Ana Gabriela Soares da Costa Moreira

Elementos de História da Lógica

Universidade Portucalense

Porto

2007

Ana Gabriela Soares da Costa Moreira

Elementos de História da Lógica

Dissertação apresentada à Universidade Portucalense Infante D.Henrique
para obtenção do Grau de Mestre em Matemática/Educação,
sob a orientação do Professor Doutor António Pascoal.

Universidade Portucalense

Porto

2007

Resumo

O trabalho a que se refere esta tese, consistiu no estudo do desenvolvimento da Lógica desde os tempos de Aristóteles até aos dias de hoje.

Os diversos contributos dados por Aristóteles e os seus discípulos levaram à criação e ao desenvolvimento da Lógica tal como a conhecemos. De facto ele tentou mostrar o caminho correcto para a investigação, através do conhecimento e da demonstração. Segue-se-lhe Leibniz que tenta construir uma linguagem universal do raciocínio, raciocínio esse que se torna um cálculo susceptível de ser feito através de uma máquina organizada para o efeito. Esta ideia inspira não só o desenvolvimento da Lógica, mas também a criação de "máquinas inteligentes".

Em meados do século XIX, dá-se uma revolução na Lógica. Vários investigadores concebem uma nova linguagem simbólica e tentam transformar a Lógica numa Álgebra. George Boole, apresenta pela primeira vez, e de uma forma corrente, a lógica como um cálculo de sinais algébricos. Esta álgebra torna-se fundamental para a criação de circuitos nos computadores, e é também a base da teoria dos conjuntos.

No final do século XIX, matemáticos como Gottlob Frege, Peano, B. Russell e David Hilbert contribuíram para a formalização dos conceitos e processos demonstrativos, na Lógica Matemática que passou a ser subdividida para efeitos de estudo em Lógica Proposicional e Lógica de Predicados, que inclui a anterior.

Ao longo do século XX, assistiu-se à generalização e à diversificação dos estudos da Lógica Matemática, atingindo um elevado grau de formalização. Mas nos dias de hoje, continuamos a debatermo-nos com a validade dos factos, pois nem sempre podemos assegurar que se um facto não é verdadeiro então será falso. Assim a Lógica obriga-nos a enveredar por novos caminhos e tentar solucionar novos problemas, muitas das vezes utilizando os chamados Problemas de Decisão.

Abstract

This thesis is concerned with the development of Logic since Aristotles and his followers approach to codifying correct modes of reasoning was to concenteate on arguments using some types of statements.

Really, they tried to show us the right way to make research, using knowledge and demonstration in formal systems. After the Greeks we have to wait for Leibniz who tried to build an universal language of thinking (almost everyone agrees that Logic has something to do with thinking) which could be understood by some intelligent machine.

The formalization of correct reasoning has been motivated by three major goals:

1. To provide a foundantion for mathematics.
2. To eliminate errors from reasoning.
3. To search for efficient means to find justifications for a conclusion using machines or not.

This reduction to simple systems was well under way by 1850. Mathematics applied to Logic started with Boole's Algebra of Logic, and the work has been followed by Gottlob Frege, Peano, Bertrand Russell and David Hilbert among others.

In the mid 1930's Alan Turing introduced the Turing Machine as a model of computation that captured the notion of an algorithm.

Agradecimentos

Ao meu orientador científico, Dr. António Pascoal, que acompanhou a elaboração deste projecto, incentivando sempre o meu espírito crítico e a minha formação científica, mostrando sempre uma disponibilidade para me acompanhar ao longo destes anos.

À minha família e amigos.

Deixo em especial uma palavra de sincero agradecimento a todos aqueles que me apoiaram directa ou indirectamente nesta longa caminhada.Não posso deixar de agradecer sinceramente à minha amiga Catarina Avelino, por todas as palavras e gestos de incentivo, que me obrigaram a chegar até aqui. Assim como aos meus irmãos.

Dedico em especial este trabalho aos meus pais e sobrinhos.

Índice

Lista de Figuras **vi**

Lista de Tabelas **vii**

1 Introdução **1**

1.1 Motivação 1

1.2 Organização da tese 3

2 As Origens da Lógica **4**

2.1 Aristóteles e o desenvolvimento da Silogística 4

2.2 O Método Axiomático 6

2.3 Propriedades dos Sistemas Formais 8

3 A Lógica de Leibniz **10**

4 Os Primórdios da Lógica Matemática **13**

4.1 George Boole 13

4.1.1 Técnica da álgebra binária de Boole 14

4.2 Gottlob Frege 20

4.3 Giuseppe Peano 23

4.4 Bertrand Russell 24

4.4.1 A Teoria dos Tipos 24

5 A Lógica Matemática Actual **30**

5.1 Leopold Löwenheim 31

5.2 Thoralf Skolem 32

5.3 Crise dos Fundamentos 33
5.3.1 David Hilbert 34
5.4 Kurt Gödel 36
5.4.1 Número de Gödel 38
5.5 Alfred Tarski 42
5.5.1 Satisfazibilidade de um conjunto de fórmulas 45
5.5.2 Teoria de Modelos 47
5.5.3 Teoria da Verdade de Tarski 49
5.5.4 Fundamentos da Semântica 50
5.6 Alan Mathison Turing 51
5.6.1 Máquina de Turing 52
5.6.2 Problema da Paragem 55
5.6.3 A Tese de Church-Turing 56

6 Conclusão **60**
6.1 Observações finais 60
6.2 Sugestões para trabalho futuro 62

Bibliografia **65**

Lista de Figuras

5.1 Máquina de Turing. 54
5.2 Configuração da Máquina de Turing. 54
5.3 Configuração final da Máquina de Turing. 54

Lista de Tabelas

5.1 Sistema de numeração de Gödel. 38

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O que é a Lógica? Quase todos concordam que Lógica tem alguma coisa a ver com pensamento, embora as dificuldades comecem quando se tenta especificar essa relação. No entanto, de todas as possíveis formas de relação que se podem estabelecer entre Lógica e pensamento, existem duas que se podem considerar relevantes, pelo menos numa primeira aproximação. Primeiro, é importante que a Lógica nos permita aprender a raciocinar, indicando-nos os diferentes tipos de raciocínio possíveis, e por outro lado apresente conclusões em conformidade com os raciocínios feitos. Quando estamos a tentar resolver um problema, podemo-nos preocupar com as regras lógicas que nos poderão auxiliar, mas em geral não as usamos em cada passo do nosso raciocínio. Os seres humanos são capazes de fazer autênticos saltos conceptuais que podem eliminar grande número de passos que são necessários quer para uma máquina de estado finito quer para um computador digital. Aliás a grande "velocidade" do computador deve-se à sua faculdade de efectuar um grande número de passos em períodos de tempo relativamente curtos, e não ao facto do modo operativo do computador ser mais eficiente, que o raciocínio do ser humano. Esta ideia do salto conceptual é muito familiar aos matemáticos: num dado momento parece que não se consegue compreender a solução de um dado problema e de repente a resposta surge como que por um encanto.

É certo que esse encanto depende na maioria dos casos da intensidade do estudo e da evolução histórica do estudo de um problema. Digamos que essa evolução conduz muitas vezes a uma situação em que a solução do problema se encontra como que à espera de quem consiga "descobri-la", e talvez seja essa a razão de muitos problemas terem sido resolvidos quase na mesma época em locais completamente distintos e sem haver contactos entre os "descobridores". O caso das Geometrias Não Euclideanas é paradigmático (János Bolyai, na Hungria e Lobachevski, na Rússia). Embora a Lógica prescreva a forma como devemos construir as nossas justificações, essa forma pode ser ultrapassada pelo tal "salto conceptual", mas, mesmo neste caso, a forma da justificação baseada na Lógica deve permitir uma comparação, ou seja, a Lógica estabelece "normas" ou padrões lógicos de raciocínio com as quais qualquer tipo de justificações deve ser comparada. Em Lógica chamam-se argumentos às justificações dadas na sequência de um dado raciocínio, que em geral se baseia em factos já conhecidos como válidos no contexto do problema. O estabelecimento do tipo de validade dos factos é um problema sério em Lógica, pois o próprio carácter da validade pode ser posto em causa. Quando até há bem pouco tempo se pensava que os tipos de validade seriam somente dois, ou verdadeiro, ou falso, e surgia assim o que se pensava ser um facto irrefutável, o que se designa por Axioma do Terceiro Excluído, (interpretando axioma como um facto irrefutável para o qual não é necessário qualquer demonstração), hoje tudo se modificou. Em termos simples um dado facto ou pode ser verdadeiro, ou pode ser falso, ou pode não ser conhecido o seu tipo de validade, e pior ainda, pode não ser possível conhecer esse tipo de validade: surge assim um facto indecidível. E assim houve que enveredar por novos caminhos, por novas ideias, novos raciocínios, enfim toda uma nova forma de a Lógica se adaptar e tentar solucionar os novos problemas resultantes das novas situações surgidas no interior da própria Lógica.

1.2 Organização da tese

O capítulo 2 descreve as origens da Lógica com as contribuições de Aristóteles, de Euclides e do Método Axiomático e descreve ainda as propriedades fundamentais dos sistemas formais. Seguidamente no capítulo 3, falamos sobre o precursor da Lógica moderna, Leibniz e dos seus contribu-tos, nomeadamente na tentativa de construir uma linguagem universal do raciocínio.

A partir de meados do século XIX a lógica formal elabora-se como um cálculo algébrico, adoptando-se um simbolismo peculiar para as diversas operações lógicas, construindo-se assim grandes sistemas axiomáticos de lógica, de modo análogo à Matemática. A Lógica Matemática passa a estudar e a fazer explícitas formas de inferência deixando de lado, o conteúdo de verdades que estas formas possam transmitir; no fundo chama-se a atenção para a perspectiva que se estava a abrir ao cálculo simbólico. É sobre isto que nos debruçamos no capítulo 4, referindo-nos a Boole, Frege, Peano e a Russell.

No capítulo 5, falamos sobre Hilbert, Löwenheim e Skolem, responsáveis pela aparição da Metalógica e posteriormente de Gödel e Tarski pelas discussões sobre o valor e os limites da axiomatização, o nexo entre Lógica e Matemática e o Problema da Verdade. Terminamos o capítulo referindo-nos a Turing que antes mesmo de existir computador acabou por definir a natureza da computação, e as implicações e limites do pensamento humano através de uma máquina.

O capítulo 6 resume as contribuições deste trabalho e deixa direcções para trabalho futuro.

Capítulo 2

As Origens da Lógica

2.1 Aristóteles e o desenvolvimento da Silogística

Pode-se pensar porque razão um assunto cujo desenvolvimento terminou praticamente por volta de 1400, é ainda relevante num moderno trabalho sobre Lógica. A verdade é que o ramo da Lógica a que se costuma chamar Silogística, pela primeira vez tratada na Grécia antiga, em particular por Aristóteles (384-322 a. C.) num trabalho conhecido hoje como "*Prior Analytics*", mas que atingiu a sua forma mais evoluída depois da morte de Aristóteles, utiliza a maior parte das ideias gerais significativas da Lógica tais como argumento, validade, inferência, etc. e que continuam hoje a ter o mesmo significado.

De facto é com Aristóteles que se dá o verdadeiro nascimento da Lógica. Ele redigiu uma série de trabalhos que posteriormente foram agrupados numa obra chamada "*Organon*", nomeadamente o tratado das *Categorias*, dos *Tópicos*, da *Introdução*, os *Primeiros e Segundos Analíticos*. Neles, Aristóteles concebia que a Lógica devia fornecer os instrumentos mentais necessários para se poder enfrentar qualquer tipo de investigação.

Aristóteles construiu uma sofisticada teoria de argumentos, cujo núcleo principal é a caracterização e a análise dos silogismos, que podem ser considerados os raciocínios típicos do filósofo. O tão conhecido argumento: Todo o

homem é mortal, Sócrates é homem, logo Sócrates é mortal é um exemplo típico do silogismo.

