uma na outra remete-nos para a antiga conceitualização de simetria pelo facto de fazer referência a duas figuras. As primeiras três opções permitem compreender se as concepções existentes possibilitam a distinção entre simetria e isometria. Já a última hipótese permitia dar hipótese ao professor de referir outra concepção não contemplada nas opções anteriores.

**Figura 36.** Enunciado da Questão 3.14 do Questionário

<p>3.14) Trabalho de grupo para análise de figuras.  <b>Aluno:</b> "Na figura 3, a reta <math>r</math> é um eixo de simetria".  <input type="checkbox"/> Aceitaria a afirmação.    <input type="checkbox"/> Não aceitaria a afirmação.</p>	
--	---

As questões 3.3 e 3.14 permitirão fazer o cruzamento das respostas de forma a averiguar a conceitualização de simetria explorada atualmente pelos professores inquiridos.

**Figura 37.** Enunciado da Questão 3.4 do Questionário

<p>3.4) De acordo com Eduardo Veloso (1998), uma figura é simétrica se admitir, pelo menos, uma simetria diferente da identidade. Quais são as simetrias identidade? _____.</p>
---

Ora, se tivermos um segmento orientado de comprimento nulo, a translação definida por esse segmento orientado tornaria cada ponto da figura invariante, ou seja, "a translação associada ao vector nulo (identidade)" (Palhares, 2004, p. 340) é uma simetria identidade. Sabemos, também, que a figura coincide com ela própria, ponto por ponto, numa rotação cujo ângulo seja múltiplo inteiro de  $360^\circ$ , pois, nesse caso, essa rotação também se reduz à identidade (Veloso, 2012, p. 59).

A inclusão da simetria identidade no conjunto das simetrias de uma dada figura será uma questão abordada na secção seguinte, a das rosáceas.

## Rosáceas

A abordagem teórica efetuada no capítulo quatro permitiu reunir um conjunto de informações importantes e necessárias ao conhecimento profundo desta matéria que permitiria, aos professores, responder às seguintes questões:

- A identidade é considerada para o conjunto das simetrias de uma rosácea (ver Figura 35)?
- Se uma figura possuir apenas uma simetria de rotação que é a identidade, esta figura pode ser considerada uma rosácea?

- São reconhecidas algumas propriedades das rosáceas, como por exemplo, serem um grupo finito ou a amplitude mínima do ângulo de rotação ser divisor de  $360^\circ$  (ver Figura 37)?
- São reconhecidas as diferenças entre as rosáceas cíclicas e diedrais (ver Figura 36)?

Fazemos notar aqui que a questão fundamental é perceber se a noção de rosácea está presente na análise dos polígonos, uma vez que a ideia intuitiva de rosácea surge, muitas vezes, associada a objetos circulares. Assim, para uma melhor compreensão desta temática, foram elaboradas as questões apresentadas nas Figuras 38, 39, 40 e 41.

**Figura 38.** Enunciado da Questão 3.6 do Questionário

3.6) O que é o grupo de simetrias de uma determinada figura?

Número de simetrias da figura,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{com} \\ \text{sem} \end{array} \right.$  a identidade

Conjunto de todas as simetrias da figura,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{incluindo} \\ \text{excluindo} \end{array} \right.$  a identidade.

Outro ente matemático. Qual? \_\_\_\_\_.

**Figura 39.** Enunciado da Questão 3.8 do Questionário

3.8) Existem rosáceas cíclicas e diedrais. O que as distingue?

As cíclicas só possuem simetrias de rotação e as diedrais só possuem simetrias de reflexões.

Nas diedrais, o número de simetrias de reflexão é igual ao número de simetrias de rotação, nas cíclicas existem simetrias de reflexão mas em número diferente das simetrias de rotação.

Ambas possuem simetrias de rotação mas as diedrais também possuem simetrias de reflexão.

Outra razão. Qual? \_\_\_\_\_.

**Figura 40.** Enunciado da Questão 3.15 do Questionário

3.15) Aluno: "Professora, a circunferência é uma rosácea especial porque tem infinitos eixos de reflexão."

Aceitaria a afirmação.  Não aceitaria a afirmação, pois \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_.

**Figura 41.** Enunciado da Questão 3.16 do Questionário

3.16) Aluno: "A rosácea que desenhei em casa tinha amplitude mínima de  $62^\circ$ . Medi com o transferidor."

Teria de ver a rosácea desenhada para aceitar a afirmação.

Não aceitaria a afirmação pois \_\_\_\_\_.

No que concerne à medida de amplitude mínima de uma simetria de rotação numa rosácea, apresentada na questão 3.16 (ver Figura 38), colocamos a possibilidade de uma destas possuir uma simetria de rotação com amplitude mínima de  $62^\circ$ . Ora, dado que 62 não é um divisor de 360, não pode existir uma rosácea com esta amplitude mínima. Nesta questão, poder-se-ia considerar que a

medição dos  $62^\circ$  fosse por determinada falta de precisão no uso do transferidor, contudo, pretendia-se que o professor alertasse o aluno, numa primeira fase, para a impossibilidade desse valor e, posteriormente, detetasse a proveniência desse erro. A questão da amplitude mínima, aqui, é importante para indicar a ordem da rosácea. Também se pode verificar a presença desta desconformidade na exploração deste tema em alguns manuais escolares, como podemos ver pelo fragmento ilustrado na Figura 42.

**Figura 42.** Manual Escolar de Matemática do 8.º Ano de Escolaridade

Ao número de vezes que a figura coincide com ela própria, quando gira em torno do seu centro se simetria de rotação, chama-se **ordem de simetria de rotação** da figura.

Se a única rotação que torna a figura globalmente invariante é a correspondente a uma volta inteira (rotação de  $360^\circ$ ), diz-se que a figura não tem simetria de rotação, pelo que **não há simetria de rotação de ordem 1**.

Propusemos, ainda, mais duas questões que relacionam o estudo dos polígonos regulares com ao estudo das rosáceas (ver Figuras 43 e 44).

**Figura 43.** Enunciado da Questão 3.5 do Questionário

3.5) Um triângulo equilátero pode ser considerado uma rosácea?  Sim  Não

O triângulo equilátero possui seis simetrias das quais três são simetrias de reflexão e as outras três são simetrias de rotação, sendo uma delas a identidade. Assim sendo, o triângulo equilátero é uma rosácea que, em particular, é diedral.

**Figura 44.** Enunciado da Questão 3.7 do Questionário

3.7) Há uma relação entre o nº de simetrias de um dado polígono regular e o nº de lados do mesmo?  
 Não  Sim, o número de simetrias é \_\_\_\_\_ o número de lados do polígono.

A questão 3.7, sobre a relação entre o número de simetrias e o número de lados de um polígono regular, foi aplicada no âmbito de uma sugestão didática do programa de Matemática (2007), que menciona o estudo da relação entre a classificação de polígonos e o número de simetrias que

possuem. Ora, um polígono regular com  $n$  lados, tem  $n$  eixos de simetria e simultaneamente  $n$  simetrias de rotação. Assim, o número de simetrias de um polígono regular é o dobro do número de lados do polígono.

## Frisos

Na temática dos frisos, decidimos reunir um conjunto de quatro questões, tentando abarcar algumas particularidades relevantes, já mencionadas anteriormente, para um claro conhecimento deste assunto.

O número de frisos, a identificação das simetrias existentes num conjunto de frisos dados e a existência de algumas simetrias em função da existência de outras, poderá dar-nos algumas pistas sobre o claro entendimento de haver apenas 7 tipos de frisos.

As questões então colocadas tentarão aferir a:

- existência de sete tipos de frisos (ver Figura 45);

**Figura 45.** Enunciado da Questão 3.9 do Questionário

3.9) Quantos tipos de frisos conhece? \_\_\_\_\_.

- impossibilidade da existência de simetria de reflexão deslizante e simetria de eixo horizontal em simultâneo (ver Figura 46);

**Figura 46.** Enunciado da Questão 3.10 do Questionário

3.10) Se um friso tem simetria de reflexão deslizante, então, também tem simetria de reflexão de eixo horizontal?  
 Sim     Não    E o recíproco é verdadeiro?     Sim     Não

- designação de Washburn e Crowe (1998) (ver Figura 47);

**Figura 47.** Enunciado da Questão 3.11 do Questionário

3.11) Na resolução de um determinado exercício surge um friso com a designação  $p1m1$ . Conhece esta classificação?  
 Não     Sim, este friso tem (pode seleccionar mais do que uma opção):  
 Translação     Rotação     Reflexão     Reflexão deslizante

- análise dos frisos pela identificação das suas simetrias (ver Figura 48).

**Figura 48.** Enunciado da Questão 3.12 do Questionário

3.12) **Aluno:** “Professora, em casa, recortei alguns frisos e associei-os assim (ver fig. 1):”

Aceitaria a resposta.

Não aceitaria a resposta pois \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Fig. 1

Fontes imagens: Vídeo internato dos Carvalhos e curso do ProMat 2008 por Eduardo Veloso

Reunindo aquelas particularidades e os conhecimentos referidos anteriormente, elaboramos as questões visíveis nas Figuras 45, 46, 47 e 48.

## CAPÍTULO 7

### ESTUDO EMPÍRICO

Os saberes docentes específicos de cada área científica são essenciais no processo de ensino e aprendizagem dos quais destacamos, tal como Shulman (1986) e outros autores, o conhecimento do conteúdo, o conhecimento didático e o conhecimento curricular, neste caso particular, da Matemática. No presente trabalho de investigação, enfatizamos o conhecimento do conteúdo por ser considerado por muitos como imprescindível para a persecução dos objetivos específicos do programa de Matemática. Atualmente, o ministro da educação, Nuno Crato, aplicou a obrigatoriedade de os professores que não pertencem aos quadros prestarem provas sob os seus conhecimentos, entre outros, o conhecimento do conteúdo, como condição necessária para poderem lecionar no ensino público.

O estudo das *simetrias e das transformações geométricas*, introduzido no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007), obteve, desde o primeiro ciclo de ensino, um papel de grande relevo que foi aplaudido por vários educadores e investigadores na área da Matemática. Contudo, dada a mudança concetual de simetria e a maior abrangência que esta nova concetualização possibilitou, em consonância com o estudo alargado das transformações geométricas, a atualização científica dos docentes nesta matéria revelou-se incontornável. Aqui, as potenciais dificuldades são relatadas pelos especialistas pertencentes a grupos de trabalho e de investigação que, habitualmente, interagem com os professores do ensino básico, tal como foram referidas na revisão da literatura. Recordemos que a ênfase dada a este tema da Geometria e à própria Geometria, e as alterações programáticas relatadas são os principais pontos de constrangimento que os professores de Matemática enfrentam nos dias e hoje (GTG, s.d.; Loureiro, 2009; Veloso, 2012).

O tratamento das transformações geométricas, segundo Veloso (1998), deve ter como ponto de partida o desenvolvimento das “intuições que os alunos já possuem e que prossiga numa via lenta de formalização ao longo de toda a escolaridade” (p. 67). Assim, no 1.º CEB, ainda que a exploração deste tema seja mais intuitivo, é necessário que o professor possua conhecimento aprofundado do conteúdo em causa para que a exploração se faça de forma significativa e direcionada para os objetivos específicos daquele ciclo e do ciclo seguinte. No 2.º CEB, a exploração deste tema adquire um maior aprofundamento numa abordagem menos intuitiva que servirá de base para a articulação com o 3.º CEB, que o revisita adotando um maior grau de formalização.

O conhecimento do conteúdo referente às *simetrias e às transformações geométricas* por parte dos professores será o enfoque deste trabalho de investigação que procura perceber se as dificuldades apontadas por vários autores, nesta matéria, existem e em que ciclos do ensino básico são mais visíveis.

### **O Inquérito por Questionário**

O inquérito por questionário utilizado para tentar responder às questões de partida e às questões orientadoras, como já referimos anteriormente, estava dividido em três partes, sendo a primeira parte destinada a conhecer a situação profissional do docente, a segunda, à componente didática e curricular do ensino das simetrias e das isometrias e a terceira e última parte, ao conhecimento do conteúdo em questão. Faremos uma descrição detalhada das respostas obtidas em cada uma das partes, iniciando com a caracterização da nossa amostra a nível profissional. Faremos também, sempre que oportuno, uma análise comparativa das respostas dadas pelos professores dos diferentes ciclos de ensino.

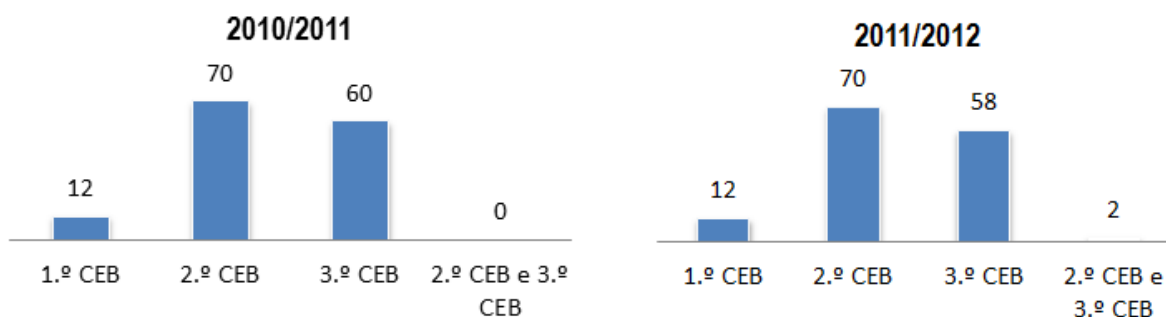
### **A Amostra**

A amostra, por conveniência, que constitui a base para o estudo empírico deste trabalho de investigação permitiu, como já referimos, a recolha de um total de 154 inquéritos por questionários. Contudo, atendendo às questões também já referidas, analisamos apenas 142 inquéritos sendo 12 do 1.º CEB, 70 do 2.º CEB e 60 do 3.º CEB e ES. A análise dos dados, referente aos professores do 1.º CEB, será unicamente informativa e sem intenção de generalizar para os contextos escolares de onde estes professores são provenientes uma vez que a amostra destes docentes não é representativa da população. Os restantes professores representam mais de 40% da nossa população.

Nas próximas páginas, analisaremos a distribuição dos professores pelos ciclos de ensino nos dois anos letivos 2010/2011 e 2011/2012, mas não mencionaremos, em momento algum, os concelhos ou agrupamentos de escolas de onde foram recolhidos os questionários de forma a proteger a confidencialidade prometida na recolha destes dados.

Começamos então por descrever a nossa amostra, analisando a distribuição dos 142 docentes por ciclos de ensino nos dois anos letivos 2010/2011 e 2011/2012 (ver Gráfico 1).

**Gráfico 1.** Distribuição por Ciclos de Ensino nos Anos Letivos 2010/2011 e 2011/2012 dos Docentes Inquiridos



Podemos observar que, nos dois anos letivos apresentados, a nossa amostra é composta por 12 professores que lecionam no 1.º CEB. No que concerne aos restantes ciclos de ensino, no ano letivo 2010/2011, 70 professores lecionavam no 2.º CEB e 60 no 3.º CEB. No ano letivo seguinte, 2011/2012, precisamente o ano de aplicação do nosso questionário, encontramos uma distribuição por ciclos de ensino análoga à anterior com uma pequena variação: 2 professores que, no ano letivo anterior, lecionavam somente no 3.º CEB, neste ano letivo lecionavam também o 2.º CEB. No tratamento de dados, estes 2 docentes serão agrupados com os do 3.º CEB, grupo de profissionalização a que pertencem.

Conquanto o número de elementos da amostra (12) do 1.º CEB seja insuficiente para inferir sobre a respetiva população, permitindo somente uma descrição das situações, as amostras de professores do 2.º CEB e do 3.º CEB têm um número de elementos adequado a um estudo de investigação descritivo, reflexivo e inferencial sobre o ensino das simetrias e das isometrias nestes ciclos ensino básico, uma vez que representa aproximadamente 43% da população, já que o total de elementos desta, no total destes dois ciclos, é de 304 professores.

Na Tabela 6, vemos que 2,8% dos professores inquiridos lecionam há menos de 3 anos letivos e que, dos restantes, 66,2% lecionam há mais de 10 anos.

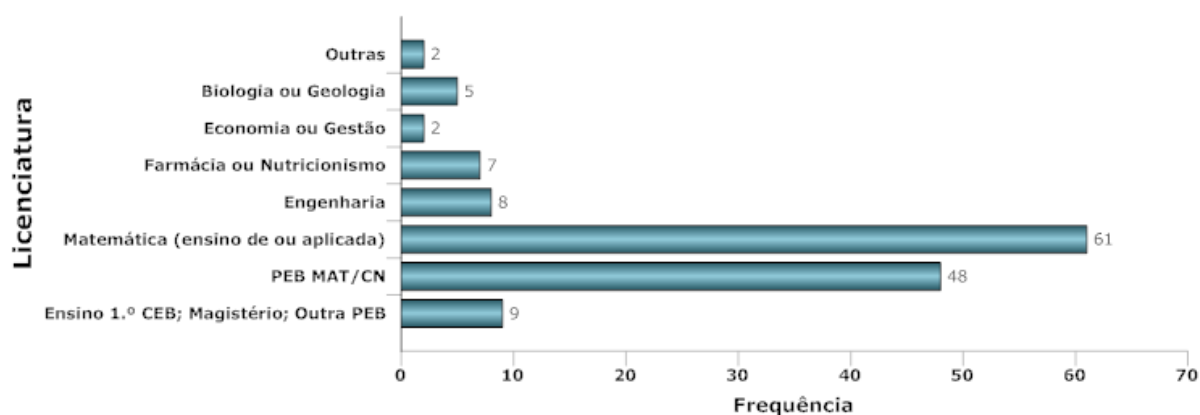
O Gráfico 2 mostra a área da formação inicial dos professores que constituem a nossa amostra, onde podemos verificar que a maioria (61) possui licenciaturas em Ensino da Matemática ou Matemática Aplicada (apenas um) lecionadas em Universidades públicas ou privadas. Estes professores possuem qualificação profissional para a lecionação no 3.º CEB e ES e habilitação

própria<sup>26</sup> para o 2.º CEB. Vemos ainda que 48 professores possuem a licenciatura em Professores do Ensino Básico – Variante Matemática e Ciências da Natureza, obtidas em as escolas Superiores de Educação públicas ou privadas. Estes professores estão qualificados profissionalmente para o ensino da Matemática e das Ciências da Natureza no 2.º CEB e para todo o currículo do 1.º CEB.

**Tabela 6.** Anos de Lecionação dos Professores Inquiridos (Questão 3.14)

	Frequência	%
inferior a 3 anos	4	2,8
entre 3 anos e 10 anos (incluindo)	44	31,0
mais do que 10 anos	94	66,2
Total	142	100,0

**Gráfico 2.** Formação Inicial dos Professores Inquiridos (questão 1.1 do questionário)



Os professores diplomados pelo antigo Magistério Primário<sup>27</sup> e os licenciados em Professores do Ensino Básico – 1.º CEB, ou ainda por outras Variantes, neste caso, da variante de Educação Física, possuem profissionalização para o ensino de todas as áreas do 1.º CEB. Estes perfazem um total de 9 docentes.

Os professores possuidores de outras licenciaturas, para além das referidas anteriormente, lecionam no 2.º CEB ou no 3.º CEB/ES, possuindo mais de 10 anos de tempo de serviço e pertencendo aos quadros de escola ou de zona pedagógica porque os contratados eram, já no ano

<sup>26</sup> O Decreto-Lei nº 35/2007, de 15 de Fevereiro, refere que, na fase de contratação de escolas, na ausência de docentes profissionalizados, podem ser recrutados candidatos possuidores de habilitação própria. Sendo os professores pertencentes aos quadros de escola ou de zona pedagógica, podem desempenhar funções docentes nos grupos para os quais possuem habilitação própria.

<sup>27</sup> Estes docentes obtiveram, no Magistério Primário, a sua profissionalização no 1.º CEB e, posteriormente, foi dada equivalência a bacharelato ao respetivo diploma. Todos os docentes nestas condições concluíram, mais tarde, um Curso Complementar de Estudos Especializados que lhe conferiu equivalência a Licenciatura.

letivo de aplicação do inquérito, forçados a possuir qualificação profissional para concorrer à lecionação da matemática nestes ciclos de ensino<sup>28</sup>. Estes 24 docentes constituem cerca de 17% do total da nossa amostra.

**Tabela 7.** Número de Anos Letivos de Docência dos Professores e as Respetivas Formações Iniciais

Variáveis	Anos letivos em docência			Total
	inferior a 3 anos	entre 3 anos e 10 anos (incluindo)	mais do que 10 anos	
Licenciatura Ensino 1.ºCEB; Magistério; Outra PEB	0	2	7	9
PEB Mat/CN	3	31	14	48
Matemática (ensino de ou aplicada)	1	10	50	61
Engenharia	0	0	8	8
Farmácia ou Nutricionismo	0	0	7	7
Economia ou Gestão	0	1	1	2
Biologia ou Geologia	0	0	5	5
Outras	0	0	2	2
Total	4	44	94	142

Na Tabela 7, que cruza os dados da Tabela 6 e do Gráfico 2, podemos reconhecer o que acabamos de referir. Os professores com licenciaturas em Economia, Gestão, Farmácia, Nutricionismo, Biologia ou Geologia, estão, à exceção de um deles, a lecionar há mais de 10 anos. Também os professores do Magistério Primário lecionam há mais de 10 anos.

A Tabela 8 mostra o ciclo de ensino onde lecionam estes professores no ano letivo 2011/2012, precisamente o ano de aplicação do questionário, e cruza estes dados com as diversas formações iniciais dos inquiridos.

Desta tabela destacamos as informações que consideramos mais relevantes:

- os professores com as licenciaturas em PEB – Ensino do 1.º CEB, PEB – Variante de Educação Física e com a formação do Magistério Primário, estão todos a lecionar no 1.º CEB;
- os licenciados em PEB – Variante Matemática e Ciências da Natureza estão distribuídos pelo 1.º CEB e 2.º CEB mas, na sua maioria, lecionam no 2.º CEB. Não há nenhum destes a lecionar no 3.º CEB;

<sup>28</sup> O Decreto-Lei nº 20/2006, de 31 de janeiro, na redação dada pelo Decreto-Lei nº 51/2009, de 27 de fevereiro, refere que a qualificação profissional para a docência, num determinado grupo de recrutamento, é condição indispensável para ser candidato ao concurso.

- os licenciados em Ensino da Matemática – Ramo Educacional ou Matemática Aplicada lecionam no 3.º CEB/ES<sup>29</sup> ou no 2.º CEB, apesar de estes docentes não possuírem profissionalização para o ensino da Matemática no 2.º CEB. Esta situação poderá estar relacionada com as necessidades das escolas em termos da organização do pessoal docente;
- os engenheiros estão distribuídos pelos dois ciclos – 2.º CEB e 3.º CEB;
- os professores com outras licenciaturas lecionam, na sua totalidade, no 2.º CEB;
- dos docentes inquiridos que lecionam no 2.º CEB, cerca de 13% não têm cursos específicos de Matemática;
- dos docentes inquiridos que lecionam no 3.º CEB/ES, cerca de 8% não possuem a licenciatura em Matemática.

**Tabela 8.** Formação Inicial dos Professores Constituintes da Amostra e o Respetivo Ciclo de Lecionação no Ano Letivo 2011/2012

Variáveis		Ano letivo 2011/2012				Total
		1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	2.º CEB e 3.º CEB	
Licenciatura	Ensino 1.ºCEB; Magistério; Outra PEB	9	0	0	0	9
	PEB Mat/CN	3	45	0	0	48
	Matemática (ensino de ou aplicada)	0	6	53	2	61
	Engenharia	0	3	5	0	8
	Farmácia ou Nutricionismo	0	7	0	0	7
	Economia ou Gestão	0	2	0	0	2
	Biologia ou Geologia	0	5	0	0	5
	Outras	0	2	0	0	2
Total		12	70	58	2	142

Os dados revelam uma menor diversidade de licenciaturas no grupo de docentes inquiridos que lecionam no 3.º CEB, registando 88% de professores licenciados em Matemática e os restantes em engenharia. Esta diversidade é mais visível nos professores que lecionam no 2.º CEB onde lecionam licenciados em algum ramo da Engenharia, Farmácia ou Nutricionismo, Economia ou Gestão, Biologia ou Ecologia e outras duas que não conseguimos decifrar no questionário.

É interessante o facto de haver mais professores licenciados em Ensino da Matemática ou Matemática Aplicada (61) do que com a licenciatura em PEB – Variante Matemática e Ciências da

<sup>29</sup> Doravante, excluiríamos a menção ES nos docentes do 3.º CEB/ES porque estes lecionam, na sua totalidade, no 3.º CEB.

Natureza (48), embora a nossa amostra seja constituída por mais professores do 2.º CEB (70) do que do 3.º CEB (60).

Dos docentes inquiridos, cerca de 97% lecionam há pelo menos três anos letivos e a diversidade de professores com formação inicial em áreas distintas da Matemática é superior nos professores que lecionam no 2.º CEB (25 professores) do que no 3.º CEB (7 professores).

### Conhecimento Didático e Curricular

Na segunda parte do nosso questionário, pretendíamos auscultar a opinião dos professores sobre a inclusão da temática *Simetrias e das Transformações Geométricas* no programa de Matemática do Ensino Básico, nomeadamente no que concerne ao 6.º ano de escolaridade, pelo facto de ser neste ano que, pela primeira vez, a abordagem se faz de um modo matematicamente mais aprofundado e menos intuitivo como é suposto acontecer no 1.º CEB<sup>30</sup>. Aqui, tentamos conhecer a forma como os professores se atualizaram cientificamente, quer na nova conceitualização de simetria quer na inclusão dos novos conteúdos no programa específico de cada ciclo de ensino e no que concerne às isometrias. Simultaneamente, objetivamos conhecer algumas práticas dos professores ao nível dos recursos utilizados em contexto de sala de aula, nomeadamente a utilização de ambientes de Geometria dinâmica e de materiais manipuláveis.

A primeira questão, deste grupo, pretendia, então, recolher a opinião dos professores relativamente à inclusão do tema Isometrias no programa de Matemática do 2.º CEB, mais especificamente no 6.º ano de escolaridade, independentemente do ciclo em que lecionavam. Como já referimos na revisão da literatura, alguns temas do currículo da Matemática que eram abordados somente no 3.º CEB começaram, neste programa de Matemática (2007), a ser abordados mesmo no 1.º CEB, ainda que de forma mais intuitiva, mas com carácter já mais aprofundado no 2.º CEB. No 3.º CEB, estes temas são revisitados e aprofundados assumindo um carácter mais formal, sendo, por isso, necessário que os professores do 3.º CEB conheçam as aprendizagens desenvolvidas no 2.º CEB, dado que serão por eles continuadas. Esta necessidade está plasmada no próprio programa de Matemática do Ensino Básico, onde Ponte et al (2007, p. 51) escrevem: “os alunos do 2.º ciclo continuam o estudo das transformações geométricas iniciado no 1.º ciclo. No 3.º ciclo, partindo do que já foi realizado, os alunos alargam e sistematizam este estudo, e aprofundam o conceito de translação associando-o a vectores”.

---

<sup>30</sup> No 3.º CEB, estes conteúdos são revisitados ao longo dos três anos de escolaridade com maior grau de formalização.

Assim, citando Ponte et al (2007), e referente à gestão curricular, os professores devem planificar

o trabalho a realizar com os seus alunos, devendo ainda ter em conta as finalidades do ensino da Matemática no ensino básico, os objectivos gerais definidos para este nível de escolaridade e aquilo que foram as aprendizagens dos alunos no ano ou ciclo anterior de um ciclo têm sempre de conhecer e dominar os conhecimentos lecionados no ciclo precedente. (p. 11)

Portanto, a necessidade de um professor de um determinado ciclo conhecer as aprendizagens previstas e realizadas no ciclo/ano anterior prende-se com a continuidade a dar às aprendizagens previstas para o ciclo em questão. Em consonância com o que acabamos de dizer consideramos pertinente saber a opinião dos professores sobre a abordagem daquela temática no 6.º ano de escolaridade, em primeiro lugar de um modo geral e, numa segunda análise, diferenciando por grupos de docência (ver Figura 49).

**Figura 49.** Enunciado da Questão 2.1 do Questionário

<p>2.1) Qual a sua opinião sobre a inclusão do tema Isometrias no NPMEB do 6º ano de escolaridade?</p> <p><input type="checkbox"/> Adequado e importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.</p> <p><input type="checkbox"/> Algo complexo para ser lecionado neste ano de escolaridade.</p> <p><input type="checkbox"/> Outra. Qual? _____.</p>
---

Tal como se pode constatar no Gráfico 3, 18 professores optaram por não responder<sup>31</sup> e dos restantes, 74 consideraram a exploração deste tema no 6.º ano de escolaridade *adequado e importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico*, enquanto 48 assinalaram este conteúdo *algo complexo para ser lecionado neste ano de escolaridade*.

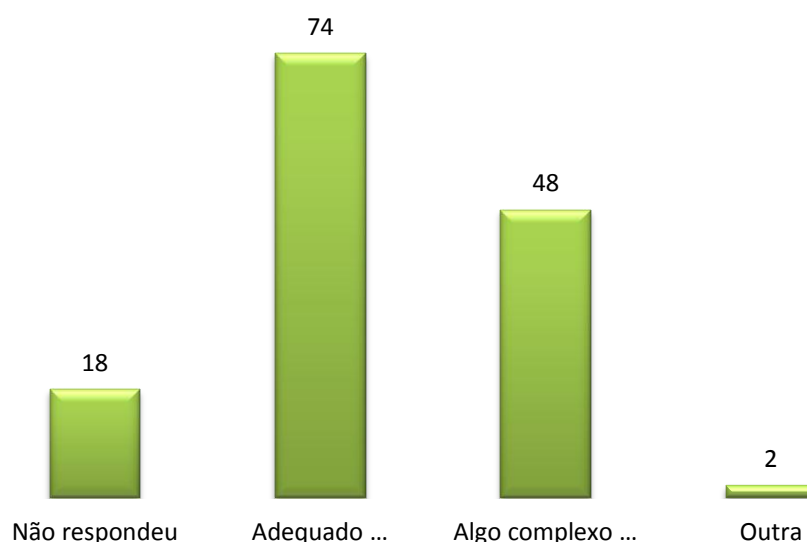
Entretanto as opções dos dois docentes que responderam *outras* foram:

- “apesar de adequado oferece algumas dúvidas” – docente que leciona no 3.º CEB;
- “importante mas algo complexo” – docente que leciona no 2.º CEB.

Aqui, mais uma vez, registamos uma visão positiva relativamente às alterações curriculares ao nível dos conteúdos em estudo pela maioria dos professores, tal como aconteceu em episódios semelhantes relacionados com temas da Geometria, em Portugal<sup>32</sup> e em outros países. Numa primeira fase, este sentimento poderá constituir um facto de motivação para o ensino destes conteúdos.

<sup>31</sup> Dois destes 18 professores responderam *Outra. Qual? “Não lecciono o 6.º ano”*, tendo como tal, sido registados como não resposta/sem opinião.

<sup>32</sup> Ver o subcapítulo *O Conhecimento do Conteúdo: Contributos e Interpretações para a Mesma Discussão*.

**Gráfico 3.** Respostas à Questão 2.1 do Questionário

Quisemos saber se haverá diferenças de opinião nos professores que lecionam diferentes ciclos de ensino. Iniciámos esta análise com os professores que não responderam a esta questão.

**Tabela 9.** Número de Professores a Lecionar nos Diferentes Ciclos de Ensino no Ano Letivo 2011/2012 que não responderam à questão 2.1.

Ciclo de lecionação	Frequência	%
1.º CEB	3	16,6
2.º CEB	1	5,6
3.º CEB	15	82,8
Total	18	100,0

Como podemos constatar pelos dados registados na Tabela 9, a grande maioria dos professores que não respondeu a esta questão leciona no 3.º CEB e apenas três lecionam no 1.º CEB. Há, ainda, um docente do 2.º CEB que não emitiu a sua opinião sobre este assunto.

Relativamente aos professores que responderam a esta questão, a Tabela 10 ilustra a relação entre as respostas dadas à questão 2.1 (ver Figura 46) e o ciclo em que lecionam.

Apesar de cerca de 40% destes professores considerarem o tema algo complexo para ser lecionado neste ano de escolaridade, a maior parte ( $\approx 60\%$ ) considera este conteúdo curricular adequado e importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico, seguindo as correntes protagonizadas por vários movimentos em defesa do ensino das simetrias e das transformações geométricas no ensino básico.

**Tabela 10.** Opinião dos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino sobre o Tema da Simetrias e das Isometrias no PMEB (2007)

Variáveis		Questão 2.1		Total
		Adequado ....	Algo complexo ...	
Ciclos de Ensino em 2011/2012	1.º CEB	6	3	9
	2.º CEB	40	29	69
	3.º CEB	29	17	46
Total		75	49	124

Considerando apenas os professores dos 2.º e 3.º CEB, fomos verificar se havia diferenças significativas entre a opinião dos professores destes dois ciclos de ensino relativamente à inclusão do tema Isometrias no programa de Matemática do 6.º ano de escolaridade, isto é, se havia independência entre as variáveis ciclo de ensino e tipo de resposta à questão 2.1 do questionário.

Testámos, com o teste do Qui-quadrado de Pearson, a independência destas variáveis (ver Tabela 11), tendo obtido, como se pode ver na Tabela 12, um valor de  $\chi = 15,473$  e um valor de prova,  $p = 0,000$ . Dado que a hipótese nula era que estas variáveis eram independentes, temos de rejeitá-la, concluindo pela sua não independência e afirmando, com 95% de segurança ( $\alpha = 5\%$ ), que a opinião dos professores sobre inclusão do tema Isometrias no programa de Matemática do 6.º ano de escolaridade depende do ciclo em que ensinam.

**Tabela 11.** Opinião dos Professores do 2.º e 3.º CEB sobre a Inclusão das Simetrias e das Isometrias no PMEB (2007)

Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
<b>Questão 2.1</b> Não respondeu	n		1	14	15
	%		1,4%	23,3%	11,5%
Adequado ....	n		40	29	69
	%		57,1%	48,3%	53,1%
Algo complexo ...	n		29	17	46
	%		41,4%	28,3%	35,4%
Total	N		70	60	130
	%		100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 5% com valor-p = 0,000.

**Tabela 12.** Opinião dos Professores do 2.º e 3.º CEB sobre a Inclusão das Simetrias e das Isometrias no PMEB (2007)

**Chi-Square Tests**

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	15,473 <sup>a</sup>	2	,000
Likelihood Ratio	17,605	2	,000
Linear-by-Linear Association	9,524	1	,002
N of Valid Cases	130		

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6,92.

Assim, podemos dizer que a maior parte dos professores do 2.º e 3.º CEB consideram este tema adequado e importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico mas há mais professores do 2.º CEB a terem opinião sobre o assunto e a considerarem o conteúdo adequado, mas complexo, para ser ensinado neste ciclo de ensino do que professores do 3.º CEB.

Analísámos também se a opinião dos professores que responderam à questão 2.1 dependia da sua licenciatura de base: licenciados em Matemática, em PEB – Mat/CN e outras licenciaturas. Estes dados estão compilados na Tabela 13.

**Tabela 13.** Respostas à Questão 2.1 pelos Professores com as Diferentes Licenciaturas

Variáveis*	Licenciatura (áreas)			Total		
	Outras Licenciaturas	PEB Mat/CN	Matemática (ensino de ou aplicada)			
Respostas à questão 2.1	Adequado ....	N	17	25	27	69
		%	73,9%	56,8%	56,3%	60,0%
	Algo complexo ...	N	6	19	21	46
		%	26,1%	43,2%	43,8%	40,0%
Total		N	23	44	48	115
		%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 5% com valor-p = 0,313.

Aplicámos o teste do Qui-Quadrado às variáveis licenciatura de base dos professores e tipo de resposta às respostas à questão 2.1 e obtivemos um valor de prova,  $p = 0,313$ . Sendo este valor superior a 0,05, não podemos rejeitar a hipótese nula de independência das variáveis, ou seja, não

podemos afirmar existir uma relação de dependência entre as duas variáveis, isto é, a licenciatura de base dos professores não tem influência nas respostas à questão 2.1.

Em suma, a resposta à questão 2.1 é influenciada, não pela área da formação inicial, mas pelo ciclo de ensino onde estes professores lecionam.

### Formas de atualização científica

Esta segunda questão da parte II do inquérito é, para o nosso estudo, extremamente importante por ir ao encontro do tema principal desta investigação, ou seja, conhecer a fonte de atualização científica escolhida pelos professores para fazer face às novas concetualizações e conteúdos matemáticos presentes no PMEB (2007). Aqui chegados, pretendíamos não apenas conhecer a forma como essa atualização científica se processou mas, também, os meios que estão acessíveis e foram utilizados por estes docentes.

A análise da questão 2.2 é feita em duas fases. Numa primeira fase, fazemos uma análise descritiva das respostas dadas pelos inquiridos e, numa segunda fase, verificamos com testes estatísticos se a escolha das fontes de atualização depende do ciclo de lecionação (2.º ou 3.º CEB).

Esta questão 2.2 (ver Figura 50), por permitir a seleção de mais que uma opção, regista um total de respostas superior ao total de inquéritos respondidos.

**Figura 50.** Enunciado da Questão 2.2 do Questionário

2.2) Como adquiriu os seus conhecimentos sobre o tema isometrias? (Pode selecionar mais do que uma opção)		
<input type="checkbox"/>	Possuo os conhecimentos adquiridos na formação inicial.	
<input type="checkbox"/>	Li sobre o tema nos manuais escolares.	<input type="checkbox"/> Li sobre o tema na Internet.
<input type="checkbox"/>	Li sobre o tema em outras referências bibliográficas. Exemplo: _____	
<input type="checkbox"/>	Frequentei uma ou mais ações de formação, creditadas ou não, sobre o tema (tempo somente dedicado às isometrias):	
<input type="checkbox"/>	<3h (horas)	<input type="checkbox"/> ≥ 3h e ≤ 10h
<input type="checkbox"/>	De outra forma. Qual? _____	

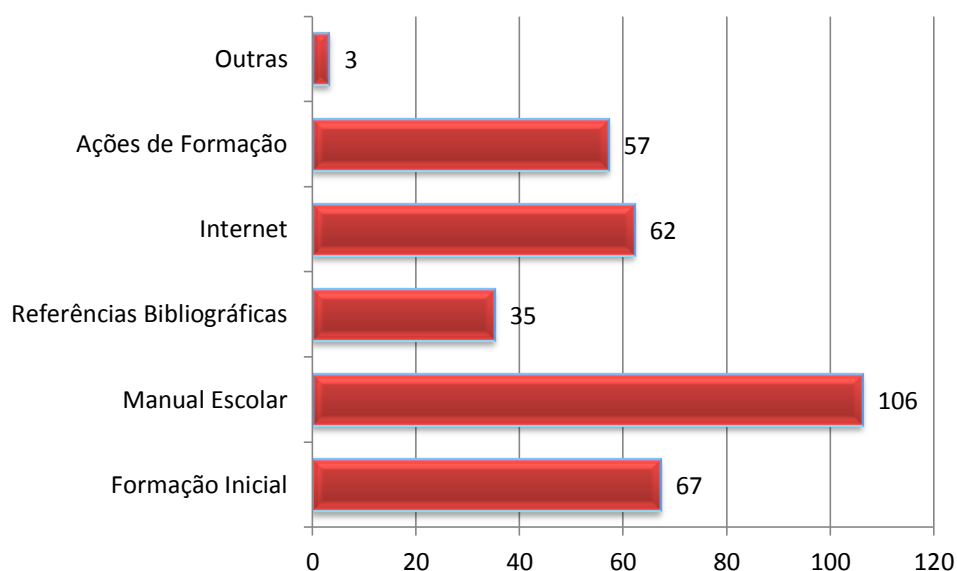
O Gráfico 4 resume as respostas à questão 2.2.

Neste gráfico, podemos verificar que a fonte mais usada pelos professores, indo ao encontro dos estudos referidos anteriormente<sup>33</sup>, foi o manual escolar, com 106 escolhas num total de 142 professores inquiridos, o que corresponde a cerca de 75% destes. Price e Ball (1997) já assinalavam que as questões colocadas pelos professores em sala de aula provinham dos textos de apoio ou dos

<sup>33</sup> Ver subcapítulos Os Trabalhos de Shulman em Outras Investigações e Algumas Particularidades desta Nova Abordagem das Transformações Geométricas.

manuais escolares, o que originava um tipo de respostas pouco alargadas sob o ponto de vista concetual. Nas aulas por nós observadas, o manual escolar foi, também, o recurso privilegiado, quer nas atividades propostas quer nas questões colocadas aos alunos. Assim, também para a atualização científica, que já vimos ser insuficiente sob o ponto de vista do conhecimento aprofundado do conteúdo, o manual escolar é fonte privilegiada para os professores.

**Gráfico 4.** Respostas à Questão 2.2 do Questionário



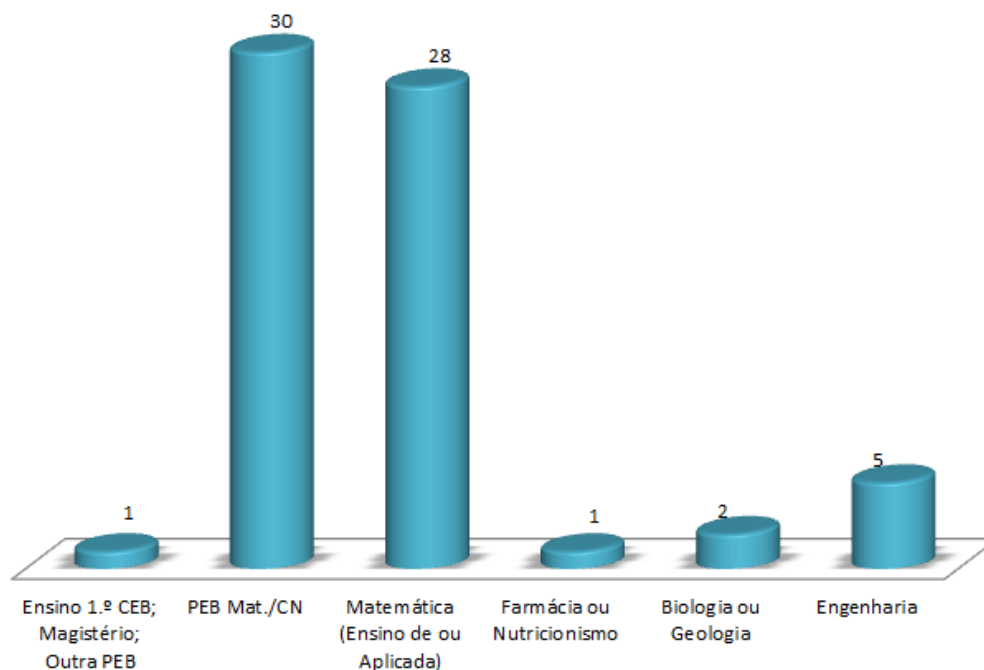
Como segunda escolha, estão os conhecimentos adquiridos na Formação Inicial, referidos por 47% dos professores inquiridos. Para além desta escolha, estes 67 professores mencionaram outras fontes, dado que não houve um único professor que tenha respondido apenas a *formação inicial*. Pareceu-nos interessante tentar perceber o tipo de formação base dos professores que selecionaram esta opção (ver Gráfico 5), pelo facto de algumas daquelas licenciaturas poderem não abordar estes temas da área da Geometria e, ainda que o façam, possuírem os constrangimentos mencionados por Veloso (2012)<sup>34</sup>. Além desta problemática, estes professores, enquanto alunos do Ensino Básico e Secundário, não abordaram o conceito de simetria como agora se pretende explorar, e, certamente, não aprenderam a reflexão deslizante, os frisos ou as rosáceas.