Aristóteles desenvolveu minuciosamente os silogismos, nos *Primeiros Analíticos*, apresentando os princípios que sustentam os silogismos e as regras que lhes devem moldar a sua construção. Entre as características mais importantes da silogística aristotélica está a introdução, pela primeira vez, na história da Lógica, de letras que podem ser usadas para uma expressão substantiva qualquer, e que se mostrou ser fundamental para estudos posteriores, bem como uma da primeiras tentativas para estabelecer um rigor nas demonstrações matemáticas. Assim quando se faz referência a Viète (1540-1603), como o primeiro matemático a usar letras como símbolos em Álgebra, não devemos esquecer a escola de Aristóteles, pois afinal essa ideia, embora não dirigida propriamente à Álgebra, foi basicamente e genericamente uma ideia de Aristóteles.

Era evidente que Aristóteles tinha um objectivo eminentemente metodológico, ao tentar mostrar os passos necessários para a investigação, o conhecimento e a demonstração científicas. O método científico por ele preconizado assentava nas seguintes fases:

1. Observação de fenómenos particulares;

2. Intuição dos princípios gerais (universais) a que os mesmos obedecem;

3. Dedução a partir deles das causas dos fenómenos particulares.

Para Aristóteles se estes princípios gerais fossem bem formulados, e as suas consequências bem deduzidas, as explicações só poderiam ser verdadeiras.

No entanto, a Lógica Aristotélica tinha enormes limitações que se vieram a revelar mais tarde obstáculos para o avanço da ciência. Pois por um lado assentava no uso da linguagem natural, e por outro lado, os seus seguidores acabaram por reduzir a Lógica ao silogismo.

2.2 O Método Axiomático

Desde o célebre tratado "ELEMENTOS" de Euclides (330- 277 a.C.) que se aceitava o método dedutivo como principal método de demonstração em Matemática. Considerando, como fez Euclides, axiomas as proposições imediatamente evidentes, postulados os princípios aceitáveis por convenção e por necessidade, e teoremas as proposições não imediatamente evidentes, mas que se podiam deduzir dos axiomas e postulados, construiu-se um processo que parecia logicamente correcto, conduzindo a soluções demonstráveis. A a-xiomática de Euclides foi talvez um dos mais brilhantes sucessos da ciência clássica grega e dominou o pensamento humano durante vários séculos.

A Geometria ainda hoje muito bem chamada de Euclidiana foi o ramo da Matemática que mais progrediu, tendo sido considerada um exemplo para as outras ciências.

Parece não haver dúvidas que a Geometria teve o seu início com o desenvolvimento das regras de medição, particularmente de terrenos. E deve ter sido no antigo Egipto que a necessidade de estabelecer fronteiras convenientes entre terrenos agrícolas junto ao rio Nilo levou à consideração de estudos geométricos bem desenvolvidos que passaram posteriormente para os geómetras gregos como Eudoxus, e outros membros da escola pitagórica que se habituaram a obter resultados geométricos válidos a partir de outros resultados já conhecidos. O que parece distinguir o trabalho de Euclides e torná-lo único é o facto dele ter mostrado que um grande número de verdades geométricas poderia ser obtido a partir de um pequeno número de outras verdades que constituíam um sistema global único.

Existe ainda mais uma diferença essencial entre a Geometria dos Egípcios e a Geometria de Euclides. Enquanto os Egípcios falam de terra, Euclides fala de objectos a uma ou duas dimensões que podem ser encontrados na Terra. Mais ainda, pela primeira vez o carácter abstracto das definições geométricas, em que, por exemplo, uma recta não é um simples "traço" desenhado, é pela primeira vez posto em evidência, baseada talvez num certo misticismo matemático típico da filosofia pitagórica e que culminou com a

teoria platónica das formas.

Não sabemos concerteza se Euclides foi um Platonista, mas provavelmente os seus contemporâneos que estudaram com ele eram Platónicos e daí as noções abstractas de ponto, recta e plano.

Mas afinal o que estava em causa, em termos modernos, era o *método axiomático*, segundo o qual uma teoria é dedutivamente ordenada em *axiomas* e *teoremas*, segundo *regras de inferência*. O resultado de formalizar e axiomatizar uma teoria científica é uma *teoria formal* ou *sistema formal* ou *axiomático*.

Pode-se considerar que todo o sistema axiomático deve constar de quatro ingredientes:

1. *Alfabeto* que é uma tabela de símbolos primitivos;

2. Conjunto de regras de formação de *fórmulas*.

3. Lista de *axiomas* e *postulados* que são afinal as fórmulas primitivas do sistema.

4. Conjunto de *regras de inferência* que permitem efectuar a dedução do resultado pretendido.

Os dois primeiros ingredientes constituem a *linguagem* ou *gramática* e os outros dois a *lógica* do sistema.

Ao conceito de regra de inferência junta-se o de consequência *imediata* ou *directa*. A regra de inferência estabelece que uma fórmula chamada *conclusão*, pode ser inferida de outra ou outras chamadas *premissas*. Uma *demonstração* ou *prova* é assim, neste contexto, uma sequência finita de fórmulas tais que cada uma delas ou é um axioma ou é uma consequência imediata de alguma ou alguns precedentes (precedente na sequência do raciocínio) em virtude de uma regra de inferência. A fórmula final de demonstração é um *teorema* ou fórmula derivada.

Uma vez elaborado o *sistema formal* na sua dimensão sintáctica, o sistema deverá ser *interpretado*, isto é, colocado em relação com o conjunto dos

objectos que fazem parte da teoria científica que se pretende formalizar e tal será a dimensão *semântica* do sistema formal.

2.3 Propriedades dos Sistemas Formais

Mas afinal quais são as características a que deve obedecer um **Sistema Formal**?

Os sistemas formais da Lógica devem possuir certas propriedades e vamos analisá-las no âmbito de uma axiomática, isto é, de um conjunto de proposições que são consideradas sempre válidas e que são os axiomas.

1. **Completude**

   O sistema formal deve ser completo, isto é, não pode haver um axioma do sistema que não faça parte desse sistema.

2. **Consistência ou Coerência**

   Os axiomas do sistema formal não podem ser contraditórios, isto é, o Princípio da Não Contradição que afirma que uma dada proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa, deve ser considerado sempre válido.

3. **Categoricidade**

   Os axiomas do sistema formal devem ser *categóricos*, no sentido em que, qualquer *modelo* do sistema deve ser *isomorfo* de qualquer outro *modelo* do mesmo sistema.

4. **Independência**

   Os axiomas do sistema formal devem ser *independentes*, isto é, não devem poder resultar uns dos outros, usando as regras do sistema.

5. **Substituição**

   Deve-se poder sempre substituir uma proposição P por outra proposição Q desde que elas sejam *logicamente equivalentes*, isto é, se tiverem o mesmo valor lógico.

Todas estas propriedades são por vezes designadas por Metateoremas da Lógica Clássica. Deve dizer-se que poderiam ainda ser estabelecidas outras mais, mas efectivamente existem três propriedades essenciais na definição de um sistema formal lógico e que são as três primeiras: *completude*, *consistência* e *categoricidade*.

Assim a *independência*, por exemplo, é uma propriedade que, a verificar-se, constitui uma consequência do *Princípio Geral de Economia do Pensamento de Hankel* que se pode, por sua vez, considerar uma consequência do *Princípio de Mínimo no Universo*. No entanto, na prática, é em grande número de casos dispensável e até desejável não o incluir obrigatoriamente no sistema, pois a obtenção de resultados é assim mais facilitada a partir do conhecimento de proposições que ajudam à obtenção da solução e que, em rigor, deveriam estar "escondidas" na formalização do sistema. Esta é a opinião de David Hilbert $(1862 - 1943)$ que de certa forma sacrifica a síntese tendo em vista a compreensão.

Tendo referido o que modernamente se entende por um sistema axiomático, vamos continuar o estudo da evolução da Lógica.

Capítulo 3

A Lógica de Leibniz

A Lógica moderna começou no século XVII, com Gottfried Wilhelm Leibniz ($1646 - 1717$), filósofo e matemático alemão. Apesar dos seus trabalhos só terem sidos conhecidos duzentos anos mais tarde, o seu contributo na área da lógica matemática moderna merece ser citado. Leibniz, considerado um filósofo da continuidade não foi um revolucionário, simplesmente aceitou e aprofundou o que outros anteriormente fizeram.

Poderemos dizer que o pensamento lógico de Leibniz tem várias facetas, em primeiro o respeito que ele demonstrou pela lógica clássica, em segundo o seu plano para a criação de uma linguagem ideal.

Leibniz demonstrou um grande entusiasmo pela doutrina aristotélica do silogismo, descrevendo-a como "uma das mais belas descobertas do espírito humano, (...) uma arte de infalibilidade" [20], que pode ser desenvolvida "numa espécie de matemática universal" (*idem*). Nesta declaração está patente a posição de Leibniz relativamente à Lógica clássica. Se por um lado não esconde a sua admiração pela silogística, por outro lado o fundamento que a inspirou deixa-o ainda mais admirado.

Leibniz vai introduzindo algumas modificações na silogística de Aristóteles de tal modo que na sua obra "*Ars Combinatoria*", escrita em 1666,constrói metodicamente todas as possibilidades de efectuar eliminações e reduções. Deste modo, Leibniz tenta aliviar o processo de inferência, o que o leva à descoberta da natureza do cálculo e reduzindo as regras de dedução lógica a meras regras de cálculo, isto é, pode-se prescindir da consideração do con-

teúdo semântico das expressões. Neste percurso, Leibniz teve a noção de uma demonstração formal, reconhecendo que não pode existir rigor sem formalidade insistindo na importância de novas descobertas matemáticas serem apresentadas de um modo visível a partir da sua forma. Foi então que defendeu a necessidade de criar uma linguagem científica, "*Characteristica Universalis*", de modo que a comunicação e a circulação de ideias se tornasse mais rápida, sendo uma ferramenta de descoberta e prova de novas verdades.

Leibniz procurou elaborar uma teoria de símbolos, uma espécie de cálculo universal para o raciocínio. Para ele a linguagem universal deveria ser uma colecção de sinais básicos que padronizassem noções simples não analíticas, uma vez que as noções mais complexas teriam o seu significado através de construções apropriadas que envolvessem sinais básicos e que reflectissem a estrutura de noções complexas. O uso de numerais para representar noções não analíticas poderia tornar possível que as verdades de qualquer ciência pudessem ser calculadas por operações aritméticas, desde que estivessem formuladas de acordo com a linguagem universal. Como o próprio Lebniz referiu, quando se quiser terminar com uma discussão sobre um assunto qualquer, bastará pegar numa caneta e dizer uns para os outros: *Calculemos!*. Nesta ideia de Leibniz relacionam-se intimamente dois conceitos: o do simbolismo universal e o do cálculo de raciocínio. Leibniz apercebeu-se das vantagens que apresentam os símbolos da Aritmética e da Álgebra e das inúmeras ambiguidades a que estão submetidas as linguagens de comunicação ordinárias. Foi deste modo, querendo dar à Lógica uma linguagem livre de ambiguidades e procurando dar a cada ideia um sinal, obtendo através da combinação desses sinais a solução de todos os problemas, que este matemático acabou por provocar um desenvolvimento da Lógica. A sua contribuição no desenvolvimento da Lógica aparece assim sob dois aspectos: a aplicação que ele fez, de métodos matemáticos para a interpretação dos silogismos aristotélicos e a indicação de partes da Álgebra que estão abertas a uma interpretação não aritmética.

Leibniz, ao tentar reduzir as discussões lógicas a uma forma sistemática que pudesse ser universal, aproximou-se da Lógica simbólica formal: os

símbolos ou ideogramas deveriam ser introduzidos para representar um pequeno número de conceitos fundamentais necessários ao pensamento. Como já foi referido, a ideia de uma Lógica estritamente formal só surgiu duzentos anos mais tarde, com George Boole, que construiu as regras básicas de um sistema simbólico para a matemática e que mais tarde outros matemáticos reafirmaram e aplicaram à Teoria de Conjuntos. A Álgebra Booleana, constituindo a base para o projecto de circuitos usado nos computadores electrónicos digitais, parece assim estar na sequência das ideias de Leibniz.

Capítulo 4

Os Primórdios da Lógica Matemática

4.1 George Boole

A semelhança existente entre a disjunção e a conjunção de conceitos e a adição e subtracção de números, foi usada por George Boole ($1815-1864$) como base do cálculo lógico. Ele percebeu ser possível desenvolver uma álgebra, sob a forma de um cálculo abstracto e que tivesse várias interpretações.

Boole, na sua obra *The Mathematical Analysis of Logic*, forneceu uma ideia clara da concepção da Lógica e da essência do cálculo, do formalismo, uma vez que, como ele próprio descreveu, "a validade dos processos usados em análise não depende da interpretação dos símbolos que são utilizados, mas apenas das leis para a sua combinação" [20]. Ele concebeu a Lógica como uma construção formal à qual se atribui posteriormente uma interpretação.

Em primeiro lugar, Boole procura, partindo do raciocínio algébrico que opera sobre símbolos, classificar esses mesmos símbolos segundo a sua função e posteriormente encontrar na linguagem comum o análogo dessas funções, de modo a poder fazer uma correspondência entre símbolos analógicos e símbolos algébricos que levará à criação de um cálculo. Para que tal aconteça, ele concebe uma álgebra na qual os símbolos x, y, z, $\ldots$, podem admitir indiferentemente os valores 0 e 1, e somente estes valores, de tal modo que

"as leis, os axiomas e as operações de uma tal álgebra serão idênticos, em toda a sua extensão, às leis, axiomas e operações de uma álgebra lógica" [2]. Boole enfrenta dois problemas: o primeiro estabelecer as leis de uma álgebra especial que só admita os valores 0 e 1, o segundo encontrar para esses valores uma interpretação lógica aceitável, de maneira a poder olhar esta álgebra como uma álgebra da Lógica.

4.1.1 Técnica da álgebra binária de Boole

A álgebra Booleana é uma estrutura $\langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$, $B = \{x, y, z, ...\}$, e representa o conjunto das variáveis binárias, cujo domínio é o valor 0 ou 1, e que exprimem estados das variáveis, falso ou verdadeiro, respectivamente. Sob o conjunto B opera-se com duas operações lógicas binárias, $+$ e $\cdot$, e uma unária $^{-}$.

Na álgebra de Boole, à semelhança do sistema convencional, verificam-se as seguintes propriedades:

I. *Propriedade Comutativa*

Para todos os x, y pertencentes a B, temos

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x \cdot y &= y \cdot x^{1}. \end{aligned}$$

II. *Propriedade Associativa*

Para todos os x, y, z pertencentes a B, temos

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z) \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z). \end{aligned}$$

[1]Nota: o operador $\cdot$ é muitas vezes eliminado, ficando a operação $x \cdot y$ denotada por xy. Mas ao efectuar essa eliminação, ficamos sem possibilidade de distinguir duas operações: a multiplicação e a concatenação. Embora essa eliminação não deva portanto ser efectuada, infelizmente ela é comum, sobretudo quando nem sequer se sabe o que é concatenação.

III. *Propriedade Distributiva*

Para todos os x, y, z pertencentes a B, temos

$$\begin{aligned} x + (y \cdot z) &= (x + y) \cdot (x + z) \\ x \cdot (y + z) &= (x \cdot y) + (x \cdot z). \end{aligned}$$

IV. *Existência de Elemento Neutro*

Para todo o x pertencente a B, temos

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x \cdot 1 &= x. \end{aligned}$$

V. *Existência de Complemento ou Negação de x*

Para todos os elementos x pertencentes a B, existe um elemento $\overline{x}$, que se denomina por complemento ou negação de x, tal que

$$\begin{aligned} x + \overline{x} &= 1 \\ x \cdot \overline{x} &= 0. \end{aligned}$$

V.1. *Unicidade do Complemento*

Na álgebra Booleana, a existência de complemento é único.

Proposição 4.1.1 *Se $x + y = 1$ e $x \cdot y = 0$, então $y = \overline{x}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} y &= y \cdot 1 && \text{Propriedade IV} \\ &= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{Propriedade V} \\ &= y \cdot x + y \cdot \overline{x} && \text{Propriedade III} \\ &= 0 + y \cdot \overline{x} && \text{Por Hipótese} \\ &= x \cdot \overline{x} + y \cdot \overline{x} && \text{Propriedade V} \\ &= (x + y) \cdot \overline{x} && \text{Propriedade III} \\ &= 1 \cdot \overline{x} && \text{Por Hipótese} \\ &= \overline{x} && \text{Propriedade IV} \end{aligned}$$

□

VI. ***Idempotência***

$$\begin{aligned} x + x &= x \\ x \cdot x &= x. \end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} x &= x + 0 && \text{Propriedade IV} \\ &= x + (x \cdot \overline{x}) && \text{Propriedade V} \\ &= (x + x) \cdot (x + \overline{x}) && \text{Propriedade III} \\ &= (x + x) \cdot 1 && \text{Propriedade V} \\ &= x + x && \text{Propriedade IV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x \cdot 1 && \text{Propriedade IV} \\ &= x \cdot (x + \overline{x}) && \text{Propriedade V} \\ &= (x \cdot x) + (x \cdot \overline{x}) && \text{Propriedade III} \\ &= (x \cdot x) + 0 && \text{Propriedade V} \\ &= x \cdot x && \text{Propriedade IV} \end{aligned}$$

□

VII. ***Existência de Elemento Absorvente***

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0 \\ 1 + x &= 1. \end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (x \cdot \overline{x}) \cdot x && \text{Propriedade V} \\ &= \overline{x} \cdot (x \cdot x) && \text{Propriedades I e II} \\ &= \overline{x} \cdot x && \text{Propriedade VI} \\ &= 0 && \text{Propriedade V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + x &= (x + \overline{x}) + x && \text{Propriedade V} \\ &= \overline{x} + (x + x) && \text{Propriedades I e II} \\ &= \overline{x} + x && \text{Propriedade VI} \\ &= 1 && \text{Propriedade V} \end{aligned}$$

□

VIII. ***Absorção***

$$\begin{aligned} x + x \cdot y &= x \qquad (a) \\ x \cdot (x + y) &= x. \end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} x + xy &= x\,(1 + y) && \text{Propriedade III} \\ &= x \cdot 1 && \text{Propriedade VII} \\ &= x && \text{Propriedade IV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(x + y) &= xx + xy && \text{Propriedade III} \\ &= x + xy && \text{Propriedade VI} \\ &= x && (a) \end{aligned}$$

□

IX. ***Dupla Negação***

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

Demonstração. Se $\overline{x} + x = 1$ e $\overline{x}x = 0$, então, pela propriedade V.1, x é o complemento de $\overline{x}$ e consequentemente $\overline{\overline{x}} = x$. □

X. ***Leis de Morgan***

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{x} \cdot \overline{y} \\ \overline{x \cdot y} &= \overline{x} + \overline{y}. \end{aligned}$$

Demonstração. Para provarmos basta-nos verificar que $\overline{x} \cdot \overline{y}$ é o complemento de $x + y$ através da utilização da propriedade de unicidade do complemento.

$$\begin{aligned} (x + y) + \overline{x} \cdot \overline{y} &= (x + y + \overline{x})\,(x + y + \overline{y}) \\ &= (1 + y)(1 + x) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + y)\,(\overline{x} \cdot \overline{y}) &= (x \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{y}) \\ &= 0 \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como tal, podemos concluir que $\overline{x} \cdot \overline{y}$ é o complemento de $x + y$, ou seja, $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Para provarmos que $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$, vamos seguir um raciocínio análogo ao anterior.

$$\begin{aligned} x \cdot y + (\overline{x} + \overline{y}) &= (x + \overline{x} + \overline{y}) \cdot (y + \overline{x} + \overline{y}) \\ &= (1 + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + 1) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y\,(\overline{x} + \overline{y}) &= x \cdot y \cdot \overline{x} + x \cdot y \cdot \overline{y} \\ &= 0 \cdot y + x \cdot 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podemos então concluir que $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$. □

A interpretação Lógica desta álgebra é directamente sugerida pela semelhança entre os símbolos algébricos e as palavras da linguagem. Os símbolos literais, as variáveis, representarão conceitos, que interpretados em extensão corresponderão a classes, e os símbolos algébricos, o da adição e multiplicação, são utilizados para a soma lógica, reunião de classes, e para o produto lógico, intersecção de classes respectivamente. Para Boole, os símbolos 1 e 0 representam a Classe Universal e a Classe Vazia, introduzindo deste modo uma novidade na Lógica das classes tradicional, visto que nela era reconhecida a universalidade de uma classe, mas ignorada a classe universal e também não tinha em consideração a classe vazia.

Com o símbolo de classe universal pode-se, juntamente com o símbolo de subtracção, assegurar a função de negação. Assim, se x designa a classe dos seres vivos, a expressão $1 - x$ designará a classe universal à excepção dos seres vivos, ou seja a classe dos seres inanimados[2]. Através do princípio da contradição escreve-se $x \cdot (1 - x) = 0$, utilizando os dois símbolos 1 e 0.

As proposições tradicionais da Lógica clássica são expressas de modo a marcar a sua relação à classe vazia. Vejamos:

[2] $1 - x$ designa o complemento de x e utiliza-se o símbolo $\overline{x}$ como abreviatura.

$x \cdot (1-y) = 0$	Todo o X é Y
$x \cdot y = 0$	Nenhum X é Y
$x \cdot y \neq 0$	Algum X é Y
$x \cdot (1-y) \neq 0$	Algum X é não Y

Como se verifica, o símbolo $\neq$ parece-nos indispensável quando se pretende passar de proposições universais para as proposições particulares. No entanto, como Boole elege as equações para exprimir todos os tipos de proposições categóricas ele passa a exprimi-las do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \nu; \\ x \cdot (1-y) &= \nu. \end{aligned}$$

A letra ν, que surge como sendo uma espécie de intermediário entre o 0 e o 1, é introduzida para exprimir proposições particulares, e parece corresponder à palavra "algum".

Segundo Boole, uma vez que o problema lógico foi escrito em equações, a interpretação lógica dos símbolos da equação pode ser deixada para trás, os símbolos podem ser convertidos em símbolos quantitativos em que apenas tomarão o valor 0 ou 1, efectuando sobre eles todas as operações necessárias para resolver a equação, sendo por fim restituída a sua interpretação lógica. No entanto, a álgebra de Boole não pode ser vista como um cálculo de classes, mas antes como um cálculo abstracto, que pode receber uma interpretação concreta na linguagem de classes. Uma vez que como o próprio Boole já tinha percebido, no mesmo domínio da Lógica, as variáveis poderiam representar proposições, os sinais de adição e multiplicação representariam a disjunção e a conjunção de proposições, e os valores 0 e 1, os valores falso e verdadeiro. Apesar disto, a álgebra de Boole não se conseguiu libertar das suas ligações com o cálculo numérico.

O modo como Boole utilizou os símbolos 1 ou 0, não os tomando como sinais totalmente neutros; o facto de as operações permaneceram decalcadas sobre as operações fundamentais exceptuando a elevação a potência, sendo notório o interesse de manter as operações inversas, apesar da dificuldade de encontrar correspondentes exactos para a operação da divisão na Lógica de classes e de proposições; o próprio facto de a negação não ter um simbolismo

análogo no sistema algébrico, assim como a impossibilidade de traduzir as operações deste cálculo na linguagem da Lógica evidencia o quanto é inadequado reduzir as operações à formação e à resolução de equações.

4.2 Gottlob Frege

Gottlob Frege (1848-1925) foi, depois de Boole, quem deu um avanço significativo em Lógica. Se por um lado Boole tentou mostrar que a Lógica era um ramo da Matemática, Frege pretendeu mostrar que a Aritmética era semelhante à Lógica. De facto, a Lógica Matemática moderna apresentou-se sob duas formas sucessivas, por um lado Boole funda a álgebra da Lógica, por outro Frege, sem se opor totalmente a Boole, concebe a logística. Em ambos os casos a Lógica aparecia ligada à Matemática, no entanto, enquanto que no primeiro caso Boole coloca a Matemática ao serviço da Lógica, com Frege a Lógica seria um meio para aperfeiçoar a Matemática, surgindo-lhe como fundamento. E assim a Matemática não só é um ramo da Lógica, actuando esta no estabelecimento dos Fundamentos da Matemática, como também a Lógica é um ramo da Matemática, utilizando a sua axiomática e a sua linguagem.