Convém referir que os 2 professores licenciados em Economia ou Gestão não referiram a formação inicial e, entre os 9 professores do Ensino 1.º CEB, de outra PEB ou do Magistério, verifica-se que apenas um faz essa referência. Relativamente aos licenciados em Biologia, Geologia, Farmácia

<sup>34</sup> Ver subcapítulo *Algumas Particularidades desta Nova Abordagem das Transformações Geométricas*.

ou Nutrição, constata-se que essa referência também é feita por uma minoria (3/12), mas os de Engenharia referiram esta opção em 5 dos 8 casos.

**Gráfico 5.** Número de Professores, nas Diferentes Licenciaturas, que Selecionaram Formação Inicial na Questão 2.2 do Questionário



Em valores percentuais, os professores do curso de PEB – Variante Matemática e Ciências da Natureza e os licenciados em Matemática apresentaram valores muito próximos, cerca de 43% e 47%, respetivamente, o que não deixa de ser estranho dada uma suposta maior abrangência dos temas em causa nos conteúdos dos cursos de Matemática em relação aos cursos de PEB.

Agrupando os professores que lecionam no 2.º CEB ou 3.º CEB no ano letivo 2011/2012 em três grupos, consoante as suas licenciaturas (PEB – Variante Matemática e Ciências da Natureza, Matemática (Ensino de ou Aplicada) e outras licenciaturas), obtêm-se os números apresentados na Tabela 14.

A aplicação do teste do Qui-Quadrado às variáveis licenciatura e seleção da formação inicial na questão 2.2 permite concluir, com 95% de certeza, que existe uma relação de dependência entre estas variáveis. O valor-p obtido é inferior a 0,05 ( $p = 0,033$ ), pelo que podemos afirmar que há diferenças significativas entre os grupos referidos anteriormente e que merecem ser realçados. Assim, especificando a aplicação do teste de Fisher, às mesmas variáveis, mas reduzindo os grupos de licenciaturas de forma a poder compará-las duas a duas, obtivemos os dados na Tabela 15.

**Tabela 14.** Seleção de *Formação Inicial* na Questão 2.2 pelos Professores com as Diferentes Licenciaturas

Variáveis*		Licenciatura			Total
		Outras Licenciaturas	PEB Mat/CN	Matemática (ensino de ou aplicada)	
Formação Inicial na Questão 2.2	Não selecionou	n 16	16	33	65
		% 66,7%	35,6%	54,1%	50,0%
	Sim	n 8	29	28	65
		% 33,3%	64,4%	45,9%	50,0%
Total		n 24	45	61	130
		% 100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicados os testes de significâncias a estas variáveis com nível de significância de 0,05.

**Tabela 15.** Seleção da *Formação Inicial* na Questão 2.2 pelos Professores com as Diferentes Licenciaturas agrupadas

Variáveis*	Formação Inicial na Questão 2.2				Valor-p
	Não selecionou		Sim		
	N	%	N	%	
<b>Licenciaturas O + P</b>					<b>0,022<sup>a</sup></b>
Outras Licenciaturas (O)	16	66,7%	8	33,3%	
PEB – Mat/CN (P)	16	35,6%	29	64,4%	
<b>Licenciaturas O + M</b>					<b>0,337<sup>a</sup></b>
Outras Licenciaturas (O)	16	66,7%	8	33,3%	
Matemática (ensino de ou aplicada) (M)	33	54,1%	28	45,9%	
<b>Licenciaturas P + M</b>					<b>0,076<sup>a</sup></b>
PEB – Mat/CN (P)	16	35,6%	29	64,4%	
Matemática (ensino de ou aplicada) (M)	33	54,1%	28	45,9%	

\* Aplicados os testes de significância a estas variáveis com nível de significância de 0,05.

<sup>a</sup> Aplicado o teste exato de Fisher.

Os valores-p obtidos pela aplicação do teste de Fisher (ver Tabela 15) permitem assinalar diferenças significativas entre os professores com *outras licenciaturas* e os professores com a licenciatura em PEB – Mat/CN na seleção da *formação inicial* na questão da atualização científica ( $p = 0,022$ ). Assim, é possível afirmar, com 95% de certeza, que há uma percentagem significativamente

maior de professores com *outras licenciaturas* a não terem selecionado esta opção ( $\approx 66,7\%$ ), do que professores com licenciatura em PEB – Mat/CN ( $\approx 35,6\%$ ).

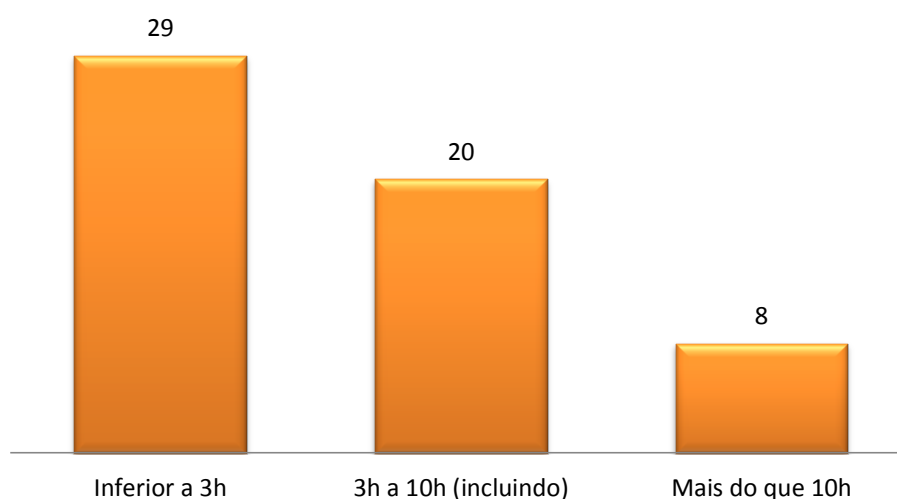
Em relação aos outros grupos, pelos valores-p obtidos, não podemos concluir que as diferenças são significativas e, conseqüentemente, que o tipo de licenciatura (O e M ; P e M) influencia a seleção da formação inicial em matéria de atualização científica.

Os professores que referiram o uso da Internet para este efeito representam cerca de 44% dos inquiridos. Os 57 docentes que frequentaram ações de formação contínua sobre este tema tinham de indicar a que intervalo de valores pertencia a duração da mesma:

< 3h (horas) ;  $\geq 3h$  e  $\geq 10h$  ; > 10h

As respostas registadas estão apresentadas no Gráfico 6.

**Gráfico 6.** Número de Horas de Formação Contínua na Temática Considerada

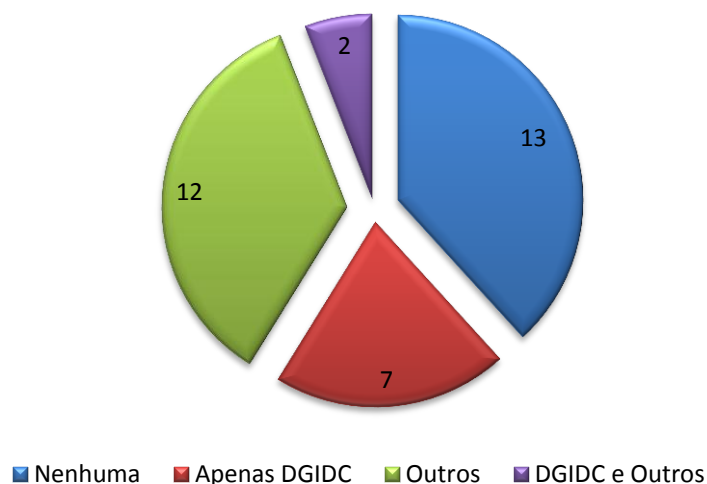


Nestas ações de formação, podiam ser consideradas, por exemplo, as horas das reuniões do Plano da Matemática dedicadas a este tema, pelo que as ações referidas com menos de 10 horas podem ter sido obtidas através destas reuniões ou outros encontros como palestras, sessões práticas e afins, desde que relacionadas com as simetrias e as isometrias. Desta forma, há apenas 8 professores que referiram a frequência de ações de formação com mais de 10 horas.

O Gráfico 6 permite-nos também concluir que, dos 142 professores que responderam ao questionário, 85 não frequentaram qualquer ação de formação sobre este tema e, por isso, desenvolveram uma atualização de forma autónoma ou autodidaticamente.

A opção das referências bibliográficas foi referida por 34 professores e, nestas, os mais mencionados foram os materiais fornecidos pela Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC) – cerca de 59% destes profissionais (ver Gráfico 7).

**Gráfico 7.** Referências Bibliográficas Referidas pelos Professores



De notar que 13 docentes indicaram que fizeram a leitura de documentos mas não mencionaram uma única referência bibliográfica. Houve 2 professores que, para além dos materiais produzidos pela DGIDC, referiram outras fontes bibliográficas, mas 12 professores mencionaram apenas estas últimas, dando como exemplos: *disciplina de mestrado, outros livros, artigos publicados sobre o tema, teses de mestrado e livros da FCUP* (Faculdade de Ciências da Universidade do Porto), *artigos e livros*, sem citarem o nome das obras ou dos seus autores. Aqueles que mencionaram algum nome, ainda que fosse de grupos de trabalho, referiram como exemplos a *Matemática recreativa*, as revistas da APM e da Sociedade de Professores de Matemática, brochuras do *Atractor*, as Normas do NCTM, o livro *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*, de Pedro Palhares (4 professores), Eduardo Veloso<sup>35</sup> (2 professores) e a obra da Universidade Aberta intitulada *Transformações Geométricas* (1 professor).

Em relação à possibilidade – *outras fontes* – para além das que constavam para opção, os professores mencionaram ainda:

- “Diálogo com outros colegas”;
- “Tive conhecimento através de apontamentos de uma colega”.

<sup>35</sup> Sem referência à obra.

Tentámos verificar se os docentes do 2.º CEB apresentam diferenças significativas relativamente aos do 3.º CEB, na seleção de algumas fontes de atualização científica (ver Tabela 16). Aplicámos então o teste do Qui-Quadrado ou, no caso de este não poder ser utilizado, o teste de Fisher, se o número de categorias das variáveis cruzadas fosse 2x2, para tentar perceber a existência de alguma relação de dependência entre o ciclo de lecionação e cada uma das fontes mencionadas na questão 2.1.

**Tabela 16.** Fontes de Atualização Científica Referidas pelos Professores do 2.º e 3.º CEB e Respetivos Valor-p dos Testes de Significância Aplicados

Variáveis*	Ciclo de Lecionação (Ano Letivo 2011/2012)				Valor-p
	2.º CEB		3.º CEB		
	N	%	N	%	
<b>Formação Inicial</b>					0,860 <sup>a</sup>
Não selecionou	36	51,4%	29	48,3%	
Sim	34	48,6%	31	51,7%	
<b>Manuais Escolares</b>					0,097 <sup>a</sup>
Não selecionou	12	17,1%	18	30,0%	
Sim	58	82,9%	42	70,0%	
<b>Referências Bibliográficas</b>					0,417 <sup>a</sup>
Não selecionou	55	78,6%	43	71,7%	
Sim	15	21,4%	17	28,3%	
<b>Internet</b>					0,479 <sup>a</sup>
Não selecionou	37	52,9%	36	60,0%	
Sim	33	47,1%	24	40,0%	
<b>Ações de Formação</b>					0,033 <sup>a</sup>
Não selecionou	36	51,4%	42	70,0%	
Sim	34	48,6%	18	30,0%	
<b>Outras Fontes</b>					0,499 <sup>a</sup>
Não selecionou	68	97,1%	60	100,0%	
Sim	2	2,9%	0	0%	

\* Aplicados os testes de significância a estas variáveis com nível de significância de 0,05.

<sup>a</sup> Aplicado o teste exato de Fisher.

Observando os valores-p obtidos, conseguimos perceber a existência de uma relação de dependência entre o ciclo de lecionação e a procura por ações de formação no tema das isometrias, verificando-se diferenças significativas entre estes grupos ( $p = 0,033$ ). Assim, podemos afirmar, com 95% de certeza, que os professores de ambos os ciclos, na sua maioria, não frequentaram ações de formação na temática em análise (51,4% para os professores do 2.º CEB e 70% para os professores do 3.º CEB). Contudo, cerca de metade dos professores do 2.º CEB frequentou ações de formação com um mínimo de 3 horas enquanto esta proporção no 3.º CEB é claramente inferior (30%). Esta é a diferença mais significativa, ou seja, os professores do 2.º CEB, talvez por sentirem maior necessidade desta fonte de atualização, a procurassem em maior proporção relativamente aos professores do 3.º CEB.

No que concerne às restantes fontes de atualização, não podemos afirmar a existência de uma relação de dependência entre o ciclo de lecionação e sua respetiva seleção: formação inicial, manuais escolares, referências bibliográficas, Internet e outras fontes. Esta afirmação provém dos valores-p obtidos que, sendo superiores a 0,05, não são estatisticamente significativos. Mais especificamente, a relação entre a seleção da formação inicial por estes professores apresentou um valor-p de 0,860; nos manuais escolares um valor-p de 0,097; nas referências bibliográficas um valor-p de 0,417; na Internet um valor-p de 0,479; nas outras fontes um valor-p de 0,499.

### Ambientes de geometria dinâmica

Tal como referimos no início desta secção, as duas últimas questões da parte II do questionário dizem respeito à utilização de materiais manipuláveis e AGD, também mencionados nas opções metodológicas do PMEB (2007), por serem considerados ferramentas de apoio ao processo de ensino e aprendizagem destes conteúdos curriculares.

Assim, através da questão 2.3 (ver Figura 51), tentávamos perceber a importância que os professores atribuíam à utilização de ambientes de geometria dinâmica em contexto de aula e se já os haviam utilizado.

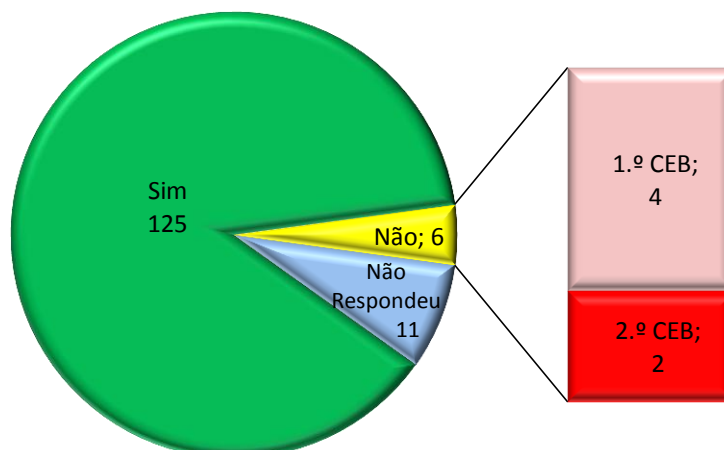
**Figura 51.** Enunciado da Questão 2.3 do Questionário

2.3) Acha relevante a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), por exemplo o Geogebra, em contexto de sala de aula? <input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não	Já usou? <input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não
---	--

Vamos analisar separadamente as duas partes das respostas à pergunta para que a interpretação seja o mais clara possível. Assim, em relação à primeira parte, as respostas estão

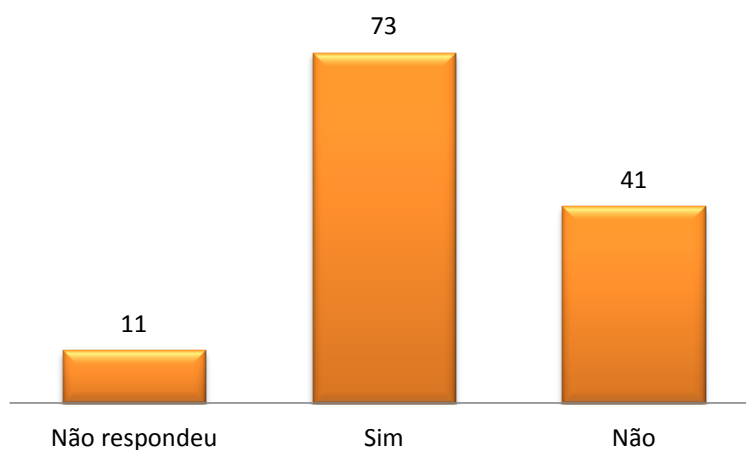
representadas no Gráfico 8. Neste gráfico, podemos observar que 125 docentes reconhecem a importância destes ambientes para o ensino da Geometria, representando cerca de 88% dos inquiridos. Em relação aos 6 professores que não reconhecem vantagens no uso de AGD, é interessante verificar que 4 lecionam no 1.º CEB e 2 no 2.º CEB.

**Gráfico 8.** Gráfico das Respostas à Primeira Parte da Questão 2.3 do Questionário



Relativamente às respostas relativas à segunda pergunta formulada em 2.3, ou seja, se já usaram um destes programas em contexto de sala de aula, considerámos apenas os 125 professores que responderam afirmativamente à primeira pergunta, analisando assim as respetivas respostas (ver Gráfico 9).

**Gráfico 9.** Respostas à Segunda Parte da Questão 2.3 dos Professores que Responderam Afirmativamente à Primeira Parte desta Questão



Na análise do gráfico, verificamos que a maior parte dos professores inquiridos (73 que correspondem a 58,4%) que consideravam importante o uso deste recurso na sala de aula, de facto, o haviam utilizado.

Analisando apenas os professores do 2.º e 3.º CEB, aplicamos os testes de Qui-Quadrado ou de Fisher a diversos pares de variáveis: ciclo de leção e a importância atribuída a AGD; ciclo de leção e o uso de AGD por professores que lhe reconhecem benefícios; ciclo de leção e o uso de AGD por professores que não lhe reconhecem benefícios; ciclo de leção e o uso de AGD. Na análise dos valores-p respetivos, obtivemos, em apenas um caso, um valor-p que indica, com um grau de certeza de 95%, uma relação de dependência entre duas variáveis: o ciclo de leção e o uso de AGD na sala de aula. A Tabela 17 mostra as frequências absolutas e relativas referentes ao cruzamento destas duas variáveis.

**Tabela 17.** Resposta à Segunda Parte da Questão 2.3 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Ciclo de leção		Total
			2011/2012		
			2.º CEB	3.º CEB	
Já usou AGD?	Sim	n	30	43	73
		%	46,2%	81,1%	61,9%
	Não	n	35	10	45
		%	53,8%	18,9%	38,1%
Total		n	65	53	118
		%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste de significância (teste exato de Fisher) a estas variáveis com nível de significância de 0,05.

Assim, podemos então afirmar, com um grau de confiança de 95%, que a utilização destes programas de geometria dinâmica depende do ciclo em que o professor leciona ( $p = 0,000$ ) e que essa utilização é feita, essencialmente, por professores do 3.º CEB. Contudo, na tentativa de procurar estudar uma possível relação de dependência entre o ciclo de leção e a importância dada a estes recursos computacionais dinâmicos, o teste do Qui-quadrado originou um valor-p superior a 0,05 ( $p = 0,499$ ). Em suma, podemos dizer que as diferenças de opinião relativamente à importância de AGD não é significativamente diferente entre os professores do 2.º e 3.º CEB, mas que a sua utilização é feita, maioritariamente, por docentes do 3.º CEB.

Na tentativa de analisar as competências no uso destes programas perguntava-se, na questão 2.4 (ver Figura 52) do questionário, para o docente avaliar a sua própria destreza no uso de algum programa de geometria dinâmica. Este facto poderia estar relacionado com a sua não utilização em

contexto de sala de aula uma vez que, na generalidade das escolas, há boas condições materiais e um fácil acesso para a sua utilização. Os dados recolhidos estão apresentados no Gráfico 10.

**Figura 52.** Enunciado da Questão 2.4 do Questionário

2.4) Como avalia a sua destreza na manipulação de AGD?

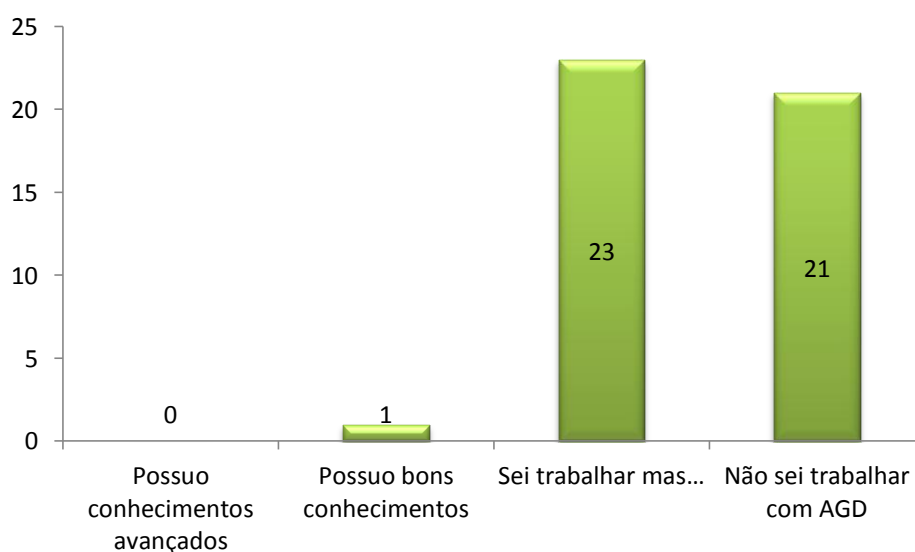
Não sei trabalhar com AGD.

Sei trabalhar, mas somente com as ferramentas pré-definidas na barra de ferramentas.

Possuo bons conhecimentos (ex: utilização dos eixos coordenados, da malha quadriculada ou isométricas, da janela algébrica, propriedades dos objetos, etc.).

Possuo conhecimentos avançados (ex: criação de ferramentas próprias).

**Gráfico 10.** Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores que **nunca** Utilizaram este Recurso em Sala de Aula



Nesta matéria, verificamos que aproximadamente 47% dos docentes não sabem trabalhar com estes programas apesar de lhes reconhecerem benefícios para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. A maioria (51%) destes professores sabe trabalhar com AGD mas apenas com as ferramentas definidas no menu principal, destrezas estas que poderão não ser suficientes para potencializar o seu uso. Numa das aulas por nós observadas, o docente utilizou o *Geogebra* mas a dificuldade na sua manipulação dificultou e comprometeu verdadeiramente os objetivos propostos na exploração da tarefa proposta.

A utilização destes recursos, em sala de aula, pelos professores dos diferentes ciclos de ensino é apresentada na Tabela 18. Nesta tabela verificamos que apenas um professor do 1.º CEB utilizou estes programas e que 30 professores do 2.º CEB e 43 do 3.º CEB já os utilizaram. Note-se que estes

números representam cerca 43% e 72%, respetivamente, da totalidade dos professores de cada um destes ciclos.

**Tabela 18.** Número de Professores que já Utilizaram AGD na Sala de Aula

Ciclo de Lecionação	Frequência	%
1.º CEB	1	1,4
2.º CEB	30	40,5
3.º CEB	43	58,1
Total	74	100,0

No que concerne à destreza na manipulação destes ambientes, analisámos a distribuição das respostas por ciclo de ensino (ver Tabela 19).

**Tabela 19.** Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

Variáveis		Destreza na manipulação de AGD					Total
		Não respondeu	Não sei trabalhar com AGD	Sei trabalhar, mas ....	Possuo bons conhecimentos ...	Possuo conhecimentos avançados ...	
Ciclo de lecionação 2011_2012	1.º CEB	1	8	3	0	0	12
	2.º CEB	0	19	39	11	1	70
	3.º CEB	2	7	26	25	0	60
	Total	3	34	68	36	1	142

A percentagem de professores do 3.º CEB ( $\approx 42\%$ ) é bastante superior à verificada relativamente aos professores do 2.º CEB ( $\approx 16\%$ ) no que diz respeito ao número de professores com bons conhecimentos no uso destes programas de Geometria Dinâmica.

Para comparar os professores dos 2.º e 3.º CEB que responderam a que sabiam trabalhar com AGD, em relação à sua destreza com AGD, agrupámos as respostas à questão 2.4 em apenas dois grupos: Não sei trabalhar com AGD e Sei trabalhar (ver Tabela 20). Neste último incluímos o docente (apenas um) com bons conhecimentos de manipulação do *Geogebra*. Aplicámos o teste do Qui-quadrado para verificar se as variáveis ciclo de lecionação e as respostas à questão 2.4 eram independentes e obtivemos um  $p$ -valor = 0,035 ( $p < 0,05$ ) pelo que concluímos a existência de diferenças significativas nas respostas dadas pelos professores do 2.º e 3.º CEB. Isto é, podemos afirmar, com 95% de confiança, que os professores do 3.º CEB sabem trabalhar melhor com AGD do que os do 2.º CEB.

**Tabela 20.** Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
Destreza na manipulação de AGD (agrupada)	Não sei trabalhar com AGD	N	19	7	26
		%	27,1%	12,1%	20,3%
	Sei trabalhar	n	51	51	102
		%	72,9%	87,9%	79,7%
Total			70	58	128
			%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

Neste ponto, considerámos interessante analisar se estas competências associadas à capacidade de manipulação destes programas de geometria dinâmica influenciam o seu uso em contexto de sala de aula. Mais uma vez, ignorando as não respostas e tendo em conta somente os professores dos 2.º e 3.º CEB, consideramos pertinente estudar a existência ou não de uma relação de dependência entre as respostas à questão 2.4 (destreza no uso de AGD) e as respostas à segunda parte da questão 2.3 (já usou?) (ver Tabela 21). Assim, aplicando o teste do Qui-quadrado, verificamos, dado que  $p = 0,000$ , que esta relação de dependência existe e que, de facto, são os professores que dizem que sabem trabalhar com AGD que mais utilizaram esta ferramenta em contexto de sala de aula.

**Tabela 21.** Destreza na Manipulação de AGD pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Já utilizou AGD em contexto de sala de aula?		Total
			Sim	Não	
Destreza na manipulação de AGD (2 grupos)	Não sei trabalhar com AGD	n	0	21	21
		%	0%	46,7%	17,8%
	Sei trabalhar	n	73	24	97
		%	100,0%	53,3%	82,2%
Total			73	45	118
			%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

Podemos então dizer, pelo valor-p obtido no teste de significância aplicado, que o uso destes ambientes em contexto de sala de aula está dependente da destreza que o professor tem na sua

manipulação. No entanto, há uma percentagem significativa de professores ( $\approx 53,3\%$ ) que, apesar de saberem trabalhar com estes recursos, nunca os utilizaram na sala de aula.

### **Materiais manipuláveis**

A questão colocada no questionário, de carácter aberto, referente aos materiais manipuláveis, surgiu pelo facto de se destacar o seu uso para a exploração de determinados temas (Herrera & Owens, 2001; Pires, 1995; Vale, 1999; Veloso, 2008) entre os quais as simetrias e as transformações geométricas (Veloso, 2012). Nesta questão (ver Figura 53), aos professores era solicitada a referência a dois materiais manipuláveis para a exploração das isometrias e a descrição de uma atividade, para cada um dos materiais, para perceber o uso dado a estes. Numa parte significativa dos questionários, a descrição das atividades foi muito vaga como iremos ver nas próximas páginas. O carácter aberto desta questão, também dificultou a análise e tratamento das respostas.

**Figura 53.** Questão 2.5 do Questionário

<p>2.5) No NPMEB, sugere-se a utilização de materiais manipuláveis, na exploração das isometrias. Indique dois materiais e, para cada um dos materiais, uma atividade que considere adequada para a exploração de isometrias:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Material 1: _____ . Atividade: _____ _____ .</li> <li>• Material 2: _____ . Atividade: _____ _____ .</li> </ul>
--

Nesta questão, procurávamos saber que materiais, para além dos manuais escolares e das fichas de trabalho, os professores usavam como apoio ao processo de ensino-aprendizagem deste tema.

As respostas à questão 2.5 foram variadas havendo alguns professores a referirem o *Geogebra* ou *AGD* ou ainda outros programas computacionais tais como a *Escola Virtual* ou o do *CD do Atractor*, que não consideramos um recurso manipulável.

Analisámos os diversos materiais apresentados por grupos de professores relativamente ao ciclo em que ensinam.

Os materiais manipuláveis sugeridos foram: os espelhos, Miras, Blocos Padrão, Geoplano, tesoura, cartolinas, acetatos, papel vegetal, material de desenho, papel, relógio, furadores, mosaicos e recortes de figuras (arte, pentágonos e fotografias). Uma parte destes materiais é mencionada no

PMEB<sup>36</sup> (2007) para a exploração da temática em causa nos três ciclos de ensino, nomeadamente o uso de figuras e imagens do quotidiano.

Na Tabela 22, que mostra as respostas dadas pelos professores dos três ciclos de ensino, evidenciamos essencialmente o número de materiais utilizados.

**Tabela 22.** Materiais Referidos pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Total
Nenhum material	5	17	32	54
1 material	2	10	7	19
2 materiais	5	28	11	44
3 materiais		9	2	11
1 material + Geogebra/AGD		4	7	11
1 material + escola virtual/atractor		2		2
Geogebra/AGD + "material manipulável"			1	1
Total	12	70	60	142

Conforme referimos anteriormente, o uso de materiais manipuláveis no 3.º CEB é mencionado no PMEB (2007), mas neste não constam exemplos dos que utilizar neste ciclo de ensino à exceção de imagens do quotidiano, ao contrário do que sucede em relação aos 1.º e 2.º CEB. Contudo, a nossa questão não se prendia com o facto de o professor fazer uso destes materiais, mas sim reconhecer a utilidade de alguns deles para a exploração e desenvolvimento desta temática. O ensino da Matemática no 3.º CEB assume um carácter mais formal do que nos ciclos de ensino anteriores, pelo que seria de esperar um menor uso de materiais manipuláveis.

Na Tabela 22, podemos verificar que não mencionaram qualquer material 32 professores do 3.º CEB (cerca de 53%), 17 do 2.º CEB (cerca de 24%) e 5 do 1.º CEB (aproximadamente 42%). A referência a dois ou mais materiais foram efetuadas por 37 professores do 2.º CEB ( $\approx 53\%$ ), 13 professores do 3.º CEB ( $\approx 22\%$ ) e 5 professores do 1.º CEB ( $\approx 42\%$ ).

A Tabela 23 mostra as respostas dadas pelos docentes dos 2.º e 3.º CEB agrupadas em *nenhum material*, *um material*, *dois materiais* e *três ou mais materiais*. Testando, através do Qui-quadrado, a independência das variáveis ciclo de ensino e número de materiais referidos pelos professores, obtivemos um  $p = 0,001$ , o que nos leva a rejeitar a hipótese nula de independência destas variáveis e a concluir que a referência a um número maior ou menor de materiais manipuláveis está dependente do ciclo de ensino em que os docentes lecionam e, que são os professores do 2.º CEB que mais materiais indicaram para o ensino e aprendizagem das simetrias e isometrias.

<sup>36</sup> Ver Parte II do Inquérito por Questionário do Capítulo 6.

**Tabela 23.** Materiais Referidos pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de lecionação 2011/2012		Total		
		2.º CEB	3.º CEB			
Referência aos materiais manipuláveis	Nenhum material	n	17	33	50	
		%	24,3%	55,0%	38,5%	
	1 Material	n	16	14	30	
		%	22,9%	23,3%	23,1%	
	2 Materiais	n	28	11	39	
		%	40,0%	18,3%	30,0%	
	3 Materiais ou mais	n	9	2	11	
		%	12,9%	3,3%	8,5%	
	Total		n	70	60	130
			%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

Vejamos agora quais foram os materiais manipuláveis mais referidos pelos professores. Na Tabela 24, encontra-se essa referência por ciclo de ensino dos professores que responderam à questão.

**Tabela 24.** Materiais Manipuláveis referidos pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	Total
Espelhos/mira	8	38	20	66
Acetato	1	9	9	20
Papel Vegetal	2	13	5	19
Material de desenho	0	1	4	5
Papel/cartolina	0	5	4	9
Geoplano	0	17	1	18
Blocos Padrão	0	2	0	2
Relógios; furadores; mosaicos	0	2	2	4
Imagens em papel	0	1	3	4
Total	11	88	48	147

Nesta tabela, podemos observar que os materiais mais referidos pelos professores inquiridos são os espelhos ou as miras (ou georefletores), para qualquer nível de ensino, representando cerca de 42% dos materiais propostos pelos professores do 2.º CEB, cerca de 33% pelos professores do 3.º CEB e 73% pelos professores do 1.º CEB. Para os professores do 2.º CEB, os materiais mais

referidos, a seguir à Mira e aos Espelhos, são o Geoplano ( $\approx 19\%$ ), o papel vegetal ( $\approx 15\%$ ) e o acetato ( $\approx 10\%$ ). Assim, constatamos que os materiais sugeridos por Veloso (2012) – acetatos – não ocupam o lugar de destaque que é atribuído aos espelhos e às Miras.

Os restantes materiais são referidos com menor expressão. Em relação ao 3.º CEB, o acetato é o segundo material mais referido com cerca de 19% das respostas seguido do papel vegetal, material de desenho e o uso de papel ou cartolina recolhendo todos, de forma individual, cerca de 9% das respostas. Desta tabela, outro dado, talvez previsível pelo carácter mais formal adotado neste nível de ensino e pelas abordagens previstas em outras temáticas da Geometria, era o uso dos materiais de desenho serem mais referidos pelos professores do 3.º CEB do que por qualquer outro ciclo de ensino.

No que concerne às atividades descritas, mencionaremos apenas algumas que nos parecem importantes realçar. Na descrição destas atividades fomos tendo a perceção de algumas situações associadas, ainda, à exploração desta temática no programa anterior, tais como a antiga conceitualização de simetria ou a ausência da referência à reflexão deslizante. Vejamos alguns exemplos:

- Espelho ou Mira: “descobrir (localizar) o eixo de simetria entre duas imagens; desenhar a imagem simétrica de uma outra desenhada previamente” ou “simetrias de reflexão, rotação, translação” ou ainda “desenhar a imagem simétrica de uma outra desenhada previamente”.
- Acetato: “visualização de uma rotação, reflexão e translação”.
- Geoplano: “isometrias (reflexões, rotações, translações)”.

As frases “descobrir (localizar) o eixo de simetria entre duas imagens; desenhar a imagem simétrica de uma outra desenhada previamente” e “desenhar a imagem simétrica de uma outra desenhada previamente” induzem uma conceção de simetria usada no programa antigo de Matemática. As restantes afirmações mencionam apenas as três isometrias, o que poderá indiciar que os seus autores deverão atribuir pouca importância à reflexão deslizante.

No que concerne às atividades propostas, referimos apenas os materiais mais mencionados:

- Espelhos: à exceção de 7 professores (1 do 1.º CEB e 6 do 3.º CEB) que não referiram uma única atividade, todos os professores referiram o uso dos espelhos ou das miras para o estudo da reflexão, propriedades da reflexão, das simetrias e rosáceas. Dois professores referiram o livro de espelhos para a construção de rosáceas o que vai ao encontro do que Veloso (2012) diz acerca deste material para explorar rosáceas: “é uma das configurações mais frequentes nas actividades com espelhos dos alunos dos primeiros anos” (p. 85).

- Mira: houve 23 propostas unicamente para a Mira, das quais 3 (1 professor de cada ciclo de ensino) não mencionaram uma única atividade. As várias possibilidades referidas para a exploração deste material encontram-se na tabela seguinte (ver Tabela 25):

**Tabela 25.** Propostas de Temas/Atividades para Explorar com as Miras pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB
Reflexões	2	9	1
Simetrias e reflexões	0	1	1
Isometrias	1	0	1
Diferentes simetrias	0	2	1
Completar figuras simétricas	0	1	0

A Mira é um instrumento para ser usado, preferencialmente, no estudo das reflexões ou das simetrias de reflexão. O estudo das restantes isometrias requer cuidados especiais na utilização da Mira porque esta muda a orientação das imagens o que não acontece com a rotação nem com a translação. Nestes casos, o uso de outros materiais, tais como os acetatos, beneficiam a visualização e o pensamento geométrico por se tornarem mais simples de manipular (Veloso, 2012). Assim, ficamos com algumas dúvidas relativamente à forma como os professores utilizariam a Mira quando estes referiram a sua utilização para o estudo das isometrias ou das diferentes simetrias não particularizando a reflexão. Em relação ao *completar figuras simétricas*, há duas hipóteses de interpretação da atividade referida:

- o professor está a pensar na antiga conceitualização de simetria e utiliza a Mira para as simetrias de reflexão;
- este caso pode ser incluído nos descritos anteriormente no que concerne às isometrias.

É interessante constatar que estes resultados confirmam que, “na medida em que se avança no nível de escolaridade, o ensino da Matemática vai abandonando a visualização e as actividades envolvendo a percepção visual e as técnicas algébricas vão alastrando o seu domínio” (Veloso, 1998, p. 191), o que não deixa de ser “uma tendência errada” (p. 191). A tendência para a algebrização da geometria continua a prevalecer no ensino desta área da Matemática, sendo visível nas atividades propostas nos manuais escolares do 3.º CEB.

Relativamente aos restantes materiais, não existe nenhuma informação que consideramos relevante estar aqui a descrever. Todas as atividades referidas eram passíveis de serem realizadas usando os materiais indicados.

Em suma, e contrariamente ao que acontece com os professores que lecionam no 2.º CEB, mais de metade dos professores do 3.º CEB não referiram um único material manipulável para o ensino das isometrias, mas são os que mais utilizam AGD pois são, também, os que possuem melhor destreza na manipulação destes programas.

Assim, parece podermos concluir que a maior parte dos professores do 1.º CEB da amostra não sabe trabalhar com AGD e praticamente metade não fez qualquer referência a materiais manipuláveis, o que nos deixa algumas reservas quanto à exploração inicial deste tema neste ciclo de ensino.

### O Conhecimento do Conteúdo

A última parte do questionário contemplava questões direcionadas para a avaliação do conhecimento do conteúdo *Simetrias e Transformações Geométricas* que é fundamental para o desenvolvimento dos objetivos específicos e das metas da aprendizagem da Matemática, bem como das capacidades transversais destacadas no PMEB (2007).

Nesta parte, separamos a análise das respostas às questões pelos quatro temas principais e subjacentes à temática em causa: isometrias, simetrias, rosáceas e frisos.

#### Isometrias

Nas próximas páginas, analisaremos as respostas dadas a quatro das cinco questões referentes às isometrias. Uma das questões não será tratada porque, na primeira aplicação do questionário, verificamos duas leituras distintas, por parte dos professores inquiridos, e que poderiam condicionar as conclusões que daqui se tirariam. Optámos por manter a questão nos questionários aplicados aos grupos seguintes para não alterar o documento.

Começamos então com a análise das respostas à segunda questão da parte III do questionário (ver Figura 54).

**Figura 54.** Questão 3.2 do Questionário

- 3.2) O NPMEB fala de 4 isometrias. Da mesma forma que se fala da *reflexão deslizante*, porque não se fala, por exemplo, de uma *reflexão rotacional*?
- Porque as 4 isometrias referidas são suficientes para a maior parte das transformações isométricas.
  - Porque a *reflexão rotacional* é equivalente a uma das 4 isometrias.
  - Outra razão. Qual? \_\_\_\_\_.

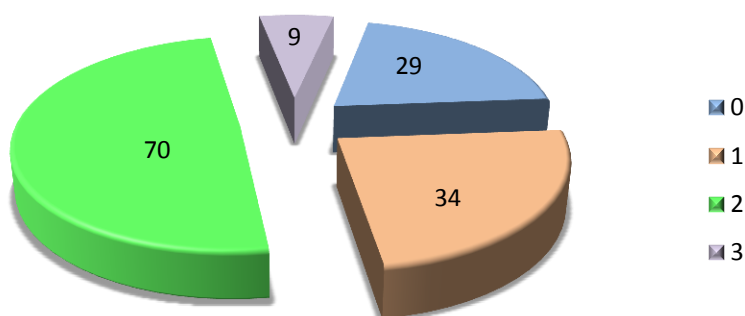
Nesta questão, a seleção da primeira opção indicaria que o professor consideraria a existência de outras quatro isometrias para além da reflexão, da rotação, da translação e da reflexão deslizante. A última opção permitiria que o professor preenchesse com as suas próprias palavras no caso de não considerar correta nenhuma das outras alternativas.

O Gráfico 11 apresenta as respostas a esta questão. Nele, consideramos (0) como ausência de resposta e, os restantes números, as opções indicadas na própria pergunta (1, 2 e 3), pela ordem respetiva, como se mostra:

- (1) Porque as 4 isometrias referidas são suficientes para a maior parte das transformações geométricas.
- (2) Porque a *reflexão rotacional* é equivalente a uma das 4 isometrias.
- (3) Outra razão. Qual?

Fazendo uma leitura direta das respostas registadas no Gráfico 11, é de referir que 29 professores não responderam e 34 indicaram que estas quatro eram suficientes para o estudo da maior parte das transformações isométricas. Estas respostas revelam, de algum modo, uma dificuldade inerente à ausência de conhecimento da estrutura de grupo presente no conjunto das isometrias ou o seu significado.

**Gráfico 11.** Respostas à Questão 3.2 do Questionário



Do conjunto dos 9 professores que responderam *outra*, 4 não apresentaram qualquer justificação e 5 escreveram:

- (A) 1 resposta: “Não existe”.
- (B) 2 respostas: Devido à amplitude dos ângulos estar invertido.
- (C) 1 resposta: “Porque a rotação pode ser cíclica (só tem rotações segundo um determinado ângulo de rotação (+ ou –) ou diedral, isto tem rotação e reflexão)”.

(D) 1 resposta: “Há transformação/movimentos que não se podem obter apenas com uma das três”.

Consideramos que as respostas (A) e (D) estão parcialmente corretas porque, de facto, não existe a *reflexão rotacional* e as três isometrias (reflexão, rotação e translação) não são suficientes para certas transformações<sup>37</sup>. No entanto, não é possível perceber se estes docentes associam a *reflexão rotacional* a uma das quatro isometrias ou se, na opinião deles, poderão haver mais do que quatro porque não seleccionaram a opção (2), que é a correta.

As respostas (B) e (C) não fazem qualquer sentido no âmbito da questão formulada.

Este gráfico mostra que 70 professores (49%) respondam corretamente, dizendo que a *reflexão rotacional* corresponde a uma das quatro isometrias. Devemos assinalar que mais de metade dos docentes inquiridos não reconhece a existência de quatro isometrias.

Embora a Tabela 26 mostre que, na amostra que estudámos, os professores do 2.º CEB acertaram em maior proporção do que os do 3.º CEB, o teste do Qui-quadrado de independência entre as variáveis ciclo de ensino (2.º e 3.º CEB) e as respostas dadas à questão 3.2. não permite dizer que sejam dependentes ( $p = 0,556$ ), donde não se pode inferir que o ciclo de ensino influa nas respostas dadas a esta questão.