Foi nos finais do século XIX, com o desenvolvimento das matemáticas e com as suas exigências que as relações da Lógica e da Matemática se viriam a alterar, pois era sentida a necessidade de introduzir a Lógica na Matemática, renovando para isso o instrumento lógico, que se mostrava insuficiente para alcançar os objectivos que lhe propunham.

Foi no século XIX que se reduziu as noções fundamentais da análise infinitesimal às da aritmética. Se por um lado, o modo claro e simples das noções e das proposições desta ciência, bem como as demonstrações evidentes às quais se juntavam as confirmações práticas sem falhas davam alento aos matemáticos, por outro lado, havia quem tentasse fazer com que a aritmética assentasse numa base Lógica, tendo em conta não só os processos de demonstração mas também o seu ponto de partida. Quando a Teoria de Conjuntos, desenvolvida por Cantor ($1845 - 1918$) começava a ser aceite

pelos matemáticos surgem contradições aparentes, as denominadas *antinomias*, que a tornam suspeita, levando a que propusessem a rejeição da Teoria Matemática dos Conjuntos, pois era necessário um maior aprofundamento, ao nível da própria Lógica. As antinomias mostraram que a Lógica intuitiva era mais arriscada que a Matemática clássica e que podia levar a contradições. Instala-se então a *crise dos fundamentos* que domina os assuntos centrais na primeira metade do século XX.

Segundo Robert Blanché[2][3], , a Lógica nova deixou de ser feita apenas, por matemáticos, para vir em auxílio dos lógicos, e passou a ser feita também para os matemáticos, trazendo-lhes a ajuda de que eles tinham necessidade.

No início do século XX, a Lógica passa a ser vista como alicerce da Matemática à qual fornece os seus princípios, na medida em que procura derivar o conjunto das noções e das verdades matemáticas a partir de noções e verdades puramente lógicas. O logicismo é defendido, entre outros, por Frege, que tentam mostrar que todo o raciocínio aritmético pode ser reduzido a padrões logicamente válidos. No entanto, a axiomatização lógica deixa de poder ser entendida do mesmo modo do que a da Matemática, ou seja, formando um sistema hipotético-dedutivo. O lógico terá de conseguir dar um sentido pleno aos termos iniciais da Lógica, fazer com que as proposições iniciais tenham uma verdade categórica capaz de ser comunicada às da aritmética de modo que as bases em que assenta a Matemática sejam definitivas. Assim sendo, "o logicismo tem como condição uma concepção dogmática e absolutista da Lógica" [2][4], .

Vamos agora expor um pouco das obras de Frege nas quais ele consegue dar um grande desenvolvimento à Lógica apresentando o cálculo proposicional na sua forma moderna, introduzindo a função proposicional, o uso de quantificadores e estabelecendo as regras de inferência, sem no entanto esquecermos que antes da sua obra "*Begriffsschrift*" (Ideografia ou Conceitografia), alguns passos já tinham sido dados. Nomeadamente, o primeiro passo é dado por Pierce (1835−1914), que tenta substituir o símbolo da impli-

[3]Pág. 306
[4]Pág. 308

cação no lugar da igualdade, atribuindo-lhe como função essencial, assinalar a relação de ilação entre proposições. A reorganização da Lógica, provocada por Pierce, leva ao nascimento da logística, afastando-se deste modo da álgebra da Lógica. Em segundo lugar surge Hugh Mac Coll (1837 – 1909), que com o seu "cálculo de enunciados equivalentes" redescobre as leis de dualidade entre a conjunção e a disjunção, levando a Lógica a assentar sobre o cálculo elementar das proposições.

Não esquecendo que Frege pretende renovar a Lógica para conseguir um maior rigor na Matemática, de modo a garantir a exactidão na dedução, a sua primeira obra "*Begriffsschrift*", tem como objectivo principal "fornecer o critério mais seguro da validade de uma cadeia de inferências e permitir remontar até à fonte de tudo o que nela parecia implícito" [2]. Esta obra tem uma importância fundamental pois Frege foi o primeiro a conseguir criar uma característica lógica ideal, depois de Leibniz ter sugerido e também tentado fazê-lo. Comparando o simbolismo de Frege e Boole as diferenças são evidentes, pois Frege cria/constrói símbolos nitidamente diferentes dos da aritmética de modo a evitar confusões. No entanto, Frege tal como Boole, utiliza as letras para se referir às variáveis.

Frege introduz, inicialmente, dois símbolos, um para representar o conteúdo conceptual e outro a asserção do juízo, ou seja um para o sujeito e outro para o predicado. O conteúdo é simbolizado por uma barra horizontal à esquerda da letra e a asserção por uma barra vertical à esquerda da barra horizontal. A partir deste símbolo, outros dois foram criados para traduzirem a negação e o condicional, do cálculo das proposições.

Esta ideografia tem como desvantagem ser de difícil impressão e ocupar muito espaço para se conseguir fazer uma demonstração. No entanto, a apresentação da Lógica sob a forma de sistema dedutivo, pela primeira vez, foi sem dúvida uma vantagem desta ideografia. Frege não se contentou em encontrar as leis lógicas necessárias à demonstração matemática, ele tenta e esforça-se por apresentá-las sob a forma de sistema dedutivo.

Outra obra importante de Frege foi "*Grundgesetze*" (Leis Fundamentais da Aritmética, Ideograficamente Deduzidas), cuja Lógica apresentada difere

um pouco da de "*Begriffschrift*". O simbolismo de "*Begriffschrift*", sofre algumas modificações nomeadamente a nível de funções onde Frege tenta analisar e aprofundar um conjunto de noções lógicas. Frege irá tentar ordenar e precisar a noção de função que importou das matemáticas para a Lógica. Assim, numa expressão descritiva Frege começa a distinguir o significado da referência, o que ele denomina por *Sinn* e *Bedeutung*.

Em suma, Frege foi pioneiro ao distinguir com exactidão a noção de variável e constante, assim como a formular o conceito de função lógica, a ideia de uma função com vários argumentos e o conceito de quantificadores. A ele também se deve a distinção feita entre lei e regra, linguagem e metalinguagem. Nas suas obras, atrás referidas, está contido de um modo claro e explícito uma série de conceitos, tais como conectivos, função, função proposicional, quantificadores, etc., que foram vitais para a Lógica Matemática a partir daquele momento.

4.3 Giuseppe Peano

Giuseppe Peano (1858 – 1932), tinha objectivos muito semelhantes a Frege, no entanto um pouco mais realistas. Para ele a libertação das leis lógicas e a sua expressão numa linguagem simbólica estava sujeita às necessidades da matemática, o que torna o seu objectivo idêntico ao de Frege: completar o simbolismo matemático por um simbolismo lógico. No entanto ele não alimenta a ambição do logicismo, para ele as proposições que servem de base à Aritmética não são demonstradas como teoremas de Lógica mas são colocadas como postulados, assim como os termos iniciais não são definidos em termos de Lógica, mas são colocados como primeiros.

A ideografia escolhida por Peano, e com alguns retoques de Whitehead e Russell, acabou por tornar-se a língua comum da logística. As suas ideias fundamentais basearam-se na álgebra de Boole e nos seus sucessores. Ele evita utilizar, tal como Boole fez, os símbolos matemáticos para uso lógico, tentando deste modo completar o simbolismo matemático por um outro mais fundamental e aplicável fora da Matemática.

O simbolismo de Peano e os seus axiomas são considerados a mais notável tentativa do século de reduzir a aritmética comum a um puro simbolismo formal, tendo o método axiomático atingido um elevado nível de precisão sem ambiguidades de sentido (ou pelo menos assim parecia).

4.4 Bertrand Russell

Bertrand Russell (1872 – 1970) foi sem dúvida um dos maiores lógicos do século XX. Ao longo da sua carreira deu novos contributos na área dos fundamentos da matemática e no desenvolvimento da Lógica formal actual. Foi através de Peano que Russell tomou conhecimento das ideias de Frege e aprendeu a ler e a praticar a escrita simbólica do próprio Peano, ao mesmo tempo que compreendeu que era essa mesma escrita rigorosa e precisa que iria permitir alcançar a precisão Matemática. Quando Russell, em 1903, escrevia "*Principles of Mathematics*", descobriu no "*Grundgesetze*", um paradoxo que tornava os axiomas utilizados por Frege, para formalização da Lógica inconsistentes. Era o denominado Paradoxo de Russell. Foi então que Russell decidiu escrever um apêndice ao seu trabalho intitulado "*Apêndice B: A Doutrina dos Tipos*", que é o primeiro ensaio da Teoria dos Tipos.

Posteriormente, Bertrand Russell desenvolve a teoria dos tipos no artigo "*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*", publicado em 1908 e na sua grande obra intitulada "*Principia Mathematica*", e escrita em conjunto com Alfred North Whitehead em 1910, 1912 e 1913.

Russell, tal como Frege e Peano, foi um defensor do logicismo e como tal as análises lógicas por ele elaboradas estavam subordinadas ao estabelecimento do fundamento das matemáticas, de tal modo que ele desafiava qualquer um a encontrar na sua obra *Principia Mathematica* uma separação entre a Lógica e a Matemática.

4.4.1 A Teoria dos Tipos

Em 1908, no artigo "*Mathematical Logic as Based on the Theory of Types*", Russell apresenta a Teoria dos Tipos Lógicos, cujo princípio funda-

mental que preside à construção desta teoria é o Princípio do Círculo Vicioso. Segundo este princípio e utilizando as palavras de Russell "Admitindo que uma dada colecção tem um total, se ela tivesse membros apenas definíveis em termos desse total, então a dita colecção não tem total" [5]. Por outras palavras, o princípio do círculo vicioso estipula que nenhuma totalidade pode conter elementos definidos em termos de si mesma. Uma consequência deste princípio é a não aceitação da asserção $x \in x$, já que esta informa que o conjunto x tem um membro, que é o próprio x, cuja definição depende de x. Russell apresenta esta teoria com a finalidade de solucionar o problema dos paradoxos, nomeadamente o Paradoxo de Russell.

O Paradoxo de Russell diz o seguinte: se se considerar o conjunto y de todas as entidades que não são membros de si próprias, isto é, $x \in y$ se e só se $x \notin y$. Donde se deduz que $y \in y$ se e só se $y \notin y$.

Segundo William Kneale [20][5], pode ler-se nos "*Principle of Mathematics*" o seguinte, "Quando falamos de "Φx" em que x não é especificado, queremos com isso significar um valor da função, mas não um valor definido. Podemos exprimir isto dizendo que "Φx" denota ambiguamente Φa, Φb, Φc, etc., em que Φa, Φb, Φc, etc., são vários valores de "Φx"... Segue-se que "Φx" só tem um sentido bem definido (bem definido, isto é, excepto na medida em que é da sua essência ser ambíguo) se os objectos Φa, Φb, Φc, etc., são bem definidos... Segue-se daqui que nenhuma função pode ter entre os seus valores nada que pressuponha a função, porque se tiver, não podemos considerar os objectos ambiguamente denotados pela função como definidos até que a função seja definida, enquanto conversamente, como acabámos de ver, a função não pode ser definida a menos que os seus valores sejam definidos. Este é um caso particular, mas talvez seja ao mesmo tempo o caso mais fundamental do princípio do círculo vicioso. Uma função é aquilo que denota ambiguamente um elemento de uma certa totalidade, nomeadamente os valores da função; por isso esta totalidade não pode conter nenhuns membros que envolvam a função, porque se o contiver, conterá membros que envolvam a totalidade o que pelo princípio da círculo vicioso, não pode ser

[5] Pág. 664-665

feito por nenhuma totalidade."