**Tabela 26.** Comparação das respostas à Questão 3.2 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de lecionação no ano letivo 2011/2012		Total
		2.º CEB	3.º CEB	
Respostas à questão 3.2	Não respondeu	n 12	n 12	n 24
		% 17,1%	% 20,0%	% 18,5%
	A <i>reflexão rotacional</i> é suficiente para a maior parte das transformações geométricas	n 15	n 17	n 32
		% 21,4%	% 28,3%	% 24,6%
	A <i>reflexão rotacional</i> é equivalente a uma das quatro isometrias	n 39	n 26	n 65
		% 55,7%	% 43,3%	% 50,0%
	Outra razão.	n 4	n 5	n 9
		% 5,7%	% 8,3%	% 6,9%
Total		n 70	n 60	n 130
		% 100,0%	% 100,0%	% 100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

<sup>37</sup> Consultar *Algumas Particularidades desta Nova Abordagem das Transformações Geométricas* no capítulo 4.

Abordaremos, especificamente, uma das quatro isometrias, a reflexão deslizante. Com a questão 3.17 (ver Figura 55), pretendemos verificar se estes professores reconhecem a propriedade da reflexão deslizante referida anteriormente.

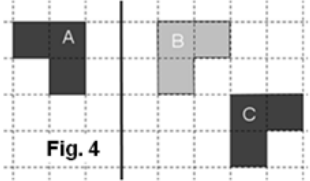
**Figura 55.** Enunciado da Questão 3.17 do Questionário

3.17) **Aluno:** “Professora, a figura C é uma reflexão deslizante da figura A, pois fiz uma reflexão da imagem A e depois deslizei a imagem obtida (B)” (ver fig. 4).

Aceitaria a resposta.

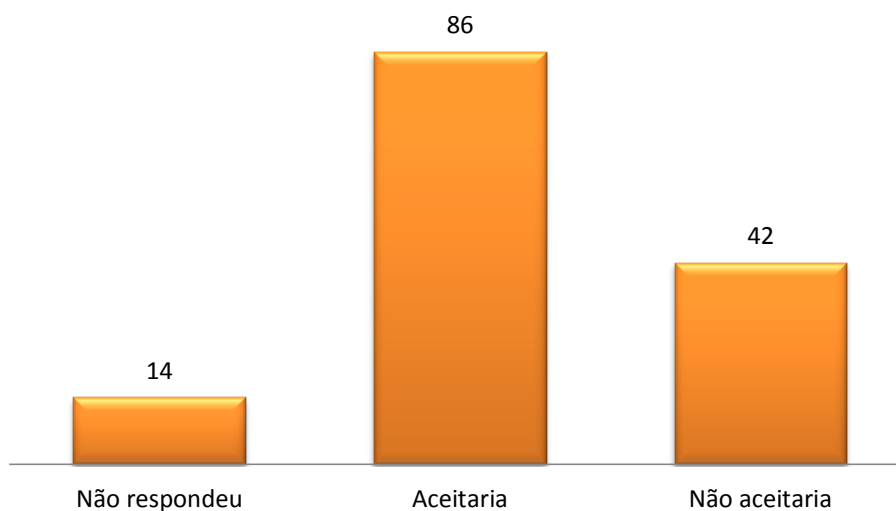
Não aceitaria a resposta pois \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



**Fig. 4**

**Gráfico 12.** Respostas à questão 3.17 do Questionário



As respostas plasmadas no Gráfico 12 estão também registadas na Tabela 27, mas especificando os ciclos de ensino.

**Tabela 27.** Comparação entre os ciclos de ensino e as respostas à questão 3.17

Variáveis	Respostas à Questão 3.17			Total	
	Não respondeu	Aceitaria	Não aceitaria		
Ciclo de lecionação	1.º CEB	3	4	5	12
	2.º CEB	5	48	17	70
	3.º CEB	6	34	20	60
Total	14	86	42	142	

Observamos que 14 professores não responderam a esta questão, que 86 aceitaram a resposta não assinalando, portanto, a particularidade do necessário paralelismo entre o vetor de translação e o eixo da reflexão e que 42 professores não aceitaram a resposta.

Comparando os professores dos 2.º e 3.º CEB relativamente às respostas dadas a esta questão (ver Tabela 28), verificamos que não há diferenças significativas pois o teste do Qui-quadrado de independência aplicado às variáveis ciclo de ensino e tipo de respostas à questão 3.17 obtivemos um  $p = 0,374$ .

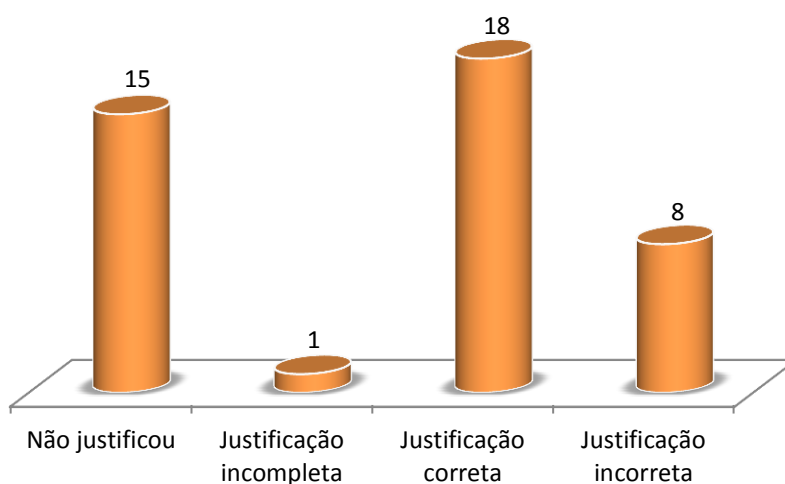
**Tabela 28.** Respostas à Questão 3.17 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
Resposta à questão 3.17	Não respondeu	n	5	6	11
		%	7,1%	10,0%	8,5%
	Aceitaria	n	48	34	82
		%	68,6%	56,7%	63,1%
	Não aceitaria	n	17	20	37
		%	24,3%	33,3%	28,5%
Total		n	70	60	130
		%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

No Gráfico 13, apresentamos as justificações dadas pelos 42 professores que não aceitaram a resposta do aluno.

**Gráfico 13.** Tipo de Justificação dada à Questão 3.17 do Questionário



Destes 42 professores, somente 18 (13% dos professores inquiridos) apresentaram uma justificação correta. Os restantes 24 professores não justificaram ou apresentaram uma justificação incompleta ou incorreta.

Em relação às justificações que foram dadas e que consideramos incorretas, destacamos:

- (A) 2 professores: falta a identificação do eixo e do vetor.
- (B) 3 professores: a reflexão tem que ter um eixo horizontal ou vertical.
- (C) 1 professor: obtém-se a figura por rotação de meia-volta.
- (D) 1 professor: a reflexão deslizante não altera a imagem.
- (E) 1 professor: a distância das figuras ao eixo é diferente.

No que concerne à resposta (C), de facto a figura C pode ser obtida através de uma rotação de meia-volta mas, também, pode ser obtida através de uma reflexão deslizante, e era a esta isometria que a afirmação se referia. Este professor não identificou a reflexão deslizante como uma isometria possível. Já quanto à resposta (B), os 3 professores limitam a existência de reflexões associadas a eixos horizontais ou verticais, o que é limitado. Na justificação (D), o professor refere que a reflexão deslizante não altera a imagem, o que, sendo as imagens congruentes, nos deixa a dúvida se estaria a referir-se à sua posição. De qualquer forma a justificação não está correta e também não deixa de ser relevante. Já a justificação (A) refere a necessidade de apresentação do eixo e do vetor, mas não menciona a questão do paralelismo que a caracteriza. Entretanto, a justificação (E) apresenta uma propriedade da reflexão deslizante que está relacionada com a conservação da distância da figura ao eixo da reflexão, mas não completa o raciocínio.

No que concerne aos professores do 2.º ou 3.º CEB, somente 37 não aceitariam a resposta do aluno e nenhum deu uma resposta incompleta a esta questão (ver Tabela 29).

**Tabela 29.** Justificação dada na Questão 3.17 pelos Respetivos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de lecionação 2011/2012		Total	
		2.º CEB	3.º CEB		
Justificação dada na questão 3.17 (agrupada)	Justificação incorreta ou não respondeu	n	9	10	19
		%	52,9%	50,0%	51,4%
	Justificação correta ou incompleta	n	8	10	18
		%	47,1%	50,0%	48,6%
Total		n	17	20	37
		%	100,0%	100,0%	100,0%


\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

Na tabela 29 os dados foram agrupados em dois grupos: (1) não justificou ou justificou incorretamente e (2) justificou corretamente, obtivemos a seguinte distribuição.

Aplicando o teste de independência do Qui-Quadrado às variáveis ciclo de ensino (2.º ou 3.º CEB) e respostas à questão 3.17 dos professores que não aceitariam a afirmação do aluno, verificamos que as diferenças entre ciclos não são significativas ( $p = 0,858$ ). Não podemos, portanto, afirmar que o ciclo de ensino influencia as respostas a esta questão.

Continuando na análise da relação entre as diferentes isometrias, a afirmação presente na questão 3.13 (ver Figura 56) estava associada a uma imagem com dois triângulos, em que, com a aplicação, a um deles, de uma rotação de meia-volta seguida de uma translação ou de uma reflexão segundo o eixo indicado, se obtinha o outro triângulo.

**Figura 56.** Questão 3.13 do Questionário

<p>3.13) <b>Aluno:</b> “Professora, a reflexão é o mesmo que a rotação de meia-volta.”          Para exemplificar o aluno exibiu a imagem da fig. 2:  <input type="checkbox"/> Aceitaria a afirmação.    <input type="checkbox"/> Não aceitaria a afirmação, pois _____          _____.</p>	
---	---

As respostas dadas pelos professores, a esta questão, estão representadas no Gráfico 14. Como referimos no capítulo anterior, pretendíamos com esta questão alertar para a veracidade desta afirmação em casos muito concretos.

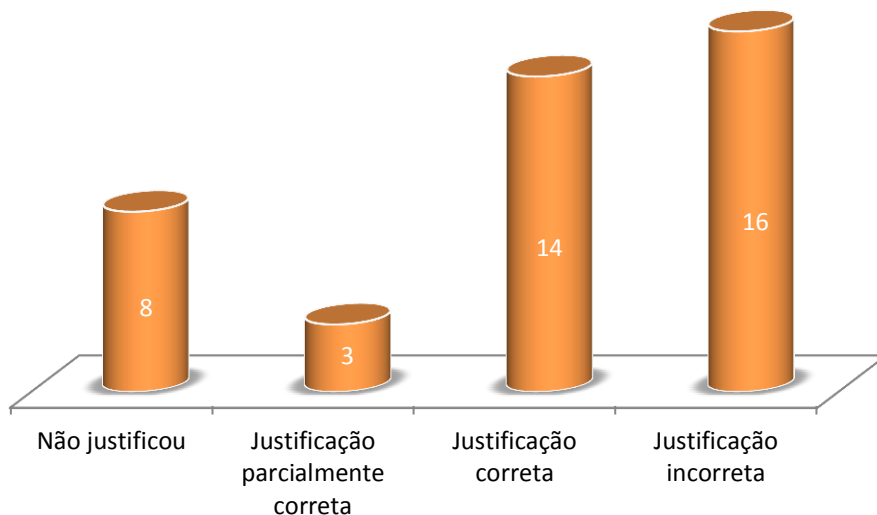
**Gráfico 14.** Respostas à Questão 3.13 do Questionário



Como se pode verificar, a maior parte dos professores respondeu a esta questão e aceitaria a resposta como correta (84). As frequentes generalizações protagonizadas pelos alunos podem levar a conjeturas erradas e com consequências que podem limitar futuras aprendizagens, como é o caso do

exemplo apresentado. Dos 41 professores que responderam corretamente, não aceitando a resposta, apenas 8 não apresentaram justificção pelo que se torna relevante analisar as justificções das respostas, cujos resultados agrupámos no Gráfico 15.

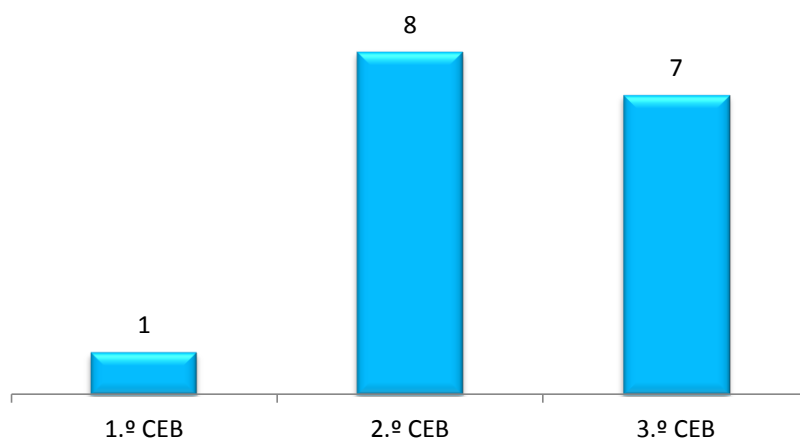
**Gráfico 15.** Justificções dadas na Resposta à Questão 3.13 do Questionário



Embora respondendo corretamente, 16 professores apresentaram justificções que nos parecem incorretas. Estes professores estão distribuídos pelos ciclos de ensino da forma indicada no Gráfico 16.

Por observação do Gráfico 16, constatamos que as respostas dos professores do 2.º CEB e do 3.º CEB são análogas, registando cerca de 11% e 12% das escolhas, respetivamente. No 1.º CEB representa cerca de 8%.

**Gráfico 16.** Respostas com Justificção Incorreta à Questão 3.13 do Questionário



No que concerne ao tipo de justificações apresentadas pelos professores inquiridos para não aceitarem a afirmação do aluno, foram registados os seguintes motivos:

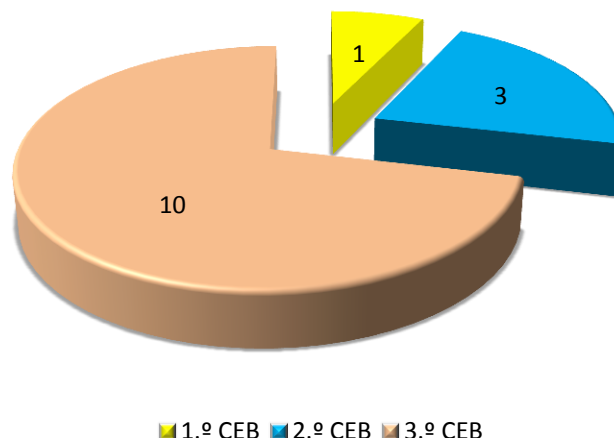
- (A) Ausência de elementos necessários na explicação: centro de rotação, eixo da reflexão, “deveria dizer rotação de meia-volta com centro de rotação no eixo de reflexão vertical” ou ainda, erroneamente, “eixo de rotação” (9 professores).
- (B) Comentários à imagem erróneos: “não mantém a mesma distância”, “distância ao eixo é diferente”, “teria que ter 180 graus de rotação”, “para realizar uma rotação, tem de ser sobre um ponto e não sobre um eixo” (5 professores).
- (C) o raciocínio está incorreto (2 professores).
- (D) “a simetria relativamente a um ponto também pode ser vista como uma rotação de 180 graus” (1 professor).

A afirmação contida na questão pressupunha uma sensibilidade por parte do professor para alertar os alunos da verificação da sua afirmação para o exemplo apresentado e não para a generalidade das figuras, ainda que o aluno tivesse definido o centro de rotação (A) e ainda que a distância aos eixos aparentemente fosse distinta (D). Em relação às justificações (C), podíamos incluí-las na opção de *não justificou* porque, na realidade, não está presente qualquer argumentação que justifique o raciocínio efetuado. Podemos, ainda, entre as justificações apresentadas, referir que a hipótese (B) revela falhas que se podem considerar de graves na identificação dos elementos associados à rotação, nomeadamente por referir *eixo de rotação*. Em algumas justificações presentes em (B) é assumida a veracidade da afirmação reclamando a especificidade dos 180 graus. Ora, esta menção não é necessária porque o enunciado refere *rotação de meia-volta*, o que torna implícita a referência a esta medida de amplitude.

Por fim, não conseguimos entender a última justificação presente em (B) que nos remete para uma informação óbvia e que não consta no enunciado da questão efetuada.

No que se refere às respostas corretas ou parcialmente corretas, elas foram dadas por apenas 17 professores, representando cerca de 12% dos professores inquiridos. Vamos, então, analisar o ciclo de ensino onde lecionam estes professores (ver Gráfico 17).

No gráfico é visível uma prevalência de respostas por professores do 3.º CEB que lideram o número de respostas corretas. O número de professores do 2.º CEB que foram capazes de responder acertadamente ou com justificações parcialmente corretas constituem cerca de 4% dos professores inquiridos deste ciclo de ensino. Todavia, há apenas, um professor do 1.º CEB que respondeu corretamente. Estes resultados são deveras importantes porque os professores do 3.º CEB parecem ter uma maior sensibilidade para estas particularidades.

**Gráfico 17.** Respostas Corretas ou Parcialmente Corretas à Questão 3.13 por Ciclo de Ensino

No estudo global desta questão 3.13, aplicamos um teste do Qui-Quadrado para analisar a dependência entre as variáveis ciclo de ensino e respostas à questão 3.13 (ver Tabela 30) e verificamos que esta relação de dependência existe e é significativa ( $p = 0,015$ ):

**Tabela 30.** Respostas à Questão 3.13 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
Respostas à questão 3.13	Não respondeu	n	9	5	14
		%	12,9%	8,3%	10,8%
	Aceitaria a resposta	n	48	30	78
		%	68,6%	50,0%	60,0%
	Não aceitaria a resposta	n	13	25	38
		%	18,6%	41,7%	29,2%
Total		n	70	60	130
		%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

Assim, os professores de ambos os ciclos, na sua maioria aceitam a resposta a esta questão registrando cerca de 68,6% para os professores do 2.º CEB e 50% para os professores do 3.º CEB. No entanto, estes últimos registam uma percentagem significativamente maior de professores, relativamente aos do 2.º CEB, que responderam corretamente, não aceitando a afirmação do aluno.

Relativamente aos professores do 2.º e 3.º CEB que rejeitariam a afirmação do aluno, agrupamos as respostas em (1) não justificou ou justificações incorretas e (2) justificações corretas ou parcialmente corretas e os valores registados encontram-se distribuídos da seguinte forma (ver Tabela 31):

**Tabela 31.** Justificação apresentada na Questão 3.13 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB


Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total	
			2.º CEB	3.º CEB		
Respostas à questão 3.13 (agrupadas)	Não justificou ou justificou incorretamente	n	10	13	23	
		%	83,3%	52,0%	62,2%	
	Justificação correta ou parcialmente correta	n	2	12	14	
		%	16,7%	48,0%	37,8%	
Total			n	12	25	37
			%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

Aplicando o teste do Fisher<sup>38</sup> para estudar a dependência entre as variáveis: justificações à questão 3.13 e ciclo de ensino, obtemos um  $p = 0,067$  ( $> 0,05$ ), pelo que não podemos afirmar que haja influência do ciclo de ensino para o tipo de justificação dada.

Por último, nesta parte, analisámos a questão 3.18 (Figura 57) deste questionário, que remete para a aplicação de uma das quatro isometrias básicas que transformam uma figura em outra sendo estas congruentes.

**Figura 57.** Enunciado da Questão 3.18 do Questionário

<p>3.18) <b>Aluno:</b> “Professora, há figuras que mesmo sendo congruentes não se podem obter através de isometrias, por exemplo estas duas” (ver fig. 5).</p> <p><input type="checkbox"/> Aceitaria a afirmação.</p> <p><input type="checkbox"/> Não aceitaria a afirmação.</p>	 <p>Fig. 5</p>
--	---

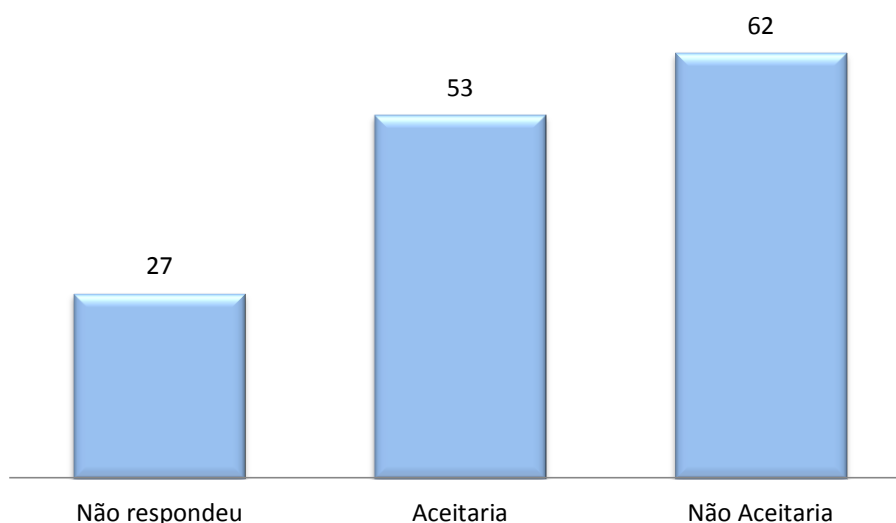
As respostas obtidas nesta questão estão representadas no Gráfico 18.

Neste gráfico podemos ver que, de todos os respondentes, houve 27 professores que não responderam a esta questão e 53 professores que aceitariam a resposta o que significa que 80 professores (27+53) não reconheceram que o significado de congruência está diretamente relacionado

<sup>38</sup> Por não reunir as condições necessárias para aplicação do teste do Qui-Quadrado.

com as isometrias, e o que isso induz em termos de transformações de figuras em outras congruentes. Estes 80 professores representam cerca de 56% dos professores inquiridos. Os 53 professores que aceitariam a resposta, representando cerca de 37% dos inquiridos, não relacionam estes dois conceitos, que são considerados fundamentais para o claro entendimento das isometrias enquanto transformações geométricas.

**Gráfico 18.** Respostas à Questão 3.18 do Questionário



A constatação da existência de 62 professores que não aceitariam a resposta representa, apenas, cerca de 44% dos inquiridos o que, na nossa opinião, é uma percentagem muito baixa dada a importância desta relação para um conhecimento profundo desta matéria.

Seguidamente vamos analisar as respostas por ciclos de ensino (ver Tabela 32).

**Tabela 32.** Resposta à Questão 3.18 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

Variáveis		Respostas à questão 3.18			Total
		Não respondeu	Aceitaria	Não aceitaria	
Ciclo de leção em 2011/2012	1.º CEB	3	7	2	12
	2.º CEB	11	23	36	70
	3.º CEB	13	23	24	60
Total		27	53	62	142

Observando de uma forma descritiva o que é relativo aos professores do 2.º CEB, verifica-se que há uma percentagem análoga entre os professores que não aceitariam a resposta (51%) e os

outros que não responderam ou responderam incorretamente (49%). No que respeita ao 3.º CEB, a situação é mais notória, registando-se 40% de professores a não aceitarem a afirmação contra os restantes 60% que não souberam responder ou responderam incorretamente. Já quanto ao 1.º CEB, esta diferença é ainda mais acentuada registando-se apenas 17% dos professores a não aceitarem a afirmação.

Indagámos a existência de uma relação de dependência entre as variáveis ciclo de ensino lecionado e tipo de resposta dada a esta questão, cingindo-nos unicamente aos 2.º e 3.º CEB. A Tabela 33 mostra essa comparação.

**Tabela 33.** Comparação das Resposta à Questão 3.18 pelos Professores dos 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de lecionação (2011/2012)					
		2.º CEB		3.º CEB		Total	
		n	%	n	%	n	%
Respostas à questão 3.18	Não respondeu	11	15,7%	13	21,7%	24	18,5%
	Aceitaria	23	32,9%	23	38,3%	46	35,4%
	Não aceitaria	36	51,4%	24	40,0%	60	46,2%
	Total	70	100,0%	60	100,0%	130	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

Assim, aplicando o teste do Qui-Quadrado às variáveis supra indicadas, verificamos que não há diferenças significativas entre as respostas dadas pelos professores dos dois ciclos ( $p = 0,405$ ), isto é, não existe uma relação de dependência entre as duas variáveis.

Esta questão 3.18 está implicitamente relacionada com a existência de apenas quatro isometrias, ou seja, os professores que aceitam a afirmação referida nesta questão é porque consideram haver outra isometria para além das quatro mencionadas ou poderão não compreender o significado de congruente ou de isometria. Fomos analisar então as respostas dos professores que responderam acertadamente à questão 3.2 (ver Tabela 34). Estas respostas foram organizadas em dois grupos, os que responderam acertadamente e os que não responderam ou responderam erradamente.

Na análise da Tabela 34 podemos perceber que, dos professores inquiridos que responderam haver apenas 4 isometrias, cerca de 43% responderiam corretamente a esta questão. O teste de Fisher aplicado a estas duas variáveis produziu um valor-p de 0,313, o que não permitiu evidenciar uma relação de dependência entre o ciclo de ensino e as respostas a esta questão.

**Tabela 34.** Respostas à Questão 3.18 dos Professores do 2.º e 3.º CEB que responderam corretamente à Questão 3.2

Variáveis*			Ciclo2011_2012		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
Respostas à questão 3.18	Aceitaria ou não respondeu	n	20	17	37
		%	51,3%	65,4%	56,9%
	Não aceitaria	n	19	9	28
		%	48,7%	34,6%	43,1%
Total	n	39	26	65	
	%	100,0%	100,0%	100,0%	

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

Do estudo efetuado nesta secção sobre as isometrias, podemos concluir que um ínfimo número de docentes inquiridos (11) reconhece a relação entre a reflexão e as restantes isometrias ( $\approx 8\%$ ) e que 70 admitem a existência de apenas quatro isometrias correspondendo a cerca de 49% dos professores inquiridos. Isto parece mostrar que a reflexão deslizante é, para muitos professores, apenas a composição de uma reflexão com uma translação onde a particularidade do paralelismo entre o vetor de translação e o eixo de reflexão é reconhecida por, somente, 13% dos professores da nossa amostra. Percebemos, também, com um grau de confiança de 95%, que o ciclo de lecionação é relevante na resposta dada à questão 3.13, ou seja, os professores do 3.º CEB revelam uma maior sensibilidade para a generalização proposta nesta questão. Em relação às restantes questões, os testes de hipóteses não permitem evidenciar, com o grau de confiança estipulado (95%), diferenças significativas entre as respostas dadas pelos professores do 2.º e 3.º CEB.

## Simetria

Esta secção toca no cerne deste trabalho, pois o conhecimento sobre o conceito de simetria influencia as ilações a tirar sobre o conhecimento do conteúdo das restantes temáticas presentes neste questionário.

Iniciamos então com a análise da primeira questão colocada no âmbito das simetrias (ver Figura 58), cuja resposta correta é *qualquer simetria é uma isometria*. Nesta questão, registamos a seleção de duas opções, em simultâneo, por parte de 11 professores (ver Gráfico 19) e verificamos também que nenhum professor selecionou a última opção (Outra. Qual?) nem, unicamente, a 1.ª opção.

**Figura 58.** Enunciado da Questão 3.3 do Questionário

3.3) Que relação há entre o conceito de simetria e o conceito de isometria?

Os conceitos, em sentido amplo, não apresentam diferenças.

Qualquer simetria é uma isometria.

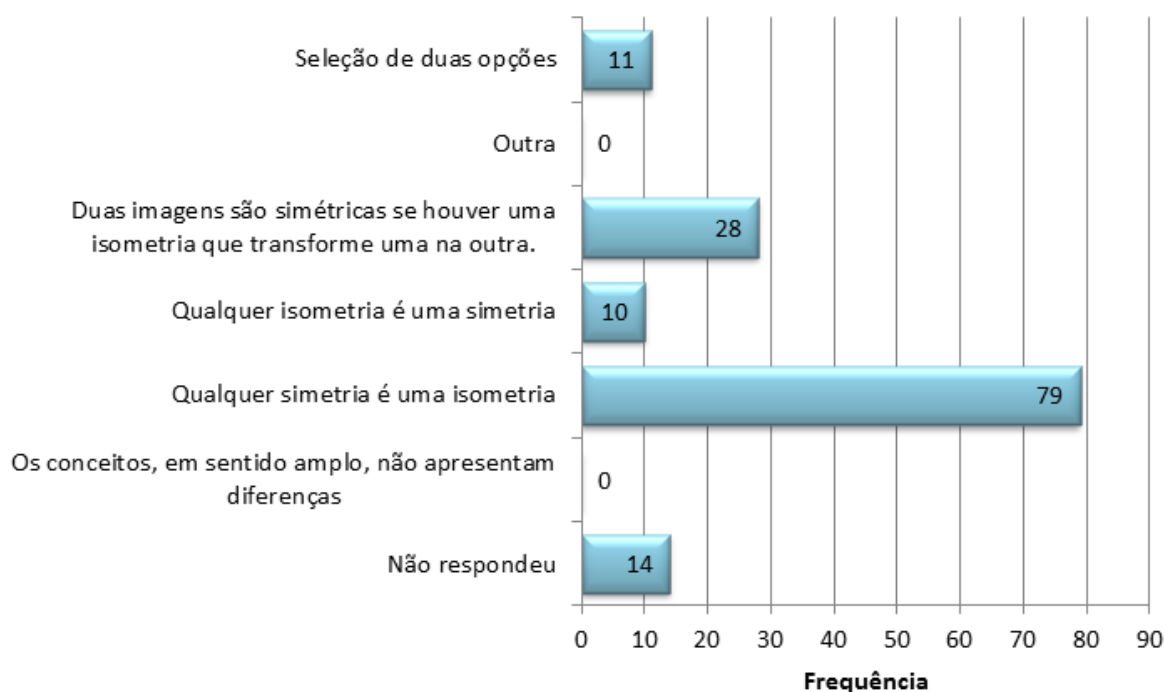
Qualquer isometria é uma simetria.

Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra.

Outra. Qual? \_\_\_\_\_.

Pela análise das respostas inscritas no Gráfico 19, verificamos que 14 professores não responderam a esta questão. Merece que se realce o número de respostas corretas com 79 dos professores inquiridos, que correspondem a cerca de 56% dos inquiridos.

Verifica-se a escolha por 10 professores que consideram que uma isometria é uma simetria, demonstrando confundir ou não dominar completamente, a nível concetual, a relação entre estes dois tipos de transformações.

**Gráfico 19.** Respostas à Questão 3.3 do Questionário

No que concerne à presença da antiga concetualização de simetria, verificamos que 28 professores selecionaram a opção *duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra* e 11 professores assinalaram duas opções em simultâneo que detalhamos de seguida. Assim:

- 10 professores selecionaram: *Qualquer simetria é uma isometria e duas imagens são simétricas se existir uma isometria que transforme uma na outra.*
- 1 professor selecionou: *Os conceitos, em sentido lato, não apresentam diferenças e duas imagens são simétricas se existir uma isometria que transforme uma na outra.*

Ora, estes 11 professores também parecem ter ainda interiorizada e consolidada a antiga conceitualização de simetria, mas 10 destes vão mais longe ao referirem, ainda, que uma simetria é uma isometria o que parece revelar uma grande inconsistência nos conceitos e nas definições. A outra resposta aponta para uma maior confusão, com o inquirido a referir a inexistência de diferenças entre simetria e isometria.

Saber distinguir claramente simetria de isometria é fundamental para a exploração destes temas do programa de matemática datado de 2007 e esta confusão está presente nas escolhas de 38% dos professores que responderam a esta questão.

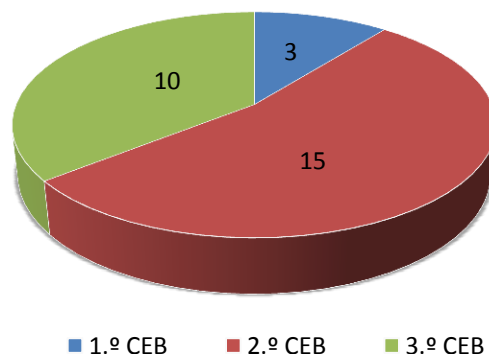
É importante salientar que alguns professores parecem possuir ainda a conceitualização antiga de simetria associando-a a uma transformação que ocorre entre duas imagens. É o que sucede com os 28 professores que selecionaram a quarta opção e os 11 que também a referiram quando selecionaram duas opções, representando cerca de 27% dos inquiridos.

Note-se que, apesar de 79 professores terem selecionado a opção correta, 10 fizeram-no selecionando também a 4.<sup>a</sup> opção, assumindo a antiga conceção de simetria. Assim, e na verdade, somente 69 professores responderam corretamente, representando 49% dos inquiridos.

Analisámos também a distribuição destas respostas pelos ciclos de ensino (ver Gráficos 20 e 21).

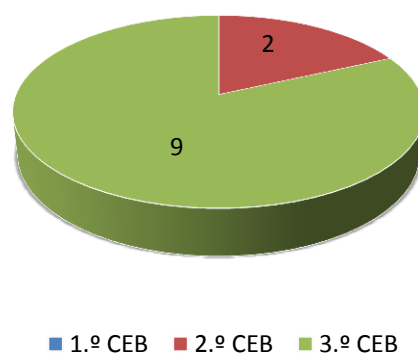
O Gráfico 20 mostra que foram os professores do 2.<sup>o</sup> CEB que mais marcaram a existência de antiga conceção de simetria, não relacionando a simetria com a isometria de forma adequada.

**Gráfico 20.** Seleção unicamente da 4.<sup>a</sup> Opção da Questão 3.3 Por Ciclos de Ensino



Já os professores que selecionaram duas opções, entre elas esta 4.<sup>a</sup> opção, lecionam, na sua maioria, no 3.<sup>o</sup> CEB (ver Gráfico 21). Este gráfico mostra que 9 professores do 3.<sup>o</sup> CEB assumem a simetria como uma transformação geométrica, o que pode justificar a sua associação às isometrias, mas continuam a demonstrar um domínio conceitual de simetria pouco condizente com a atualidade.

**Gráfico 21.** Seleção da 4.<sup>a</sup> Opção e Outra Opção da Questão 3.3 Por Ciclos de Ensino



Indagámos também, entre os professores do 2.<sup>o</sup> e do 3.<sup>o</sup> CEB, se o ciclo de ensino teve influência na seleção da 4.<sup>a</sup> opção de resposta (antiga concepção de simetria). Assim, não considerando as respostas em branco (3 professores do 2.<sup>o</sup> CEB e 9 professores do 3.<sup>o</sup> CEB), para aplicação do teste exato de Fisher, agrupamos as respostas em dois grupos:

- professores que selecionaram a 4.<sup>a</sup> opção, independentemente de terem selecionado outra;
- professores que selecionaram outra(s) opção(ões) não contemplando a 4.<sup>a</sup> opção.

A distribuição dos professores do 2.<sup>o</sup> e 3.<sup>o</sup> CEB por esses dois grupos pode ser analisada na Tabela 35.

**Tabela 35.** Seleção da 4.<sup>a</sup> Opção da Questão 3.3 pelos Professores do 2.<sup>o</sup> e 3.<sup>o</sup> CEB

Variáveis*		Ano Letivo 2011/2012		Total	
		2. <sup>o</sup> CEB	3. <sup>o</sup> CEB		
Opção 4 da questão 3.3	Não selecionou a 4. <sup>a</sup> opção	n	45	28	73
		%	68,2%	54,9%	62,4%
Opção 4 da questão 3.3	Selecionou a 4. <sup>a</sup> opção	n	21	23	44
		%	31,8%	45,1%	37,6%
Total		n	66	51	117
		%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

Pelo valor-p obtido ( $p = 0,179$ ) concluímos, com um grau de confiança de 95%, que a seleção desta opção não depende do ciclo de lecionação do docente.

Pela observação da Tabela 35, constatamos que os professores de ambos os ciclos, na sua maioria, responderam corretamente a esta questão, contudo, há mais professores do 2.º CEB ( $\approx 66\%$ ) a acertar do que professores do 3.º CEB ( $\approx 47\%$ ). Aplicando o teste do Qui-Quadrado para analisar se estas diferenças são significativas, isto é, se o ciclo de ensino influencia o tipo de resposta a esta questão (respostas corretas (2.ª opção), incorretas<sup>39</sup> ou ausência de resposta), verificamos que o valor-p é igual a 0,034, pelo que as conclusões remetem para diferenças significativas na comparação entre estes dois grupos de professores. Ou seja, mais de metade dos professores do 2.º CEB responderam corretamente a esta questão ao contrário dos professores do 3.º CEB que acertaram numa percentagem inferior a 50% (estes últimos lideram as respostas incorretas e as ausências de respostas) e estas diferenças são estatisticamente significativas.

**Tabela 36.** Resposta Correta, Incorreta ou Ausência de resposta à Questão 3.3 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ano Letivo 2011/2012		Total	
		2.º CEB	3.º CEB		
Respostas à questão 3.3	Não respondeu	n	3	9	12
		%	4,3%	15,0%	9,2%
	Incorreta	n	21	23	44
		%	30,0%	38,3%	33,8%
	Correta	n	46	28	74
		%	65,7%	46,7%	56,9%
Total	n	70	60	130	
	%	100,0%	100,0%	100,0%	

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.


Analisámos, de seguida, as respostas à questão 3.14 (ver Figura 59). Esta questão não carecia de justificação uma vez que a justificação prevista para a rejeição da afirmação era que o eixo indicado não era de simetria mas de reflexão.

De notar que, até ao momento, foi esta a questão respondida pelo maior número de professores (131), o que parece indicar alguma familiaridade entre eixo de simetria e a imagem indicada na pergunta.

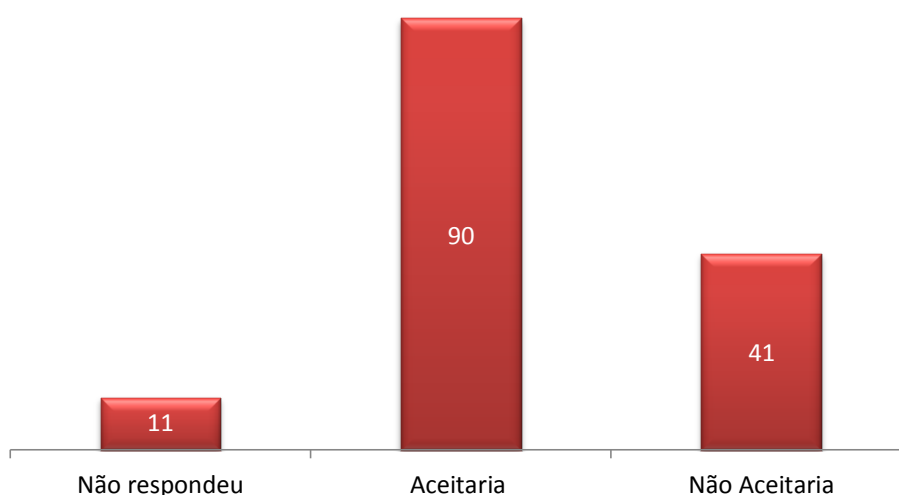
<sup>39</sup> Independentemente de o professor ter selecionado a 2.ª opção, pois as restantes não estão corretas.

**Figura 59.** Enunciado da Questão 3.14 do Questionário

3.14) Trabalho de grupo para análise de figuras.  
**Aluno:** "Na figura 3, a reta  $r$  é um eixo de simetria".  
 Aceitaria a afirmação.     Não aceitaria a afirmação.



Para uma melhor visualização mostramos as respostas a esta questão no Gráfico 22.

**Gráfico 22.** Respostas à Questão 3.14 do Questionário

A assunção por 90 professores (63% dos inquiridos) de que  $r$  é o eixo de simetria, assumindo que estamos perante uma simetria de reflexão e não uma reflexão aponta para a prevalência da concetualização antiga de simetria associada à reflexão. Por isso, e ainda que haja argumentos de que os dois triângulos poderiam formar uma única figura e, neste caso,  $r$  seria um eixo de simetria, pretendíamos assinalar a distinção clara entre simetria de reflexão e reflexão, pelo que a correção para eixo de reflexão seria necessária.

Acresce dizer que apenas 41 professores não aceitariam a afirmação, o que representa cerca de 29% do total de professores. Na Tabela 37, mostramos a distribuição das respostas a esta questão por ciclos de ensino. Como se pode ver, em todos os ciclos de ensino, excetuando os que não responderam, há uma maior percentagem de professores a aceitar a resposta em vez de a rejeitarem. Constatamos que, se ao número de professores que aceitaram a afirmação acrescentarmos o número de professores que não responderam, obtêm-se as seguintes percentagens de respostas erradas: 1.º CEB – 83%; 2.º CEB – 69% e no 3.º CEB – 72%.

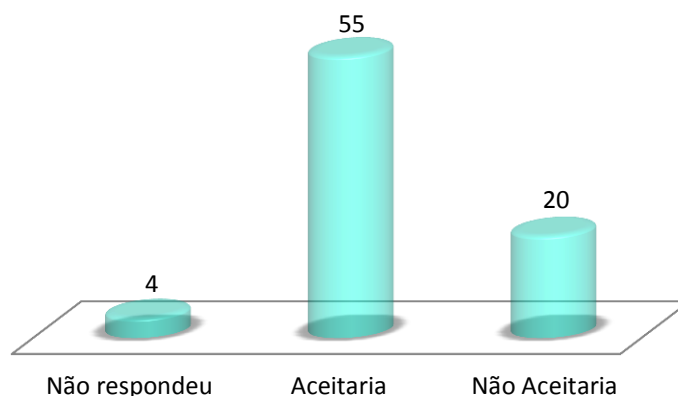
**Tabela 37.** Resposta à Questão 3.14 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

Variáveis		Respostas à questão 3.14			Total
		Não respondeu	Aceitaria	Não aceitaria	
Ciclo de lecionação em 2011/2012	1.º CEB	1	9	2	12
	2.º CEB	5	43	22	70
	3.º CEB	5	38	17	60
Total		11	90	41	142

Repare-se que, apesar de serem distintos, os valores percentuais das opções dos professores do 2.º CEB e do 3.º CEB não são muito distantes, não havendo diferenças significativas entre os docentes destes dois ciclos em relação ao tipo de respostas ( $p = 0,913$ ), o que indica que lecionar num dado ciclo de ensino não interfere no tipo de respostas dadas a esta questão.

Assim sendo, a ilação mais concludente que se pode tirar, principalmente desta questão, é que o conceito de simetria, que está muito presente e enraizado nos professores, está ultrapassado.

Uma vez que esta questão 3.14 não carecia de justificação, decidimos cruzar as respostas deste item com as respostas corretas à questão 3.3 (ver Figura 56 e Gráfico 19). No Gráfico 23, que mostra esse cruzamento, apresentamos as respostas à questão 3.14 dos professores que responderam corretamente à questão 3.3.

**Gráfico 23.** Respostas à Questão 3.14, Considerando as Respostas Corretas à Questão 3.3 do Questionário

Podemos ver que apenas responderam corretamente, a ambas as questões, 20 professores, o que corresponde a 14% dos inquiridos. Os professores que acertaram nas duas questões são 12 do 2.º CEB e 7 do 3.º CEB.