Ou seja, segundo Russell uma função proposicional denota a totalidade dos seus valores e, portanto também dos seus argumentos, pelo que não estará bem definida se esses mesmos valores não estiverem previamente bem definidos. Não são os valores que pressupõem a função, mas sim a função que pressupõe os valores, pelo que a totalidade destes não pode incluir elementos cuja definição envolva a função, sob pena de violar o princípio do círculo vicioso.

Russell considera que se $\Phi(\Phi(x))$, em que Φ designa uma função proposicional desprovida de sentido, uma vez que não existe nada que seja o valor de Φ para o argumento Φ, então nem todos os argumentos são legítimos para uma função proposicional. Sendo necessário delimitar o conjunto de "argumentos possíveis" através da especificação do "domínio de sentido" ou tipo lógico, que Russell define como sendo a colecção de argumentos para os quais uma dada função proposicional assume valores. Numa fase posterior Russell admitiu que as funções proposicionais podiam ser classificadas em tipos de acordo com a utilização do argumento desse tipo. Por exemplo, a classe dos homens é o conjunto dos valores Rui, Nuno, Pedro, etc., que satisfazem a função "x é homem". De tal modo que se pode exprimir a noção de classe unicamente em termos de função e argumentos. Uma classe é uma extensão de uma função, isto é, de um predicado.

A divisão em tipos conduz-nos a uma hierarquia de entidades, em que a função é de um tipo superior ao dos argumentos dos quais ela pode ser afirmada ou negada com sentido. Se se designar por i o tipo que corresponde aos indivíduos e por (i) o tipo que corresponde às funções proposicionais unárias com argumentos tipo i, os restantes tipos podem ser representados por (i, i), função proposicional binária cujos argumentos são indivíduos, $((i), i)$, função proposicional binária cujo primeiro argumento é do tipo (i) e o segundo argumento do tipo i, e assim sucessivamente. Em geral, uma função proposicional só pode tomar argumentos entre os tipos apropriados mais abaixo na hierarquia.

Esta teoria simples dos tipos permite a resolução dos paradoxos conhe-

cidos na época de Russell, nomeadamente o próprio Paradoxo de Russell. No entanto, perante o Paradoxo do Mentiroso e o de Berry, que continuam a surgir devido ao princípio do Círculo Vicioso, Russell propõe a Teoria Ramificada dos Tipos, também conhecida pela Teoria das Ordens. A Teoria Ramificada dos Tipos surge devido ao facto da Teoria Simples dos Tipos não ser suficiente para eliminar todas as transgressões possíveis do círculo vicioso, sendo necessário evoluir na teoria através da introdução de uma divisão em ordens. Consideremos duas funções proposicionais:

1. $\Phi_{(i)}(xi)$,

2. $\forall \Phi_i \Phi_{((i),i)} \left(\Phi_{(i)}, x_i\right)$,

na qual (2) envolve a totalidade de funções $\Phi_{(i)}$, ou seja, a totalidade de valores possíveis para a variável $\Phi_{(i)}$. Esta totalidade não envolve todas as funções tipo (i), porque se tal acontecesse (2) poderia ser um desses valores e estaria a ser violado o princípio do círculo vicioso. Surge, deste modo, a necessidade de uma divisão complementar por ordens.

Se considerarmos funções que tomam indivíduos como argumentos, e se uma dessas funções puder ser definida sem a aplicação de quantificadores a variáveis que não sejam individuais, então a função pertence à primeira ordem. Já as funções de segunda ordem são aquelas que, segundo o próprio Russell, contém variáveis de primeira ordem mas não contém outras variáveis, com excepção das individuais, isto é, são aquelas em que não ocorrem variáveis aparentes de ordem superior a um.

Em geral, uma função de ordem n, é aquela em que apenas intervêm variáveis aparentes de ordem igual ou inferior a $(n-1)$.

Nos "*Principle of Mathematics*", Russell define função predicativa como sendo aquela que tendo algum dos seus argumentos com ordem mais alta n, a função é de ordem $n+1$.

A distinção de ordens é uma ajuda na solução dos Paradoxos de Berry e Richard, no entanto na Teoria de Eudoxo e Dedekind existe uma "violação" da teoria ramificada dos tipos. Para conservar esta teoria Russell introduz o Axioma de Reducibilidade. O Axioma de Reducibilidade estabelece que

a qualquer função proposicional corresponde uma função proposicional de primeira ordem que lhe é formalmente equivalente. Este axioma é sem dúvida muito conveniente e vantajoso principalmente quando se tenta eliminar os paradoxos, uma vez que não podem ser formulados em termos de funções predicativas.

Russell reconhece no entanto, que este axioma não é uma verdade lógica, mas tenta mostrar as conexões entre ele e o que os lógicos diziam acerca das classes, de modo a torná-lo plausível, pois no fundo ele tem um valor pragmático e dá o resultado que dele se espera, contudo não se impõe por si mesmo. Uma das linhas de argumentação desenvolvida por Russell, para este axioma foi a seguinte:

"O axioma de reducibilidade é equivalente à suposição de que qualquer combinação ou disjunção de predicados (dada intencionalmente) é equivalente a um só predicado, i.é, à suposição que se afirmamos que x tem todos os predicados que satisfazem a função $f\,(\Phi!\hat{z})$ há um outro predicado que x terá sempre que a nossa afirmação for verdadeira e não o terá sempre que for falsa, e analogamente se afirmarmos que x tem alguns dos predicados que satisfazem a função, $f\,(\Phi!\hat{z})$. E isso porque por meio desta suposição pode-se sempre baixar um valor à ordem de uma função não-predicativa; logo, ao fim de um número finito de passos poderemos passar de uma função não-predicativa para uma função predicativa que lhe é formalmente equivalente".[6]

Como se pode ver, Russell considera que uma expressão com um quantificador universal deve ser considerada como uma abreviatura de uma conjunção, e uma expressão com um quantificador existencial deve ser considerada como uma abreviatura de uma disjunção, embora a conjunção e a disjunção possam ser praticamente impossíveis de escrever de um modo completo.

A teoria dos tipos levanta outro problema que é a impossibilidade de definir o conjunto infinito dos números naturais que Frege tinha sugerido. Vejamos: um número define-se como a classe de todas as classes que são

[6] [20] Pág. 671.

equinuméricas. Ora, se no universo houvesse apenas um número infinito n de indivíduos, não poderia haver classes com mais de n objectos e portanto, não poderia haver um número maior que n, o que nos leva a uma contradição com o princípio fundamental da aritmética, segundo o qual depois de um número, há sempre outro, aliás como Euclides demonstrou há cerca de dois mil anos. Deste modo para se poder conciliar a definição lógica do número e a teoria dos tipos, com a noção de aritmética da sequência ilimitada dos inteiros, Russell vê-se obrigado a introduzir o Axioma do Infinito, segundo o qual existe um tipo com um número infinito de exemplos, tipo dos indivíduos, que é o estrato mais baixo da hierarquia.

Como se vê, a teoria Russeliana contém falhas que no entanto não minimizam a importância histórica da referida teoria do fundamento das matemáticas com a Lógica que lhe está subjacente. Russell além da teoria dos tipos deu alguns contributos importantes à Lógica, sendo um grande número deles comum com Frege e com alguns cambiantes, por exemplo: a ordenação da Lógica, o uso sistemático da escrita simbólica, a apresentação da Lógica sob a forma de um sistema dedutivo, a análise da proposição em função e argumento, o uso de quantificadores, quantificação múltipla, etc. Por tudo isto Russell foi um dos iniciadores da Lógica Moderna, pois foi ele que após sistematizações algo artificiais do ponto de vista lógico, da álgebra booleana e do relativo silêncio em que a obra de Frege esteve mergulhada reorganizou a Lógica impondo-lhe a obrigação de adoptar ao mesmo tempo a escrita simbólica e a apresentação axiomática.

Capítulo 5

A Lógica Matemática Actual

Uma das metas dos matemáticos no final do século XIX era obter rigor nas noções do cálculo infinitesimal, procurando reduzir os conceitos fundamentais da análise aos conceitos da aritmética. Por outro lado, Frege, Cantor e Russell procuravam as bases profundas da aritmética, reduzindo o conceito de número natural ao conceito lógico de classe. Os matemáticos neste período esforçavam-se por dar à álgebra uma estrutura lógica, procurando caracterizar a matemática pela sua forma.

David Hilbert($1862-1943$), é sem dúvida um marco na história da Lógica Matemática, uma vez que com ele, e por volta de 1904, se inicia um novo período desta ciência que se caracteriza pela aparição da Metamatemática ou Metalógica, e no qual também deram os seus contributos Löwenheim e Skolem. A partir de 1930, surge a sistematização formalista da Metamatemática, e levantam-se algumas discussões, sobre o valor e os limites da axiomatização, a relação entre Lógica e Matemática e o problema da verdade, Hilbert, Gödel ($1906-1978$), e Tarski ($1902-1983$), são os intervenientes mais notáveis. No entanto Hilbert e Gödel debruçam-se mais sobre a vertente sintáctica da metamatemática , ocupando-se com a consistência, a completude e a decidibilidade dos sistema axiomáticos e a independência dos axiomas, enquanto Tarski se debruça sobre a parte semântica, a metamatemática dirige-se ao significado dos símbolos, dos cálculos, das relações a um determinado mundo de objectos. De facto, a Lógica como um cálculo foi uma tradição que se começou a afirmar na primeira década do século XX e

que culmina com a *Teoria dos Modelos* contemporânea. Segundo esta teoria, qualquer linguagem pode ser interpretada da várias maneiras em diferentes universos de discurso, sendo possível e fundamental fazer da parte exterior da linguagem, a teoria dessas mudanças de interpretação. No fundo, se uma frase se deduzir de uma teoria, então essa frase é verdadeira em todos os modelos dessa teoria, tendo em atenção que um modelo para um conjunto de frases é uma interpretação na qual todas as frases são verdadeiras. Este progresso considerado por muitos como relativismo semântico está ligado aos resultados obtidos por Leopold Löwenheim (1878-1940) e Albert Thoralf Skolem (1887-1963) e nos quais se pode ver as primeiras conquistas na Teoria dos Modelos.

5.1 Leopold Löwenheim

Os trabalhos de Leopold Löwenheim e Albert T. Skolem vão causar alguns problemas na designação da Lógica de Predicados de primeira ordem como fragmento privilegiado da Lógica a ser usado no modo de formalizar as matemáticas. Löwenheim, num ensaio de 1915 estuda a Lógica de primeira ordem e estabelece um resultado fundamental que se aplica a esta Lógica. Este artigo foi escrito tendo por base o simbolismo de Ernest Schröder $(1841-1902)$, e o seu autor não se interessa pelos enunciados "absolutamente verdadeiros" ou pelo modo de os provar, mas sim pela questão de saber quais são ou não os enunciados satisfeitos numa dada estrutura. O resultado a que Löwenheim chega é que se um enunciado é válido numa estrutura que possui o mesmo número de elementos que o conjunto dos números naturais, ou em qualquer outra estrutura enumerável, então ele é universalmente válido. Ou seja, se U representar o ser universalmente válido, D ser válido numa estrutura enumerável e DEM ser demonstrável num domínio da Lógica geral e se $\rightarrow$ representar a implicação então teremos, $D \rightarrow DEM \rightarrow U$. Este ensaio de Löwenheim é o primeiro passo dado na metalógica moderna, no entanto a prova dada vai ser simplificada e corrigida por Skolem em 1920.

5.2 Thoralf Skolem

O norueguês Skolem corrige e simplifica o ensaio de Löwenheim quando generaliza o resultado aos conjuntos enumeráveis de enunciados. Esta afirmação vai conduzir ao Paradoxo de Skolem, uma vez que se a axiomática de "Zermelo-Fraenkel" da teoria dos conjuntos, for coerente, pode possuir um modelo enumerável, mesmo que se consiga provar a existência de conjuntos infinitos não enumeráveis. Segundo o que o próprio Skolem afirma, somos conduzidos a um novo paradoxo da teoria dos conjuntos e agora dentro da teoria axiomatizada que tinha sido construída de modo a ficarmos livres dos perigos das explorações de Cantor. Por este motivo é possível demonstrar a existência de uma infinidade não enumerável de conjuntos. E os axiomas podem ser escritos através da conjunção numa única fórmula que passará a ter além, do simbolismo lógico do cálculo das funções proposicionais, o símbolo de pertença, o que de acordo com o Teorema de Löwenheim, se for possível encontrar uma interpretação para o símbolo de pertença que torne a fórmula verdadeira, então é possível encontrar uma interpretação num domínio enumeravelmente infinito. Como consequência temos o facto de os axiomas que forem construídos com o objectivo de chamar a atenção para os conjuntos não-enumeráveis não conseguirem fazê-lo. Esta dificuldade não será ultrapassada com a introdução de um número infinito de axiomas, visto que, qualquer classe de fórmulas que sejam satisfeitas num domínio não-vazio são satisfeitas num domínio enumeravelmente infinito. A única maneira possível de evitar esta dificuldade é, segundo sugestão de Skolem, que a distinção feita entre enumerável e não enumerável seja interpretada como relativa dentro do próprio sistema de axiomas. Assim, o próprio sentido das noções matemáticas varia de um modelo para o outro, o que significa que não é possível definir estas noções de forma absoluta. Eis um resultado não previsto e contrário a todas as ideias básicas da Matemática.

5.3 Crise dos Fundamentos

Os numerosos paradoxos surgidos por volta de 1900, nomeadamente na teoria dos conjuntos, levou a que se instalasse um debate sobre os métodos dedutivos visto que a confiança dos matemáticos começava a estar abalada. É então que surgem três grandes escolas para tentar solucionar o problema: a Logicista, a Intuicionista e a Formalista.

A escola Logicista que tinha como maiores defensores da teoria Frege, Peano e Russell, defende a tese de que a matemática é um ramo da lógica, devendo por isso procurar meios de garantir que as proposições desta estejam livres de definições que envolvam circularidade. A obra de Russell e Whitehead, "*Principia Mathematica*", é uma prova de como Russell defendia esta tese, deduzindo a Matemática a partir da Lógica, nomeadamente no desenvolvimento da teoria dos tipos. No entanto, Russell ao introduzir o axioma de Reducibilidade, sem nenhum apelo lógico ou intuitivo não esteve em consonância com o projecto inicialmente defendido por ele.

No fundo o logicismo procurava adequar a matemática aos critérios necessários de modo a afastá-la de inconsistências. A escola intuicionista, cujo maior defensor foi L.E.J.Brouwer $(1881 - 1966)$, tinha como desafio a revisão de axiomas e regras lógicas admissíveis. Com efeito em 1908 Brouwer afirma que a Lógica, hoje denominada clássica, foi abstraída da Matemática dos conjuntos finitos. O pressuposto básico da tese intuicionista está em a Matemática ser considerada como algo que corresponde à parte exacta do pensamento humano. No entanto, esta tese sofreu grandes críticas nomeadamente a de desfigurar a Matemática, tornando-a subjectiva. O passo dado no sentido de tomar a lei do terceiro excluído como universalmente válido, independentemente das considerações do domínio onde se aplica e o próprio modo de se provar a não-contradição de uma teoria matemática, procurando um modelo dos axiomas dessa teoria dentro de outra já existente, mostrou-se não muito satisfatório. É então que surge o formalismo, criado por David Hilbert, que propôs uma nova abordagem na revisão dos fundamentos matemáticos, através da abstracção do método axiomático nela empregue, isto é o for-

malismo trata axiomatizações de teorias como objectos matemáticos. Para os formalistas era necessário colocar a matemática em bases severamente sólidas, com axiomas e regras de procedimento que deveriam ficar estabelecidas com carácter definitivo. Estes estudos denominam-se por Metalógica ou Metamatemática.

5.3.1 David Hilbert

Em 1900, na viragem do século, realizou-se em Paris um Congresso Internacional da Matemáticos durante o qual David Hilbert apresentou uma "lista" de problemas matemáticos ainda não resolvidos entre os quais figurava: A compatibilidade dos axiomas aritméticos ou usando as suas próprias palavras: "*Whether, in any way, certain statements of single axioms depend upon one another, and whether the axioms may not therefore contain certain parts in common, which must be isolated if one wishes to arrive at a system of axioms that shall be altogother independent of one another*".

E a seguir diz que é essencial em relação aos axiomas: "*To prove that they are not contradictory, that is, that a definite number of logical steps based upon them can never lead to contradictory results*".

Estava assim colocado aos matemáticos o problema real de qualquer axiomática.

Hilbert, quando confrontado com os paradoxos, sugere um programa para os eliminar, através da axiomatização da Lógica, da aritmética, da análise e da teoria dos conjuntos. Para David Hilbert não se deveria reduzir a Aritmética à Lógica mas sim desenvolvê-las ao mesmo nível, de modo a que o sistema pudesse ser demonstrado sem inconsistências. Este programa que ficou conhecido por Programa de Hilbert foi apresentado em 1904, em Paris, e contém alguns dos princípios fundamentais do autor, nomeadamente a sua crença no método axiomático. Hilbert tenta defender e legitimar o raciocínio matemático clássico, pois para ele o pensamento matemático passa a ser uma reflexão directa sobre o conteúdo de uma percepção concreta: sendo assim na aritmética temos os números dos quais se considera ter essa percepção.

Este raciocínio básico que Hilbert juntamente com Bernays (1888 – 1977) intitula por *dedução finitista* pode ser caracterizado pelo facto de os seus objectos não serem simplesmente postulados hipotéticos mas sim construídos, e os seus processos de cálculo ou definição só serem legítimos se se garantir que terminam num número finito de passos, cujo limite pode ser previamente estipulado, assim sendo dois dos processos fundamentais a indução e a recursão.

A indução é uma consequência da construção concreta dos símbolos, e tal como na definição por recursão não estamos perante um princípio autónomo de definição. Na recursão estamos perante uma descrição abreviada de certos métodos de construção através dos quais se obtém um novo numeral a partir de um ou mais numerais dados.

David Hilbert defende que a fonte de significado de uma teoria deve ser a demonstração da *consistência* dessa teoria. De tal modo que uma teoria abstracta terá significado se houver uma demonstração da sua consistência, através de um conjunto de objectos cujas relações não ponham em causa as condições definidas nos axiomas, ou seja, se não se encontrar uma contradição nos axiomas através da utilização das regras de inferência. Partindo do princípio que um sistema é consistente se se puder aplicar as regras de inferência aos axiomas, sem conduzir a um par de consequências em que uma seja a negação da outra, e as fórmulas axiomáticas sejam em número finito, de tal modo que uma derivação tem de ser uma sucessão finita de passos de acordo com um número finito de regras, a demonstração de consistência passa a ser feita utilizando os métodos finitários.

O método usado no programa de Hilbert é baseado na distinção feita entre o cálculo formal e a descrição, a discussão e a teoria do cálculo, a Metamatemática. O procedimento consiste na completa formalização do cálculo a ser considerado, e na análise posterior das suas propriedades estruturais de modo a provar que expressões contraditórias não podem ser geradas no interior do sistema. Para Hilbert esta nova teoria denominada por *Teoria da Demonstração* ou *Metamatemática*, consiste no estudo sistemático do domínio de validade das diversas formas de inferência.

A teoria sugerida por Hilbert para o problema da consistência veio a ser muito apropriada para determinar se um sistema de axiomas é *completo*, ou para se analisar a possibilidade de construir processos de decisão para a solução de problemas em vários ramos da Matemática. O programa de Hilbert pretendeu dar não só uma demonstração finitista da consistência da matemática mas também uma axiomatização completa desta, em relação à qual toda a asserção é demonstrável ou refutável. Nesta situação, a verdade de uma asserção matemática será confundida com a sua demonstração e o acesso ao conhecimento duma verdade Matemática circunscrever-se-á ao processo da sua demonstração. Brouwer ataca Hilbert, por este não considerar o conteúdo real da Matemática, pois como ele próprio argumenta a consistência de um sistema de postulados pode ser estabelecida sem ser apresentado um modelo.

Para Hilbert a axiomatização da Matemática faz com que um objecto matemático seja exactamente aquilo que um axioma diz que ele é, e deste modo Brouwer não levanta objecções, pois as expressões são utilizadas para definir objectos que satisfaçam certas condições e deste modo as proposições afirmam que os axiomas têm consequências em virtude da sua forma, isto é, são verdades da Lógica pura. O programa de Hilbert não pode ser totalmente cumprido, mas o estímulo dado para o conjunto de axiomas levou a algumas descobertas sobre as propriedades da Lógica e de outros sistemas dedutivos.

5.4 Kurt Gödel

Por volta de 1930 inicia-se uma viragem, que se viria a tornar crucial para o desenvolvimento da lógica contemporânea. A Lógica Matemática apresenta-se à comunidade científica como uma disciplina completa, que se caracteriza pela audácia e pelo rigor com que se tenta impor.

E tudo parecia correr conforme o previsto depois de Kurt Gödel, em 1930, ter apresentado um artigo sobre a suficiência do Cálculo Lógico de 1ª ordem, "*Die Vollständigkeit der Axiome des Logischen Functionankalküls*", no qual demonstra que o Cálculo Quantificado de 1ª ordem é semanticamente

suficiente, isto é, permite deduzir todas as fórmulas válidas em lógica não referida a relações (1ª ordem).

Mas que fez Gödel para atingir estes surpreendentes resultados? Este famoso Teorema da Completude de Gödel parecia indicar que estaria dada a resposta ao problema de Hilbert.

Mas logo no ano seguinte, 1931, Kurt Gödel, no seu ensaio "Acerca das frases formalmente indecidíveis dos *Principia Mathematica* e sistemas relacionados" mostra que na Matemática não há nenhum sistema formal, nomeadamente a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, com um número finito de axiomas, que seja completo, isto é, que esteja livre de indecidíveis. Um sistema diz-se livre de indecidíveis se se conseguir provar qualquer uma das suas afirmações.

Gödel destrói deste modo o sonho de Hilbert, ao provar que não se consegue construir uma teoria axiomática dos números que seja completa.

Em primeiro lugar Gödel demonstrou que todos os sistemas formais da Matemática (incluindo os "*Principia Mathematics*" de Russell e Whitehead, Aritmética formal de Peano, a teoria axiomática dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel e em geral qualquer sistema formal que cumprisse certas condições de aceitabilidade) são incompletos, quer dizer, para cada um deles pode efectivamente construir-se uma proposição indecidível em relação ao seu valor lógico, ou seja, nem ela nem a sua negação são dedutíveis. Surge assim o enunciado do 1º Teorema de Incompletude de Gödel.[1] A Incompletude não tem remédio, pois por muitos axiomas que juntemos, os sistemas formais que não sejam de 1ª ordem monódicos continuarão sendo incompletos.

Em segundo lugar, Gödel demonstrou que é impossível provar a consistência de um sistema formal, enunciando o que hoje se chama o 2º Teorema de Gödel.[2]

Ele tenta manusear a metamatemática dentro da aritmética , de modo a evitar os paradoxos, e para tal cria a Numeração de Gödel.

[1] Teorema 5.4.1

[2] Teorema 5.4.2

5.4.1 Número de Gödel

Gödel, seguindo a opinião de Hilbert, para o qual a Lógica Simbólica podia ser tratada como um ramo da aritmética elementar, estudou esta correspondência e usou-a na investigação das propriedades de um sistema dedutivo formalizado. Kurt Gödel construiu um sistema no qual associa a cada símbolo lógico um número natural (Tabela 5.1).

Símbolo	**Número de Gödel**	**Significado**
$\sim$	1	Não
$\vee$	2	Ou
$\rightarrow$	3	Se ... então
$\exists$	4	Existe
$=$	5	É igual a
0	6	Zero
s	7	Sucessor
(	8	Pontuação
)	9	Pontuação
,	10	Pontuação

Tabela 5.1: Sistema de numeração de Gödel.

Deste modo, consegue numerar todas as fórmulas e considerações metamatemáticas necessárias para trabalhar com os paradoxos.

Para além destes símbolos lógicos, Gödel codifica as variáveis independentes com números primos maiores que dez, as fórmulas matemáticas pelos quadrados dos números primos maiores que dez, e as propriedades dos números pelos cubos desses primos.