Relativamente a esta questão aplicamos dois testes do Qui-Quadrado para estudar:

- uma possível relação de dependência entre o ciclo de lecionação (professores dos 2.º e 3.º CEB) e a resposta à questão 3.14. Esta relação de dependência não pode ser afirmada, pois obtivemos um  $p = 0,913$ .
- uma possível relação de dependência entre o ciclo de lecionação (professores dos 2.º e 3.º CEB) e a resposta à questão 3.14 dos professores que responderam corretamente à questão 3.3 que, mais uma vez, apresentou um valor-p não significativo ( $p = 1,000$ ).

Deste modo, não podemos concluir que as respostas dadas pelos docentes a esta questão são influenciadas pelo ciclo em que os mesmos lecionam.

Regressando, novamente, à análise descritiva dos valores obtidos, ainda que, a partir das respostas à questão 3.3, parecesse que os professores distinguem uma isometria de uma simetria, a questão 3.14 trouxe à tona as fragilidades no domínio destes novos conceitos e a prevalência dos antigos. Este facto confirma as preocupações de vários educadores e investigadores (e.g., Canavarro, 2010; GT2, 2010; Loureiro, 2007) sobre as dificuldades dos profissionais em interiorizar e consolidar o conhecimento profundo desta matéria, e de que já demos conta na revisão da literatura.

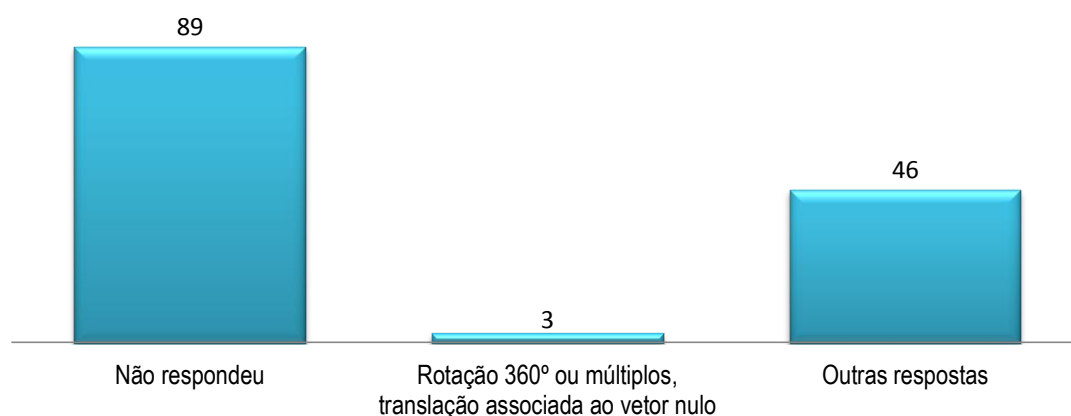
Na questão 3.4. (ver Figura 60), abordámos a particularidade do significado geométrico de simetria identidade, ou seja, as transformações que podem ser consideradas simetrias identidade.

**Figura 60.** Enunciado da Questão 3.4 do Questionário

3.4) De acordo com Eduardo Veloso (1998), uma figura é simétrica se admitir, pelo menos, uma simetria diferente da identidade. Quais são as simetrias identidade? \_\_\_\_\_.

Dado o carácter aberto desta questão, agrupámos as respostas em três grupos, distinguindo os professores que não responderam, os que deram uma resposta correta (rotação de  $360^\circ$  ou múltiplos, translação associada ao vetor nulo) e os que deram outras respostas que incluem as respostas incompletas ou incorretas.

No Gráfico 24, podemos ver que 89 professores não responderam à questão e que apenas 3 professores, sendo 2 do 2.º CEB e 1 do 3.º CEB, escolheram a rotação de  $360$  graus, seus múltiplos e a translação associada ao vetor nulo. Para além desta informação registamos, também, 46 respostas distintas da anterior, que analisaremos separadamente e agrupadas por tipo de respostas.

**Gráfico 24.** Respostas à Questão 3.4 do Questionário

Assim, na Tabela 38, apresentamos as 20 respostas que fizeram referência a, pelo menos, uma das simetrias identidade. Como seria expectável, todos estes referiram a rotação de 360 graus, mas a maior parte destas respostas (16) mencionaram somente esta simetria identidade.

**Tabela 38.** Número de Professores que Referiram, pelo menos, uma Simetria Identidade

Respostas	Número de respostas
Rotação de 360°	16
Rotação de 360° ; 0°	3
Rotação de 360° ; $T_0$ <sup>40</sup>	1

As restantes 26 respostas não identificam nenhuma simetria de identidade, mas apresentaram uma definição de simetria identidade que, também, consideraríamos correta se a definição estivesse completa, o que não se verificou em nenhum dos casos. Perante a diversidade de respostas e para uma melhor leitura, decidimos agrupá-las em quatro grupos e do seguinte modo:

- Grupo 1: por referência às isometrias.
- Grupo 2: por referência às simetrias.
- Grupo 3: por utilização do termo *sobreposição*<sup>41</sup>.
- Grupo 4: por referência à orientação e à congruência.

Em relação ao Grupo 1 – referência às isometrias (ver Tabela 39) - incluímos as 6 respostas que mencionaram uma das isometrias sem mais nenhuma característica. Repare-se que estes docentes não incluíram a reflexão deslizante e, tal como estão descritas, as isometrias não são exemplos de

<sup>40</sup> Translação associada ao vetor nulo.

<sup>41</sup> Relembramos que já Euclides, nos *Elementos*, utilizou este termo com o intuito de congruência (ver revisão da literatura).

simetrias identidade. Estas respostas parecem evidenciar, mais uma vez, a permanência de equívocos conceituais entre isometria e simetria.

**Tabela 39.** Número de Respostas do Grupo 1

Respostas	Número de respondentes
Rotação	2
Translação	3
Reflexão, rotação e translação	1

As respostas do Grupo 2 (referência às simetrias) são detalhadas na Tabela 40. Nestas situações, os professores parecem confundir entre invariante e identidade, que a conexão com as correspondências poderia ajudar a combater. Estas respostas revelam a mesma inconsistência das do grupo 1, pois, ao referirem “simetrias” em todos os casos, estão a considerar que invariante significa que todos os pontos ficam invariantes, o que representa uma interpretação desta transformação geométrica com várias limitações.

**Tabela 40.** Número de Respostas do Grupo 2

Respostas	Número de respondentes
Simetria de reflexão	1
Simetria de translação	1
Simetria de translação, simetria de reflexão, simetria de reflexão deslizante e de rotação	1
Simetria da simetria	1
São as que transformam a figura nela própria: simetria de reflexão, simetria de reflexão deslizante, simetria de rotação	1

No que respeita ao Grupo 3 – utilização do termo “sobreposição” (ver Tabela 41) e analogamente ao que ocorreu com as respostas dos grupos anteriores, as respostas deste grupo também evidenciam uma incoerência entre o conceito de simetria e invariante que surge de forma implícita.

A resposta assinalada com (1) pode considerar-se correta se o professor estiver a referir-se à aplicação de uma transformação que originará a *figura inicial* (antes de sofrer qualquer transformação). Mas podemos, também, entender que, quando o professor escreve *as simetrias correspondentes à figura inicial*, poderá estar a confundir identidade com invariante. Desta forma não é possível ser-se muito assertiva, registando-se alguma ambiguidade.

**Tabela 41.** Número de Respostas do Grupo 3

Respostas	Número de respondentes
São as simetrias que se sobrepõem	1
São aquelas que se sobrepõem	1
São as que transformam a figura nela própria	4
A própria figura	5
São as simetrias correspondentes à figura inicial, antes de sofrer qualquer transformação (1)	1

Como sùmula do que foi aqui dito, consideramos que, na generalidade, os professores deste grupo apresentam, tal como os dos outros grupos, uma incoerência e imprecisão nos termos e conceitos envolvidos nesta matéria.

As três respostas do Grupo 4 – referência à orientação e à congruência (ver Tabela 42) remetem para a congruência de figuras, o que significa que os respondentes parecem desconhecer as propriedades das isometrias e, mais ainda, a das simetrias.

**Tabela 42.** Número de Respostas do Grupo 4

Respostas incorretas	Número de respondentes
Todas as que mantêm a figura/forma com a mesma orientação	2
São as geometricamente iguais à original	1

Em suma, somente uma ínfima parte dos professores inquiridos (3) foram capazes de mencionar todas as simetrias identidade existentes e 16 limitaram-se a referir a rotação de 360 graus. Verificou-se também que os professores que responderam a esta questão com a definição de simetria identidade apresentam alguma confusão entre o conceito de simetria e de simetria identidade.

Os testes estatísticos apresentados nesta secção não permitiram concluir, com 95% de certeza, que a resposta dada a qualquer uma destas questões está dependente do grau de lecionação dos docentes.

### Rosáceas

Nesta secção, abordamos o caso particular das rosáceas, definidas como figuras simétricas com simetrias de rotação, para além da identidade, que não contêm simetrias de translações nem de reflexão deslizante. Apresentam-se, ainda, como grupos finitos onde estão incluídos os grupos de simetrias dos polígonos.

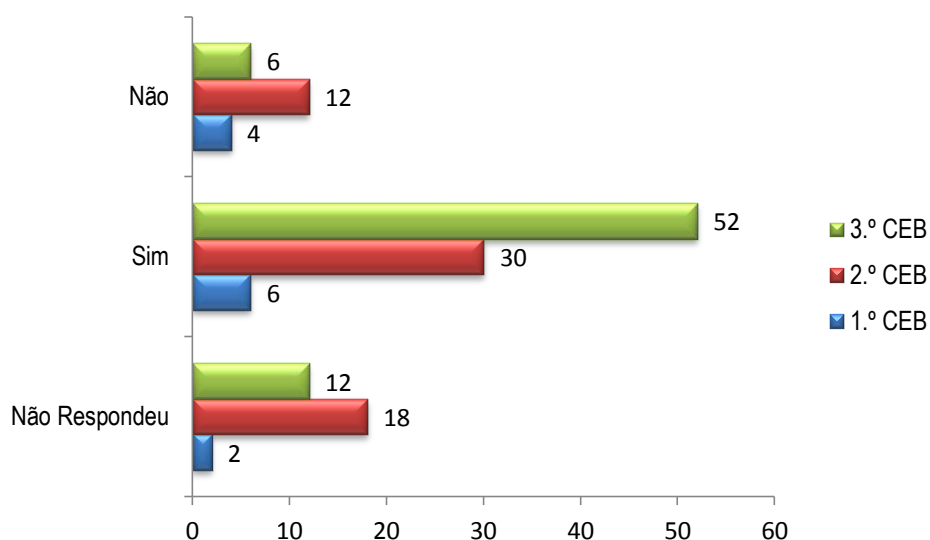
Desta feita, passamos à análise das respostas dadas a cada questão e ao tratamento dos dados efetuados, tentando descobrir eventuais conexões entre as diferentes respostas às questões. Começamos com o estudo dos polígonos em associação com o estudo das rosáceas.

Na questão onde se pergunta se um triângulo equilátero pode ser considerado uma rosácea (ver Figura 61), obtivemos as respostas visíveis no Gráfico 25.

**Figura 61.** Enunciado da Questão 3.5 do Questionário

3.5) Um triângulo equilátero pode ser considerado uma rosácea?  Sim  Não

**Gráfico 25.** Respostas à Questão 3.5 do Questionário



Como se percebe, a esta questão não responderam 32 professores e outros 22 parecem não reconhecer as propriedades das rosáceas no triângulo equilátero. Estes docentes representam cerca de 38% dos inquiridos. No entanto, a maior parte dos professores (88) respondeu corretamente, representando cerca de 62% de todos os elementos da amostra.

Comparámos as respostas dos professores do 2.º CEB com os do 3.º CEB para verificarmos se havia diferenças significativas entre eles, isto é, para sabermos se o nível de ensino teve influência nas respostas a esta questão. A Tabela 43 mostra que, dos professores do 3.º CEB, 50% não responderam ou responderam negativamente e que, dos do 2.º CEB, 26% que não responderam ou responderam negativamente. O teste de independência do Qui-quadrado aplicado às variáveis ciclo de ensino e resposta à questão 3.5 mostra que existe uma relação de dependência significativa ( $p =$

0,015) entre estas variáveis. Isto é, podemos concluir com 95% de confiança, que o ciclo onde lecionam os docentes influencia a resposta a esta questão e que os professores do 2.º CEB apresentam uma percentagem significativamente maior de respostas corretas (74% contra 50%).

**Tabela 43.** Respostas à Questão 3.5 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de ensino (2011-12)					
		2.º CEB		3.º CEB		Total	
		n	%	n	%	n	%
Respostas à questão 3.5	Não respondeu	12	17,1%	18	30,0%	30	23,1%
	Sim	52	74,3%	30	50,0%	82	63,1%
	Não	6	8,6%	12	20,0%	18	13,8%
	Total	70	100,0%	60	100,0%	130	100,0%

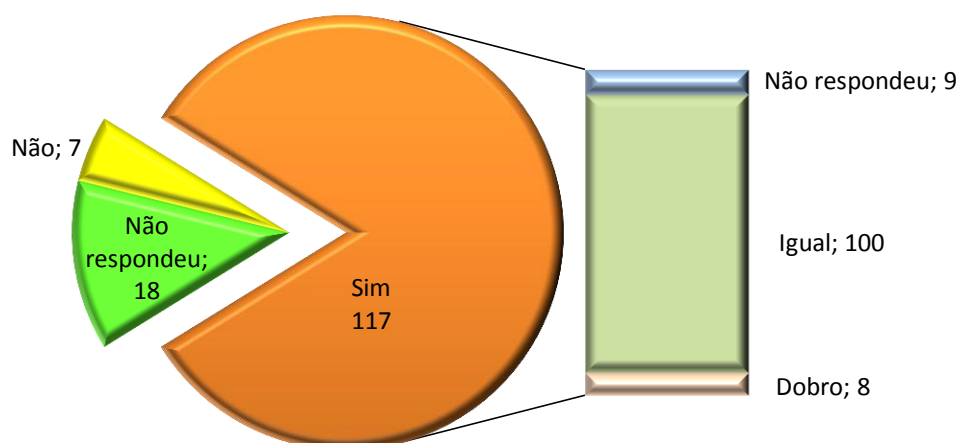
\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

A questão 3.7 (ver Figura 62) enquadra-se também no âmbito das simetrias nos polígonos e na perspetiva do PMEB (2007) que propõe o desenvolvimento de uma atividade que relacione o número de eixos de simetria de um certo triângulo com a sua respetiva classificação. No Gráfico 26 apresentamos as respostas dadas pelos professores a esta questão.

**Figura 62.** Enunciado da Questão 3.7 do Questionário

3.7) Há uma relação entre o nº de simetrias de um dado polígono regular e o nº de lados do mesmo?  
 Não  Sim, o número de simetrias é \_\_\_\_\_ o número de lados do polígono.

**Gráfico 26.** Respostas à Questão 3.7 do Questionário



No gráfico, podemos verificar que 18 professores não responderam, que 7 consideram não haver qualquer relação e que 117 (cerca de 82% dos inquiridos) reconhecem a existência de uma relação entre o número de simetrias e o número de lados desse polígono.

Fazendo agora uma análise inferencial e aplicando, para tal, o teste exato de Fisher unicamente aos professores do 2.º e 3.º CEB, e às variáveis *ciclo de ensino* e *resposta à questão 3.7* (ver Tabela 44), dado que  $p > 0,05$ , mais especificamente  $p = 0,088$ , concluímos que não existe uma relação de dependência significativa entre estas variáveis.

Repare-se que agrupamos as respostas em dois grupos: (1) respostas corretas e (2) incorretas ou sem resposta para podermos aplicar o teste de Fisher já que o teste do Qui-Quadrado não reunia as condições de aplicabilidade.

**Tabela 44.** Respostas à Questão 3.7 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total
			2.º CE B	3.º CEB	
Resposta à questão 3.7 (agrupada)	Incorretas ou sem resposta	n %	7 10,0 %	13 21,7%	20 15,4%
	Sim	n %	63 90,0 %	47 78,3%	110 84,6%
Total		n %	70 100, 0%	60 100,0%	130 100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

Com a segunda parte da questão 3.7 (número de simetrias), tentámos saber se os professores identificavam as simetrias de rotação num triângulo equilátero ou somente as simetrias de reflexão.

O Gráfico 26 mostra que, dos 117 professores que responderam afirmativamente na Questão 3.7, 9 não especificaram qual número de simetrias em relação ao número de lados do polígono, 100 indicaram que eram em igual número e 8 responderam (corretamente) que o número de simetrias era o dobro do número de lados do polígono, mostrando, assim, que identificaram não somente as simetrias de reflexão mas, também, as simetrias de rotação. Isto é, da totalidade dos inquiridos, cerca

de 95% dos professores não responderam a esta questão ou responderam de forma incorreta, parecendo demonstrar, mais uma vez, a persistência do conceito de simetria como sinónimo de reflexão.

A Tabela 45 mostra a distribuição das respostas afirmativas à primeira parte da questão 3.7 pelos professores dos diferentes ciclos de ensino.

**Tabela 45.** Relação entre o número de Lados do Polígono Regular e o Número de Simetria desse Polígono referida pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

Variáveis		Respostas à questão 3.7 (Relação)			Total
		Não respondeu	Igual	Dobro	
Ciclo de lecionação 2011/2012	1.º CEB	1	6	0	7
	2.º CEB	2	56	5	63
	3.º CEB	6	38	3	47
Total		9	100	8	117

Analisando somente os professores do 2.º ou 3.º CEB que responderam afirmativamente a esta questão, agrupamos as respostas em dois grupos: (1) o dobro e (2) outras (igual e sem resposta) (ver Tabela 46) e verificamos, pelo teste do Qui-Quadrado, aplicado às variáveis ciclo de ensino e respostas agrupadas, que não há uma relação de dependência ( $p = 1,000$ ).

**Tabela 46.** Relação entre o número de Lados do Polígono Regular e o Número de Simetria desse Polígono Referida pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de Lecionação 2011/2012		Total	
		2.º CEB	3.º CEB		
Relação entre o número de simetria de um polígono regular e o número de lados	Igual ou sem resposta	n	58	44	102
		%	92,1%	93,6%	92,7%
	Dobro	n	5	3	8
		%	7,9%	6,4%	7,3%
Total		n	70	63	47
		%	100,0%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

Podemos então concluir que os professores do 2.º e 3.º CEB apresentam respostas análogas que não permite destacar diferenças significativas entre estes dois grupos de docentes. Podemos,

contudo, observar os dados da tabela e verificar que, na nossa amostra, e na sua esmagadora maioria, os professores não respondem corretamente a esta questão, remetendo-nos para a antiga concepção de simetria.

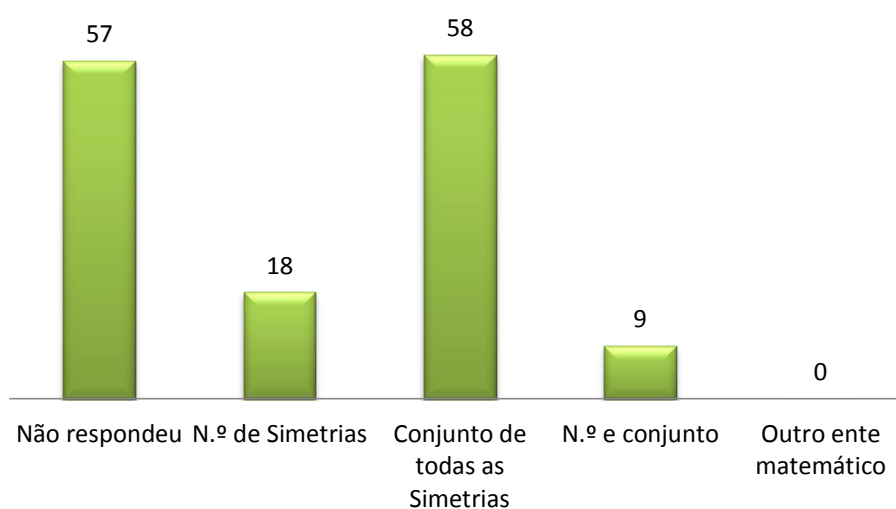
A questão 3.6 (ver Figura 63) está relacionada com inclusão da simetria identidade no conjunto das simetrias de uma dada figura. A sua análise foi feita em duas fases: numa primeira fase, tentámos apreender se a tendência para a identificação de um grupo de simetrias de uma dada figura seria o número de simetrias dessa figura ou o conjunto dessas simetrias; na segunda fase, tentámos verificar se as respostas a uma das duas primeiras opções incluem ou excluem a simetria identidade deste conjunto.

**Figura 63.** Enunciado da Questão 3.6 do Questionário

3.6) O que é o grupo de simetrias de uma determinada figura?	
<input type="checkbox"/> Número de simetrias da figura, {	<input type="checkbox"/> <i>com</i> <input type="checkbox"/> <i>sem</i> a identidade
<input type="checkbox"/> Conjunto de todas as simetrias da figura, {	<input type="checkbox"/> <i>incluindo</i> <input type="checkbox"/> <i>excluindo</i> a identidade.
<input type="checkbox"/> Outro ente matemático. Qual? _____.	

No Gráfico 27 constam as respostas referentes à primeira fase desta discussão.

**Gráfico 27.** Respostas à Primeira Parte da Questão 3.6 do Questionário



Começa-se por notar que, a esta questão, não responderam 57 professores e que a opção *outro ente matemático* não foi selecionada. Depois constata-se que, dos restantes 85 professores, 9 deles consideraram o grupo de simetrias de uma dada figura como sendo, simultaneamente, o número e o

conjunto de simetrias dessa figura. Mas os 76 professores que selecionaram apenas uma opção fizeram-no, maioritariamente e corretamente, pelo conjunto de todas as simetrias, o que representa cerca de 41% da totalidade dos inquiridos.

Apesar de a questão em causa mencionar a estrutura de grupo, o *grupo* das simetrias, 27 professores (18+9) parecem não reconhecer as propriedades que caracterizam estas estruturas, pois, caso contrário, saberiam tratar-se de um conjunto. Era este o objetivo principal desta 1.<sup>a</sup> fase da questão, uma vez que o seu reconhecimento por parte dos docentes traria, certamente, vantagens para o desenvolvimento e exploração desta temática.

Na análise das respostas a esta questão, considerámos somente os professores dos 2.º e 3.º CEB e comparámos as respetivas respostas. Numa primeira fase, estudámos a primeira parte desta questão, ou seja, a identificação de um grupo de simetrias como sendo o conjunto das simetrias de uma dada figura ou o número de simetrias dessa figura (ver Tabela 47).

Aplicando o teste de independência do Qui-Quadrado às variáveis *ciclo de ensino* e às *respostas à primeira parte da questão 3.6*, obtemos um  $p = 0,511$ , pelo que podemos dizer que não há também nesta questão, uma relação de dependência entre estas variáveis, isto é, não há diferenças significativas entre as respostas dos professores do 2.º e do 3.º CEB a esta parte da questão 3.6.

**Tabela 47.** Resposta à Questão 3.6 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

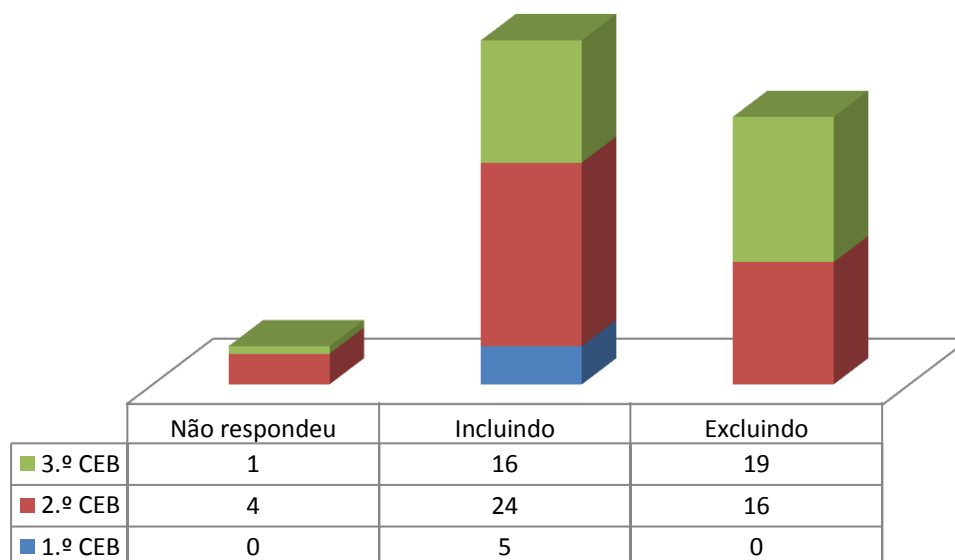
Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
Respostas à questão 3.6 (agrupada)	Não respondeu ou resposta inválida	n	30	28	58
		%	42,9%	46,7%	44,6%
	Número de simetria	n	7	9	16
		%	10,0%	15,0%	12,3%
	Conjunto de todas as simetrias	n	33	23	56
		%	47,1%	38,3%	43,1%
Total			70	60	130
			%	100,0%	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

As respostas à segunda fase da questão 3.6, discriminadas em função do ciclo de ensino, são apresentadas no Gráfico 28. Aqui, podemos ver que 5 dos 85 professores que responderam à questão não completaram a resposta e, por isso, ficamos por perceber se a incluíam ou a excluíam de tal

conjunto. Dos 80 restantes, 45 (o que representa cerca de 32% dos inquiridos) incluíram a simetria identidade no grupo das simetrias e 35 não a incluíram.

**Gráfico 28.** Respostas à Segunda Parte da Questão 3.6 do Questionário

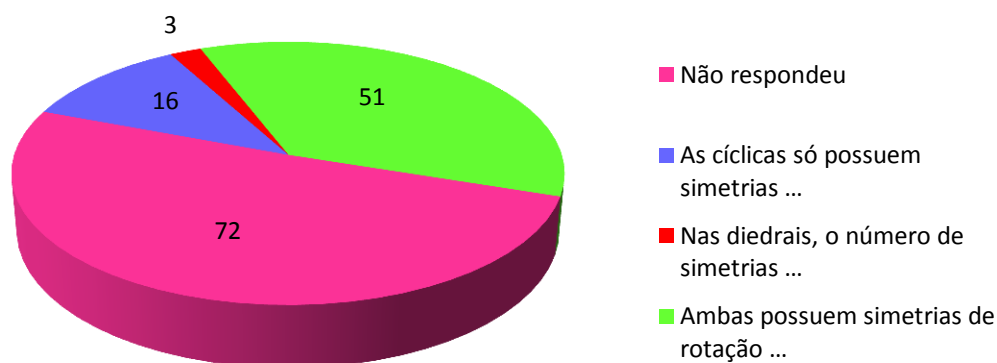


Um teste de independência de variáveis do Qui-quadrado aplicado às variáveis ciclo de ensino (2.º e 3.º CEB) e resposta à inclusão da identidade no conjunto das simetrias de uma dada figura mostra que não há independência entre elas ( $p = 0,460$ ), o que permite concluir, com 95% de confiança, que os professores dos dois ciclos não responderam de forma diferente também a esta parte da questão 3.6.

Continuando, ainda, nesta temática, enveredamos por abordar a distinção entre rosáceas cíclicas e diedrais que, apesar de não fazerem parte do programa de Matemática (2007), estão diretamente relacionadas com o tipo de simetrias que possuem e comportam vantagens no seu reconhecimento e na sua identificação. As respostas à questão subjacente a esta matéria (ver Figura 64) podem ser analisadas no Gráfico 29.

**Figura 64.** Enunciado da Questão 3.8 do Questionário

- 3.8) Existem rosáceas cíclicas e diedrais. O que as distingue?
- As cíclicas só possuem simetrias de rotação e as diedrais só possuem simetrias de reflexões.
  - Nas diedrais, o número de simetrias de reflexão é igual ao número de simetrias de rotação, nas cíclicas existem simetrias de reflexão mas em número diferente das simetrias de rotação.
  - Ambas possuem simetrias de rotação mas as diedrais também possuem simetrias de reflexão.
  - Outra razão. Qual? \_\_\_\_\_.

**Gráfico 29.** Respostas à Questão 3.8 do Questionário

Na visualização deste gráfico, podemos constatar que 72 professores não responderam à questão, o que corresponde a cerca de 51% do total dos inquiridos. Desta forma, somos levados a pensar que estes professores talvez não reconheçam estas designações e que isso pode justificar a ausência de resposta. Também se pode verificar que existem 19 professores que responderam inadequadamente, pois optaram pelas opções (1) ou (2). Acrescenta-se que não houve um único professor a optar por *outra razão* e que 51 professores responderam corretamente (36% dos inquiridos). A Tabela 48 mostra as respostas distribuídas por ciclos de ensino.

**Tabela 48.** Número de Respostas à Questão 3.8 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

Variáveis	Respostas à questão 3.8				Total
	Não respondeu	As cíclicas só possuem simetrias...	Nas diedrais, o número de simetrias...	Ambas possuem simetrias de rotação...	
Ciclo de lecionação em 2011/2012					
1.º CEB	9	2	0	1	12
2.º CEB	33	6	2	29	70
3.º CEB	30	8	1	21	60
Total	72	16	3	51	142

Podemos ver na tabela, que 9 professores do 1.º CEB não responderam a esta questão (75% do total deste grupo) e que 33 do 2.º CEB (47% do total) e 30 do 3.º CEB (50% do total) também não responderam. Os professores que responderam corretamente foram 1 do 1.º CEB, 29 do 2.º CEB e 21 do 3.º CEB, representando, respetivamente, 8%, 41% e 35% do total.

Para estudar se havia diferenças estatisticamente significativas entre as respostas dadas pelos professores do 2.º e do 3.º CEB, comparámos as respostas dadas por estes professores à questão 3.8 mas agrupando-as em apenas dois grupos (ver Tabela 49): os que responderam acertadamente e os que deram outra resposta ou não responderam.

**Tabela 49.** Respostas à Questão 3.8 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de lecionação (2011/2012)					
		2.º CEB		3.º CEB		Total	
		n	%	n	%	n	%
Respostas à questão 3.8	Resposta certa	29	41,4%	21	35,0%	50	38,5%
	Outra resposta	41	58,6%	39	65,0%	80	61,5%
	Total	70	100,0%	60	100,0%	130	100,0%

\* Aplicado o teste do Qui-Quadrado com nível de significância de 0,05.

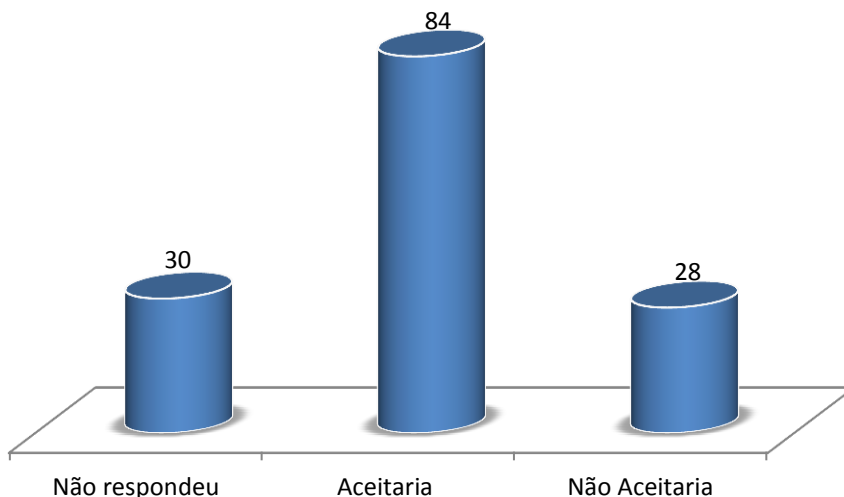
Aplicámos um teste de independência do Qui-quadrado às variáveis em causa e obtivemos um  $p = 0,453$ , o que, traduzindo-se na não independência das variáveis, permite concluir, com 95% de confiança, que os professores destes dois ciclos responderam de forma semelhante à questão 3.8.

As próximas perguntas remetem-nos para o reconhecimento das propriedades das rosáceas possuírem finitas simetrias e de a amplitude mínima de rotação ser um divisor de  $360^\circ$ . No caso da questão 3.15 (ver Figura 65), dado que a circunferência possui infinitas simetrias de rotação e de reflexão, não é considerada uma rosácea. As respostas a esta questão estão plasmadas no Gráfico 30.

**Figura 65.** Enunciado da Questão 3.15 do Questionário

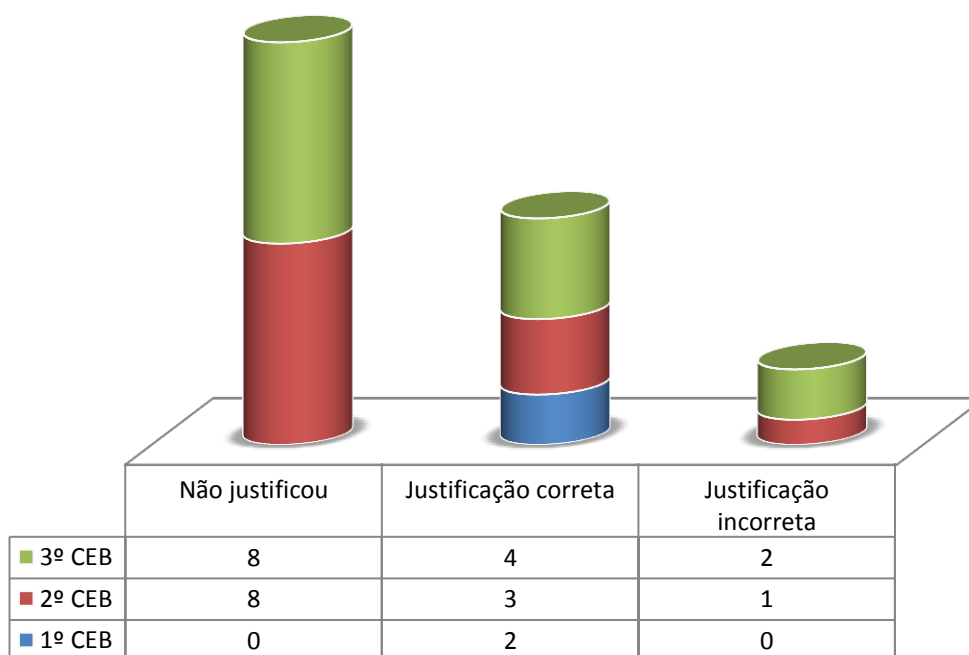
<p>3.15) Aluno: "Professora, a circunferência é uma rosácea especial porque tem infinitos eixos de reflexão."</p> <p><input type="checkbox"/> Aceitaria a afirmação.    <input type="checkbox"/> Não aceitaria a afirmação, pois _____</p> <p>_____</p>
---

Pela análise do gráfico, podemos verificar que 30 professores não apresentaram resposta a esta questão e que 84 aceitariam a resposta, pelo que parecem desconhecer que as rosáceas representam grupos finitos de simetrias. A soma destes dois números representa 80% da nossa amostra. Dos professores inquiridos, 28 (20%) responderam corretamente, não aceitando a resposta.

**Gráfico 30.** Respostas à Questão 3.15 do Questionário

As respostas a esta questão também não tinham nenhuma relação de dependência com o ciclo de ensino dos professores (2.º ou 3.º CEB) pois o teste de independência do Qui-Quadrado, aplicado a estas duas variáveis, gerou um  $p = 0,523$ .

Através do Gráfico 31, vemos a justificação dada pelos professores inquiridos, discriminados por ciclos de ensino.

**Gráfico 31.** Justificações Apresentadas pelos Professores à Questão 3.15 do Questionário

De um total de 28 professores, 16 não justificaram a sua opção e 3 apresentaram uma justificação que definimos como incorreta e que passamos a transcrever:

- (a) “na circunferência têm-se eixos de simetria e não eixos de reflexão, porque a figura fica invariante”;
- (b) “pode não ter eixos de reflexão”;
- (c) “tem que haver um ângulo mínimo”.

Na justificação (a), o professor desconhece que um eixo da reflexão também pode ser designado por eixo de simetria, mas que nem sempre o eixo da reflexão pode ser designado por eixo de simetria. Mais uma vez se faz notar a prevalência concetual da simetria como sendo a reflexão e, conseqüentemente, a designação do eixo como sendo um eixo de simetria. Quanto à justificação (b), não se compreende que o professor tenha considerado que a circunferência não tem eixos de reflexão. A justificação (c) é imprecisa e suscita-nos algumas dúvidas pelo que a consideramos incorreta: será que o professor está a associar a noção de infinito ao número infinito de reflexões e, conseqüentemente, de rotações remetendo para a impossibilidade de uma medida de amplitude mínima? Ou será que o professor desconhece essa característica de um número finito de reflexões e de rotações e remete apenas para a impossibilidade de definir um ângulo mínimo?

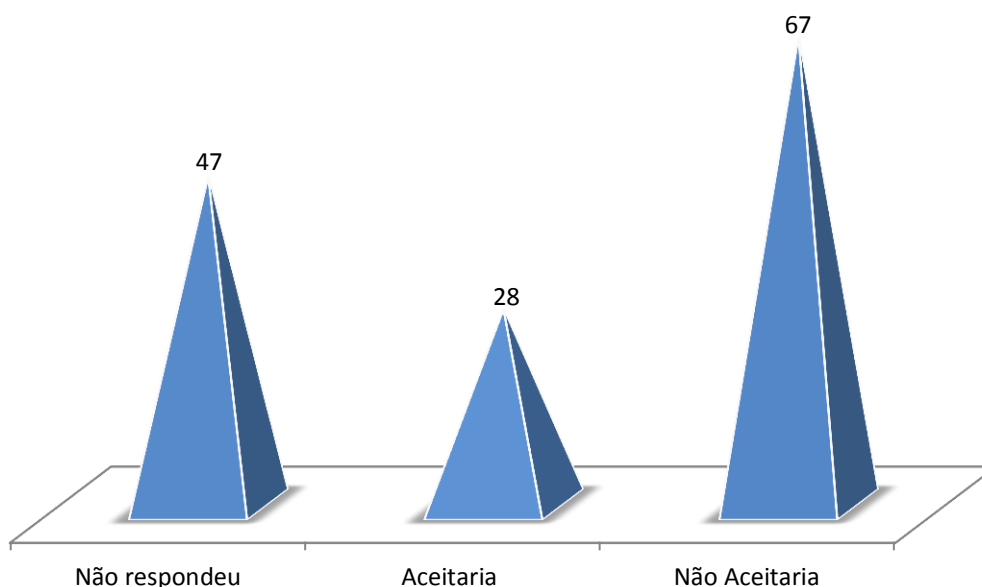
Em resumo, obtivemos um total de apenas 9 respostas com justificação correta, constituindo cerca de 6% do total das respostas dos professores da nossa amostra.

Também em relação à justificação na questão 3.15 e no que respeita aos professores do 2.º ou 3.º CEB, agrupamos as justificações em dois grupos: (1) justificações incorretas ou sem justificação e (2) justificações corretas. Este agrupamento permitia aplicar o teste exato de Fisher uma vez que o teste de independência do Qui-Quadrado não reunia as condições de aplicabilidade. Contudo, o valor-p obtido ( $p = 0,341$ ) permite concluir, com 95% de confiança, que o ciclo de lecionação não influencia o tipo de justificação apresentada ao não se aceitar a circunferência como sendo uma rosácea.

No que concerne à medida de amplitude mínima de uma simetria de rotação numa rosácea, colocamos, na questão 3.16, a possibilidade de uma destas possuir uma simetria de rotação com amplitude mínima de  $62^\circ$  (ver Figura 66). Uma vez que 360 não é um múltiplo de 62, tal rosácea não existe. As respostas a esta questão estão plasmadas no Gráfico 32.

**Figura 66.** Enunciado da Questão 3.16 do Questionário

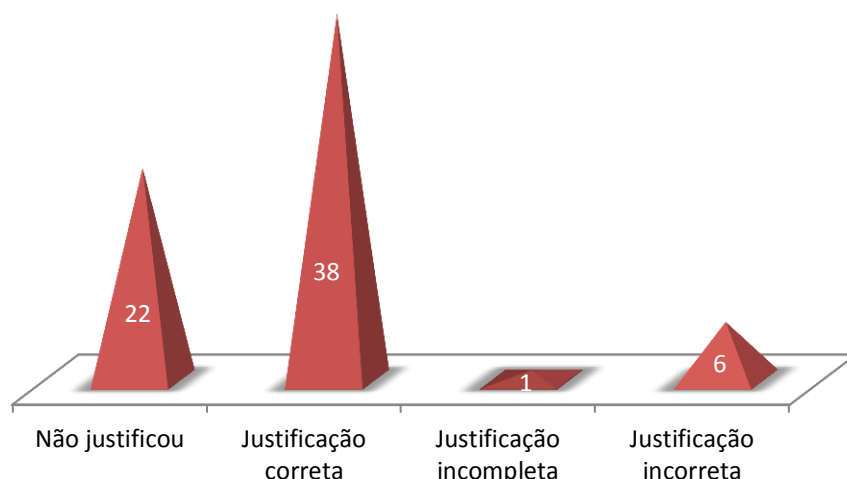
<p>3.16) <b>Aluno:</b> “A rosácea que desenhei em casa tinha amplitude mínima de <math>62^\circ</math>. Medi com o transferidor.”</p> <p><input type="checkbox"/> Teria de ver a rosácea desenhada para aceitar a afirmação.</p> <p><input type="checkbox"/> Não aceitaria a afirmação pois _____.</p>
--

**Gráfico 32.** Respostas à Questão 3.16 do Questionário

Nesta questão, a taxa de respostas em branco (47) representa cerca de 33% dos professores inquiridos, 28 professores responderam ter de ver a rosácea para poder aceitar a afirmação e 22 dos 67 professores que não aceitariam a resposta não apresentaram, como solicitado, uma justificação. Os 45 professores que a apresentaram fizeram-no de diversas formas como se pode ver no Gráfico 33. A maioria deles, 38, o que representa 27% dos inquiridos, apresentou uma justificação correta, enquanto um apresentou uma justificação incompleta e seis uma incorreta, que detalhamos de seguida:

- “Uma rosácea tem 360 graus”.
- “Teria que rodar 6 vezes para ter 360°,  $6 \cdot 60 = 360$ ”.
- “A rosácea tem uma amplitude diferente”.
- “O ângulo não está correto”.
- “Não sabia exatamente o número de ordem da simetria rotacional”.
- “Não sabia a ordem”.

As quatro primeiras explicações parecem revelar que estes professores reconheciam a sua impossibilidade, mas não apresentaram uma justificação completa para que possamos tirar essa ilação. As restantes duas justificações não estão corretas pois, através da medida de amplitude do ângulo mínimo da simetria de rotação, é possível definir a ordem da rosácea, mas não é necessário conhecer essa ordem para analisar a possibilidade dessa amplitude.

**Gráfico 33.** Justificações Apresentadas pelos Professores à Questão 3.16 do Questionário

Analogamente ao que fizemos anteriormente, a distribuição das ditas justificações pelos diferentes ciclos de ensino é mostrada na Tabela 50.