Consideremos a fórmula lógica $(\exists x)\,(x = s \cdot y)$.

Aplicando as regras de numeração de Gödel, temos

	(	$\exists$	x	)	(	x	$=$	$s.y$	)	
Numeração de Gödel	8	4	11	9	8	11	5	7	13	9

Obtemos como codificação a seguinte sequência de números:

$$\{8, 4, 11, 9, 8, 11, 5, 7, 13, 9\}.$$

No entanto, para representar a fórmula por um único número Gödel usa cada número como expoente dos números primos multiplicados entre si. Assim, temos:

$$(\exists x)\,(x = s \cdot y) \rightarrow 2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9.$$

Utilizando esta numeração consegue-se exprimir qualquer proposição sobre números naturais por um número, o que leva a que se possa utilizar a aritmética para verificar as suas próprias verdades. Gödel consegue assim, associar um número a toda e qualquer proposição aritmética que possa ser expressa na linguagem lógica dos "*Principia Mathematica*", de Bertrand Russel e Alfred Whitehead.

Tendo em conta que Kurt Gödel pretendia exprimir as proposições paradoxais no quadro da aritmética, toma como suporte o paradoxo do mentiroso, que diz, "Esta afirmação é falsa", para concluir uma excepção à tese de Hilbert que defende, que todas as asserções verdadeiras são demonstráveis num sistema formal. Ou seja, Gödel tenta com a ajuda de um paradoxo, mostrar que existe algo que não pode ser provado. Esta proposição implica a noção de verdade, que segundo Alfred Tarski (1902 – 1983) não pode ser mantida dentro dos limites de um sistema formal. É então que Gödel sugere que se substitua "verdade" por algo que possa ser formalizado, a noção de demonstrável. Consideremos a fórmula: $\exists y\ (x) \sim Dem(x, y)$, segundo a qual existe uma fórmula cujo número de Gödel é y tal que para qualquer conjunto de fórmulas (x) não existe uma prova para o número de Gödel y, $(\sim Dem(x, y))$. Que é o mesmo que dizer que existe uma fórmula que não pode ser provada. No entanto, a existência desta fórmula não implica que exista uma afirmação matemática, dentro do sistema que não possa ser provada, isto porque a fórmula $\exists y\ (x) \sim Dem(x, y)$ pode ser falsa. Ou seja, pode não existir nenhuma fórmula com o número de Gödel igual a y, a não ser que ela em si seja demonstrável. Se considerarmos $G(y)$ como sendo o

número de Gödel referente à fórmula $(x) \sim Dem(x, y)$, o índice y vai representar uma dependência do número de Gödel associado à fórmula dada. Para cada y passamos a ter um novo número $G(y)$. Como Gödel conseguiu mostrar que a equação $G(y) = y$ tem solução, que equivale a dizer que a fórmula cujo número de Gödel é y e que por isso não pode ser demonstrada é a fórmula $(x) \sim Dem(x, y)$ ou $(x) \sim Dem\,(x, G(y))$. A fórmula pretendida é: $\exists y\ (x) \sim Dem(x, y)$, em que, $y = G(y)$. "A fórmula de número de Gödel y não pode ser demonstrada". Se uma fórmula for demonstrável dentro de um sistema dedutivo completamente formalizado, vai ser derivável dos axiomas. Por outro lado ao construirmos frases que se dizem indemonstráveis dentro de um sistema, evitamos a dificuldade de exprimir um sentido, uma vez que ao contrário da verdade e falsidade, uma propriedade pode ser considerada sem referência ao sentido. E este aspecto vai ser essencial para o programa formalista que Hilbert defende para a Matemática.

Uma fórmula $\mathcal{G}$ construída de acordo com as prescrições de Gödel e que diz que não é demonstrável permite-nos demonstrar dois teoremas, os denominados Teoremas de Gödel. O primeiro teorema diz-nos que se $\mathcal{P}$ é *w-consistente* não pode ser completo e tem $\mathcal{G}$ como uma fórmula indecidível. O segundo teorema diz que se $\mathcal{P}$ é consistente a sua consistência não pode ser provada em $\mathcal{P}$.

Vamos considerar o primeiro teorema.

Teorema 5.4.1 *Se P é w-consistente*[3] *tem de ser incompleto e tem $\mathcal{G}$ como uma fórmula indecidível.*

Vamos supor que $\mathcal{G}$ pode ser demonstrada em $\mathcal{P}$. Então existe um número de Gödel que é o número da demonstração de $\mathcal{G}$. No entanto, $\mathcal{G}$ afirma que esse número não existe, logo ficamos perante uma contradição. Se considerarmos $\mathcal{P}$ consistente então $\mathcal{G}$ não pode ser demonstrada em $\mathcal{P}$, pelo princípio da contraposição. No entanto, ainda não temos garantias que se $\mathcal{P}$ consistente $\mathcal{G}$ não pode ser negada em $\mathcal{P}$. Sendo possível demonstrar a negação de $\mathcal{G}$,

[3] Uma teoria $\mathcal{P}$ é *w-consistente* se e só se não for possível derivar em $\mathcal{P}$ uma fórmula juntamente com a sua negação.

$(\exists x)\, D(x)$, em que $D(x)$ é uma abreviatura de: x é o número de uma demonstração de $\mathcal{G}$. É também possível demonstrar em $\mathcal{P}$, se um dado número é ou não número de uma demonstração de $\mathcal{G}$, ou seja, podemos demonstrar $\sim D(1), \sim D(2)$, etc., pois torna-se necessário obter uma decisão negativa acerca de um certo número de passos, pois caso contrário seria possível demonstrar $\mathcal{G}$ em $\mathcal{P}$, o que levaria a uma contradição. Porém a existência do teorema $(\exists x)\, D(x)$ juntamente com $\sim D(1), \sim D(2)$, etc., conduz-nos à *w-inconsistência*. Aplicando novamente o princípio da contraposição se $\mathcal{P}$ é *w-consistente* então, não pode ser negado em $\mathcal{P}$. Como tal, se $\mathcal{P}$ é *w-consistente* $\mathcal{G}$ não é demonstrável nem refutável em $\mathcal{P}$, o que nos leva a dizer que $\mathcal{P}$ é incompleto.

O segundo teorema de Gödel diz-nos que:

Teorema 5.4.2 *Se $\mathcal{P}$ é consistente, a consistência de $\mathcal{P}$ não pode ser demonstrada em $\mathcal{P}$.*

Para este segundo teorema considera-se a consistência simples, uma vez que se for impossível demonstrar esta consistência é também impossível demonstrar a *w-consistência*. Se for possível demonstrar a consistência de $\mathcal{P}$ dentro de $\mathcal{P}$, então será também possível demonstrar $\mathcal{G}$, que já tínhamos visto ser impossível. $\mathcal{G}$ ao dizer de si próprio que é indemonstrável, mostra-nos que $\mathcal{P}$ não permite a demonstração de todas as fórmulas. Como consequência principal deste segundo Teorema de Gödel temos a impossibilidade do cumprimento do programa de Hilbert. $\mathcal{P}$ não permite uma demonstração metamatemática da sua consistência apesar de supostamente, incluir todos os argumentos finitários. E como tal, a demonstração metamatemática de consistência de um sistema no qual $\mathcal{P}$ esteja incluído como uma parte torna-se impossível. Os resultados obtidos por Gödel levam-nos a concluir que o programa formalista de Hilbert, que torna aceitável um sistema matemático sem que lhe encontre uma interpretação intuitivamente plausível, está errado. No entanto o próprio Gödel afirma que o seu resultado não é inconsistente com o programa de Hilbert, uma vez que se pode tentar encontrar uma demonstração finitária de consistência que não possa ser formulada em $\mathcal{P}$. Assim ,

enquanto o segundo teorema tem uma importância evidente nas disputas dos fundamentos da Matemática, o primeiro teorema é fundamental, uma vez que revela que a aritmética nunca pode ser completamente formalizada. De facto se $\mathcal{G}$ não pode ser demonstrada em $\mathcal{P}$, então $\mathcal{P}$ não é completo. No entanto se se introduzir um axioma que permita derivar uma fórmula indecidível, surgirá outra fórmula indecidível e assim sucessivamente. Como tal, além de $\mathcal{P}$ ser incompleto é incompletável. O que torna pouco provável a construção de um sistema formal, no qual esteja compreendida toda a aritmética intuitiva.

Parece que o primeiro a ficar surpreendido com estes resultados foi o próprio Gödel, que teria pedido a análise dos seus resultados na perspectiva de averiguar a existência de algum erro. Mas efectivamente os resultados são válidos e conduziram ao actual tremendo problema da Matemática, cujos ramos sempre se basearam, desde Euclides, em Axiomáticas a partir das quais, seguindo o método dedutivo, se obtém os resultados.

Onde procurar o caminho?

Será que a nossa noção de "número natural", mesmo tal como é usado em proposições que envolvem apenas um quantificador, não pode ser expressa por qualquer sistema formal, tal como resulta dos teoremas de Gödel?

Uma possível explicação é: se a proposição não é demonstrável nem é refutável, forçosamente existirão modelos do sistema em que é verdadeira e outros em que é falsa. Logo, dizer que uma proposição é verdadeira passa a significar, verdadeira no modelo desejado do sistema. Mas para isso precisamos de ter uma ideia bem definida do género de estrutura matemática a que nos estamos a referir.

É neste contexto que surge o trabalho de Tarski.

5.5 Alfred Tarski

Alfred Tarski é um dos responsáveis pela constituição da semântica como disciplina científica a partir dos anos 30, embora, os primeiros resultados sobre as relações entre as linguagens formais e as estruturas associadas sejam anteriores aos seus trabalhos. Em 1928, no seu trabalho intitulado "Acerca

de alguns conceitos fundamentais da metamatemática", Tarski caracteriza axiomaticamente o conjunto das consequências de um qualquer conjunto de fórmulas, com auxílio de cláusulas a partir das quais define propriedades fundamentais desses conjuntos tais como, consistência, completude e independência. No entanto, em 1930, Tarski afastando-se desta abordagem axiomática tenta construir a noção de consequência numa análise dos conceitos fundamentais da semântica, nomeadamente satisfação, verdade e modelo, conseguindo mesmo chegar à noção actual em 1936. Assim, *A é consequência de um conjunto X de fórmulas se qualquer interpretação que é um modelo de cada fórmula de X for ainda um modelo de A.*

O ensaio de Tarski é uma tentativa de estabelecer claramente a implicação da doutrina antiga, segundo a qual a relação de consequência lógica é satisfeita entre frases declarativas em virtude da forma destas. Porém, a forma como Tarski desenvolve a doutrina tem essencialmente três pontos que vale a pena considerar. Em primeiro lugar a explicação de consequência lógica dada por Tarski não considera o papel que se costuma atribuir às definições neste contexto, uma vez que essa explicação é dada por referência à forma lógica enquanto expressa por constantes. Em segundo lugar, apesar de Tarski tentar explicar a consequência com referência às formas das frases, a sua explicação não é inteiramente sintáctica, uma vez que envolve além das relações dos sinais uns com os outros, a noção de satisfação. Como tal a definição de consequência lógica envolve uma referência ao que se passa no mundo. Em terceiro lugar, apesar de Tarski considerar como pilar central a noção de forma lógica, na sua doutrina da consequência ele não é capaz de a definir com precisão. Estes três pontos certamente estão inter-relacionados. A condição de Tarski para que a relação de consequência seja satisfeita parece ser suficiente, enquanto não nos tivermos de preocupar com o reconhecimento de sinais lógicos. Se contudo, considerarmos uma definição como uma estipulação de que certas expressões são interpretadas como consequência de certas outras expressões, então para definir a relação de consequência de modo a permitir conexões por definição, será necessário dizer entre outras coisas que uma frase é uma consequência de outra se houver uma regra de

linguagem com o efeito de que qualquer frase de forma exemplificada por uma, se pode explicar como consequência da frase correspondente com uma forma exemplificada por outra.