**Tabela 50.** Justificação da Questão 3.16 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

Variáveis		Justificação dada na questão 3.16				Total
		Não justificou	Justificação correta	Justificação incompleta	Justificação incorreta	
Ciclo de lecionação em 2011/2012	1.º CEB	1	0	1	2	4
	2.º CEB	11	23	0	3	37
	3.º CEB	10	15	0	1	26
	Total	22	38	1	6	67

Olhando para a tabela, vislumbra-se que os números destacam os 23 professores do 2.º CEB que apresentaram uma justificação correta, correspondendo a cerca de 33% dos docentes deste ciclo de ensino. Os 14 professores do 3.º CEB que justificaram corretamente a sua opção representam 23% dos profissionais deste ciclo. Em relação àqueles que não aceitaram a afirmação mas não a justificaram, os 11 professores do 2.º CEB e os 9 professores do 3.º CEB representam valores percentuais muito equilibrados, os primeiros com cerca de 15,7% e os segundos com 15%. Ainda, e no que concerne aos professores do 1.º CEB, observamos que nenhum deles respondeu corretamente a esta questão.

Na globalidade, podemos conjecturar que a temática em causa suscitou inúmeras dificuldades e bloqueios, registando-se uma percentagem média de cerca de 31% de professores que não responderam às questões.

Analogamente ao que ocorreu nas justificações à resposta 3.15, para tornar possível a aplicação de testes estatísticos, procedemos ao agrupamento das respostas em dois grupos: (1) respostas corretas e (2) ausência de respostas ou respostas incorretas. Tentamos, assim, estudar a relação de dependência entre o ciclo de ensino (2.º e 3.º CEB) e estas respostas (ver Tabela 51) com o teste do Qui-quadrado, e o valor de prova ( $p = 0,721$ ) indica que não há diferenças significativas entre as respostas dos professores dos dois ciclos de ensino.

**Tabela 51.** Justificação da Questão 3.16 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Ciclo de lecionação (2011_2012)		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
Justificação à questão 3.16 (agrupada)	Não justificou ou incorreta	n	14	11	25
		%	56,0%	44,0%	100,0%
	Justificação correta	n	23	15	38
		%	60,5%	39,5%	100,0%
Total		n	37	26	63
		%	58,7%	41,3%	100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

Em suma, nesta temática, os professores revelaram maiores dificuldades do que nos temas anteriores. Podemos destacar um número mais elevado de não respostas e uma percentagem muito baixa de sucesso na inclusão da simetria identidade no grupo das simetrias, no reconhecimento das propriedades das rosáceas dificultado pela presença, mais uma vez detetada, da antiga concetualização de simetria.

## Frisos

Respeitando a linha de pensamento traçada no nosso projeto de trabalho, esta última secção deste capítulo será dedicada ao estudo dos frisos, que são grupos infinitos que contêm simetrias de translação numa só direção.

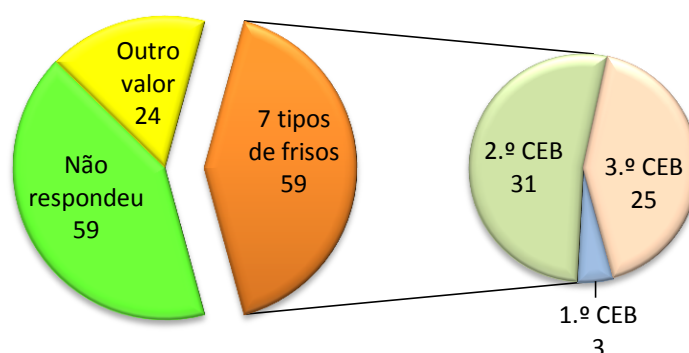
Iniciámos a análise das questões dentro deste tema com a pergunta número 3.9 (ver Figura 67).

**Figura 67.** Enunciado da Questão 3.9 do Questionário

3.9) Quantos tipos de frisos conhece? \_\_\_\_.

As respostas a esta questão simples e direta estão plasmadas no Gráfico 34.

Verificamos que 59 professores não responderam, mas também se pode constatar que 59 professores responderam corretamente a esta questão, representando cerca de 42% do universo da amostra. Os restantes, 24 professores, mencionaram a existência de outros tipos de frisos distintos de sete. Os 59 professores que referiram os 7 tipos de frisos apresentam uma distribuição percentual, muito aproximada entre os professores inquiridos do 2.º CEB e do 3.º CEB, correspondendo a cerca de 40% (ver Gráfico 34).

**Gráfico 34.** Respostas à Questão 3.9 do Questionário

A Tabela 52 mostra a resposta a esta questão pelos professores dos 2.º e 3.º CEB.

**Tabela 52.** Resposta à Questão 3.9 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*		Ciclo de lecionação em 2011/2012		Total	
		2.º CEB	3.º CEB		
Respostas à questão 3.9	Não respondeu	n	11	6	17
		%	64,7%	35,3%	100,0%
	7 tipos de frisos	n	18	13	31
		%	58,1%	41,9%	100,0%
	Outro valor	n	8	7	15
		%	53,3%	46,7%	100,0%
Total		n	37	26	63
		%	58,7%	41,3%	100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

No teste de independência do Qui-quadrado aplicado às variáveis ciclo de ensino e tipo de respostas à questão 3.9 obteve-se  $p = 0,804$ , o que confirma, com 95% de confiança, que não há diferenças significativas entre as respostas apresentadas pelos professores destes dois ciclos a esta questão (ver Tabela 52).

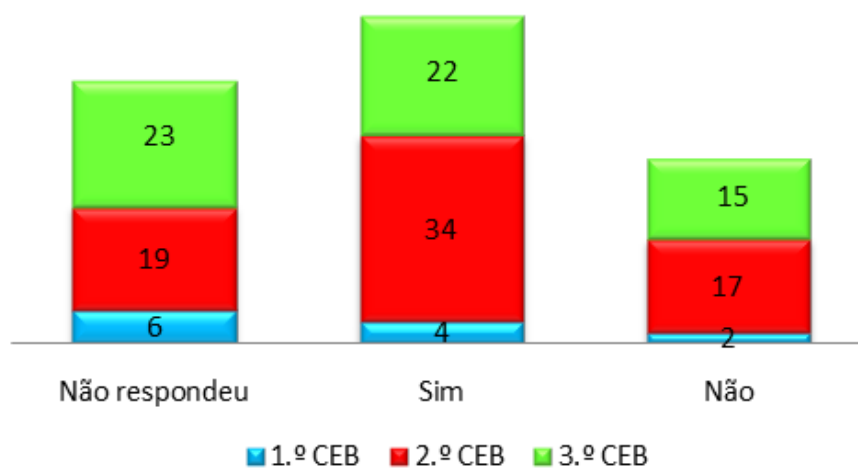
Sabemos que o significado da existência dos 7 tipos de frisos tem explicação pelo número de simetrias neles presentes. É, então, neste âmbito, que surge a questão 3.10 (ver Figura 68), onde se aborda a problemática já referida anteriormente sobre a existência de reflexões de eixo horizontal<sup>42</sup> e de reflexão deslizantes.

Nesta questão foram abordadas, em simultâneo, duas questões que serão analisadas em separado. As respostas à primeira implicação são representadas no Gráfico 35.

**Figura 68.** Enunciado da Questão 3.10 do Questionário

3.10) Se um friso tem simetria de reflexão deslizante, então, também tem simetria de reflexão de eixo horizontal?  
 Sim     Não    E o recíproco é verdadeiro?     Sim     Não

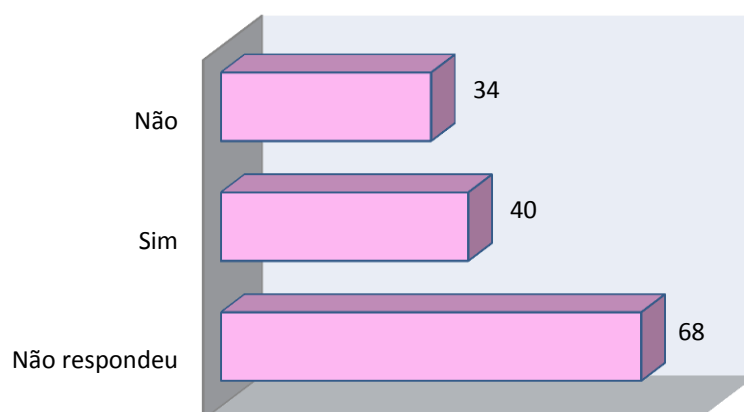
**Gráfico 35.** Respostas à Primeira Pergunta da Questão 3.10 do Questionário



Podemos observar que 48 professores não responderam e que 60 professores (42% dos inquiridos) acreditam que um friso com simetria de reflexão deslizante possui, também, reflexão de eixo horizontal, donde resulta que 34 professores responderam corretamente a esta questão, o que corresponde a 24% do total dos professores inquiridos.

Gráfico 36 mostra as respostas dadas à segunda parte da questão.

<sup>42</sup> Mais especificamente, reflexões com eixo paralelo à direção da translação.

**Gráfico 36.** Respostas à Segunda Parte da Questão 3.10 do Questionário

Os dados observados mostram que esta implicação terá gerado ainda mais dúvidas, manifestadas pela ausência de resposta de 68 professores (48% dos inquiridos). Existem, também, 40 professores que admitem que um friso com simetria de reflexão de eixo horizontal possui, também, simetria de eixo da reflexão deslizante. Portanto, e face à totalidade dos professores inquiridos, regista-se uma minoria de respostas corretas (34) que representa cerca de 24% dos inquiridos.

A Tabela 53 mostra a distribuição destas respostas pelos três ciclos de ensino.

**Tabela 53.** Resposta à Segunda Parte da Questão 3.10 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

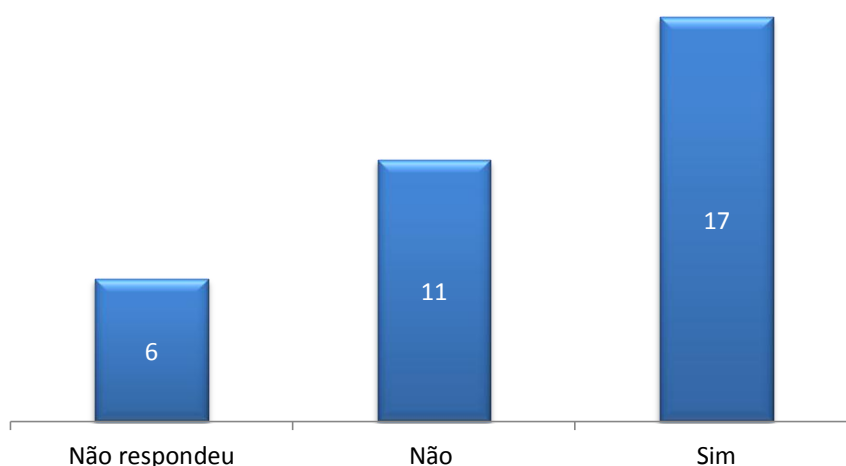
Variáveis		Respostas à questão 3.10 (2.ª parte)			Total
		Não respondeu	Sim	Não	
Ciclo de lecionação em 2011/2012	1.º CEB	7	2	3	12
	2.º CEB	29	25	16	70
	3.º CEB	32	13	15	60
Total		68	40	34	142

O número de professores que responderam corretamente a esta parte da questão, 3 do 1.º CEB, 16 do 2.º CEB e 15 do 3.º CEB correspondem a percentagens semelhantes dos inquiridos em cada ciclo – respetivamente 25%, 23% e 25%.

Em dois testes de independência do Qui-Quadrado aplicados às variáveis ciclos de ensino (2.º e 3.º CEB) e respostas às duas partes da questão 3.10, obtivemos, respetivamente,  $p = 0,638$  e  $p = 0,532$ , o que confirma, com 95% de confiança, que não há diferenças significativas entre estas respostas dos professores destes ciclos de ensino a cada uma destas partes da questão em causa.

Considerámos também importante conhecer o número de professores inquiridos que responderam corretamente às duas partes da questão 3.10. No Gráfico 37, apresentam-se as respostas à segunda parte da questão 3.10 dos professores que responderam corretamente à primeira parte.

**Gráfico 37.** Respostas à Segunda Parte da Questão 3.10 do Questionário tendo Respondido Não na Primeira Parte desta Questão

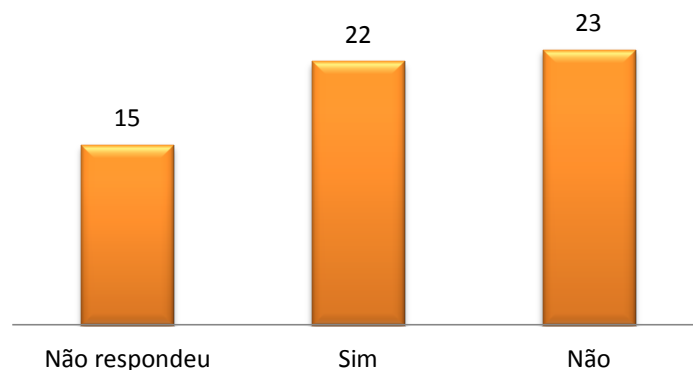


Pela análise do Gráfico 37, verificamos que apenas 11 professores responderam negativamente às duas questões, o que corresponde a 7% dos inquiridos. Repare-se ainda que a maior parte dos professores que responderam corretamente à primeira questão aceitam que um friso com simetria de reflexão de eixo horizontal, contém, também, uma simetria de reflexão deslizante (17). Esta situação tinha sido presenciada por nós em duas aulas que observámos.

É interessante analisar que cerca de 37% dos professores inquiridos que admitem e consideram que a existência de uma reflexão deslizante implica a existência de uma reflexão de eixo horizontal, e que responderam à segunda questão, também admitem que a existência de reflexão de eixo horizontal implica a existência de reflexão deslizante (ver Gráfico 38). Ou seja, consideram que a reflexão horizontal e a reflexão deslizante existem, em todos os casos, e em simultâneo.

A partir da aplicação do teste do Qui-quadrado, independentemente da resposta dada à primeira questão da 3.10, podemos afirmar, com 95% de certeza, que as respostas à segunda parte da questão pelos professores dos diferentes ciclos não são significativamente diferentes pois o valor-p obtido é sempre superior a 0,05.

**Gráfico 38.** Respostas à Segunda Parte da Questão 3.9 do Questionário tendo Respondido Sim na Primeira Parte desta Questão



No que concerne à designação utilizada por Washburn e Crowe (1998) e que está presente num dos manuais escolares adotado por um número significativo de escolas em que estes professores trabalhavam, quisemos averiguar quantos dos professores inquiridos conseguiriam compreender a designação em causa. Vamos interpretar as respostas à questão 3.11 (ver Figura 69) apresentadas no Gráfico 39.

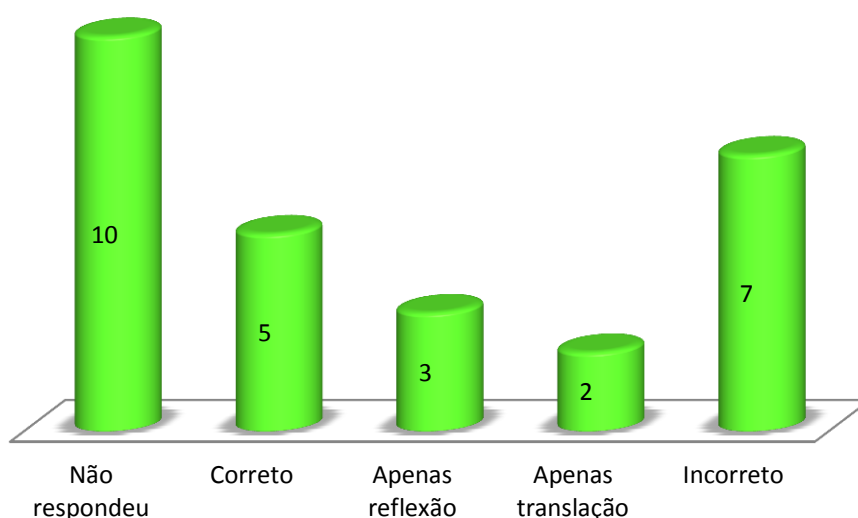
**Figura 69.** Enunciado da Questão 3.11 do Questionário

3.11) Na resolução de um determinado exercício surge um friso com a designação p1m1. Conhece esta classificação?				
<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Sim, este friso tem (pode selecionar mais do que uma opção):			
	<input type="checkbox"/> Translação	<input type="checkbox"/> Rotação	<input type="checkbox"/> Reflexão	<input type="checkbox"/> Reflexão deslizante

Trabalhando este item de forma semelhante ao tratamento dado às respostas da questão 3.10, analisámos, numa primeira fase, o reconhecimento desta designação e, numa segunda fase, se os professores que a conheciam conseguiam identificar as simetrias existentes no referido friso.

Na análise das respostas a esta questão faremos uma observação conjunta dos Gráficos 39 e 40 onde o primeiro mostra as respostas à primeira parte da questão 3.10 e, o segundo, as simetrias presentes no friso p1m1.

Pelo Gráfico 39 podemos ver que 27 professores dizem conhecer aquela designação e, pelo Gráfico 40, verificamos que somente 5 conseguem identificá-las corretamente (ver Gráfico 40). Podemos ainda observar que, na sua maioria, os professores inquiridos parecem desconhecer esta simbologia (79), havendo, inclusivamente, 25% dos professores que não apresentaram resposta a esta questão.

**Gráfico 39.** Respostas à Primeira Parte da Questão 3.11 do Questionário**Gráfico 40.** Opções da Segunda Parte da Questão 3.11 Associada à Seleção Prévia do Sim

Testámos, com o Qui-quadrado, a independência das variáveis *ciclo de ensino* (2.º ou 3.º CEB) e *respostas à primeira parte da questão 3.11* e obtivemos um valor-p superior a 0,05 ( $p = 0,707$ ), pelo que podemos afirmar com 95% de certeza que as variáveis em causa não estão relacionadas, ou seja, que os professores destes dois ciclos de ensino responderam de forma semelhante à primeira parte da questão 3.10.

Continuando na análise à consistência e ao significado desta resposta, verificamos que, dos 27 professores que conhecem esta simbologia, 10 deles não selecionaram nenhuma opção com a identificação das simetrias nele presentes. Houve ainda 7 professores que identificaram outras simetrias para além das referidas. Vamos analisar, novamente, a distribuição das escolhas por ciclos de ensino (ver Tabela 54).

**Tabela 54.** Seleção das Opções Associadas à Resposta Sim na Questão 3.11 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino

Variáveis	Respostas à questão 3.11 de identificação das simetrias em p1m1					Total
	Não respondeu	Correto	Só reflexão	Incorreto	Só translação	
Ciclo de lecionação em 2011/2012						
1.º CEB	1	1	0	0	0	2
2.º CEB	4	4	2	2	1	13
3.º CEB	5	0	1	5	1	12
Total	10	5	3	7	2	27

Neste caso, analogamente a outros casos anteriormente referidos e relativamente aos professores dos 2.º ou 3.º CEB, reagrupamos as justificações em dois grupos: (1) ausência de justificação ou justificação incorreta e (2) justificação correta (ver Tabela 55).

**Tabela 55.** Justificações apresentadas na Questão 3.11 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*			Ciclo de lecionação 2011/2012		Total
			2.º CEB	3.º CEB	
Justificação à questão 3.11 (agrupada)	Não respondeu	n	9	12	21
	ou respondeu incorretamente	%	42,9%	57,1%	100,0%
	Correto	n	4	0	4
		%	100,0%	,0%	100,0%
Total			n		
			%		
			13	12	25
			52,0%	48,0%	100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

Como se pode observar na tabela acima, dos professores do 3.º CEB não houve nenhum a responder corretamente. Os 5 docentes que identificaram corretamente as simetrias presentes no tal friso, lecionam no 1.º CEB e no 2.º CEB, sendo maioritariamente deste último ciclo de ensino.

Tendo em conta somente os professores dos 2.º e 3.º CEB, a aplicação do teste de Fisher a estas duas variáveis (ciclo de ensino e justificação à questão 3.11) devolveu um  $p = 0,096$  ( $p > 0,05$ ), pelo que, mais uma vez, não podemos afirmar que existe uma relação de dependência entre o ciclo de ensino e as justificações dos professores que reconheciam aquela designação.

Continuando a avançar na interpretação das questões presentes no questionário, detemo-nos na proposta de resolução de uma determinada atividade, em que se fazia a associação de frisos do

mesmo tipo, ou seja, em que os frisos correspondentes teriam de possuir as mesmas simetrias, apresentada na questão 3.12 (ver Figura 70).

**Figura 70.** Enunciado da Questão 3.12 do Questionário

3.12) **Aluno:** “Professora, em casa, recortei alguns frisos e associei-os assim (ver fig. 1):”

Aceitaria a resposta.

Não aceitaria a resposta pois \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

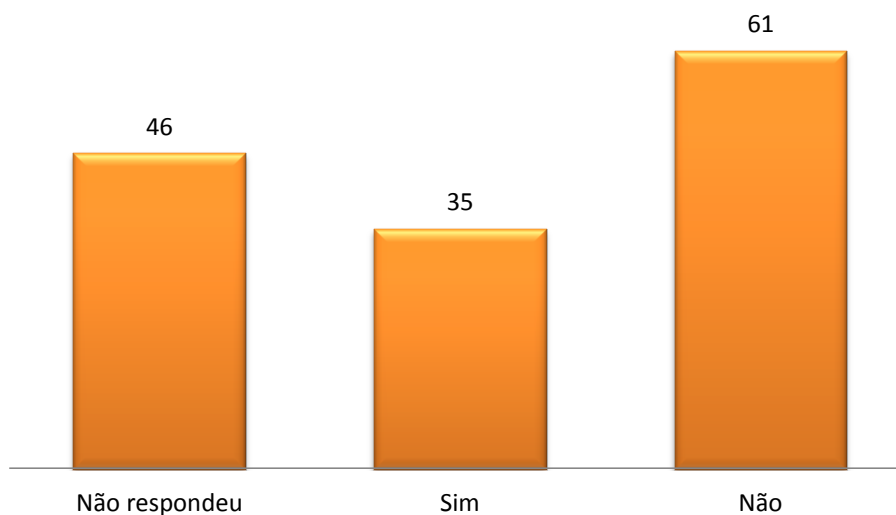
Fig. 1

Fontes imagens: Vídeo internato dos Carvalhos e curso do ProfMat 2008 por Eduardo Veloso

Nesta questão, o terceiro friso do lado esquerdo possui simetria de reflexão deslizante e simetria de translação e o friso que lhe está associado contém unicamente simetria de translação, pelo que a sua associação não está correta, ao contrário das restantes.

O Gráfico 41 mostra as respostas à questão 3.12.

**Gráfico 41.** Resposta à Questão 3.12 do Questionário



Como podemos observar, há 46 professores que não responderam à pergunta e 35 que aceitaram a resposta. Identificamos duas hipóteses justificativas para estas escolhas:

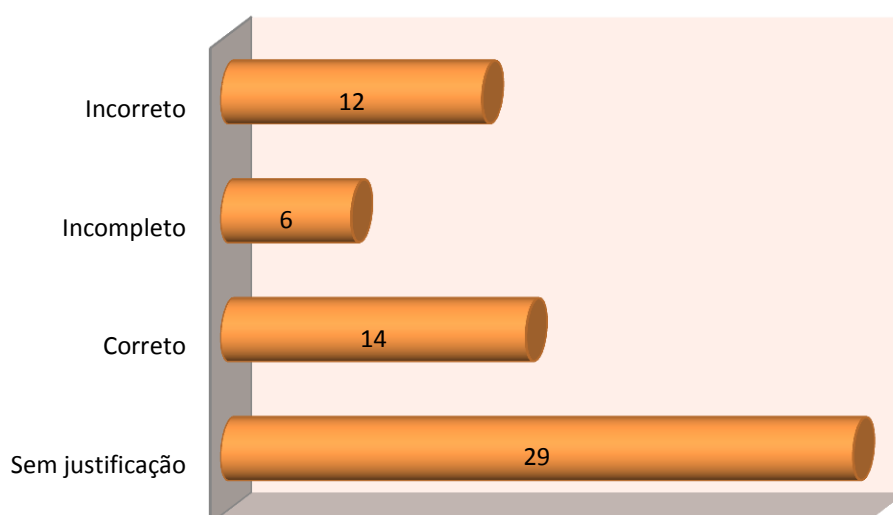
- Os professores não identificaram corretamente as simetrias presentes em cada friso;
- Os professores analisaram os frisos de forma intuitiva.

Na totalidade, verifica-se que há 81 professores, correspondendo a cerca de 57% dos inquiridos, que não deram uma resposta correta a esta questão e que 61 identificaram erros naquela associação.

Assumindo somente as respostas dos professores do 2.º ou 3.º CEB e aplicando um teste de independência do Qui-Quadrado às variáveis ciclo de ensino e respostas a esta questão, obtemos um valor-p = 0,622 que nos revela, com 95% de confiança, que não há uma relação de dependência entre as variáveis, isto é, os professores destes ciclos de ensino responderam de forma semelhante a esta questão.

O Gráfico 42 sintetiza as justificações dos professores que não aceitaram a resposta do aluno.

**Gráfico 42.** Justificação dada à Questão 3.12 do Questionário



Como se pode ver, 29 destes 61 professores não apresentam qualquer justificação e 12 docentes apresentaram uma justificação incorreta. Entre estas é de destacar as que referiam apenas a inexistência de relação entre os frisos, ou, ainda, aquelas que referiam que os frisos não estavam bem associados mas não identificavam o erro.

Seis professores apresentaram uma justificação incompleta, baseando-se essencialmente no argumento de que havia frisos que não estavam bem associados, embora não tenham a certeza de que tenham conseguido identificar qual. Atentamos que neste conjunto há, também, 14 professores que responderam corretamente ao desafio, o que corresponde a cerca de 10% de todas as respostas avaliadas.

Mais uma vez, e analogamente ao procedimento efetuado com as últimas questões, vejamos como se distribuem as justificações por ciclos de ensino (ver Tabela 56).

**Tabela 56.** Justificação da Resposta à Questão 3.12 pelos Professores dos Diferentes Ciclos de Ensino que Responderam Negativamente a essa Questão

Variáveis	Justificação à questão 3.12				Total
	Sem justificação	Correto	Incompleto	Incorreto	
Ciclo de lecionação em 2011/2012					
1.º CEB	0	3	0	2	5
2.º CEB	15	6	4	7	32
3.º CEB	14	5	2	3	24
Total	29	14	6	12	61

No que se refere aos professores do 1.º CEB, todos os que não aceitaram a afirmação, justificaram-na, porém apenas 25% dos inquiridos apresentaram uma justificação correta.

Conferimos que este tema foi aquele em que a ausência de respostas foi mais evidente. Há mesmo um grupo de 17 professores que não responderam a nenhuma questão deste grupo de questões sobre frisos, sendo 2 deles do 1.º CEB, 7 do 2.º CEB e 8 do 3.º CEB.

Comparámos ainda as justificações dos professores dos 2.º e 3.º CEB nesta questão 3.12, para o que agrupamos as justificações a esta questão em dois grupos: (1) ausência de justificação ou justificação incorreta e (2) justificação correta ou incompleta (ver Tabela 57).

**Tabela 57.** Resposta à Questão 3.12 pelos Professores do 2.º e 3.º CEB

Variáveis*	Ano Letivo 2011/2012		Total
	2.º CEB	3.º CEB	
Resposta à questão 3.12 (agrupada)			
Sem justificação ou justificação incorreta	n	22	39
	%	56,4%	100,0%
Correto ou incompleta	n	10	17
	%	58,8%	100,0%
Total	n	32	56
	%	57,1%	100,0%

\* Aplicado o teste exato de Fisher com nível de significância de 0,05.

No teste de independência do Qui-quadrado aplicado às variáveis ciclos de ensino e justificações da resposta à questão 3.12, obtivemos um  $p = 0,867$ , donde podemos concluir, com 95% de confiança, que não há diferenças significativas nas justificações apresentadas pelos professores destes dois ciclos de ensino.

Podemos depreender que o conhecimento dos professores nesta matéria se revela pouco consistente e com diversas fragilidades, exibindo um leque de dificuldades na identificação das

simetrias presentes nos frisos. Os professores inquiridos não possuem destreza na identificação das simetrias presentes nos frisos cuja análise parece não ser mais do que uma observação com pouca ou nenhuma conexão com as transformações geométricas. Não encontramos diferenças significativas nas respostas dadas pelos professores do 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico.

### Síntese

Com as questões do foro do conhecimento do conteúdo tentámos perceber se os professores reconheciam a presença da estrutura de grupo associada ao conjunto das isometrias munido da operação de composição, nomeadamente, o reconhecimento da propriedade de fecho (ver questão 3.2) e da existência de elemento neutro (ver questão 3.6). Nesta problemática, conseguimos perceber que cerca de 51% dos docentes inquiridos, não reconhece a existência de apenas quatro isometrias, sendo que a maior proporção de respostas corretas é proveniente dos professores do 2.º CEB. Contudo, não se verifica a existência de uma relação de dependência estatisticamente significativa entre as respostas e o ciclo de lecionação.

Ainda em relação ao item da existência das quatro isometrias e, pelo facto de as transformações originarem figuras congruentes, reciprocamente, podemos afirmar que sendo duas figuras congruentes, existe uma isometria que transforma uma na outra. Ora, a questão 3.18 remetia para a existência de duas figuras congruentes sem que houvesse uma isometria que pudesse transformar uma na outra. Mas, tal questão não foi contrariada por cerca de 56% dos professores inquiridos. Este ponto permite analisar o grau de certeza das respostas corretas dadas à questão 3.2, pelos professores inquiridos, acerca da existência de apenas quatro isometrias. Destes professores somente 43% responderam corretamente a esta questão (4 isometrias), o que nos leva a acreditar na existência de uma incoerência notável entre o conceito de isometria, o significado da existência das quatro isometrias e o significado de congruência.

Na relação entre a simetria e as isometrias, 56% dos professores inquiridos respondem corretamente (ver questão 3.3), no entanto, há uma percentagem de professores da nossa amostra que, de forma explícita, demonstram a presença da antiga conceção de simetria (27%) ao seleccionaram a opção: *duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra*.

Generalizando para a população, através dos testes de hipóteses aplicados e com um grau de confiança de 95%, podemos afirmar que há mais professores do 2.º CEB a acertar na resposta à

questão 3.3<sup>43</sup> (66%) do que os professores do 3.º CEB (47%) e essa diferença é estatisticamente significativa ( $p = 0,034$ ). Esta foi a primeira questão sobre esta temática a ser tratada e o cruzamento destas respostas com as respostas a outras questões ajudaram a validar a consistências das respostas dadas. Contudo, as respostas apontaram para alguma incoerência, principalmente quando os docentes reconheciam que qualquer simetria é uma isometria mas, ao mesmo tempo, selecionaram outra opção que identificava a presença da antiga conceitualização de simetria.

A incoerência referida anteriormente é confirmada quando apenas 29% dos professores inquiridos não distingue eixo de reflexão de eixo de simetria. Se analisarmos por ciclos de lecionação, os valores percentuais observados remetem para percentagens de respostas incorretas em cerca de 83% para o 1.º CEB, 69% para o 2.º CEB e 72% para o 3.º CEB. Os docentes destes dois últimos grupos não apresentam diferenças significativas entre si, o que parece indicar que lecionar num destes ciclos de ensino não interfere no tipo de respostas dadas a esta questão.

No reconhecimento das simetrias identidade, também se gerou alguma confusão por parte dos professores inquiridos, sendo a ausência de resposta o resultado mais marcante (63%). Apenas 3 professores referiram as rotações completas e a translação de vetor nulo. As respostas evidenciam a existência de equívocos, desarrumação ou imprecisão concetual entre simetria e simetria identidade, o que indicia fragilidades no domínio do conceito de simetria ou, até, ausência de aprendizado ou conhecimento desta matéria.

No que concerne à simetria, a ilação mais concludente que se pode tirar destas questões, é a de que o conceito de simetria que está muito presente e enraizado nos professores está ultrapassado. Esta preocupação foi recentemente manifestada por educadores na área da Educação Matemática tais como Canavarro (2010), GT2 (2010) e Loureiro (2007).

No conjunto das simetrias específicas, incluídas no PMEB (2007), estão as rosáceas e os frisos. Pela análise das respostas às questões respeitantes a este tema, podemos dar maior sustento a algumas das ilações já mencionadas.

No que concerne às rosáceas, apesar de a maior parte dos professores inquiridos, identificaram o triângulo equilátero como uma rosácea (62%), o teste de hipótese aplicado concluiu que há diferenças estatisticamente significativas entre os professores do 3.º e do 2.º CEB ( $p = 0,015$ ): metade dos professores do 3.º CEB não respondem corretamente a esta questão, a contrastar com os 26% dos professores do 2.º CEB. Podemos concluir com 95% de confiança, que o ciclo onde lecionam os docentes influencia a resposta a esta questão e que os professores do 2.º CEB apresentam uma percentagem maior de respostas corretas.

---

<sup>43</sup> Que relação há entre o conceito de simetria e o conceito de isometria.

Na temática das rosáceas foi colocada, estrategicamente, uma questão (3.7), em que somente com o significado atual de simetria se poderia responder acertadamente. A percentagem de docentes da nossa amostra que identificou as simetrias de rotação num triângulo equilátero foi de 6%, o que confirmou as nossas ilações anteriores de que os professores inquiridos mantêm presente uma ideia ultrapassada de simetria.

Aqui devemos sublinhar que 94% dos professores não indicaram as 6 simetrias presentes num triângulo equilátero o que é deveras revelador da presença da antiga conceção de simetria.

Do mesmo modo que é visível a dificuldade dos docentes em reconhecer a estrutura de grupo no conjunto das isometrias, munido da operação de composição, também, no que concerne às simetrias verificamos a existência de dificuldades na associação de um grupo de simetrias a um conjunto (41%), e, ainda, a consideração da simetria identidade como uma simetria nele presente (32%). Também nas propriedades das rosáceas, apenas 20% dos professores inquiridos não identificaram a circunferência como uma rosácea, pelo facto de esta possuir infinitos eixos de reflexão (ou rotações), e somente 27% dos professores da amostra conseguiu explicar o porquê de a amplitude mínima de uma dada rosácea não poder ser de  $62^\circ$ .

Se nos remetermos para termos mais específicos desta temática, as rosáceas cíclicas e diedrais, apesar não fazerem parte do programa de Matemática (2007), são facilmente percebidas e a sua compreensão pode ser benéfica para colmatar algumas dificuldades dos alunos, nomeadamente na identificação das simetrias de reflexão e de rotação<sup>44</sup>. A identificação destas estruturas foi reconhecida por cerca de 36% dos professores inquiridos, não havendo diferenças significativas entre as respostas dadas pelos professores do 2.º e do 3.º CEB.

No total das questões referentes às rosáceas, em média, 31% dos professores não responderam às questões, indo ao encontro do que temos vindo a referir e a constatar, ou seja, a presença de inúmeras dificuldades nesta temática.

No que respeita às comparações entre professores do 2.º e do 3.º CEB, os testes de hipóteses não permitem identificar diferenças significativas, entre estes dois grupos de professores, nas respostas dadas às questões desta temática particular das simetrias, com exceção da primeira (ver questão 3.5<sup>45</sup>).

Relativamente aos frisos, a ausência de respostas foi mais notória que em relação às das rosáceas. Dos professores inquiridos do 2.º e 3.º CEB, aproximadamente 40% reconhecem a existência de 7 tipos de frisos, mas era importante indagar o porquê deste número 7. Contudo, dada a extensão da resposta, tal não se tornava viável. Desta forma, colocámos uma outra questão (ver

---

<sup>44</sup> Para além deste facto, o conhecimento profundo desta matéria incluiria certamente estas designações.

<sup>45</sup> Um triângulo equilátero pode considerado uma rosácea?

questão 3.10) que nos permitiria perceber a existência de concepções erradas relativamente às simetrias presentes nestas estruturas: os frisos.

Num friso, a simetria de reflexão horizontal (ou com a mesma direção do vetor associado à translação) e a reflexão deslizante não podem ocorrer em simultâneo, mas esta realidade não é conhecida pela maioria dos professores inquiridos. Ora, na nossa amostra, 42% dos professores acreditam que um friso com reflexão deslizante tem, também, reflexão de eixo horizontal, 28% considera que ter reflexão de eixo horizontal implica ter reflexão deslizante e, ainda, 37% consideram estas relações uma equivalência. Também existe uma pequena parte dos docentes inquiridos (7%) que reconhecem a inexistência de qualquer relação de implicação entre estas simetrias. Podemos afirmar, então, que estes são os únicos docentes que poderão estar em condições para explicar a razão de haver apenas 7 tipos de frisos. A distribuição das respostas pelos docentes inquiridos dos diferentes grupos de lecionação não revela diferenças estatísticas significativas.

A notação de Washburne e Crowe (1998), frequentemente presente nos livros de referência sobre estas matérias e, pelo menos, num dos manuais escolares adotado em várias escolas da nossa amostra, pode auxiliar na organização mental das simetrias presentes num friso, mas esta é reconhecida por apenas 4% dos professores inquiridos. Esta ínfima percentagem não inclui um único docente do 3.º CEB e, na sua maioria, são do 2.º CEB.

Na identificação de simetrias presentes nos frisos, conseguimos uma taxa de respostas certas ou incompletas de, aproximadamente, 14% dos professores inquiridos, revelando uma dificuldade em perceber o que avaliar ou analisar neste tipo de representações. Repare-se que o estudo dos frisos está contemplado no programa de Matemática do Ensino Básico em todos os ciclos de ensino, ainda que, no 1.º CEB, seja de forma intuitiva. Nos 1.º CEB e 2.º CEB são referidos especificamente o estudo destas representações, enquanto no 3.º CEB, e com a referência ao estudo das simetrias de translação, se induz, imediatamente, o estudo dos frisos que são caracterizados pela presença deste tipo simetria. Este grupo dos frisos não era, sequer, o último grupo de questões do questionário, o que, se assim fosse, poderia induzir-nos a concluir por um eventual cansaço que justificasse aquela resposta ao solicitado. O último grupo registou uma frequência de respostas que consideramos como normal e que foram já tratadas nas quatro grandes temáticas associadas às isometrias.

Na generalidade, os professores inquiridos de todos os ciclos de ensino mostraram não possuir destreza na identificação das simetrias presentes nos frisos, cuja análise, para uma grande percentagem de professores, parece não ser mais do que uma observação com pouca ou nenhuma conexão com as transformações geométricas. Para além deste facto, as características específicas que relacionam as reflexões com a direção da translação e a reflexão deslizante parecem suscitar grandes dificuldades.



## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E LINHAS FUTURAS DE INVESTIGAÇÃO

Este último capítulo encontra-se organizado em cinco pontos essenciais. No primeiro, é feita uma súmula dos pontos centrais do estudo, evidenciando os objetivos e as questões orientadoras que definiram esta investigação. No segundo ponto, apresentam-se as principais conclusões do estudo onde organizaremos o discurso em torno dos objetivos definidos e das questões orientadoras inicialmente estabelecidas. No terceiro ponto, apontaremos algumas situações que possam ter limitado o estudo desenvolvido e, no ponto seguinte, apresentaremos algumas considerações finais que possam ser importantes acrescentos aos elementos já identificados. Na última parte, para além da sugestão de algumas recomendações resultantes da análise dos dados e referentes, essencialmente, a questões do foro profissional, de que é exemplo a formação contínua de professores, também se apresentarão algumas sugestões para futuras investigações.

#### Resumo do Estudo

A investigação que aqui se apresentou tentou conhecer os saberes dos professores que lecionavam no 1.º CEB ou a disciplina de Matemática no 2.º CEB ou 3.º CEB, no ano letivo 2011/2012, no tema *Simetrias e Transformações Geométricas*, nos diferentes domínios da matemática como disciplina escolar: o conhecimento científico, o conhecimento didático e o conhecimento curricular. Este interesse foi motivado pelas alterações significativas em relação a este tema (simetrias e transformações geométricas) no programa de Matemática do Ensino Básico de 2007<sup>46</sup>, e que engloba, essencialmente, a mudança de ciclo dos conteúdos abordados e nova conceitualização de simetria que, conseqüentemente, implica o estudo de novas representações (rosáceas e frisos).

O nosso estudo assumiu as características de um estudo *survey* em que se utilizou o instrumento mais frequente neste tipo de abordagem, o questionário. A elaboração deste instrumento foi cuidadosamente planeado dado que se teve em consideração os constrangimentos registados por investigadores nacionais e internacionais, as observações não participantes em algumas aulas do 2.º CEB sobre a temática em causa, e, ainda, o levantamento de algumas informações registadas em

---

<sup>46</sup> Programa em vigor em todas as fases desta investigação.

alguns manuais escolares, atendendo que, segundo diversos estudos (e.g., Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007; Moreira, Ponte, Pires & Teixeira, 2006; Ponte & Serrazina, 2004), estes recursos pareciam desempenhar um papel relevante no desenvolvimento do currículo específico das disciplinas escolares.

O preenchimento do nosso questionário contou com a colaboração de 142 professores do Ensino Básico, o que nos permitiu responder às questões orientadoras para esta investigação. Estas questões foram subdivididas em dois grandes grupos: o primeiro, de carácter geral, engloba as questões referentes à temática em si, à sua inclusão no programa e à forma de atualização de saberes referente à mesma; o segundo, de carácter específico, está relacionado com os saberes docentes (didático, curricular e científico) específicos da disciplina, neste caso da Matemática.

As questões orientadoras são as seguintes:

#### Carácter Geral

- O que pensam os professores da alteração programática relativamente às isometrias?
- Perante a inovação curricular, de que forma os professores constroem e atualizam os seus conhecimentos científicos no tema das simetrias e transformações geométricas?
- Que papel tem o manual escolar para as aprendizagens dos próprios professores?
- Qual o papel das ações de formação?
- Haverá opiniões significativamente distintas entre os docentes dos 2.º e 3.º ciclos em relação às questões colocadas?

#### Carácter Específico

##### Dimensão Didática e Curricular

- Os professores reconhecem as vantagens do uso de ambiente de geometria dinâmica para o desenvolvimento deste tema e utilizam estes recursos na sala de aula?
- Os professores conhecem os diferentes materiais manipuláveis para o ensino das transformações geométricas?
- Algum grupo de professores, do 2.º CEB ou 3.º CEB, se destaca pelo uso destes recursos?

##### Dimensão Científica

- Os professores adotaram, nas suas estruturas mentais, o novo conceito de *simetria*?
- Os professores reconhecem as propriedades das rosáceas e dos frisos?
- As afirmações nesta matéria, por parte dos alunos, são exploradas corretamente sob o ponto de vista científico ou são aceites ou refutadas sem justificação?

- Algum grupo de professores, do 2.º CEB ou 3.º CEB, se destaca no domínio científico do tema das simetrias e transformações geométricas?

O questionário foi aplicado em momentos distintos e a vários grupos de professores que o preencheram individualmente e na presença do investigador, onde evidenciaram as opiniões e os conhecimentos, a diferentes dimensões, sobre o tema das *Simetrias e das Transformações Geométricas*.

Os dados recolhidos foram, posteriormente, analisados à luz da estatística descritiva e, em alguns casos, inferindo os resultados para a população em causa. Esta metodologia de trabalho foi traçada na tentativa de responder às questões orientadoras com vista a atingir os objetivos definidos para este estudo. Consequentemente, pretendemos fazer uma análise dos resultados obtidos e comparar com outros estudos efetuados e que nos serviram de referência teórica.

A fiabilidade dos dados obtidos é elevada por dois motivos principais. O primeiro, pelo facto de os 142 professores inquiridos estarem todos a lecionar no ano letivo de aplicação do questionário e no ano letivo anterior, havendo cerca de 66% destes professores a lecionar há mais de 10 anos. Todos os professores lecionavam, no mínimo, há 2 anos consecutivos. O segundo motivo relaciona-se com o facto de todos os questionários terem sido preenchidos de forma individual e na presença do investigador.

A população estudada era constituída por professores que lecionavam em vinte agrupamentos de escolas ou escolas não agrupadas que, no ano letivo 2011/2012, assumiam funções docentes nos grupos 110, 230 ou 500.

No que concerne à caracterização da amostra, todos os professores lecionavam em algumas escolas ou agrupamentos de escolas de uma certa região do país, num dos três grupos de ensino: 110, 230 ou 500. A amostra de docentes a lecionar nos 2.º ou 3.º CEB (142 docentes) representava cerca de 43% dos professores a lecionar nestes centros educativos. A amostra de professores do 1.º CEB era pouco significativa o que levou a refletir sobre os valores obtidos deste grupo de ensino com alguma cautela. Todos os professores contabilizáveis para a amostra lecionavam no ensino básico há, pelo menos, dois anos letivos (2010/2011 e 2011/2012), dos quais 66% eram professores no ativo há mais de 10 anos.

## Conclusões

Nesta secção, e após a contextualização da problemática em questão, faremos a discussão dos resultados mais importantes relativos a cada uma das dimensões tratadas anteriormente, tendo como base os objetivos definidos para este trabalho e as questões de investigação pré-estabelecidas. Nesta secção, a par das conclusões do nosso estudo, serão mencionados alguns estudos sobre as mesmas matérias, que compararemos com as nossas conclusões. Assim, seguindo uma ordem definida no primeiro capítulo, iniciaremos com a abordagem às questões de carácter geral e, posteriormente, tentaremos dar resposta às questões orientadoras referentes às diferentes dimensões do saber específico da disciplina de Matemática.

### Questões de Carácter Geral

A primeira questão que colocámos neste âmbito foi:

*O que pensam os professores da alteração programática relativamente às isometrias?*

O Programa de Matemática homologado em 2007, apesar de ser considerado pelos próprios autores um reajustamento do programa de 1990/1991, trouxe importantes alterações na temática das simetrias e das transformações geométricas. Estas alterações ocorreram quer pela mudança de ciclo das aprendizagens referentes a esta temática, quer a nível do conteúdo científico marcado, essencialmente, pela nova concetualização de simetria e a conseqüente abrangência do seu estudo do qual faz parte o estudo de novas representações, as rosáceas e os frisos. Assim, do programa do 1.º CEB, constam a aprendizagem das quatro isometrias, das rosáceas e dos frisos, que assumem uma abordagem mais intuitiva, sendo aprofundadas no 2.º CEB e revisitadas no 3.º CEB, assumindo, neste último ciclo, um carácter mais formal, acrescentado do estudo dos vetores.

Neste momento, é importante referir que, no ano de aplicação do questionário, em todos os níveis de escolaridade onde a temática das isometrias e transformações geométricas eram lecionadas, se desenvolvia o novo programa de Matemática (2007). Aliás, o PMEB (2007) estava a ser trabalhado em todos os anos de escolaridade referentes ao 1.º e 2.º CEB e nos dois primeiros anos do 3.º CEB.

No que concerne ao programa de Matemática do Ensino Básico (2007), os 142 professores que constituíram a amostra do nosso estudo prático manifestaram, na sua maioria ( $\approx 52\%$ ), uma visão positiva e assertiva relativamente às alterações verificadas nesse programa, nomeadamente no que concerne ao tema aqui em destaque – das simetrias e das transformações geométricas. Estes professores acreditam ser, este, um tópico de aprendizagem adequado e importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesta amostra, nem todos os professores do 1.º CEB

manifestaram a sua opinião acerca do programa implementado no ciclo seguinte mas, metade destes, consideraram o conteúdo relevante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A visão positiva da inclusão deste conteúdo que verificamos neste estudo, pela maioria dos professores inquiridos, vai ao encontro dos resultados do estudo levado a cabo por Carvalho e Dias (2009) e que foi referido no capítulo 2.

É interessante comparar outros estudos sobre a opinião e comportamento dos professores perante as alterações programáticas e a nossa investigação. Apesar das nossas conclusões destacarem uma atitude positiva, por parte da maioria dos professores inquiridos, face às alterações programáticas tal como os estudos de Carvalho e Dias (2009) e de Nunes e Guimarães (1994), não podemos deixar de realçar a visão de 34% dos nossos inquiridos que acreditam que o conteúdo programático em questão apresenta-se algo complexo para o ano de escolaridade identificado (6.º ano). Esta visão, menos otimista, revela um sentimento de alguma descrença no sucesso das novas alterações que ocorre nos primeiros anos de implementação dos programas tal como referem, por exemplo, Fisher (2007), Huberman (1994, citado por Kennedy, 2002) e Price e Ball (1997) nos estudos que desenvolveram.

Estas visões díspares, mas ambas apresentando percentagens de inquiridos que não devem ser ignoradas, podem estar na origem de dois fatores, presentes no ano letivo de 2011/2012, e que são apontados por outros estudos já referenciados. Se, por um lado, possa ainda existir sentimentos de alguma resistência que caracterizam os períodos de adaptação às mudanças curriculares (Huberman, 1994, citado por Kennedy, 2002; Fisher, 2007; Martins, 2011; Price & Ball, 1997; Shulman & Sherin, 2004), por outro, também é notório o desvanecimento destes comportamentos que resultam do decorrer do tempo e do aumento da orientação científica (Priestly, 2003, citado por Fisher, 2007), tornados possíveis pelos momentos de formação contínua promovidos pelo Ministério da Educação desde o início desta implementação (Santos & Serrazina, 2013; Viana, 2013).

Outro registo que devemos destacar é a elevada percentagem (25%) de professores inquiridos do 3.º CEB que não responderam à questão sobre a inclusão deste tema, com esta abordagem, no 6.º ano de escolaridade. Vários professores, no momento de preenchimento do questionário, referiram que não lecionavam este ano de escolaridade pelo que não podiam opinar sobre o assunto. Contudo, lecionavam no ciclo seguinte e davam continuidade a este tema, o que não deixa de ser surpreendente.

Outra questão de carácter geral que apresentámos no início do trabalho foi:

*Perante a inovação curricular, de que forma os professores constroem e atualizam os seus conhecimentos científicos no tema das simetrias e transformações geométricas?*

A atualização científica acerca das isometrias no plano era imprescindível, para uma abordagem completa, rica e aprofundada no desenvolvimento deste tema. Assim, independentemente do que o Ministério de Educação facultasse aos professores em termos de formação contínua, o conhecimento profundo deste tema em lecionação era condição *sine qua non* para o poder ensinar.

Na questão referente à atualização científica dos temas em análise, os professores inquiridos evidenciaram as fontes presentes no questionário (formação inicial, manual escolar, formação contínua, referências bibliográficas e Internet) e outras referidas pelos próprios, tais como o trabalho colaborativo.

A reunião de todas as seleções (múltiplas ou únicas) permitiu evidenciar o recurso mais utilizado pelos professores e colocar os restantes por ordem de preferência dos docentes. Assim, na amostra recolhida, com a maior percentagem de respostas está o manual escolar (75%), seguido da formação inicial (47%), da Internet (44%) e, em quarto lugar, as ações de formação (40%). Na resposta a esta questão, não trataremos com especial atenção o manual escolar nem as ações de formação pois, estes recursos serão referenciados especificamente na resposta à próxima questão orientadora.

Os conhecimentos adquiridos na formação inicial foram a segunda maior opção selecionada, mas, tal como refere Veloso (2012), aqueles não são suficientes à abordagem prevista no PMEB e, talvez conscientes desse facto, nenhum professor tenha mencionado unicamente esta opção. A mudança concetual ocorreu, não somente no programa de Matemática (2007), mas também ao nível do ensino superior, pelo que é compreensível que estes assuntos tenham sido abordados de outra forma, distinta da que agora se pretende, enquanto os docentes inquiridos foram estudantes. Não falaremos na formação inicial de outras áreas distintas das da Matemática porque, nestes casos, existem certamente licenciaturas onde os temas de Geometria não fariam parte do plano de estudos.

O recurso com o terceiro maior número de votos é a Internet que, hoje em dia, está acessível a qualquer um destes profissionais. Repare-se que os recursos que ocupam os primeiros lugares na preferência dos professores são aqueles cujos professores já possuem ou têm acesso fácil e imediato: a formação inicial que todos têm, o manual escolar que usam diariamente e a Internet que é um meio de comunicação e de informação imprescindível na educação.

No que concerne a outros recursos, nomeadamente os disponibilizados pela DGIDC, do Ministério da Educação, somente 9 professores dos 142 inquiridos referiram a sua consulta, sendo estes, também, referidos no estudo de Marques (2011) como sendo o único material de suporte existente no ano letivo de 2009/2010, mas cujo acesso foi facultado tardiamente.

Em suma, e considerando que só uma pequena parte dos professores inquiridos referiram a preferência pelo estudo colaborativo, podemos concluir que a maior parte das aprendizagens

protagonizadas pelos professores pertencentes à nossa amostra são oriundas do trabalho autónomo e autodidata destes profissionais.

A terceira questão colocada foi:

*Que papel tem o manual escolar para as aprendizagens dos próprios professores?*

Abordaremos agora a utilização do manual como recurso para apoiar o professor no processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente, o uso que é dado pelo professor em seu benefício pessoal, em termos de evolução científica.

A realidade demonstrada em alguns estudos consultados sobre a importância que o manual escolar exerce sobre o professor (e.g., Alonso, 1998; Diogo & Vilar, 1999; Gimeno-Sacristán, 2007; Henderson & Rodrigues, 2008; Price & Ball, 1997) está patente nas respostas dos professores que constituem a nossa amostra, onde se pode testemunhar que  $\frac{3}{4}$  destes recorreram ao manual para aprofundarem os seus conhecimentos sobre esta temática. Ora, como refere Pires (2009), o facto de o manual escolar ser o material curricular mais utilizado na generalidade das salas de aula pode influenciar decisivamente o que os alunos pensam e fazem. Os nossos dados revelam que os manuais escolares foram a fonte privilegiada para a atualização científica, tal como conclui o estudo de Ersoy (2006, citado por Ilaslan, 2013), que também relata a consciência dos professores para a insuficiência das informações lá presentes. Também no estudo que aqui apresentamos, recolhemos um conjunto de informações sobre os manuais escolares que, ao nível do conteúdo nos parece revelar-se insuficiente para uma atualização científica profunda. Referimo-nos, por exemplo, a ausência de definições, a definições incompletas, a exercícios e propostas de resolução que apresentam incorreções. Um exemplo bastante elucidativo do que acabamos de dizer é a atividade de introdução ao tema dos frisos, apresentado por um manual escolar, e que pressupõe a identificação de todas as simetrias presentes naqueles frisos quando, na verdade, as imagens apresentadas não são sequer frisos.

Pelos motivos referidos, pelas aulas por nós observadas e pelas posições adotadas pelos professores inquiridos às afirmações feitas pelos alunos, constantes no questionário, concordamos com Price e Ball (1997) que apontaram as questões colocadas pelos professores, em sala de aula, e o tipo de respostas como sendo pouco alargadas sob o ponto de vista concetual, pelo facto de serem provenientes de textos de apoio ou dos manuais escolares. Sendo esta a realidade já plasmada em vários trabalhos de investigação, entre os quais o presente, interrogamo-nos sobre se não seria de ponderar, tal como sugere Ersoy (2006, citado por Ilaslan, 2013), a reformulação destes recursos (manuais escolares), dotando-os de informação direcionada para o professor.

A questão seguinte foi a quarta questão apresentada:

*Qual o papel das ações de formação?*

No ano letivo de aplicação do nosso questionário (2011/2012), ainda se encontrava em vigor o plano da Matemática II que visava a melhoria do ensino da Matemática, mas já havia cessado o PFCM. Nas reuniões desenvolvidas no âmbito do PMII, eram tratados vários assuntos que visavam, essencialmente, o aperfeiçoamento das práticas docentes ao nível do conhecimento didático e curricular. Nestas mesmas reuniões, foi aplicado o nosso instrumento de recolha de dados que registou, após divulgação prévia do tema a ser tratado, um incremento significativo de professores assistentes relativamente à média registada nas reuniões anteriores. Este facto torna visível a preocupação dos professores em melhorar o seu conhecimento sobre a temática em destaque.

Na parte teórica deste trabalho e no parágrafo anterior, foi dada ênfase à formação contínua em alturas de reformas programáticas, pois esta releva-se fundamental como complemento de apoio e de suporte a uma verdadeira mudança por parte destes profissionais (Ponte et al., 2007; Ponte & Sousa, 2010; Price & Ball, 1997).

A frequência de ações de formação sobre esta temática foram referidas por cerca de 40% dos professores inquiridos, mas somente cerca de metade foram superiores a 3 horas e apenas cerca de 6% superiores a 10 horas. Dada a abrangência do estudo das isometrias e conseqüentemente das rosáceas e dos frisos, parece-nos ser insuficiente a duração de ações de formação inferiores a 10 horas para que se consiga abordar, com aprofundamento, as aprendizagens do ponto de vista do conhecimento do conteúdo. Para além deste facto, acreditamos que as ações de formação com duração inferior a 3 horas possam ter sido de domínio didático ou curricular, promovidas no âmbito das reuniões do PMII que, como já referimos, possuíam esta finalidade.

A opção das ações de formação na questão sobre a atualização científica assume dois objetivos distintos que passam por perceber a importância destas para os professores e a forma como os docentes se atualizam. Repare-se que 60% dos professores inquiridos não frequentaram nenhuma ação de formação sobre este tema o que significa, pelos outros recursos selecionados, que o estudo desta matéria é feita de forma autónoma e autodidata. Ora, admitindo que os conteúdos necessários ao domínio profundo da temática em estudo passam pelo estudo da teoria de grupos e das funções e que, não sendo possível ou suficiente o estudo autónomo destas matérias ou, não sendo disponibilizadas, pelo Ministério de Educação, ações de formação nesta temática, teriam os professores de procurar formação adequada para que o desenvolvimento do currículo ocorresse sem constrangimentos. Contudo, ao mesmo tempo, percebemos a dificuldades de alguns docentes em estudarem estas matérias, de forma individual, sem as terem abordado de forma aprofundada na formação inicial ou em formação contínua.

A cessação de todas as medidas de formação contínua proporcionadas pelo ME e o surgimento de novos documentos curriculares com conteúdos e orientações distintas às presentes no programa

de 2007 e nas orientações nacionais e internacionais (Santos & Serrazina, 2013) cria maiores dificuldades na colmatação destas dificuldades e, mais ainda, “serve para confundir os professores e transmitir ideias erradas” (Santos & Serrazina, 2013, p. 7), o que, certamente, prejudicará a qualidade do ensino.

A última questão orientadora de caráter geral colocada inicialmente foi:

*Haverá opiniões significativamente distintas entre os docentes dos 2.º e 3.º ciclos em relação às questões colocadas?*

A aplicação de testes de hipóteses adequados às variáveis a estudar em cada caso específico, permitiu tirar algumas conclusões para a população em estudo. Assim, pudemos constatar que a opinião acerca da inclusão deste tema no 6.º ano de escolaridade varia conforme o ciclo em que lecionam os professores. Assim, mais especificamente, podemos acreditar, com 95% de certeza, que os professores que lecionam no 3.º CEB (48%) se mostram significativamente mais céticos relativamente à introdução desta temática no 6.º ano de escolaridade do que os que lecionam no 2.º CEB (57%).

Os testes de significância permitiram, também, concluir que não há uma relação de dependência entre a opinião acerca da inclusão do tema em questão e a licenciatura que possuíam os docentes que lecionam no 2.º e 3.º CEB. Ou seja, a opinião dos docentes sobre este conteúdo no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) depende do ciclo de leção e não da formação inicial dos docentes.

No que concerne aos recursos usados na atualização científica, pela aplicação do teste do Qui-Quadrado ou do teste exato de Fisher e com grau de confiança de 95%, pudemos constatar que a formação inicial, de certa forma, influenciou a resposta a este item. Mais especificamente, 33% dos professores com *outras licenciaturas* afirmaram ter abordado este tema na formação inicial contra 64% dos professores com licenciatura em Matemáticas – Variante Matemática e Ciências da Natureza. Estas conclusões vão ao encontro do que referimos anteriormente e do que Veloso (2012) também chamaria à atenção, ou seja, este tema não esteve presente a formação inicial dos professores com outras licenciaturas, com exceção de alguns cursos de engenharia que possam ter tido geometria no seu plano de estudos.

Em termos comparativos dos dois grupos de docência, ao nível da população, as restantes comparações, através dos vários testes de hipóteses efetuados, não permitem destacar diferenças significativas entre os professores do 2.º e 3.º CEB.

### Os Saberes Específicos da Disciplina de Matemática

Apoiando-nos nos referenciais teóricos abordados no Capítulo 3, iniciaremos este ponto com a abordagem dos saberes de dimensão didática e curricular, na tentativa de dar resposta às questões orientadoras respetivas, contribuindo para acrescentar mais informação a um tema com uma nota da escassez de investigações.

#### Dimensões ao nível do conhecimento didático e curricular.

Nesta súpula, interessa apresentar as conclusões sobre as respostas dadas pelos professores inquiridos no que concerne ao uso de materiais manipuláveis e ambientes de geometria dinâmica e, ainda, fazer uma analogia com outros estudos já efetuados. Relembramos que, nos últimos anos, tem proliferado a publicação de estudos e artigos científicos, nacionais e internacionais, sobre os benefícios do uso destes recursos para a melhoria das aprendizagens na Matemática, também mencionados e aconselhados no programa de Matemática (2007). Podemos então perceber a importância do domínio destes conhecimentos para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Nesta secção, tentaremos responder às três perguntas de partida relacionadas com os recursos referidos anteriormente. A primeira delas é:

*Os professores reconhecem as vantagens do uso de ambientes de geometria dinâmica para o desenvolvimento deste tema e utilizam estes recursos na sala de aula?*

Atualmente, os benefícios do uso de ambientes de geometria dinâmica estão plasmados em diversos artigos científicos e em trabalhos de investigação, quer a nível nacional quer a nível internacional. Existem vários programas de geometria dinâmica, mas o *Geogebra*, criado em 2002 por Markus Hohenwarter, é dos mais populares *softwares* dinâmicos em diversos países, um dos quais Portugal. O facto de estar acessível na Internet de forma gratuita, estar traduzido em várias línguas, incluindo a língua portuguesa e permitir a criação de *applets* de diversos tópicos da matemática permitiu a sua rápida difusão pela comunidade educacional (Cabrita, Neto, Breda & Santos, 2013). Ao *Geogebra* já foram atribuídos diversos prémios, a nível internacional, por lhe serem reconhecidas inúmeras vantagens, entre outras, para a aprendizagem da Matemática.

Neste âmbito, e seguindo as tendências nacionais e internacionais, 88% dos professores que inquirimos admitem a importância dos ambientes de geometria dinâmica para o ensino da matemática, e, nas ações de formação desenvolvidas percebemos que, na sua generalidade os professores já tinham ouvido falar do *Geogebra*. Apesar da popularidade deste recurso, alguns professores do 1.º ou 2.º CEB não atribuíram benefícios ao uso destes programas computacionais. Alguns destes docentes,

em conversa com os investigadores, valorizavam os materiais de desenho em detrimento dos AGD e mostraram-se céticos em relação aos reais benefícios do uso destes programas em contexto de sala de aula. Repare-se que todos os professores do 3.º CEB que responderam a esta questão manifestaram a valorização da utilização destes recursos em contexto de sala de aula.

A utilização destes ambientes, para além dos estudos existentes e que já foram referidos, também é aconselhada no programa de Matemática do Ensino Básico (2007).

No nosso estudo, pudemos perceber que 58,4% dos professores inquiridos que valorizavam estes recursos de aprendizagem já os haviam utilizado em contexto de sala de aula. Na nossa amostra, temos apenas um professor do 1.º CEB nestas condições: valoriza e usa na sala de aula.

A segunda questão que colocámos referente ao uso de materiais manipuláveis e ambientes de geometria dinâmica foi:

*Os professores conhecem os diferentes materiais manipuláveis para o ensino das transformações geométricas?*

No que concerne aos materiais manipuláveis, foram vários os recursos mencionados, uns referidos no PMEB (2007), outros não. No conjunto dos professores inquiridos, pudemos reparar que mais de metade dos professores do 3.º CEB (53%) não mencionou qualquer material manipulável, contrastando com os 24% dos do 2.º CEB ou os 42% dos do 1.º CEB. Através destes resultados apresentados há uma realidade esperada na amostra recolhida: os professores do 3.º CEB apresentam uma tendência para a ausência de referência a estes materiais. Neste ciclo, o estudo fica reservado a uma abordagem menos intuitiva e mais formal onde a álgebra e as técnicas se alargam neste domínio (Velo, 1998).

Contudo, na amostra estudada, os professores do 2.º CEB são os que mais recursos manipuláveis referiram a contrastar com os professores do 1.º CEB que apresentam uma percentagem claramente inferior aos do 2.º CEB. Relembramos que a abordagem da temática em estudo inicia-se no 1.º CEB de forma mais intuitiva e onde a manipulação de materiais é um impulsionador das aprendizagens pelo que esperávamos uma maior percentagem de materiais referidos. Os materiais manipuláveis permitem ao aluno analisar situações concretas, experimentar, explorar e tirar conclusões. Esta primeira fase é fundamental para uma aprendizagem significativa que preparará as próximas etapas onde a abstração ganhará terreno.

Na questão referente aos materiais manipuláveis é também visível, através das atividades sugeridas pelos docentes, os primeiros sinais do uso da antiga concetualização de *simetria* com propostas do género: *localizar o eixo de simetria entre duas imagens* ou *desenhar a imagem simétrica de outra*. Os materiais mais referidos são os espelhos e as miras e o uso de papel vegetal.

A última questão que colocámos referente ao uso de materiais manipuláveis e ambientes de geometria dinâmica foi:

*Algum grupo de professores, do 2.º CEB ou 3.º CEB, se destaca pelo uso destes recursos?*

Estabelecendo agora uma comparação entre os dois grupos de lecionação, do 2.º e 3.º CEB, reconhecemos, através do uso de testes de hipóteses, que há diferenças significativas ( $\alpha = 5\%$ ) que devem ser destacadas:

- o número de utilizadores de AGD, em ambiente de aula, representa, na sua maioria, os professores do 3.º CEB, talvez por se verificar que são estes os docentes que mostraram maiores competências ao nível da manipulação destes programas em relação aos professores do 2.º CEB. Podemos afirmar, ainda, que as competências na manipulação dos AGD facilitam e induzem a sua utilização na sala de aula. Ou seja, são os professores do 3.º CEB que melhores conhecimentos têm na manipulação de AGD e, este facto, reflete-se na vontade em o usar na sala de aula.

Assim, a aplicação dos testes de significância permitiu concluir a existência de diferenças significativas entre os professores do 2.º e 3.º CEB, não só ao nível da destreza no uso destes *softwares* mas, também, no que concerne à sua utilização na sala de aula. Em suma, apesar de a maioria dos professores de ambos os ciclos de ensino reconhecerem vantagens do uso destes programas de geometria dinâmica, para o processo de ensino aprendizagem, são os professores do 3.º CEB que melhor dominam o seu funcionamento e que mais o utilizam na sala de aula. Em termos percentuais, cerca de 81% dos professores do 3.º CEB já o utilizaram na aula enquanto que os professores do 2.º CEB representam cerca de 46%.

- podemos também afirmar que a referência aos materiais manipuláveis depende do ciclo lecionado pelos professores, com destaque para os do 2.º CEB. Cerca de 76% dos professores do 2.º CEB referiram pelo menos um material manipulável e, dos professores do 3.º CEB, apenas 45% o fizeram.

### **Dimensões ao nível do conhecimento do conteúdo.**

As alterações programáticas ocorridas no documento publicado em 2007 exigiam a necessidade de uma atualização científica de todos os docentes, não só a nível metodológico mas, essencialmente, científica, pelo facto de haver a introdução de novas matérias e a mudança concetual de outras (APM, 2010; Assude, s.d.; Bastos, 2006; Canavarro, 2010; GT2, 2010). A dificuldade na lecionação da temática aqui em destaque, seguindo as novas orientações e concetualizações internacionais, ocorre em vários países devido, essencialmente, à existência de preconceções erróneas e de lacunas a nível

científico, tal como relatam vários estudos e artigos sobre esta problemática, quer nos professores no ativo (e.g., Canavarro, 2010; GTG, s.d.; GT2, 2010; Ilaslan, 2013; Loureiro, 2009; Mabuchi, 2000; Ponte, Nunes e Quaresma, s.d.; Veloso, 2012), quer nos futuros professores (e.g., Ada & Kurtulus, 2010; Desmond, 1997, citado por Yanik, 2011; Gomes, 2012; Harper, 2003, citado por Yanik, 2011; Portnoy et al., 2006, citados por Yanik, 2011; Thaqi, 2009; Thaqi, Giménez & Rosich, 2011; Thaqi et al., 2011; Yanik, 2011).

Neste âmbito, convém referir que, conforme referem Santos e Serrazina (2013), enquanto o PFCM possuía um conjunto de objetivos, entre os quais o aprofundamento do conhecimento matemático, didático e curricular, o plano de ação da Matemática (PMI e PMII), segundo Oliveira e Fernandes (2011), incidiu, sobretudo, no conhecimento didático pois procurava-se melhorar as práticas pedagógico-didáticas dos professores, promover a construção de materiais didáticos, do trabalho colaborativo, das tarefas matemáticas e da planificação. Esta realidade foi por nós observada na análise que fizemos dos sumários das reuniões do PMII, num agrupamento de escolas, no ano de aplicação do questionário.

O questionário aplicado continha um conjunto de interrogações que procuravam responder às questões orientadoras de dimensão científica desta investigação. Como algumas destas questões eram afirmações proferidas pelos alunos, entre elas algumas generalizações, pretendia-se, então, conhecer a reação dos professores a essas declarações.

Assim, e neste remate final, optaremos por reunir as conclusões mais importantes relativamente a cada um dos temas distinguidos no capítulo anterior: isometrias, simetrias, rosáceas e frisos.

Perante esta síntese dos resultados, estamos aptos a responder a algumas questões orientadoras. Neste campo, a primeira delas foi:

*Os professores adotaram, nas suas estruturas mentais, o novo conceito de simetria?*

A nova conceitualização de simetria é uma das alterações programáticas referidas ao longo deste trabalho que prevê uma nova abrangência do seu significado e, conseqüentemente, a possibilidade do estudo de outras estruturas e representações. A preocupação da comunidade matemática sobre a existência de concepções erróneas nesta matéria (e.g., Bastos, 2006; Bulf, 2009; Canavarro, 2010; GTG, s.d.; Hill et al., 2008; Veloso, 2012), e o contacto profissional com alguns docentes que revelavam tais fragilidades, tornou a análise desta variável a mais significativa do nosso trabalho. Quando iniciámos esta investigação objetivávamos averiguar o tipo de concepção de simetria presente nos professores inquiridos, uma vez que esta influencia ações e opções de metodologias de ensino que podem comprometer outras aprendizagens desta temática. Assim, os itens do questionário que pretendiam conhecer o tipo de concepção usada surgiam, aos inquiridos, de forma explícita ou de forma implícita.

Na análise das questões sobre simetria, percebemos a existência de uma enorme confusão associada a este conceito nos elementos da nossa amostra. Se, por um lado, a maioria dos professores inquiridos reconhece que uma simetria é uma isometria, perante a presença de uma reflexão, estes professores identificam-na como simetria, obviamente, encarando-a como sendo uma simetria de reflexão. Todos os grupos de professores apresentam lacunas visíveis nesta matéria, mas os valores registados entre os professores inquiridos do 2.º CEB e 3.º CEB permitem afirmar que os conhecimentos e as conceções são semelhantes. Contudo, os professores inquiridos do 1.º CEB foram os que apresentaram maiores dificuldades nesta matéria.

As dificuldades observadas nos professores da nossa amostra induzem um conhecimento do conteúdo com consequências ao nível do desenvolvimento das outras aprendizagens, nomeadamente, na identificação e reconhecimento das simetrias identidade, em que cerca de 2% responderam corretamente, e as restantes descrições revelam uma maior inconsistência nesta matéria pela associação de uma qualquer simetria como sendo a simetria identidade. Ora, esta problemática reflete-se depois no estudo dos frisos e das rosáceas. Uma percentagem notável dos professores inquiridos, cerca de 62%, reconhece no triângulo equilátero as propriedades de uma rosácea, mas, quando identificam o número de simetrias existentes, referem-se apenas às simetrias de reflexão assumindo, claramente, a conceção antiga de simetria e a dificuldade na identificação de outras simetrias. Somente cerca de 6% dos professores inquiridos identificou todas as simetrias num polígono regular de  $n$  lados. Nesta matéria, com uma análise inferencial, os testes de hipóteses aplicados não permitiram concluir por uma relação de dependência entre as respostas às questões desta temática, em particular, e o ciclo de lecionação dos professores.

Assim, e não fazendo as conexões entre a teoria de grupos e a definição de função, as dificuldades foram imensas quando os professores tiveram de optar pela inclusão ou exclusão da simetria identidade do conjunto das simetrias de uma dada figura, registando somente 32% dos professores inquiridos a considerarem esta transformação neste conjunto.

No cômputo geral, as respostas às temáticas da rosáceas e dos frisos foi assinalado por um enorme grau de imprecisão marcado, essencialmente, pelo conceito de simetria que se apresentava confuso na mente dos professores e também pela ausência de uma definição de rosácea ou de friso que lhes permitisse clarificar as suas ideias. Nas ações de formação que desenvolvemos, simultaneamente com esta investigação, surgiram imensas questões que marcaram as dificuldades dos professores em situações de carácter definitório. Percebemos que o estudo dos frisos assumia, para muitos docentes, uma importância diminuta e que o estudo desenvolvido na sala de aula, sobre este tema, não assumia uma posição de grande destaque. Só assim se percebe a notável ausência de

respostas neste grupo de questões do nosso questionário que registou uma média de 36% dos professores inquiridos.

Respondendo, então, à questão colocada, consideramos que uma parte notável dos professores não adotou, nas suas estruturas mentais, o novo conceito de simetria. Esta afirmação está fortemente sustentada pelo facto de 6% dos professores inquiridos identificarem no triângulo equilátero somente as simetrias de reflexão, tal como antigamente. Para além deste facto, não houve um professor que tivesse acertado em todas as questões de carácter científico e o tema chave desta temática era mesma a nova concetualização de simetria.

Estas situações problemáticas influenciam as aprendizagens das estruturas ricas para o estudo das simetrias – as rosáceas e os frisos – influenciando a resposta à questão orientadora:

*Os professores reconhecem as propriedades das rosáceas e dos frisos?*

Não nos parece que as propriedades das rosáceas e dos frisos estejam bem definidas no mapa concetual dos professores e um dos motivos é, claramente, a ideia que mantêm de simetria. No que concerne ao estudo das rosáceas, se apenas 6% identificam as simetrias de rotação nas rosáceas, todo o estudo destas representações fica inevitavelmente comprometido. No estudo dos frisos, continua a subsistir uma análise intuitiva e não pelo reconhecimento das suas simetrias. Não parece ter havido um estudo aprofundado destas representações, pois apenas 8% dos professores inquiridos parecem saber que a simetria de reflexão deslizante e a simetria de reflexão de eixo horizontal não implicam a existência uma da outra. Somente 10% dos professores identificaram corretamente as simetrias presentes nos frisos apresentadas na questão 3.12. Podemos afirmar, pelos resultados obtidos, que estas matérias são exploradas por estes docentes de uma forma muito superficial, uma vez que na análise aprofundada não obtiveram sucesso.

Os últimos pontos do questionário eram dedicados à exposição de questões, colocadas pelos alunos, em contexto de sala de aula, em aulas observadas pela investigadora, que permitiriam avaliar do tipo de resposta produzida pelos professores face a afirmações produzidas por aqueles discentes e que incluíam algumas generalizações. Desta forma, poderíamos conseguir responder à questão orientadora:

*As afirmações nesta matéria, por parte dos alunos, são exploradas corretamente sob o ponto de vista científico ou são aceites ou refutadas sem justificação?*

As questões referentes às afirmações ou generalização de factos concretos permitiram perceber algumas realidades e fragilidades neste novo tema em lecionação, das quais destacamos:

- cerca de 61% dos professores inquiridos identificaram a reflexão deslizante como sendo, apenas, a composição de uma reflexão e de uma translação (ver questão 3.17). Estes docentes não referiram a questão do paralelismo entre vetor de translação e eixo de reflexão

que caracteriza esta transformação geométrica. Esta particularidade foi referida por apenas 13% dos docentes inquiridos;

- aproximadamente 59% dos professores da nossa amostra aceitam que a reflexão é o mesmo que rotação de meia volta (ver questão 3.13). Analogamente ao que aconteceu na generalização anterior, cerca de 12% dos professores inquiridos justificaram a falsidade da generalização referida apresentando argumentos corretos ou parcialmente corretos. Nesta questão, os professores inquiridos que mais acertaram foram, por ordem decrescente do número de respostas corretas, os professores do 3.º CEB, do 2.º CEB e do 1.º CEB. Este facto leva-nos a acreditar numa maior sensibilidade dos professores do 3.º CEB para estas particularidades. Os testes de hipóteses do Qui-Quadrado confirmam esta realidade ao permitirem afirmar, com um grau de confiança de 95%, que as diferenças relativamente aos professores do 2.º e 3.º CEB são significativas, isto é, que metade dos professores do 3.º CEB responde corretamente contra os 31% dos do 2.º CEB;
- a dificuldade ou o inconsciente erro no momento de distinguir *eixo de reflexão* de *eixo de simetria* (71%);
- o ter de se ver a rosácea para perceber se a amplitude mínima poderia ser  $62^\circ$  quando este número não é múltiplo de  $360^\circ$ , foi a opção de 20% dos professores inquiridos. Apenas 27% dos inquiridos respondeu corretamente.

Como pudemos verificar, as respostas dos professores inquiridos às afirmações ou generalizações produzidas pelos alunos permitem detetar um conhecimento científico superficial e pouco abrangente, visível quer pela percentagem mínima de respostas certas quer pelo tipo de justificações produzidas, e que podem ser consultadas no Capítulo 7.

Por último, procuramos fazer uma síntese dos resultados observados e inferidos no que concerne à distinção entre os dois grupos de lecionação com um número de professores representativos da população-alvo. Desta forma, pretendíamos responder à questão orientadora:

*Algum grupo de professores do 2.º CEB ou 3.º CEB se destaca no domínio científico profundo no tema das simetrias e transformações geométricas?*

No que concerne à comparação entre os professores do 2.º CEB e os professores do 3.º CEB, a análise estatística permitiu distinguir os grupos em poucos itens. De facto, a análise inferencial de comparação entre estes grupos produziu, na sua maioria, valores-p inferiores a 0,05 pelo que podemos concluir, com um nível de confiança de 95%, que o nível de lecionação dos docentes não influenciou as respostas às respetivas questões. Contudo, em algumas delas, estas relações de dependência existiam e importa destacá-las. Deste modo, podemos constatar que, na população, em questão:

- Há mais professores do 2.º CEB (66%) a distinguir isometria de simetria do que do 3.º CEB (47%) ( $p = 0,034$ ).
- Há mais professores do 3.º CEB (47%) a reconhecer que a reflexão não é equivalente a uma rotação de 180º do que do 2.º CEB (19%) ( $p = 0,015$ ).
- Metade dos professores do 3.º CEB não identificou o triângulo equilátero como sendo uma rosácea, contrastando com os 26% dos professores do 2.º CEB ( $p = 0,015$ ).

Podemos então concluir que, apenas nestas três situações, há diferenças significativas nas respostas dadas pelos professores do 2.º e 3.º CEB, e que o ciclo de lecionação influenciou as respostas às respetivas questões.

Na resposta a esta questão orientadora, é importante realçar a aplicação de dezenas de testes de hipóteses, combinando o ciclo de lecionação com diversas variáveis na tentativa de encontrar diferenças significativas nestes dois grupos de ensino (2.º e 3.º CEB). Os valores-p resultantes destes testes, com  $\alpha = 5\%$ , foram, na sua maioria, identificadores de relações de independência entre as variáveis à exceção das três situações descritas anteriormente. Esta é uma informação deveras relevante neste estudo pois permite afirmar que, na sua generalidade, e no que concerne à temática em análise, os professores dos dois grupos de ensino referidos, não apresentam diferenças notáveis no domínio do conhecimento científico. Podemos apontar alguns casos cujas diferenças entre os docentes do 2.º e 3.º ciclos de ensino não foram significativas, ou seja, que não há uma relação de dependência entre o ciclo de ensino e:

- a distinção entre eixo de simetria e eixo de reflexão ( $p = 0,913$ );
- a relação entre o número de lados do polígono regular e o número de simetrias existente ( $p = 1,000$ );
- a identificação do número de frisos existentes ( $p = 0,804$ );
- a identificação das simetrias nos frisos da questão 3.12 ( $p = 0,867$ );
- a relação entre congruência e isometria ( $p = 0,313$ );
- o significado de grupo de simetrias ( $p = 0,511$ );

As respostas às questões orientadoras definidas para este projeto de investigação permitiram atingir os objetivos traçados para o estudo e aos quais regressamos neste momento:

- *Verificar se os professores têm concepções desajustadas em relação ao tema em estudo e, se sim, identificá-las.*

Através das questões de domínio científico, foi realmente possível verificar que os professores têm algumas concepções desajustadas em relação ao tema em estudo e foi possível identificar quais eram esses erros, como, por exemplo, a enorme fragilidade que os

professores apresentam em matéria de simetrias e transformações geométricas. O grande destaque vai para a prevalência da antiga concepção de simetria que origina limitações no tratamento das restantes transformações e da análise das rosáceas e dos frisos. Se, em determinadas questões, os professores respondiam corretamente, em questões seguintes respondiam confundindo simetria com reflexão. Assim, as concepções implícitas e desajustadas mais significativas, detetadas neste estudo pela maioria dos professores inquiridos, foram:

- a presença, muito significativa, da antiga concepção de simetria;
  - confusão entre simetria e reflexão;
  - a análise dos frisos numa visão que se afasta do estudo das simetrias;
  - dificuldade no reconhecimento da congruência entre o objeto e a imagem obtida quando é aplicada uma isometria;
  - as isometrias continuam a ser apenas três (rotação, reflexão e translação);
  - não existe uma conexão entre a teoria de grupos e o estudo das transformações, por isso não percebem a necessidade de incluir a simetria identidade no conjunto das simetrias de uma dada figura.
- *Perceber a profundidade do conhecimento dos professores nos vários subtópicos do tema central desta tese.*

Este objetivo também foi cumprido, pois, face às situações descritas a propósito do objetivo anterior, foi possível determinar e considerar que os professores são detentores de um conhecimento limitado, sob o ponto de vista científico, dos vários subtópicos deste tema, denotando fragilidades que podem comprometer as aprendizagens dos alunos relativamente ao conteúdo em apreço. Contudo, entende-se que as explorações de determinadas representações, as conexões entre os variados subtópicos e a compreensão de certas particularidades só estarão acessíveis àqueles que dominam o conhecimento aprofundado da matéria. Neste estudo, verificamos que as dificuldades sentidas na enunciação do conceito de simetria por parte dos docentes inquiridos, parecem ter condicionado a abordagem e exploração das rosáceas e dos frisos, para além de outros aspetos relacionados com as outras transformações geométricas.

- *Conhecer os conteúdos mais problemáticos nesta temática.*

Também foi possível atingir este objetivo. Constatámos que os conteúdos mais problemáticos nesta temática são a simetria e o estudo das rosáceas e dos frisos. O conjunto das perguntas do questionário referentes às simetrias foram sendo respondidas de um modo pouco consistente, mas os frisos foram, de facto, o conteúdo com o maior número de

respostas incorretas. Na verdade, os professores, reconhecem a existência de 7 tipos de frisos mas, depois, quando se questiona a possibilidade de existência em simultâneo de simetria de reflexão de eixo paralelo à translação do friso e de simetria de reflexão deslizante, respondem afirmativamente. Se assim fosse, existiriam mais tipos de frisos. Deste modo, podemos afirmar que a referência a algumas propriedades por parte dos docentes não é percebida na realidade. Tudo indica que os professores sabem que existem 7 tipos de frisos porque é referido nos manuais escolares, mas claramente que não percebem a razão deste número.

Acreditamos que a grande lacuna está, realmente, no conceito desajustado de simetria que os professores ainda assumem e que, depois, tem consequências graves para o tratamento dos restantes assuntos.

- *Perceber a posição dos professores face às afirmações produzidas pelos alunos.*

Este objetivo foi claramente cumprido, dadas as respostas apresentadas às questões orientadoras. O conhecimento superficial nesta matéria origina a que as afirmações proferidas pelos alunos, muitas vezes, tentando generalizações de resultados particulares, sejam aceites pelos professores, na sua maioria os professores inquiridos do 1.º e 2.º CEB. Denota-se, por parte dos professores inquiridos do 3.º CEB, um maior cuidado com estas afirmações e a apresentação de justificações mais completas sob o ponto de vista científico. As questões onde constavam estas afirmações foram respondidas pela maioria dos professores da nossa amostra, mas não houve um único professor que tenha respondido acertadamente a todas as questões.

- *Conhecer algumas atitudes metodológicas usadas pelos professores para o ensino da temática em causa, nomeadamente, a utilização de ambientes de geometria dinâmica (AGD) e de materiais manipuláveis.*

Mais uma vez o objetivo foi cumprido. Em relação a esta matéria, o nosso estudo confirma o que dizem vários estudos nacionais e internacionais, bem como as orientações do programa de Matemática do Ensino Básico (2007): um número considerável de professores parecem crenes nos benefícios do uso destes recursos para o ensino e aprendizagem da Matemática. Todos os professores presentes nas ações de formação conheciam o *Geogebra* e foram vários os materiais manipuláveis mencionados pelos professores dos três ciclos de ensino. Contudo, como seria expectável, os ambientes de geometria dinâmicos são usados por um maior número de professores do 3.º CEB que os manipulam com maior destreza. Em relação aos materiais, foram referidos vários, pelos professores dos diferentes ciclos de ensino, mas os que mais os usam são os que lecionam no 2.º CEB. Contudo, para além dos valores

percentuais que já foram alvo de análise, é visível a mudança de paradigma no ensino da Matemática em relação ao programa datado de 1990/1991 e que se usam, agora, mais metodologias de caráter dinâmico.

- *Conhecer as fontes usadas pelos professores para a atualização científica.*

Foi realmente possível conhecer as fontes usadas pelos professores para a sua atualização científica, pelo que este objetivo também foi cumprido.

O conhecimento das fontes usadas pelos professores para a atualização científica foram essencialmente apresentadas nas opções da questão respetiva. A importância de perceber que o manual escolar era o recurso mais utilizado, seguido da formação inicial, da Internet, das ações de formação e das referências bibliográficas, por esta ordem de preferência, permite tirar outras ilações relacionadas com o conhecimento científico. Uma minoria dos professores referiu ainda o trabalho colaborativo.

Repare-se que, sendo o manual escolar o recurso mais utilizado e tendo em consideração que a informação lá presente não é suficiente para o domínio profundo nesta matéria e que contém diversas inconsistências, não será este o melhor recurso para essa aprendizagem.

Ao nível das referências bibliográficas, apesar de ser referida por vários professores, uma parte significativa dos inquiridos não é capaz de apresentar exemplos de obras consultadas e uma grande parte dos que o fazem refere os materiais da DGIDC.

- *Perceber se há diferenças significativas nas respostas dadas pelos professores dos grupos de docência 230 e 500 (2.º e 3.º CEB) e relativamente aos pontos anteriormente referidos.*

Este último objetivo foi, igualmente, cumprido. Os testes de hipóteses aplicados à variável ciclo de ensino (2.º e 3.º CEB) relativamente a diversos itens permitiram constatar que se verificaram três diferenças significativas entre estes grupos de docentes, nomeadamente, na distinção entre simetria e isometria, no reconhecimento de que a reflexão não é equivalente a uma rotação de  $180^\circ$  e, na identificação do triângulo equilátero como rosácea. Foram aplicados algumas dezenas de testes de hipóteses para identificar diferenças significativas entre estes grupos que, à exceção daquelas situações, não permitiram identificar, com 95% de certeza, que essas diferenças existiam. Ou seja, há poucas diferenças entre os professores do 2.º e os do 3.º CEB relativamente aos temas inquiridos no questionário.

### **Limitações do Estudo**

No momento em que este projeto foi delineado, não prevíamos que a informação disponível sobre o ensino das transformações geométricas fosse tão diminuta. O contacto com mais trabalhos do que aqueles a que tivemos acesso poderia ajudar a reforçar as conclusões tiradas neste trabalho.

A aplicação do inquérito teve alguns condicionantes já por nós previstos, tais como a tendência para os professores dialogarem uns com os outros durante ao preenchimento do questionário nas duas ações de formação com um número elevado de professores presentes. Nestes momentos, os investigadores apelavam ao silêncio que era respeitado.

Outra limitação de que já falamos prende-se com o constrangimento de alguns professores no preenchimento de um questionário que assumia a forma de um teste de conhecimentos científicos pelo que se limitaram a preencher o cabeçalho e recusaram responder às questões nele presentes.

O maior condicionante deste estudo foi o tamanho da amostra dos professores do 1.º CEB, o que não permitiu fazer a comparação deste grupo com os outros, como o realizado entre os professores do 2.º CEB e 3.º CEB ou mesmo estudar, com um maior grau de fiabilidade, as conclusões sobre o conhecimento efetivo deste grupo de profissionais.

### **Considerações Finais**

Em jeito de conclusão sumária, o questionário utilizado nesta investigação abordava tópicos específicos do ensino das simetrias e das transformações geométricas, que deviam ser do conhecimento dos docentes que lecionam no Ensino Básico. Neste momento de tecer considerações finais, sentimos que estamos perante uma situação análoga à descrita por Liping Ma (2009) quando estudou um conjunto de professores, também do Ensino Básico, na temática dos números e operações. As conclusões do estudo de Ma (2009) afirmavam que os professores conheciam os conteúdos, mas de uma forma superficial, pois, perante o desafio de situações concretas dessa matéria, os professores cometiam erros, não sabiam responder ou apresentavam enormes fragilidades. No nosso estudo de investigação deparamo-nos com uma realidade análoga. Acreditando que os professores dominam a matéria em questão de forma superficial, quando confrontados com questões que requeriam um domínio profundo do conteúdo, a prestação dos professores revelou-se insuficiente e com inúmeras conceções desajustadas que limitam a exploração desta temática. Na verdade, a abordagem sobre as simetrias e as transformações geométricas que faziam parte do

programa de Matemática em vigor de 1990/1991 até 2007 e que foram modificadas e abandonadas com a entrada em vigor do programa de 2007, continuam presentes na mente e na prática dos professores. Este parece ser o principal entrave ao desenvolvimento das aprendizagens deste tema. Contudo, conforme referem alguns especialistas na matéria, nacionais e internacionais, as mudanças curriculares devem ser apoiadas com o desenvolvimento de formação contínua para os professores. Estas mudanças ocorreram nos diferentes domínios mas, do ponto de vista didático e curricular, as correntes pedagógicas que nos últimos anos têm estado na ribalta impulsionaram a atenção sobre a formação de professores com vista a melhorar aquelas valências. Neste sentido, as reuniões do PAM e do PM tiveram um papel chave na melhoria das metodologias de ensino da disciplina de Matemática.

No que concerne ao conhecimento científico, as alterações curriculares ocorridas são muitas e implicam, para um claro entendimento das matérias específicas, a necessidade de conhecer a articulação da teoria de grupos e das próprias funções com as transformações geométricas. Assim, torna-se possível compreender as especificidades do tema e explorá-lo de uma forma mais abrangente. Esta problemática, a nosso ver, pode ser analisada a partir de duas perspetivas. Por um lado, perante a dimensão das alterações ocorridas, o Ministério da Educação poderia ter organizado formação contínua de professores que dedicasse especial atenção a este domínio do conhecimento, contudo, dado que o programa de Matemática foi homologado em 2007 e, no ano de aplicação do nosso questionário, estava generalizado a todos os anos de escolaridade, perante as evidências do estudo que apresentamos, parece que essa atualização não ocorreu, pelo menos nos Agrupamentos e Escolas onde decorreu o nosso estudo. Por outro lado, também se poderia colocar o mote no professor que, perante a obrigatoriedade de seguir as diretrizes deste documento orientador, deveria procurar atualizar os seus conhecimentos neste domínio. Nesta perspetiva, deparamo-nos com alguns aspetos que ajudam a perceber alguma limitação, por parte dos docentes, nesta procura. Em primeiro lugar, a informação acessível na Internet, entre os anos de 2007 e 2011, era algo controversa havendo fontes científicas atualizadas e outras não. Os próprios manuais escolares, como já vimos, possuíam informação superficial e muitas vezes incorreta, tal como ainda ocorre nos dias de hoje. Acresce dizer que na formação inicial frequentada pela maioria dos professores inquiridos não se tratava este tema da forma como atualmente se aborda. Apesar de haver alguma diversidade de licenciaturas de base (Biologia, Geologia, Economia, Gestão, Contabilidade, Engenharia, entre outras), não há diferenças significativas entre estes professores e os que possuem as licenciaturas profissionalizantes para o ensino da Matemática, relativamente aos itens e conhecimentos dos diferentes domínios estudados. Ora, se Veloso (2012) nos alerta para a ausência de uma abordagem deste tema ou uma abordagem inadequada na formação inicial, podemos assumir que, em matéria de opinião sobre a inclusão deste

tema no 6.º ano de escolaridade e nas formas de atualização científica, os professores não se destacam pela formação inicial que possuem.

Ora, dado que as principais fontes utilizadas pelos professores foram as enunciadas atrás, percebemos melhor os constrangimentos com que estes profissionais se depararam. O interesse dos mesmos nas ações de formação por nós dinamizadas foi revelador da vontade em aprender mais sobre esta matéria.

As aprendizagens dos professores, nesta temática, de um modo geral foram feitas de forma autodidata e, conseqüentemente, sem orientação e supervisão científica e pedagógica. As implicações que esta nova abordagem possui poderão estar na origem da ausência de justificação para alguns factos corretos ou da sua aceitação de outros errados, como vimos nas respostas ao questionário. Para exemplificar este ponto, podemos lembrar o facto de os professores saberem que há, apenas, 7 tipos de frisos, mas, depois, assumirem que um friso com simetria de reflexão horizontal implica a existência de simetria de reflexão deslizante e vice-versa. As dificuldades em perceber que a simetria identidade faz parte do conjunto de simetrias de uma dada figura ou em perceber o motivo pelo qual a reflexão deslizante não é apenas a composição de uma translação com uma reflexão são duas lacunas bem visíveis neste nosso estudo, originadas pela ausência da conexão deste tema com a teoria de grupos.

Em relação à comparação que frequentemente fizemos, no domínio do saber científico, dos professores do 2.º e 3.º CEB, nas dezenas de testes de hipóteses aplicados, os valores-p obtidos não permitiram afirmar a existência de uma diferença notável entre eles ( $\alpha = 5\%$ ). As diferenças significativas apontadas tocam apenas três questões particulares. Assim, de uma forma geral, as respostas às questões que foram dadas por estes dois grupos de docência destacados (2.º e 3.º CEB), não estão dependentes do ciclo em que estes lecionam. Ou seja, não podemos afirmar que estes docentes possuem um nível de conhecimento científico distintas dependendo do ciclo onde lecionam.

As lacunas e as fragilidades que o ensino da geometria tem revelado ao longo dos anos vai ao encontro dos sinais por parte dos documentos orientadores do Ministério da Educação da necessidade de reverter a situação respeitante a esta área do saber. A necessidade de uma atualização dos saberes científicos sobre as transformações geométricas é transversal a qualquer grupo de professores em questão, independentemente do seu ciclo de ensino, formação inicial ou anos de experiência, como forma de colmatar as carências do conhecimento geométrico dos professores e, mais ainda, nesta temática (Gomes et al., 2012). Lorenzato (2006) defende a consciencialização do dever que os professores têm em estudar e aprender os temas onde se sentem inseguros, mas outros autores (e.g., Loureiro, 2009; Tempera, 2010; Veloso, 2012; Viana, 2013) defendem a necessidade de o Ministério da Educação proporcionar formação contínua a estes profissionais, como meio de garantir

um corpo docente com maiores competências científicas, especialmente, aquando das renovações curriculares. Apesar de Priestly (2003, citado por Fisher, 2007) acreditar que os problemas relacionados com a implementação das reformas serão “mitigados a partir do momento em que os professores se acostumem aos novos programas e a orientação aumente” (p. 106), os dados revelados pelo nosso questionário, aplicado quatro anos após a publicação do programa de 2007, levanta-nos algum ceticismo em relação a esta posição.

O atual programa de Matemática (2013) propõe uma nova mudança curricular nesta temática, mas os conceitos mantêm-se. Acreditamos, tal como refere Priestly (2003, citado por Fisher, 2007), que o tempo de implementação destes programas ajudará a combater algumas conceções desajustadas, mas não nos parece que, neste caso, as aprendizagens possam ser profícuas e profundas quando não há apoio científico que verdadeiramente possa contribuir para o reconhecimento das propriedades das estruturas que lhe estão subjacentes. Para além disso, a dificuldade na implementação das alterações curriculares descritas em alguns trabalhos de referência<sup>47</sup> são agravadas pela instabilidade que tem marcado o ensino nos últimos anos, quer ao nível das alterações de programas, quer ao nível das condições de trabalho.

Porém, e a nível didático, a prestação destes profissionais revelou-se adequada pelo conhecimento de materiais que pudessem melhorar as aprendizagens deste conteúdo, o que mostra que as tendências internacionais para a valorização dos aspetos didáticos é claramente visível no caso português. Aliás, o Plano de Ação da Matemática tinha como principal objetivo aprofundar especialmente esta vertente. Tal como Shulman (1986) e outros autores (e.g., Tardif, 2004; Perrenoud, 1993; Turner-Bisset, 1999), não temos intenção de diminuir a importância do conhecimento pedagógico do conteúdo ou do conhecimento curricular, mas, ao contrário, elevar ao mesmo nível destes, pelo menos, o conhecimento do conteúdo no sentido de o professor compreender, não apenas que algo é assim, mas também porque é assim (Shulman, 1986), ou seja, ir para além do reconhecimento e procurar onexo de causalidade das coisas.

O *paradigma perdido* referido por Shulman (1986) volta, na atualidade, a ganhar terreno em várias frentes. Assim, sobre os saberes essenciais para o ensino, regressamos à conhecida metáfora de Bernard Shaw, “*quem sabe faz, quem não sabe ensina*”, citada e interpretada por Shulman (1986, pp. 4-5), como a possibilidade de Shaw querer dizer: “*quem sabe faz; quem não sabe, mas domina os procedimentos pedagógicos, ensina*”, embora corrigida por Shulman (1986, p. 14) para: “*quem sabe faz, quem compreende ensina*”.

---

<sup>47</sup> Ver subcapítulo As Mudanças Conceituais do Professor do Capítulo 7.

## Recomendações

O trabalho que aqui desenvolvemos induz dois tipos de recomendações. O primeiro relacionado com a consciencialização das suas conclusões e a atenção referente ao aspeto da formação contínua de docentes como forma de melhorar o processo de ensino da matemática, e o segundo, recomendações para futuras investigações.

### Recomendações para o Ensino

O modo como os professores abordam os diferentes conteúdos depende fundamentalmente do conhecimento científico que o profissional possui e este facto permite-nos, com as conclusões obtidas neste estudo, concordar com diversos professores e educadores, de que já demos conta, no sentido da necessidade de formação contínua destes grupos, especialmente em momentos de alterações programáticas profundas, sob o ponto de vista concetual, de que são exemplo as Simetrias e as Transformações Geométricas no PMEB (2007).

O currículo traduzido e moldado pelos professores é um processo construtivo e está diretamente relacionado com a sua formação inicial e conseqüente evolução na sua formação contínua (Teixeira, 2004) e, neste sentido, constitui um processo de ensinar particular e idiossincrático. Ora, se o professor possui fragilidades na lecionação de determinado conteúdo, a sua abordagem ficará certamente aquém do expectável sob diversas perspetivas, tais como a abrangência da exploração do tema. O investimento do Ministério da Educação nestas ações, tal como aconselham diversos educadores e professores de Portugal, permitiria certamente colmatar estas dificuldades desde que, numa primeira abordagem, se permitisse trabalhar o conhecimento profundo da matemática ao nível do conteúdo científico. Também, na perspetiva de melhorar o ensino destas matérias, não podemos deixar de responsabilizar os professores na procura de estratégias que lhes permitisse aprofundar conhecimentos que os mesmos sentissem não serem suficientes. É interessante referir que, no final do preenchimento do questionário, os professores solicitaram o envio dos materiais utilizados, outra ação de formação sobre temas não abordados e alguns reconheceram a necessidade de aprofundar esses saberes. Mas de que forma os podem fazer, sendo que os manuais escolares não são suficientes? Haverá certamente professores que possam sustentar uma evolução do seu conhecimento de forma autónoma pela formação inicial preconizada, mas outros certamente não o conseguirão.

Repare-se ainda que a temática em causa, para além de alterações sob o ponto de vista concetual marcada pelo acrescento de representações nunca antes estudadas no programa de

matemática do ensino básico ou mesmo secundário, é também marcada pela mudança da perspectiva do ensino da geometria. Enquanto estudantes, os docentes que desenvolveram aprendizagens no âmbito da geometria, podem, certamente, ter tido um contacto com esta área de uma forma distinta da que os estudos internacionais consideram importante. Por exemplo, a tendência muito marcada para a algebrização da geometria tal como apontaram Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e Lacroix (1765-1843 citado por Boyer, 1998). Esta tendência ainda está muito presente nas nossas escolas, conforme o estudo de Maia e Soares (2013). Esse estudo refere que 17 professores no ativo, todos com a profissionalização para o ensino da Matemática ao 3.º CEB e Ensino Secundário, resolveram um problema baseado no original de Héron através de equações matemáticas (Teorema de Pitágoras ou otimização), algumas bastante trabalhosas e, para o qual, bastariam um raciocínio puramente geométrico e baseado nas propriedades da reflexão. Este estudo permitiu indagar duas possíveis realidades: a primeira, que foi a verificação da tendência para o uso da álgebra para a resolução de problemas geométricos e a segunda, que foi a ausência de contacto com a utilização das transformações geométricas como estratégias para a resolução de problemas geométricos, tal como nos dão conta alguns estudos internacionais.

Perante todas as particularidades referidas anteriormente, defendemos a necessidade de acesso à formação contínua por parte de todos os docentes, principalmente quando ocorrem mudanças curriculares ao nível dos conteúdos, como forma de garantir a possibilidade de acesso, de todos os docentes, a uma aprendizagem ao longo da vida e a implementação e sustentação de um pensamento matemático a um nível mais elevado e com uma maior abrangência concetual.

### **Recomendações para Futuras Investigações**

Após muitas reflexões sobre o trabalho aqui desenvolvido e sobre esta matéria, dever-se-ia continuar a investigar sobre algumas dificuldades e fragilidades detetadas no âmbito do ensino e aprendizagem da geometria e alargar este estudo a um número significativo de docentes do 1.º ciclo do ensino básico.

Na revisão da literatura de suporte a este estudo, focámos algumas problemáticas que mereciam ser investigadas por serem importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico, nesta era em que a geometria adquire uma importância relevante nos programas de Matemática do Ensino Básico. Referimo-nos a três situações em particular: a tendência para a algebrização da geometria<sup>48</sup>, a sensibilidade dos professores para o uso das isometrias como processo de resolução de problemas e a influência da posição dos objetos geométricos no reconhecimento das suas

---

<sup>48</sup> Ver subcapítulo *A importância do Estudo da Simetria e das Transformações Geométricas no Currículo Escolar* do capítulo 4.

propriedades<sup>49</sup>. As duas primeiras situações estão, de certo modo, relacionadas. É importante salientar que, se um indivíduo não conhecer determinada estratégia de resolução de um problema, não o resolverá por esse processo (Polya, 1981). Assim, seria interessante dar continuidade ao trabalho desenvolvido por Maia e Soares (2013), que estudaram as estratégias de resolução do problema de Héron de Alexandria<sup>50</sup> (10 d.C.-70 d.C.) apresentadas por doze professores do 3.º CEB e Secundário. Este trabalho podia ser continuado no sentido de investigar a tendência dos professores portugueses para a algebrização da geometria e, conseqüentemente, estudar a influência que este aspeto tem no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. De outra forma, poder-se-ia também dar continuidade a este estudo no sentido que Maia e Soares (2013) lhe deram, ou seja, estudar as estratégias de resolução de problemas geométricos onde as isometrias se apresentam como um poderoso contributo para a determinação da sua solução, no sentido de ser uma estratégia mais simples. Neste último caso, o desenvolvimento de um projeto de investigação-ação com o intuito de os dotar desta estratégia de resolução poderia ser enriquecedor, quer para o investigador, quer para os professores. Relembramos que a resolução de problemas com recurso às isometrias está prevista no programa atualmente em vigor.

No que concerne à influência que a posição dos objetos geométricos tem na identificação das suas propriedades e características, acreditamos que seria um tema deveras importante no sentido de estudar as conseqüências no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Os estudos que abordam esta problemática são escassos mas merecedores da atenção da comunidade matemática.

Os últimos dados do TIMMS e do PISA, aplicados em 2012 e revelados no final de 2013, levaram o nosso país a uma subida no ranking dos países participantes e revelaram que, num dos itens mais difíceis envolvendo geometria, os alunos do 4.º ano ficaram em 1.º lugar (Ponte, 2014). Neste âmbito, dado que as aprendizagens dos alunos que realizaram os testes estiveram abrangidas pelo programa de Matemática de 2007, poder-se-ia investigar o trabalho realizado no âmbito da formação contínua dos professores, das metodologias de trabalho em contexto de sala de aula, da motivação dos professores, do próprio programa de Matemática, entre outras, aquando do desenvolvimento do programa de 2007 e o que está a acontecer nas escolas, neste momento, e a sua implicação nos resultados que se irão obter, nestes mesmos testes, em 2015.

---

<sup>49</sup> Ver subcapítulo A importância do Estudo da Simetria e das Transformações Geométricas no Currículo Escolar do capítulo 4.

<sup>50</sup> Sejam uma reta  $l$  e dois pontos  $P$  e  $Q$  no mesmo lado de  $l$ . Achar um ponto  $R$  sobre  $l$  de tal forma que a soma  $PR + RQ$  seja mínima, ou seja, qual o caminho mais curto de  $P$  a  $Q$  tocando  $l$ ?

A importância da Matemática, para a evolução da própria sociedade, será um motivo suficientemente forte para que estas sugestões de investigação tenham sentido em prol de uma melhoria das aprendizagens relacionadas com esta ciência.

## REFERÊNCIAS

- Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Abreu, M. D. (2011). *Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva: Cálculo Diferencial*. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.
- Ada, T., & Kurtulus, A. (2010). Students' misconceptions and errors in transformation geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(7), 901-909.
- Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação*. Porto: Asa Editores.
- Allain, L. R. (2005). *Ser professor: o papel dos dilemas na construção da identidade profissional*. São Paulo: Editora Annablume.
- Alpalhão, C. N. (2010). *Os programas de matemática do ensino básico de 1990 e de 2007 e o processo de implementação do programa de 2007, no 1.º ciclo do ensino básico*. Robótica e as transformações geométricas: um estudo exploratório com alunos do ensino fundamental. Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal.
- Akay, G. (2011). *The effect of peer instruction method on the 8th grade students' mathematics achievement in transformation geometry and attitudes towards mathematics*. Dissertação de mestrado, Middle East Technical University, Turquia.
- Almeida, P. (1994). Imaginar para aprender: O caso da matemática. *NOESIS*, 32, 29-32.
- Almeida, C., Dias, M., Morais, C., & Miranda, L. (2000). Aprendizagem colaborativa em ambientes baseados na web. *Revista Galego-Portuguesa de Psicología e Educación: Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, 193-202.
- Almeida, P. C., & Biajone, J. (2007). Saberes docentes e formação inicial de professores: implicações e desafios para as propostas de formação. *Educação e Pesquisa*, 33(2), 281-295.
- Alonso, M. L. (1998). *Inovação curricular, formação de professores e melhoria da escola uma abordagem reflexiva e reconstrutiva sobre a prática da inovação/formação*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.

- Amaral, A., Ralha, E., & Gomes, A. (2011). *A história dos programas de matemática para a formação dos professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico em Portugal: o conceito fundamental de medida*. Acedido em 6 de maio de 2013 em <http://hdl.handle.net/1822/15421>
- American Educational Research Association (2011). Code of Ethics. *Educational Researcher*, 40(3), 145-156.
- American Statistical Association (2007). *Using Statistics Effectively in Mathematics Education Research. A report from a series of workshops organized by the American Statistical Association with funding from the National Science Foundation*. Acedido em 20 de outubro de 2013 em <http://www.amstat.org/education/pdfs/UsingStatisticsEffectivelyinMathEdResearch.pdf>
- Amit, M., & Fried, M. N. (2008). The complexities of change: Aspects of reform and reform research in mathematics education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (2.ª ed.) (pp. 385-414). Israel: Ben Gurion University of the Negev.
- Anderson, G., & Arsenault, N. (2005). *Fundamentals of Educational Research* (2.ª ed.). Londres: RoutledgeFalmer.
- Andrade, L. B. (2010). *Educação infantil: discurso, legislação e práticas institucionais*. Porto Alegre: Cultura Acadêmica.
- Apolinário, M. (2007). *A arte da guerra para professores*. Brasília: Thesaurus.
- Apple, M. W. (1986). *Ideologia y Currículo*. Madrid: Ediciones Akal.
- Araújo, P. V. (2002). *Curso de geometria* (3ª ed.). Lisboa: Gradiva.
- Araújo, S. A. (2008). *Contributos para uma Educação para a Cidadania: Professores e Alunos em Contexto Intercultural*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- Associação de Professores de Matemática (1989). Parecer sobre os projectos de novos programas de Matemática para o Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 9, 13-14.
- Associação de Professores de Matemática (2009). *Renovação do Currículo de Matemática: Seminário de Vila Nova de Milfontes 1988*. Lisboa: APM.
- Associação de Professores de Matemática (2013). Posição da direção da Associação de Professores de Matemática (APM) sobre o despacho de revogação do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). *Educação e Matemática*, 122, 2-3.
- Assude, T. (s/d). *Elementos de reflexão sobre a análise e o desenvolvimento curricular [em linha]*. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Acedido em 8 de agosto de 2011 em <http://www.spce.org.pt/sem/TA.pdf>
- Babadogan, C., & Olkun, S. (2006). Program development models and reform in Turkish primary school mathematics curriculum. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (April 13). Acedido em 5 de maio de 2012 em <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm>

- Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching*, 2 (pp. 1-48). Greenwich, CT: JAI Press.
- Ball, S. J. (1998). Big Policies/Small World: An introduction to international perspectives in education policy. *Comparative Education*, 34(2), 119-130. doi: 10.1080/030500698282225
- Bansilal, S., & Naidoo, J. (2012). Learners engaging with transformation geometry. *South Africa Journal of Education*, 32, 26-39.
- Barreiro, I. M. (2010). *Política de Educação no campo: para além da alfabetização (1952-1963)*, (2.<sup>a</sup> ed.). Porto Alegre: Cultura Acadêmica.
- Bastos, R. (1999). Geometria no currículo e pensamento matemático. *Educação e Matemática*, 52, 1-2.
- Bastos, R. (2006). Notas para o ensino da Geometria – sobre simetria. *Educação e Matemática*, 88, 9-11.
- Bastos, R. (2007). Notas para o ensino da Geometria: Transformações Geométricas. *Educação e Matemática*, 94, 23-27.
- Batista, D., & Barros, J. (1994). Programa de Matemática do 3.º Ciclo – Uma reflexão crítica. *Educação e Matemática*, 29, 0-10.
- Batista, C. M., & Souza, N. M. (2011). Conhecimentos e Práticas de Professores de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: o sistema decimal. *CIAEM-IACME*, XIII, 1-11.
- Beyer, L. E., & Liston, D. P. (2001). *El currículo en conflicto*. Madrid: Akal Ediciones.
- Boavida, J. (2000). Ensino e a aprendizagem da Geometria discutidos num encontro no Fundão. *Educação e Matemática*, 58, 44-46.
- Boavida, J., & Amado, J. (2008). *Ciências da Educação: Epistemologia, Identidade e Perspectivas* (2.<sup>a</sup> ed.). Coimbra: Universidade de Coimbra.
- Boavida, A., & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM.
- Bochniak, R. (1992). Questionar o conhecimento: interdisciplinaridade na escola ... e fora dela. São Paulo: Loyola.
- Bogantes, Z. M. (1997). *Planeamento didáctico: Fundamentos, princípios, estratégias y procedimientos para su desarrollo*. Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

- Borrvalho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L., Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. (2011). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*. Acedido em 5 de maio de 2013 em <http://www.cmit.plymouth.ac.uk/journal/default.htm>
- Botas, D. S. (2008). *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de matemática: um estudo no 1.º Ciclo*. Dissertação de mestrado, Universidade Aberta, Portugal.
- Bouckaert, C. (s.d.). Transformation Geometry in Primary School according to Michel Demal. Acedido em 6 de maio de 2013 em <http://www.uvgt.net/GTcrem.pdf>
- Boyer, C. B. (1998). *História da Matemática* (2.ª ed.). São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda.
- Branco, M. G. (2011). *Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da geometria: uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Portugal.
- Bravo, M. P., & Eisman, L. (1998). *Investigación Educativa* (3.ª ed.). Sevilla: Ediciones Alfa.
- Bravo, F. J. (2006). *Impacto da utilização de um ambiente de geometria dinâmica no ensino-aprendizagem da geometria por alunos do 4.º ano do 1.º ciclo do ensino básico*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Portugal.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Breda, A., Trocado, A., & Santos, J. M. (2013). O Geogebra para além da segunda dimensão. *Ondagatio Didactica*, 5(1), 60-84.
- Brunheira, L. (2013). Exames, metas e um <novo> programa – a trilogia do regresso ao passado. *Educação e Matemática*, 122, 1.
- Bulf, C. (2009). The effects of the concept of symmetry on learning geometry at French secondary school. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello, *Proceedings of CERME 6* (pp. 726-735). Lyon: Service des publications, INRP.
- Bulle, N. (2011). Comparing OECD educational models through the prism of PISA. *Comparative Education*, 47(4), 503-521. doi: 10.1080/03050068.2011.555117
- Cabrita, I. (Coord.), Pinheiro, L., Pinheiro, J., & Sousa, O. (2008). *m@c2: novas trajetórias em Matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

- Cabrita, I., Neto, T., Breda, A., & Santos, J. M. (2013). Geogebra em múltiplos contextos educativos – passado, presente e futuro. Acedido em 5 de agosto de 2013 em <http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/2415/2403>
- Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da matemática: duas professoras, dois currículos*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Canavarro, A. P. (2010). Formação precisa-se: Um investimento continuado por parte de todos. *Educação e Matemática*, 108, 1.
- Canavarro, A. P., Tudella, C., & Pires, M. (2009). Um novo programa de Matemática para o Ensino Básico. *Educação e Matemática*, 105, 1.
- Candeias, N. (2007). A Geometria perde peso? *Educação e Matemática*, 95, 26.
- Caputi, A., & Gerônimo, J. R. (2006). *Oficina de Matemática: Descobrimo as simetrias no plano*. Acedido em 3 de setembro de 2011 em [http://ufabc-br.academia.edu/ArmandoCaputi/Papers/467642/Oficina\\_de\\_Matematica\\_Descobrimo\\_as\\_Simetrias\\_no\\_Plano](http://ufabc-br.academia.edu/ArmandoCaputi/Papers/467642/Oficina_de_Matematica_Descobrimo_as_Simetrias_no_Plano)
- Carvalho, A., & Dias, P. (2009). Opiniões sobre o Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico. Questionário aos participantes no ProfMat2009. *Educação e Matemática*, 105, 94-97.
- Carvalho, G. (2011). As Imagens dos Manuais Escolares: Representações mentais de professores e alunos relativamente à presença de imagens nos manuais escolares e à sua eficácia pedagógica. *Da Investigação às Práticas*, 1 (2), 58-78.
- Caseiro, A. (2010). *Conhecimento dos professores de 1.º ciclo sobre educação estatística*. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal.
- Casqueiro, J. N. (2007). *Perspectiva e práticas de três professoras de Matemática do 2.º CEB*. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.
- Check, J. W., & Schutt, R. K. (2012). *Research Methods in Education*. Londres: SAGE Publications.
- Chung, J., Atkin, C., & Moore, J. (2011). The rise and fall of the MTL: an example of European policy borrowing. *European Journal of Teacher Education*, 1, 1–16. doi:10.1080/02619768.2011.633996
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Clements, D. H. (2008). Linking research and curriculum development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (2ª ed.) (pp. 589-623). Nova Iorque: University of Buffalo, State University of New York.

- Clements, K. (2000). Matemáticas en la escuela: cuestiones de equidad y justicia. In N. Gorgorió, J. Deulofeu, A. Bishop (Coords), *Matemáticas y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 61-69). Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Cohen, D. K. (1990). A revolution in one classroom: the case of Mrs. Oublier. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 12 (3), 311-329.
- Cooper, D. R., & Schindler, P. S. (2001). *Métodos de Pesquisa em Administração* (7.ª ed). São Paulo: Artmed Editora.
- Costa, M. C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal.
- Costa, M. S. (2008). *Discutindo o ensino de geometria com professores polivalentes*. Dissertação de Mestrado, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, Brasil.
- Costa, E. (2011). O “Programme for International Student Assessment” (PISA) como instrumento de regulação das políticas educativas. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Crato, N. (2008). *Erros pedagógicos no currículo causam atraso*. Acedido em 20 de agosto de 2012 em [http://www.jn.pt/PaginalInicial/Nacional/Interior.aspx?content\\_id=960849](http://www.jn.pt/PaginalInicial/Nacional/Interior.aspx?content_id=960849)
- Creswell, J. W. (2013). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Approaches* (2.ª ed.). Thousand Oaks: SAGE Publications.
- Crowe, D., & Thompson, T. M. (1987). Transformation Geometry and Archaeology. In NCTM, *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 106-109). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Curi, E. (2004). *Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos*. Tese de doutoramento, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Portugal.
- Dâmaso, A., Lima A., Costa, A., Pacheco, C., Simões, C., Lima, C., & Raposo, S. (2010). *Geometria. Isometrias*. Acedido em 3 de março de 2013 em <http://www.edu.azores.gov.pt/pessoaldocente/formacao/documents/isometrias.pdf>
- D’Ambrósio, U. (1992). Educação Matemática: uma visão do estado da arte. *Pró-Posições*, 4 (1), 7-12.
- Diário da República (2007). Decreto-Lei n.º 35/2007, de 15 de fevereiro. Lisboa: Ministério da Educação.
- Diário da República (2007). Decreto-Lei n.º 43/2007, de 22 de fevereiro. Lisboa: Ministério da Educação.
- Diário da República (2009). Decreto-Lei n.º 51/2009, de 27 de fevereiro. Lisboa: Ministério da Educação.
- Delval, J. (2006). *Manifesto por uma escola cidadã*. São Paulo: Papyrus Editora.

- Devlin, K. (2003). *A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Diogo, F., & Vilar, A. M. (1999). *Gestão Flexível do Currículo*. Porto: ASA Editora.
- Dobbins, M., & Martens, K. (2012). Towards an education approach à la finlandaise? French education policy after PISA. *Journal of Education Policy*, 27(1), 23-43. doi: 10.1080/02680939.2011.622413
- Doyle, A. (2008). Educational performance or educational inequality: what can we learn from PISA about France and England? *A Journal of Comparative and International Education*, 38 (2), 205-217.
- Duarte, J. M. (1988). A discutida Geometria. *Educação e Matemática*, 6, 1-2.
- Duarte, M. C. (1999). Investigação em ensino das ciências: influências ao nível dos manuais escolares. *Revista Portuguesa de Educação*, 12(2), 227-248.
- Escola Superior de Educação de Lisboa (2013). Parecer da ESE de Lisboa sobre a proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico. Acedido em 12 de agosto de 2013 em [http://www.eselx.ipl.pt/eselx/downloads/noticias/Parecer\\_Proposta\\_Programa\\_Matematica.pdf](http://www.eselx.ipl.pt/eselx/downloads/noticias/Parecer_Proposta_Programa_Matematica.pdf)
- Eysenck, H. J., Arnold, W., & Meili, R. (1982). *Encyclopedia of Psychology*. New York: Continuum Publishing Company.
- Facci, M. G. (2004). *Valorização ou esvaziamento do trabalho do professor? Um estudo crítico-comparativo da teoria do professor reflexivo, do construtivismo e da psicologia vigotskiana*. Coleção formação de professores. Campinas: Autores Associados.
- Feiteira, R., & Pires, M. (2008). Reflexões sobre os currículos de Matemática em Portugal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 183-196.
- Fernandes, D. (2007). Um imperativo Ético. *Educação e Matemática*, 94, 1.
- Fernandes, A. C. (2011). *As TIC no desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos do 9.º ano na aprendizagem de Geometria*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.
- Ferreira, I. L. (2010). *Os professores e o currículo: percepções e níveis de intervenção dos professores do ensino básico no desenvolvimento curricular*. Dissertação de mestrado, Universidade Aberta, Portugal.
- Figueira, C., Loureiro, C., Lobo, E., Rodrigues, M. P., & Almeida, P. (2007). Visualização e Geometria nos primeiros anos. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º Ciclos. Acedido em 11 de outubro de 2012 em [http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/061\\_visualgeo.pdf](http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/061_visualgeo.pdf)
- Figueiredo, F., & Barros, J. (2000). *Metacognição: Tempo Para Ouvir a nós Próprios*. Acedido em 9 de novembro de 2012 em [http://www.ipv.pt/millennium/17\\_ect10.htm](http://www.ipv.pt/millennium/17_ect10.htm)

- Filho, J. E. (2005). Aprender é superar obstáculos: a aprendizagem na perspectiva Bachelardiana. In Associação Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências (Ed.), *Atas do V Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências* (pp. 1-10). São Paulo: ABRAPEC.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2007). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos* (2.ª ed.). São Paulo: Editores Associados.
- Fisher, L. (2007). Pedagogy and the Curriculum 2000 reforms at post-16: the 'learn it, forget it' culture? *Curriculum Journal*, 18(1), 103-114. doi: 10.1080/09585170701292257
- Flamarich, C. B. (2000). El curriculum de primaria: Razones para los cambios. In J. M. Goni (Coord.), *El curriculum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 59-62). Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Fonseca, J. J. (2002). *Metodologia da pesquisa científica*. Ceará: Universidade Estadual do Ceará.
- Fowler, F. J. (2003). *Survey Research Methods* (3.ª ed.). Londres: SAGE Publications.
- Freitas, J. O. (1993). A Geometria torna-se Álgebra. *Educação e Matemática*, 26, 18.
- Freitas, H.; Oliveira, M.; Saccol, A. Z., & Moscarola, J. (2000). *O método de pesquisa Survey*. Acedido em 11 de julho de 2013 em <http://www.rausp.usp.br/download.asp?file=3503105.pdf>
- Fujita T., & Jones K. (2003). The place of experimental tasks in geometry teaching: Learning from the textbook designs of the early 20th century'. In S. Pope & O. McNamara (Eds.), *Research in Mathematics Education Volumes: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics*. London: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Fujita, T., Jones, K., & Yamamoto, S. (2004). *Geometrical intuition and the learning and the teaching of geometry*. Paper Presented to Topic Study Group 29 at the 10th International Congress on Mathematical Education. Copenhagen, Denmark.
- Gabinete de Avaliação Educacional (2004). *Resultados do estudo internacional PISA 2003*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Gafanhoto, A., & Canavaro, A. P. (2011). Representações múltiplas de funções em ambiente com Geogebra: Um estudo sobre o seu uso por alunos de 9.º ano. In M. Martinho, R. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra - Actas do EIEM 2011* (p. 125-148). Póvoa de Varzim: SPIEM.
- Gess-Newsome, J. (2001). Pedagogical Content Knowledge: An Introduction and Orientation. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge* (pp. 59-62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Science & Tecnology Education Library.
- Giannouli, V. (2013). Visual Symmetry Perception. *Encephalos*, 50, 31-42.
- Gimeno-Sacristán, J. (2007). *El curriculum: una reflexión sobre la práctica* (9.ª ed.). Madrid: Ediciones Morata, S.L.

- Gomes, A. (2003). *Um estudo sobre o Conhecimento Matemático de (Futuros) Professores do 1.º Ciclo. O Problema dos Conceitos Fundamentais em Geometria*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.
- Gomes, A., Ribeiro, C. M., Martins, F., Pinto, H., Aires, A. P., Campos, H., ... & Poças, R. (2012). *Tarefas em geometria: da sala de aula para a formação de professores, descrição de um projeto*. Consultado em 3 de abril de 2013 em <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/20440/1/Poster%20Actas%20SIEM%202012.pdf>
- Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades dos futuros professores. In APM (Ed.), *Actas do SIEM* (pp. 233-243). Lisboa: APM.
- Gomes, A., & Ralha, E. (2005). Sobre o ensino superior da matemática: a geometria e os professores do 1.º ciclo. "Novos Desafios, Velhas Deficiências". In SPM (Ed.), *Boletim da SPM* (pp. 1-25). Lisboa: SPM.
- Gonçalves, F. (2007). *O movimento da Matemática Moderna: concepções, Dinâmicas e Repercussões*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal.
- Gordon, G. (1996). Using wallpaper groups to motivate group theory. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 6(4), 355-365. doi: 10.1080/10511979608965838
- Gorini, C. A. (1993). An art research project for a geometry course. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 3(4), 442-456. doi: 10.1080/10511979308965725
- Goulding, M. (2003). An investigation into the mathematics knowledge of primary teacher trainees. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics n.º 23(3)* (pp. 73-90). London: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Gresham, G. (2008). Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy in elementary preservice teachers. *Teaching Education*, 19(3), 171-184. doi: 10.1080/10476210802250133
- Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática (GTG) (2006). Uma reflexão sobre o Grupo de Trabalho de Geometria. *Educação e Matemática*, 88, 25.
- Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática (GTG) (2007). O papel que a Geometria poderia desempenhar ... *Educação e Matemática*, 95, 42-44.
- Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática (GTG) (s.d.). *O que gostaríamos de fazer em geometria, com o novo programa que nem sempre está escrito que se pode ou deve fazer* (Documento de trabalho do GTG). Acedido em 3 de março de 2013 em [http://www.apm.pt/files/\\_SE\\_GTG\\_4a951e9ca03e1.pdf](http://www.apm.pt/files/_SE_GTG_4a951e9ca03e1.pdf)

- Grupo de Trabalho do 2.º Ciclo da Associação de Professores de Matemática (GT2) (2010). E agora? Contributos para viabilizar na prática o novo programa de Matemática no 2.º Ciclo. *Educação e Matemática*, 108, 35-36.
- Guimarães, H., Segurado, I., Matos, J. M., Barão, L., & Torres, M. H. (1991). Mesa redonda sobre os novos programas. *Educação e Matemática*, 19, 8-14.
- Guimarães, H. M. (2007). *Depois da Matemática Moderna: passos do discurso curricular sobre a resolução de problemas em Portugal*. Acedido em 20 de setembro de 2012 em [http://www.apm.pt/files/177852\\_C63\\_4dd79e809a3f1.pdf](http://www.apm.pt/files/177852_C63_4dd79e809a3f1.pdf)
- Guimarães, H. M. (2008). Dois anos depois, vinte anos depois... Renovar o currículo, melhorar o ensino, melhorar a aprendizagem. *Educação e Matemática*, 98, 1-2.
- Guimarães, F. (2009). A importância de ser professor no 1.º Ciclo: conhecimento escolar e manuais escolares. *Jornadas de Educação: pensar a educação*, 2, Fafe.
- Gunther, H. (2003). *Como elaborar um questionário*. Brasília: Laboratório de Psicologia Ambiental.
- Gura, K. (1996). Growth and symmetry a mathematics course for liberal art students. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 6(4), 337-350. doi: 10.1080/10511979608965836
- Haltenhoff, M. L. (2004). *Los Saberes de la Escuela: Análisis de la renovación Disciplinaria en la reforma curricular 1996-2002*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria.
- Handal, B., & Hrrington, A. (2003). Mathematics Teachers' Beliefs and Curriculum Reform. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 59-69.
- Hargittai, I., & Hargittai, M. (1999). *Symmetry: A unifying Concept* (6.ª ed.). Bolinas, California: Shelter Publications.
- Hartas, D. (2010). *Educational research and inquiry: qualitative and quantitative approaches*. Londres: Continuum International Publishing Group.
- Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 11(3), 273-292. doi: 10.1080/13450600500105502
- Heaton, R. (1992). Who is minding the mathematics content? A case study of a fifth-grade teacher. *Elementary School Journal*, 93(2), 153-162.
- Henderson, S., & Rodrigues, S. (2008). Scottish student primary teachers' levels of mathematics competence and confidence for teaching mathematics: some implications for national qualifications and initial teacher education. *Journal of Education for Teaching: International research and pedagogy*, 34(2), 93-107. doi: 10.1080/02607470801979533

- Herrera, T. A., & Owens, D. T. (2001). The “New New Math”? Two Reform Movements in Mathematics Education in Mathematics Education. *Theory into Practice*, 40(2), 84-92. doi: 10.1207/s15430421tip4002\_2
- Hohenwarter, M. (2013). Geogebra 4.4 – from Desktop to Tablets. *Indagatio Didactica*, 5(1), 8-18.
- Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning Mathematics for Teaching: results from California’s Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- Hill, M. M., & Hill, A. (2008). *Investigação por questionário*. Lisboa: Edições Sílabo.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. *An Exploratory Study, Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511. doi: 10.1080/07370000802177235
- Hollebrands, K. F. (2004). High School Students’ Intuitive Understandings of Geometric Transformations. *Mathematics teacher*, 97 (3), 207-214.
- Huberman, M., & Middlebrooks, S. (2000). The dilution of inquiry: A qualitative study. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 13(3), 281-304. doi: 10.1080/09518390050019686
- Ilaslan, S. (2013). *Middle School Mathematics Teachers’ Problems in Teaching Transformational Geometry and their Suggestions for the Solution of These Problems*. Dissertação de Mestrado, Middle East Technical University, Turquia.
- Janela, M. A. (2012). *O (Novo) Programa de Matemática Ensino Básico e o desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico Triângulos e quadriláteros. Um estudo em turmas piloto do 7.º ano*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Jones, K. (2000). Teacher Knowledge and Professional Development in Geometry. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* n.º 20 (3) (pp. 109-114). London: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Johnson, B., & Christensen, L. (2012). *Educational Research: Quantitative, Qualitative, and Mixed Approaches* (4.ª ed.). Califórnia: Sage Publications.
- Kennedy, M. M. (2002). Knowledge and Teaching, Teachers and Teaching. *Theory and Practice*, 8(3), 355-370. doi: 10.1080/135406002100000495
- Kilpatrick, J., & Keitel, C. (1999). Racionalidade e irracionalidade dos estudos comparativos internacionais. *Educação e Matemática*, 55, 71-80.
- Kilpatrick, J. (2009a). Programa de Matemática do Ensino Básico. O olhar de um especialista internacional em currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, 105, 50-52.
- Kilpatrick, J. (2009b). The mathematics teacher and curriculum change. *PNA: Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 3(3), 107-121.

- Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *TMME*, 1(1), 3-8.
- Krishnamurti, J. (2009). *A educação e o significado da vida* (17.ª ed.). São Paulo: Pensamento Cultrix.
- Leal, L. C. (1997). Exames: Uma via a prosseguir. *Educação e Matemática*, 47, 5-12.
- Lehenbauer, S., Picawy, M. M., Steyer, V. E., & Wandscheer, M. S. (Org.) (2005). *Ensino Fundamental do século XXI: Questões e desafios*. São Paulo: Editora da ULBRA.
- Leikin, R., Berman, A., & Zaslavsky, O. (2000). Applications of symmetry to problem solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 799-809. doi: 10.1080/00207390050203315
- Leikin, R. (2003). Problem-Solving Preferences of Mathematics Teachers: Focusing on Symmetry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(4), 297-329. doi: 10.1023/1026355525004
- Leung, F., & Park K. (2002). Competent students, competent teachers? *International Journal of Educational Research*, 37(2), 113-119.
- Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, 13(1), 17-32. doi: 10.1080/14794802.2011.550715
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12(4), 311-333. doi: 10.1080/14926156.2012.732191
- Lima, Y. (1997). Modernização da Matemática no liceu: um programa inédito de Sebastião e Silva. In FLUP (Ed.), *Actas do Colóquio de Homenagem a Sebastião e Silva* (pp. 1-18). Lisboa: Universidade de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Lima, J. R., & Capitão, Z. (2003). *e-Learning e e-conteúdos: aplicações das teorias tradicionais e modernas de ensino e aprendizagem à organização e estruturação de e-cursos*. Vila Nova de Famalicão: Centro Atlântico.
- Lima, M. C. (2004). *A Engenharia da produção acadêmica*. São Paulo: Saraiva.
- Lindquist, M. M., & Shulte, A. P. (1987). *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lingard, B. (2010). Policy borrowing, policy learning: testing times in Australian schooling. *Critical Studies in Education*, 51:2, 129-147.
- Liu, Y., & Toussaint, G. T. (2011). The marble frieze patterns of the cathedral of Siena: geometric structure, multi-stable perception and types of repetition. *Journal of Mathematics and the Arts*, 5(3), 115-127. doi: 10.1080/17513472.2011.551933
- Llavador, F. B. (1991). *Política y Reformas curriculares*. Valência: Universitat de Valência.

- Lobato, G. (1991). Novos programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário – que mudança? *Educação e Matemática*, 19/20, 3-6.
- Loureiro, C. (2007). A Geometria na proposta de ajustamento – algumas questões. *Educação e Matemática*, 95, 25.
- Loureiro, C. (2009). Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação e Matemática*, 105, 61-66.
- Lorenzato, S. (2006). *Para aprender matemática* (2.<sup>a</sup> ed.). Coleção formação de professores. Campinas: Autores Associados.
- Lüdke, M. (Coord.), Puggian, C., Ceppas, F., Calvacante, R. L., & Coelho, S. L. (2007). *O professor e a pesquisa* (5.<sup>a</sup> Ed.). São Paulo: Papirus.
- Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.
- Mabuchi, S. T. (2000). *Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores*. Dissertação de mestrado, Universidade Católica de São Paulo, Brasil.
- Machado, L. M., Maia, G., & Labegalini, A. (Orgs.) (2007). *Pesquisa em Educação: passo a passo*. São Paulo: Asa Edições M3T.
- Magendzo, A. K. (2008). *Dilemas del curriculum y la pedagogía. Analizando la Reforma Curricular desde una perspectiva crítica*. Santiago do Chile: LOM Ediciones.
- Mashingaidze, S. (2012). The Teaching of Geometric (Isometric) Transformations at Secondary School Level: What Approach to Use and Why? *Asian Social Science*, 8(15), 197-210.
- Maia, C. (2011). *O plano hiperbólico*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Portugal.
- Maia, C., & Soares, F. B. (2013, junho). Resolução de problemas com recurso às transformações geométricas. Comunicação apresentada no 1<sup>o</sup> Encontro Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.
- Malaty, G. (1988). What is wrong with the 'back-to-basics' movement, and what was wrong with the 'new-math' movement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 19(1), 57-65. doi: 10.1080/0020739880190105
- Mamede, E., Cadeias, C., Ferreira, D., & Vieira, L. (2012). Um Olhar Sobre o Desenvolvimento do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.<sup>o</sup> Ciclo do Ensino Básico. *Interações*, 20, 208-233.
- Marchini, C., & Vighi, P. (2011). Innovative early teaching of isometries. In M. Pytlak, T. Rowland and E. Swovoda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)* (pp. 547-557). Lyon: Service des publications, INRP.
- Marchis, I. (2009). Symmetry and Interculturality. *Acta Didactica Napocensia*, 2(1), 57-62.

- Maroco, J. (2011). *Análise Estatística com o SPSS Statistics* (5.ª ed.). Sintra: ReportNumber.
- Marques, F. J. (2011). *O Trabalho entre Professores de Matemática na Gestão do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Marsden, P. V., & Wright, J. D. (Eds.) (2010). *Handbook of Survey Research*. Londres: Emerald Group Publishing.
- Martins, M. E. (2006). *Introdução à Inferência Estatística*. Acedido em 7 de novembro de 2013 em <http://homepage.ufp.pt/cmanso/ALEA/introInfEstat.pdf>
- Martins, F. J. (2010). *O raciocínio matemático em actividades de investigação numa turma do 5.º ano do ensino básico*. Dissertação de mestrado, Universidade do Algarve, Portugal.
- Martins, M. C. (2011). *O Desenvolvimento Profissional de Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico: Contributo da Participação num Programa de Formação Contínua em Matemática*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Mashingaidze, S. (2012). The Teaching of Geometric (Isometric) Transformations at Secondary School Level: What Approach to Use and Why? *Asian Social Science*, 8(15), 197-210.
- Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*, 5, 91-110.
- Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 141-158). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Matos, J. M. (Ed.) (2010). Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Moderna em Portugal no final dos anos 70. In J. Matos & W. Valente, *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos* (pp. 1-8). UIED – Coleção Educação e Desenvolvimento. Lisboa: Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- Matos, J. M., & Valente, W. (Eds.) (2010). Estudos comparativos sobre a reforma da Matemática Moderna. In J. Matos & W. Valente, *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos* (pp. 137-174). UIED – Coleção Educação e Desenvolvimento. Lisboa: Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- Matos, L. F. (2011). *Abordagem das rotações centrada nos padrões – um estudo de caso com alunos do 9.º ano*. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.
- Matos, L., & Cabrita, I. (2012). Patterns and Techonology – A Creative Approach to Isometries. *Journal of Mathematics and System Science*, 2, 320–326.
- Medeiros, M. (2005). *Questionários: Recomendações para formatação*. Brasil: Instituto de Pesquisa Económica Aplicada.

- Mellado, V. (2011). Formación del professorado de ciencias y buenas prácticas: el lugar de la innovación y la investigación didáctica. In A. Caamano (coord), *Física y Química. Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Menezes, F. R. (2010). *Salazar – Uma biografia Política* (4.ª ed.). Lisboa: Dom Quixote.
- Miguel, A., Fiorentini, D., & Miorim, M. A. (1992). Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? *Pro-Posições*, 3(7), 41-54.
- Milhollan, F., & Forisha, B. E. (1978). *Skinner x Rogers: maneiras contrastantes de encarar a educação*. São Paulo: Grupo Editorial Summus.
- Ministério da Educação (1991). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico — 2.º Ciclo*. Lisboa: Direção Geral dos Ensinos Básicos e Secundários.
- Ministério da Educação (2000). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico — 3.º Ciclo* (5ª ed.). Lisboa: Direção Geral dos Ensinos Básicos e Secundários.
- Ministério da Educação (2004). *Organização Curricular e Programas Ensino Básico — 1.º Ciclo* (4.ª ed.). Lisboa: Departamento de Educação Básica.
- Ministério da Educação (s.d.). *Novo Programa de Matemática – 1.º, 2.º e 3.º Ciclos. Percursos temáticos de aprendizagem*. Acedido em 15 de outubro de 2013 em [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/Percursos\\_atualizado.pdf](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/Percursos_atualizado.pdf)
- Ministério da Educação e Ciência (2012). *Estudos Internacionais mostram necessidade de melhorar conhecimentos dos alunos em Matemática e Ciências*. Acedido em 7 de março de 2012 em <http://www.portugal.gov.pt/pt/os-ministerios/ministerio-da-educacao-e-ciencia/mantenha-se-atualizado/20121211-mec-matematica-ciencias.aspx>
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas de Curriculares Matemática*. Acedido em 22 de julho de 2013 em [https://www.google.pt/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCoQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.dge.mec.pt%2Fdata%2Fdgicd%2Fnoticias%2FMetas%2FPrograma\\_Matematica\\_Basico.pdf&ei=2Tv1UoE6qs7QBduQgcAM&usg=AFQjCNG4K-xqltEC0z5jLFMz45kT\\_pJuBg&sig2=JaFbKv2vMgpidKOMBcNhvA](https://www.google.pt/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCoQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.dge.mec.pt%2Fdata%2Fdgicd%2Fnoticias%2FMetas%2FPrograma_Matematica_Basico.pdf&ei=2Tv1UoE6qs7QBduQgcAM&usg=AFQjCNG4K-xqltEC0z5jLFMz45kT_pJuBg&sig2=JaFbKv2vMgpidKOMBcNhvA)
- Monteiro, C., Costa, C., & Costa, C. (2004). Competências matemáticas à saída da formação inicial. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Org.), *A Matemática na Formação do Professor*, (pp. 169-196). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Montessori, M. (2004). *A educação e a paz*. São Paulo: Papyrus Editora.
- Morais, M. M., & Neves, I. P. (2007). Fazer investigação usando uma abordagem metodológica mista. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 75-104.

- Moreira, D., Ponte, J. P., Pires, M. V. & Teixeira, P. (2006). *Manuais escolares: Um ponto de situação. Texto de apoio ao grupo de discussão – Manuais Escolares*. XV Encontro EIEM.
- Morris, K. (1973). *Why Johnny can't add. The Failure of the New Math*. New York: St. Martin's Press.
- Moutsios, S. (2010). Power, politics and transnational policy making in education. *Globalisation, societies and Education*, 8(1), 121-141. doi: 10.1080/14767720903574124
- Muijs, D. (2011). *Doing Quantitative Research in Education with SPSS* (2.<sup>a</sup> ed.). Londres: SAGE Publications.
- Munthe, E., Malmo, K. S., & Rogne, M. (2011). Teacher education reform and challenges in Norway. *Journal of Education for Teaching. International research and pedagogy*, 37(4), 441-450. doi: 10.1080/02607476.2011.611012
- Nápoles, S. (2007). A Matemática na formação inicial de professores. *Educação e Matemática*, 91, 90-95.
- Nascimento, R. A., Benutti, M. A., & Neves, A. F. (2007). *Mandalas e rosáceas: em busca de novas abordagens para antigos conteúdos*. Acedido em 10 de abril de 2013 em [http://www.degraf.ufpr.br/artigos\\_graphica/MANDALAS.pdf](http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/MANDALAS.pdf)
- National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.<sup>a</sup> ed.). Lisboa. APM.
- Neto, J. A. (2001). Sobre a aprendizagem significativa na escola. In E. Martins, J. Neto, N. Carpentieri, S. Cruz, *Diferente faces da educação* (pp. 13-40). São Paulo: Arte & Ciência Vilipress.
- Newman, I., & Benz, C. R. (2001). *Qualitative-Quantitative Research Methodology: Exploring the Interactive Continuum*. Illinois: Board of Trustees.
- Nóvoa, A. (2007). Diz-me como ensinas, dir-te-ei quem és e vice-versa. In I. Fazenda (Org.), *A pesquisa em educação e as transformações do conhecimento* (9.<sup>a</sup> ed.) (pp. 29-42). São Paulo: Editora Papirus.
- Nunes, F., & Guimarães, H. M. (1994). Como vamos com os novos programas? O que dizem os professores. *Educação e Matemática*, 31, 27-33.
- Oates, T. (2011). Could do better: using international comparisons to refine the National Curriculum in England. *Curriculum Journal*, 22(2), 121-150. doi: 10.1080/09585176.2011.578908
- OCDE (2001). *Knowledge and skills for life: first results from PISA 2000*. Paris: OCED.
- Oliveira, A. F. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Oliveira, I. B., & Fernandes, J. A. (2011). Contributos do Plano da Matemática II para a Promoção do Trabalho Colaborativo dos Professores. In APM (Ed.), *Actas PROFMAT2011* (pp. 1-16). Lisboa: APM.

- Outhred, L., & Owens, K. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.
- Pacheco, J. A., Ferreira, N. C., & Machado, L. M. (2010). Noção de tempo curricular: abordagem histórica das mudanças curriculares para a compreensão das políticas de ensino. *Cadernos de Pesquisa: Pensamento Educacional*, 5(11), 185-198.
- Palhares, P. (Coord.) (2004). *Elementos de matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: Lidel.
- Patsiomitou, S., & Emvalotis, A. (2009). *Developing geometric thinking skills through dynamic diagram transformations*. Acedido em 3 de maio de 2013 em [http://www.researchgate.net/publication/230648484\\_DEVELOPING\\_GEOMETRIC\\_THINKING\\_SKILLS\\_THROUGH\\_DYNAMIC\\_DIAGRAM\\_TRANSFORMATIONS/file/d912f5027fda55e3f5.pdf](http://www.researchgate.net/publication/230648484_DEVELOPING_GEOMETRIC_THINKING_SKILLS_THROUGH_DYNAMIC_DIAGRAM_TRANSFORMATIONS/file/d912f5027fda55e3f5.pdf)
- Pardal, L. A. (1993). *A Escola, o Currículo e o Professor*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Pardal, L., & Lopes, E. (2011). *Métodos e Técnicas de Investigação Social*. Porto: Areal Editores.
- Pelizzari, A., Kriegl, M. L., Baron, M. P., Finck, N. T., & Dorocinski, S. I. (2002). *Teoria de Aprendizagem Significativa segundo Ausubel*. *Revista PEC*, 2(1), pp. 37-42.
- Perez, F. M. (2008). A formação e o ensino da Matemática: Do 1.º ao 3.º ciclo. *Educação e Matemática*, 96, 11-16.
- Perrenoud, P. (1993). *Práticas pedagógicas, profissão docente e formação: perspectivas sociológicas*. Lisboa: Dom Quixote.
- Pessoa, P. (2010). Novo Programa de Matemática. Inovação de práticas e aprendizagens. *Educação e Matemática*, 109, 25-31.
- Pestana, M. H., & Gageiro, J. N. (2008). *Análise de dados para Ciências Sociais: a complementaridade do SPSS* (5.ª ed.). Lisboa: Edições Sílabo.
- Peter, T., Edgerton, J. D., & Roberts, L. W. (2010). Welfare regimes and educational inequality: a cross-national exploration. *International Studies in Sociology of Education*, 20(3), 241-264.
- Picciano, A. (2004). *Educational Research Primer*. Londres: Continuum International Publishing Group.
- Pinheiro, J., & Cabrita, I. (2012). *m@c ½: uma experiência de formação contínua em Matemática*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Pires, M. V. (1995). *Os conceitos de perímetro e área em alunos do 6.º ano de escolaridade: concepções e processos de resolução de problemas*. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal.

- Pires, M. V., & Martins, C. (2008). O que está a mudar no conhecimento profissional? In *Encontro Nacional de Professores de Matemática: ProfMat2008*. Elvas: Associação de Professores de Matemática.
- Pires, M. V. (2009). O manual escolar: Concepções e práticas de professores de Matemática. In A. Poblete; V. Días & H. Muñoz (Orgs.), *Conferencias, cursillos y ponencias: VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1293-1298). Puerto Montt, Chile: Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática.
- Pires, M. V., & Martins, C. (2010). Conexões na aula de Matemática, com Escher. In *Programa: ProfMat2010*. Aveiro: Associação de Professores de Matemática.
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. USA: WILEY.
- Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. *Educação e Matemática: Temas de investigação*, 1-50.
- Ponte, J. P. (1994). Do tangram ao cálculo de áreas: Procurando pôr em prática os novos programas. In APM (Ed.), *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-50). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (1994). Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva. *La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal*, 187-202.
- Ponte, J. P. (1999). Encontro sobre o ensino e aprendizagem da Geometria. *Educação e Matemática*, 52, 7-8.
- Ponte, J. P. (2003a). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.
- Ponte, J. P. (2003b). O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In Conselho Nacional de Educação, *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.
- Ponte, J. P. (2005). *A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro*. Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Ponte, J. P. (2013). *Os resultados dos alunos portugueses no PISA valem afinal alguma coisa?* Acedido em 20 de janeiro de 2014 em <http://www.publico.pt/sociedade/noticia/os-resultados-dos-alunos-portugueses-no-pisa-valem-afinal-alguma-coisa-1618428>
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2008). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13(2), 51-74.

- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, 105, 2-6.
- Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). *O Novo Programa de Matemática no 1.º Ciclo. Concepções de Cinco Professoras*. Acedido em 13 de novembro de 2013 em <http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334318.PDF>
- Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (s.d.). *Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: elementos fundamentais para a aprendizagem*. Acedido em 3 de março de 2013 em <http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334370.pdf>
- Porfírio, J. (1998). Os currículos de Matemática: como têm evoluído. *Educação e Matemática*, 50, p. 32-38.
- Price, J. N., & Ball, D. L. (1997). 'There's always another agenda': Marshalling resources for mathematics reform. *Journal of Curriculum Studies*, 29(6), 637-666. doi: 10.1080/002202797183810
- Punch, K. F. (2009). *Introduction to Research Methods in Education*. Londres: SAGE Publications.
- Quivy, R. & Campenhoudt, L. V. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Rapleye, J., Imoto, Y., & Horiguchi, S. (2011). Towards 'thick description' of educational transfer: understanding a Japanese institution's 'import' of European language policy. *Comparative Education*, 47(4), 411-432. doi: 10.1080/03050068.2011.559698
- Rebelo, P., & Gomes, A. (2012). Reorganização Curricular da Geometria: uma experiência no 6.º ano de escolaridade. *Quadrante*, XXI (1), 3-27.
- Reis, J. (1968). *Educação é investimento*. São Paulo: IBRASA.
- Ribeiro, C. M., & Gomes, H. (2010). O que necessitamos saber para "ensinar" geometria? O caso dos rectângulos. In APM (Ed.), *Actas PROFMAT2010* (pp. 1-12). Aveiro: APM.
- Rocha, I. (2006). Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo. Um desafio colectivo. *Educação e Matemática*, 87, 16-18.
- Rocha, I. (2009). O professor de Matemática. *Educação e Matemática*, 104, 21.
- Rodrigues, M. L. (2007). A avaliação ao serviço da melhoria das escolas e dos resultados dos alunos. In Conselho Nacional de Educação. *Avaliação das escolas: modelos e processos* (pp. 175-180). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

- Rodrigues, M. (2009). As capacidades transversais no Novo Programa do Ensino Básico. Desafios da sua integração. *Educação e Matemática*, 105, 38-40.
- Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., & Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. *Research in Mathematics Education*, 2, 3-18.
- Roldão, M. C. (1998). Gestão Curricular na área de História. In E. Medeiros (Coord.), *I Encontro de Didáticas no Açores* (pp. 133-145). Ponta Delgada: Universidade dos Açores.
- Roldão, M. C. (1999). *Gestão Curricular – Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento de Educação Básica.
- Ryan, K., & Cooper, J. M. (2010). *Those Who Can, Teach* (12.<sup>a</sup> ed.). Boston: Wadsworth Cengage Learning.
- Santos, L., Canavarro, A. P., & Ponte, J. P. (2000). O currículo de Matemática: Que problemas? Que mudanças? In APM (Ed.), *Actas do ProfMat 2000* (pp. 84-95). Lisboa: APM.
- Santos, L. (2007). A Matemática na formação inicial de professores. *Educação e Matemática*, 91, 90-95.
- Santos, L. (2008). Um olhar sobre o Plano da Matemática. *Educação e Matemática*, 97, 3-6.
- Santos, E., & Pires, M. (2009). Três anos de Plano da Matemática, o que mudou? *Educação e Matemática*, 102, 1.
- Santos, M. C. (2011). *Aprendizagem Cooperativa em Matemática: Um estudo longitudinal com uma turma experimental do Novo Programa de Matemática do 2.º ciclo do Ensino Básico*. Tese de doutoramento, Universidade do Algarve, Portugal.
- Santos, E. (Coord.), Souza, B., Silva, K., Almeida, L., Souza, L., Cyrino, M., Vertuan, R. (2011). *Guia do Professor. Conteúdos digitais*. Paraná: Ministério da Educação.
- Santos, L., & Serrazina, M. L. (2013). Entrevista a Leonor Santos e Lurdes Serrazina. *Educação e Matemática*, 121, 3-9.
- Saraiva, M. J. (1992). Raciocínio Visual: parente pobre do raciocínio matemático. *Educação e Matemática*, 21, 3-5.
- Saviani, N. (2003). *Saber escolar, currículo e didática: Problemas da unidade conteúdo/método no processo pedagógico* (4.<sup>a</sup> ed.). Campinas: Editores Associados.
- Schattschneider, D. (1978). The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *The American Mathematical Monthly*, 85(6), 439-450.
- Schweisfurth, M. (2011). How did we get here? Unintended consequences in education. *Comparative Education*, 47(4), 407-409. doi: 10.1080/03050068.2011.614070
- Segurado, I. (s.d.). *Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico. Sugestões de operacionalização - 2.º Ciclo*. Alfragide: Portugal.

- Serrazina, M. L. (1988). Algumas notas sobre o ensino da Geometria. *Educação e Matemática*, 6, 3-6.
- Shirali, S. A. (2001). Symmetry in the World of Man and Nature. *Resonance*, 6(6), 53-59.
- Shirley, L. (2000). Matemática do século XX: o século em breve revista. *Educação e Matemática*, 60, 73-79.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.
- Shulman, L., & Sherin, M. G. (2004). Fostering communities of teachers as learners: disciplinary perspectives. *Journal of Curriculum Studies*, 36(2), 135-140. doi: 10.1080/0022027032000135049
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y Enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Currículum y formación del profesorado*, 9(2). Acedido em 31 de janeiro de 2013 em <http://www.ugr.es/local/recfpro/Rev92ART1.pdf>
- Silva, T. R. (1989). Contextualizando o currículo escolar. *Idéias*, 6, 65-72.
- Silva, A. M. (2007). *A população estudantil na Universidade*. Editora: Universidade de Santiago de Compostela.
- Silva, J. T. (2010). *O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com o uso de tecnologias*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, Brasil.
- Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2008). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea*, 5(10), 61-89.
- Silvestre, A. & Cabrita, I. (2013). O Geogebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das transformações isométricas. *Indagatio Didactica*, 5(1), 149-170.
- Simons, H., & Usher, R. (2012). *Situated Ethics in Educational Research*. New York: Routledge.
- Sinclair, M. (2001). Towards a new vision of geometry education. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1(2), 241-245. doi: 10.1080/14926150109556466
- Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM) (2013). Revogar o Programa de Matemática do Ensino Básico: um péssimo serviço ao país. *Diário de Notícias* de 24 de abril de 2013.
- Son, J. W. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a student's errors of reflective symmetry. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (pp. 145-152). Praga: PME.

- Stein, M. K., Baxter, J. A., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal*, 27(4), 639–663.
- Stodolsky, S. (1988). *The subject matters: Classroom activities in math and social studies*. Chicago: University of Chicago Press.
- Sung, Y. K. (2011): Cultivating borrowed futures: the politics of neoliberal loanwords in South Korean cross-national policy borrowing. *Comparative Education*, 47(4), 523-538.
- Stylianou, D. A., & Grzegorzcyk, I. (2005). Symmetry in Mathematics and Art: An Exploration of an Art Venue for Mathematics Learning. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 15(1), 30-44. doi: 10.1080/10511970508984104
- Takona, J. P. (2002). *Educational Research: Principles and Practice*. New York: University Press.
- Tardif, M. (2004). *Saberes docentes e formação profissional* (4.ª ed.). Rio de Janeiro: Vozes, 2002.
- Thaqi, X. (2009). *Aprender a enseñar transformaciones geométricas en primaria desde una perspectiva cultural*. Tese de doutoramento, Universidade de Barcelona, Espanha.
- Thaqi, X., Giménez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello, *Proceedings CERME 7* (pp. 578-588). Lyon: Service des publications, INRP.
- Teixeira, P. C. (2004). *O acompanhamento local como modelo de desenvolvimento curricular em matemática*. Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal.
- Tempera, T. B. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes*. Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Portugal.
- Timmer, M., & Verhoef, N.C. (2012). Increasing insightful thinking in analytic geometry. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/13 (3), 217-219.
- Thomas, R. M. (2003). *Blending Qualitative and Quantitative Research Methods in Theses and Dissertations*. Londres: SAGE Publications.
- Tóth, M. (s.d.). *Teaching isometries in grade 7 (developmental teaching experiment)*. Acedido em 28 de abril de 2013 em [http://trhandbook.pdtr.eu/pages/TR\\_Handbook/4.01.pdf](http://trhandbook.pdtr.eu/pages/TR_Handbook/4.01.pdf)
- Toumasis, C. (1991). 'Geometry is motion': a dynamic approach to the teaching of school Euclidean geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 22(2), 229-242. doi: 10.1080/0020739910220207
- Tozoni-Reis, M. F. (2010). *Metodologia da Pesquisa* (2.ª ed.). Curitiba: IESDE Brasil, S.A..
- Tshering, G., & Prain, V. (2011). Benchmarking the performance of Bhutanese students with the performance of the students from the OECD's PISA countries. *Educational Research and*

- Evaluation: An International Journal on Theory and Practice*, 17(4), 263-281. doi: 10.1080/13803611.2011.621763
- Tudichum, B., & Nunes, F. (1988). Da Matemática dos novos programas. *Educação e Matemática*, 8, 23-25.
- Turner, F. (2012). Using the Knowledge Quartet to develop mathematics content knowledge: the role of reflection on professional development. *Research in Mathematics Education*, 14(3), 253-271. doi: 10.1080/14794802.2012.734972
- Turner-Bisset, R. (1999). The Knowledge Bases of the Expert Teacher. *British Educational Research Journal*, 25(1), 39-55. doi: 10.1080/0141192990250104
- Ulrich, D., & Ulrich, W. (2011). *Como Grandes Líderes Constroem Organizações Comprometidas que Vencem. Por que Trabalhamos*. Porto Alegre: Bookman.
- Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In APM (Ed.), *Actas ProfMat 99* (pp. 111-120). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Vasconcellos, M. (s/d). *O Ensino da geometria nas séries iniciais: A aprendizagem dos alunos da 4.º série e o ponto de vista dos professores*. Acedido em 27 de julho de 2011 em [http://www.ufrrj.br/eman/ped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_28/ensino.pdf](http://www.ufrrj.br/eman/ped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/ensino.pdf)
- Velosa, R. M. (2008). *A aprendizagem da geometria com recurso aos materiais manipuláveis no 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade da Madeira, Portugal.
- Veloso, E. (1994). Geometria no 10.º ano: o fracasso que era previsível. *Educação e Matemática*, 30, 29-30.
- Veloso, E., & Pinheiro, A. (1994). Renovação do ensino da geometria: contributos de Rita Bastos e Cristina Loureiro. *Educação e Matemática*, 32, 21-24.
- Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas Actuais*. Lisboa. Instituto de Inovação Educacional.
- Veloso, E. (2007). A Matemática na formação inicial de professores. *Educação e Matemática*, 91, 90-95.
- Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas. Textos de Geometria para professores*. Lisboa: APM
- Veloso, G.; Brunheira, L., & Rodrigues, M. (2013). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico: um recuo de décadas. *Educação e Matemática*, 123, 3-8.
- Verdugo, C. V. (2006). *La interculturalidad en la educación. Reformas curriculares de Ecuador, Perú y Bolivia* (vol. 69). Quito: Editora Abya Yala.
- Viana, J. P. (2013). Os efeitos do Plano da Matemática. *Educação e Matemática*, 121, 10-11.

- Vieira, L., Ferreira, D., & Mamede, E. (s.d.). *Explorando frisos – uma abordagem para o 1.º ciclo do ensino básico*. Acedido em 3 de março em [http://www.apm.pt/files/\\_SP\\_Vieira\\_Ferreira\\_Mamede\\_4a4dce3ea12b6.pdf](http://www.apm.pt/files/_SP_Vieira_Ferreira_Mamede_4a4dce3ea12b6.pdf)
- Viiri, J. (2003). Engineering teachers' pedagogical content knowledge. *European Journal of Engineering Education*, 28(3), 353-359. doi: 10.1080/0304379031000098265
- Vila, A., & Callejo, M. L. (2007). *Matemática para aprender a pensar. O papel das crenças na resolução de problemas*. Porto Alegre: Artmed.
- Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1998). *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis* (3.ª ed.). Seattle: University of Washington Press.
- Walmsley, A. L. (2003). *A history of the new Mathematics movement and its relationship with current mathematical reform*. Oxford: University Press of America.
- Westwood, P. (2011). The problem with problems: Potential difficulties in implementing problem-based learning as the core method in primary school mathematics. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 16(1), 5-18. doi: 10.1080/19404158.2011.563475
- Weyl, H. (1989). *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press.
- Wielewski, G. D. (2008). O Movimento da Matemática Moderna e a formação de professores de Matemática no Brasil. Atas do *ProfMat2008*, 1-10.
- Wößmann, L. (2010). The effect heterogeneity of central examinations: evidence from TIMMS, TIMSS-Repeat and PISA. *Education Economics*, 13(2), 143-169. doi: 10.1080/09645290500031165
- Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies of Mathematics*, 78, 231-260. doi: 10.1007/1064901193243
- Yildirim, H. H., & Berberoglu, G. (2009). Judgmental and Statistical DIF Analyses of the PISA-2003 Mathematics Literacy Items. *International Journal of Testing*, 9(2), 108-121. doi: 10.1080/15305050902880736
- Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2009). Elementary students' transformational geometry abilities and cognitive style. *CERME 7: Working Group – Geometry Teaching and Learning*. Acedido em 5 de maio de 2013 em [http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4\\_Xistouri\\_Pitta.pdf](http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_Xistouri_Pitta.pdf)
- Zabala, A. (1998). *A prática educativa. Como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.
- Zabala, A. (2010). La aspiración a la ciudadanía y el desarrollo de la competencia matemática. In M. L. Callejo & J. M. Goni (Coord.), *Educación Matemática y Ciudadanía* (pp. 11-58). Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Zabalza, M. A. (1997). *Diseno y desarrollo curricular*. Madrid: Narcea Ediciones.

## **APÊNDICES**

## Apêndice 1

## Guião de Observação

Professor A Data da aula: _____ Sumário: _____		
Hora: _____		Duração: _____
Elementos em análise	Descritores	Descrição
<b>Abordagem, seleção e desenvolvimento dos conteúdos</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Estabelecer conexões do tema central, de forma não forçada, com outros conteúdos da Matemática, áreas do saber ou de natureza local/natural.</li> <li>2. Considerar os conhecimentos prévios dos alunos.</li> <li>3. Revelar segurança no desenvolvimento dos conteúdos.</li> <li>4. Variedade das situações de aprendizagem.</li> <li>5. Regulação.</li> <li>6. Consideração dos progressos.</li> </ol>	
<b>Recursos utilizados</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Adequação dos recursos aos objetivos e tarefas.</li> <li>2. Utilizar AGD.</li> <li>3. Apresentar destreza na utilização de <i>software</i> de geometria dinâmica.</li> <li>4. Utilizar recursos de forma espontânea como forma de responder a dúvidas dos alunos.</li> </ol>	

<b>Comunicação matemática – intervenções do professor</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Definição do enquadramento.</li><li>2. Questionar os alunos de forma a suscitar dúvidas e/ou aprofundar conhecimentos.</li><li>3. Tempo de palavra vs tempo de atividade dos alunos</li><li>4. Expressar-se corretamente.</li><li>5. Comunicação verbal e não-verbal.</li><li>6. Propor outras tarefas ou questionar em função de erros e dificuldades identificadas.</li><li>7. Sintetizar as atividades desenvolvidas.</li></ol>	
<b>Relação com e no interior do grupo de trabalho</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Gestão do espaço.</li><li>2. Respostas às questões colocadas.</li><li>3. Gestão equitativa dos alunos.</li><li>4. Interesse demonstrado pelos alunos.</li><li>5. Compreensão das aprendizagens.</li></ol>	

## Apêndice 2

### Questionário

Caro Professor:

Este questionário, cujas respostas são estritamente confidenciais e anônimas, faz parte de um trabalho de investigação visando reunir um conjunto de elementos relacionados com a aplicação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB), respeitante ao tema das isometrias.

Muito obrigada pela sua colaboração.

Nas questões que exijam texto, responda com letra legível. Nas outras, coloque uma cruz (X) nos locais que achar adequados.

#### PARTE I

- 1.1) Licenciatura:  PEB – Variante Mat./C.N.  Outra. Qual? \_\_\_\_\_.
- 1.2) Instituição onde concluiu a licenciatura: \_\_\_\_\_.
- 1.3) Ano de conclusão da licenciatura: \_\_\_\_\_.
- 1.4) Anos letivos como docente de Matemática 2º CEB:  <3 anos  ≥ 3 anos e ≤ 10anos  >10anos
- 1.5) No presente ano letivo, leciona no(s) concelho(s) \_\_\_\_\_.
- 1.6) Disciplinas:
- |       |   |    |                                  |                                  |  |      |   |    |                                  |                                  |
|-------|---|----|----------------------------------|----------------------------------|--|------|---|----|----------------------------------|----------------------------------|
| $Mat$ | { | 5º | <input type="checkbox"/> 2010201 | <input type="checkbox"/> 2011201 |  | $CN$ | { | 5º | <input type="checkbox"/> 2010201 | <input type="checkbox"/> 2011201 |
|       |   | 6º | <input type="checkbox"/> 2010201 | <input type="checkbox"/> 2011201 |  |      |   | 6º | <input type="checkbox"/> 2010201 | <input type="checkbox"/> 2011201 |
- Outras. Refira quais, indicando o ano de escolaridade. \_\_\_\_\_.

#### PARTE II

- 2.1) Qual a sua opinião sobre a inclusão do tema Isometrias no NPMEB do 6.º ano de escolaridade?
- Adequado e importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.
- Algo complexo para ser lecionado neste ano de escolaridade.
- Outra. Qual? \_\_\_\_\_.
- 2.2) Como adquiriu os seus conhecimentos sobre o tema isometrias? (Pode selecionar mais do que uma opção)
- Possuo os conhecimentos adquiridos na formação inicial.
- Li sobre o tema nos manuais escolares.  Li sobre o tema na Internet.
- Li sobre o tema em outras referências bibliográficas. Exemplo: \_\_\_\_\_.
- Frequentei uma ou mais ações de formação, creditadas ou não, sobre o tema (tempo somente dedicado às isometrias):
- <3h(horas)  ≥ 3h e ≤ 10h  >10h
- De outra forma. Qual? \_\_\_\_\_.
- 2.3) Acha relevante a utilização de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), por exemplo o Geogebra, em contexto de sala de aula?  Sim  Não Já usou?  Sim  Não
- 2.4) Como avalia a sua destreza na manipulação de AGD?
- Não sei trabalhar com AGD.
- Sei trabalhar, mas somente com as ferramentas pré-definidas na barra de ferramentas.
- Possuo bons conhecimentos (ex: utilização dos eixos coordenados, da malha quadriculada ou isométricas, da janela algébrica, propriedades dos objetos, etc.).
- Possuo conhecimentos avançados (ex: criação de ferramentas próprias).

2.5) No NPMEB, sugere-se a utilização de materiais manipuláveis, na exploração das isometrias. Indique dois materiais e, para cada um dos materiais, uma atividade que considere adequada para a exploração de isometrias:

- Material 1: \_\_\_\_\_ . Atividade: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ .
- Material 2: \_\_\_\_\_ . Atividade: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ .

### PARTE III

#### Isometrias

- 3.1) Todas as isometrias se podem obter através da composição de, no máximo,  $n$  reflexões. Concorda com esta afirmação?  Sim, esse número  $n$  é \_\_\_\_\_.  Não.
- 3.2) O NPMEB fala de 4 isometrias. Da mesma forma que se fala da reflexão deslizante, porque não se fala, por exemplo, de uma *reflexão rotacional*?  
 Porque as 4 isometrias referidas são suficientes para a maior parte das transformações isométricas.  
 Porque a *reflexão rotacional* é equivalente a uma das 4 isometrias.  
 Outra razão. Qual? \_\_\_\_\_.

#### Simetria

- 3.3) Que relação há entre o conceito de simetria e o conceito de isometria?  
 Os conceitos, em sentido amplo, não apresentam diferenças.  
 Qualquer simetria é uma isometria.  
 Qualquer isometria é uma simetria.  
 Duas imagens são simétricas se houver uma isometria que transforme uma na outra.  
 Outra. Qual? \_\_\_\_\_.
- 3.4) De acordo com Eduardo Veloso (1998), uma figura é simétrica se admitir, pelo menos, uma simetria diferente da identidade. Quais são as simetrias identidade? \_\_\_\_\_.

#### Rosáceas

- 3.5) Um triângulo equilátero pode ser considerado uma rosácea?  Sim  Não
- 3.6) O que é o grupo de simetrias de uma determinada figura?  
 Número de simetrias da figura,  $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ com} \\ \square \text{ sem} \end{array} \right.$  a identidade  
 Conjunto de todas as simetrias da figura,  $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ incluindo} \\ \square \text{ excluindo} \end{array} \right.$  a identidade.  
 Outro ente matemático. Qual? \_\_\_\_\_.
- 3.7) Há uma relação entre o n.º de simetrias de um dado polígono regular e o n.º de lados do mesmo?  
 Não  Sim, o número de simetrias é \_\_\_\_\_ o número de lados do polígono.
- 3.8) Existem rosáceas cíclicas e diedrais. O que as distingue?  
 As cíclicas só possuem simetrias de rotação e as diedrais só possuem simetrias de reflexões.  
 Nas diedrais, o número de simetrias de reflexão é igual ao número de simetrias de rotação, nas cíclicas existem simetrias de reflexão mas em número diferente das simetrias de rotação.  
 Ambas possuem simetrias de rotação mas as diedrais também possuem simetrias de reflexão.  
 Outra razão. Qual? \_\_\_\_\_.

**Frisos**

- 3.9) Quantos tipos de frisos conhece? \_\_\_\_\_.
- 3.10) Se um friso tem simetria de reflexão deslizante, então, também tem simetria de reflexão de eixo horizontal?  
 Sim     Não    E o recíproco é verdadeiro?     Sim     Não
- 3.11) Na resolução de um determinado exercício surge um friso com a designação  $p1m1$ . Conhece esta classificação?  
 Não     Sim, este friso tem (pode selecionar mais do que uma opção):  
 Translação     Rotação     Reflexão     Reflexão deslizante

**Conjeturas, afirmações e resoluções de alguns alunos do 6.º ano de escolaridade**

Os exemplos seguintes foram retirados de situações em contexto de sala de aula e representam afirmações ou resoluções de alunos. Observe cada um deles e dê a sua opinião.

- 3.12) **Aluno:** “Professora, em casa, recortei alguns frisos e associei-os assim (ver fig. 1):”

- Aceitaria a resposta.  
 Não aceitaria a resposta pois \_\_\_\_\_

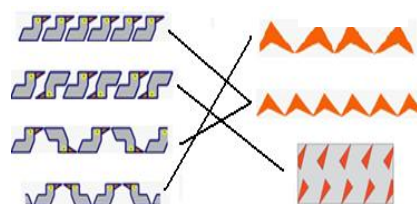


Fig. 1

Fontes imagens: Vídeo internato dos Carvalhos e curso do ProfMat 2008 por Eduardo Veloso

- 3.13) **Aluno:** “Professora, a reflexão é o mesmo que a rotação de meia-volta.”  
 Para exemplificar o aluno exibiu a imagem da fig. 2:

- Aceitaria a afirmação.     Não aceitaria a afirmação, pois \_\_\_\_\_



Fig. 2

- 3.14) Trabalho de grupo para análise de figuras.

**Aluno:** “Na figura 3, a reta  $r$  é um eixo de simetria”.

- Aceitaria a afirmação.     Não aceitaria a afirmação.

- 3.15) **Aluno:** “Professora, a circunferência é uma rosácea especial porque tem infinitos eixos de reflexão.”

- Aceitaria a afirmação     Não aceitaria a afirmação, pois \_\_\_\_\_



Fig. 3

- 3.16) **Aluno:** “A rosácea que desenhei em casa tinha amplitude mínima de  $62^\circ$ . Medi com o transferidor.”

- Teria de ver a rosácea desenhada para aceitar a afirmação.  
 Não aceitaria a afirmação pois \_\_\_\_\_

- 3.17) **Aluno:** “Professora, a figura C é uma reflexão deslizante da figura A, pois fiz uma reflexão da imagem A e depois deslizei a imagem obtida (B)” (ver fig. 4).

- Aceitaria a resposta.  
 Não aceitaria a resposta pois \_\_\_\_\_



Fig. 4

- 3.18) **Aluno:** “Professora, há figuras que mesmo sendo congruentes não se podem obter através de isometrias, por exemplo estas duas” (ver fig. 5).

- Aceitaria a afirmação.  
 Não aceitaria a afirmação.



Fig. 5