A forma estranha de Tarski explicar a noção de consequência advém da suposição de que o facto de a relação ser satisfeita depende da verdade de uma proposição universal. Uma vez que Tarski diz que a necessidade com que uma consequência se segue, no sentido lógico, das premissas, não é mais do que a inclusão desta sucessão particular num facto universal acerca da satisfação de certas funções de frases.

O trabalho "*Wahrheitsbegriff*", considerado como um dos maiores textos sobre Lógica e Filosofia contemporâneos, tem o objectivo dar uma definição do conceito de enunciado verdadeiro que além de ser "formalmente correcto" seja também "materialmente adequado". De facto, neste trabalho Tarski expõe o "Teorema de Tarski", relativo à indefinibilidade de verdade[4], e indica que a definição procurada, pode ser escrita, em metalinguagem, para cada linguagem formalizada de ordem finita. Além das contribuições dadas por Tarski para os fundamentos da semântica, ele é também o autor de certos trabalhos que lançam as bases da teoria dos modelos.

Antes de analisar a teoria dos modelos vamos recordar noções que vão ser precisas.

Vamos usar em Lógica o termo *satisfação* ou *satisfazibilidade* como sinónimo "mais fraco" de validade. Quer dizer, uma fórmula válida é sempre satisfazível, mas se for não válida, poderá ser ou não satisfazível. Mais concretamente, se se conseguir construir um ou alguns modelos para uma dada fórmula, então essa fórmula é satisfazível, mas não é universalmente válida. Daí que um critério possível (tipo filtro) para averiguar a validade de uma fórmula, seja começar por verificar se ela é ou não satisfazível, porque se não for satisfazível certamente não é universalmente válida.

[4]O teorema estabelece que o conjunto dos números de Gödel das frases da linguagem da aritmética formal, que sejam verdadeiras no modelo dos números naturais não é um conjunto aritmético.

5.5.1 Satisfazibilidade de um conjunto de fórmulas

Sejam **A** e **B** dois conjuntos de fórmulas de Lógica Proposicional com variáveis proposicionais (literais), **G** uma outra fórmula e seja δ uma distribuição de valores lógicos de verdade (V, F).

Temos:

1. **A** é satisfeito por δ (ou δ satisfaz A) se e só se δ satisfaz todas as fórmulas pertencentes ao conjunto **A**.

2. **A** é satisfazível (ou consistente, ou não contraditório) se e só se existe pelo menos uma distribuição de valores de verdade δ que satisfaz **A**.

3. **A** é finitamente satisfazível se e só se qualquer subconjunto finito de **A** é satisfazível.

4. **A** é contraditório se e só se não é satisfazível.

5. **G** é uma consequência de **A** (e representa-se por $\mathbf{A} \vdash \mathbf{G}$) se e só se qualquer distribuição δ que satisfaz **A** também satisfaz **G**.

6. **A** e **B** são logicamente equivalentes se e só se qualquer fórmula de **A** é uma consequência de **B** e qualquer fórmula de **B** é uma consequência de **A**.

Conhecidos estes resultados e efectuando um estudo conveniente chega-se ao chamado **Teorema da Compactação**.

Teorema 5.5.1 *Teorema da compactação em três versões:*

*i. Para qualquer conjunto **A** de fórmulas de Lógica Proposicional, **A** é satisfazível se e só se **A** é finitamente satisfazível.*

Ou usando outra linguagem,

*ii. Para qualquer conjunto **A** de fórmulas de Lógica Proposicional, **A** é contraditório se e só se pelo menos um subconjunto finito de **A** é contraditório.*

Ou ainda outra versão,

iii. Para qualquer conjunto ***A*** *de fórmulas de Lógica Proposicional e para qualquer fórmula* ***F****, esta é uma consequência de* ***A*** *se e só se* ***F*** *é uma consequência de pelo menos um subconjunto finito de* ***A****.*

Será interessante referir que Leon Henkin chega ao Teorema de Gödel de uma forma muito simples enunciando o **Teorema de Satisfação (Satisfazibilidade)**:

Teorema 5.5.2 *Todo o conjunto de fórmulas que seja consistente é satisfazível.*

Ora um dos corolários do Teorema de Henkin é precisamente, o **Teorema de Löwenheim-Skolem**.

Teorema 5.5.3 *Se um conjunto de fórmulas qualquer é simultaneamente satisfazível em qualquer domínio não vazio então é simultaneamente satisfazível num domínio infinito enumerável.*

A generalização ao infinito deve-se a Skolem que em 1933 publicou numa revista norueguesa um artigo provando que nenhuma teoria de 1ª ordem é categórica, pois toda a teoria aritmética de 1ª ordem tem modelos não standard que não são isomorfos do sistema de números naturais, e no entanto para esses modelos vale a Axiomática de Peano, isto é, todos os axiomas de 1ª ordem sobre números naturais. Simplesmente extraordinária esta conclusão atingida por Skolem, sem usar os métodos de Gödel de 1931. Por outro lado o Teorema de Löwenheim-Skolem é especialmente interessante por mostrar que em Lógica os maiores domínios que precisamos de considerar são os numeravelmente infinitos.

Como Skolem disse, isto conduz a um novo paradoxo da Teoria dos Conjuntos, bem dentro da Axiomática de Zermelo-Fraenkel. Com efeito, a partir dessa axiomática é possível demonstrar a existência de uma infinidade não numerável de conjuntos, pois um sistema de axiomas que o não permitisse seria considerado exíguo e sem valor. Ora os axiomas podem ser expressos numa única fórmula lógica que é a conjunção de todos os axiomas, a qual,

além dos sinais das conexões lógicas só contém uma relação: a relação de pertença. De acordo com o teorema de Löwenheim-Skolem, se é possível encontrar uma interpretação (ou seja, um modelo) para essa relação que torne a fórmula válida, então é possível encontrar uma interpretação num domínio numeravelmente infinito. Quer dizer, os axiomas da teoria dos conjuntos que foram construídos para chamar a nossa atenção para conjuntos não numeráveis, nunca o conseguirão fazer. Skolem mostrou mesmo que a dificuldade não pode ser vencida criando um número infinito de axiomas, uma vez que qualquer "classe" de fórmulas que sejam simultaneamente satisfeitas num domínio não vazio, são satisfeitas num domínio numeravelmente infinito.

Quer dizer, a axiomática da teoria dos conjuntos não tem poder ontológico, isto é, não consegue definir sem ambiguidade as entidades que pretende definir e estudar.

5.5.2 Teoria de Modelos

O extraordinário desenvolvimento da Lógica Matemática no século XX deu lugar à Teoria da Recursão e à Teoria de Modelos.

Estas teorias, são ambas teorias matemáticas puras, e utilizam termos técnicos que nem sempre coincidem com as palavras de linguagem usual.

A palavra **MODELO**, tanto na linguagem científica como na linguagem quotidiana, usa-se com dois sentidos distintos e até mesmo contrários. Isto é, por vezes o modelo identifica-se com o primeiro termo de uma relação, com a representação, e outras vezes com o segundo, com o representado. Assim, a escultura que representa um avião é um modelo do avião, no primeiro sentido. Neste caso o *modelo* é uma representação. Em Lógica Matemática, passa-se o contrário, à *representação* chama-se *teoria* e ao *representado* chama-se *modelo da teoria*.

A palavra *modelo* da *Teoria de Modelos* da *Lógica Matemática* deve ser entendida, tal como os fotógrafos, quando falam de modelo (o representado) e como a fotografia (a representação).

A tarefa da Teoria de Modelos consiste em estudar as relações entre as *Linguagens Formais* (as representações), por um lado, e as *realidades* de que falam essas linguagens (os represntados), por outro.

É preciso ter em conta que tanto as linguagens como as realidades mencionadas não podem ser considerados no sentido habitual dos termos. Assim, um "objecto matemático" pode ser considerado um "número" de alguma dessas linguagens. Por exemplo, todos os números complexos, os ordinais, os vectores são *números* (representados) de *linguagens* (representações) impossíveis de falar ou escrever mas que nem por isso deixam de ser linguagens no sentido da Teoria dos Modelos.

As "linguagens" da teoria de Modelos são Sistemas Matemáticos. E as "coisas" *representadas* nessas linguagens (*representações*) são também *sistemas matemáticos*(grupos, ordens, espaços, sistemas de Peano, etc.). A Teoria de Modelos é uma teoria matemática que põe em relação uns sistemas matemáticos com outros sistemas matemáticos.

Um ramo da Lógica Matemática que se ocupa das relações entre as estruturas matemáticas representadas nas Linguagens Formais (representações) é sem dúvida a Teoria de Modelos.

O esquema abstracto da Teoria de Modelos baseia-se na existência de uma *Linguagem L* e de uma *classe de objectos M* que são os sistemas ou estruturas, e na ponte entre estas duas realidades que é a *noção de verdade.*

A noção de verdade de uma fórmula num sistema não permite por si só resolver o problema de elucidar o que se entende por verdade de um enunciado na linguagem falada, que ainda hoje se tenta resolver.

A Teoria de Modelos, tal como a Teoria da Recursão, permite-nos um rigor, pondo à nossa disposição ferramentas conceptuais potentes e indicando-nos que certos caminhos não conduzem a nenhum lado, porém não pode ser considerado uma panaceia filosófica, pois o seu conhecimento é uma condição necessária porém não suficiente para quem deseja estudar filosofia.

O grande impulsionador das investigações nesta área foi Tarski, que ao ter definido e precisado os conceitos semânticos de *verdade* e *consequência* permitiu esta generalização, modernização e desenvolvimento da Semântica

que é a Teoria de Modelos dos anos 50. No entanto, já em 1915, quando Löwenheim provou que uma fórmula tem realização ou modelos de alguma cardinalidade infinita, então também tem modelos numeráveis (se uma fórmula ou proposição tem um modelo infinito, então terá também um modelo infinito numerável). Este resultado foi estendido por Skolem em 1919 a qualquer conjuntos de fórmulas ou proposições. Tendo surgido assim a primeira versão do Teorema de Löwenheim-Skolem que acabaria por ser um teorema básico e fundamental da Teoria de Modelos.

Em 1919, Skolem introduziu o procedimento de eliminação de quantificadores para determinar que relações são definíveis (em 1ª ordem) num sistema.

Assim em 1930, três das ferramentas clássicas da Teoria dos Modelos estavam disponíveis:

1. Método de eliminação de quantificadores (conduzindo à Forma de Skolem).

2. Teorema e Löwenheim-Skolem.

3. Teorema de Compacidade.

5.5.3 Teoria da Verdade de Tarski

Tarski tentou estabelecer uma teoria da verdade para as linguagens formais que estivesse de acordo com a ideia clássica de verdade, ou seja, a verdade consiste numa correspondência entre a realidade e o intelecto. Tentando evitar o aparecimento de paradoxos, Tarski faz uma distinção clara entre Linguagem Objecto e Metalinguagem, isto é, se L for uma linguagem na qual se tenta encontrar a definição de verdade, o predicado "ser verdadeiro em L" será definido na metalinguagem de L, que contém L e nomes para as expressões de L.

Tarski introduz duas noções fundamentais quando procede à definição de verdade de uma linguagem L, são elas: a noção de *modelo* e a de *satisfazibilidade* num modelo. A noção de verdade será definida em função do modelo e para a situação particular da realidade existente, uma vez que um modelo

para uma teoria é a especificação da realidade onde se verifica a teoria. Para definir um modelo numa linguagem formal L, teremos de considerar o par ordenado $\langle D, R\rangle$, no qual D é o universo não vazio dos valores das variáveis individuais, e R é a função que atribui a cada constante individual de L, um elemento do universo e a cada predicado de L um conjunto de elementos desse universo. Esse conjunto poderá ser vazio. Quanto à satisfazibilidade, diz-se que um n-tuplo ordenado satisfaz uma fórmula com n variáveis individuais livres, se a frase obtida, quando se substituiu cada uma das variáveis pelo objecto correspondente do n-tuplo, for verdadeira. A noção de verdade num modelo surge como uma consequência da atribuição de valores no universo D. Ou seja, uma fórmula F da linguagem formal L diz-se verdadeira no modelo $\langle D, R\rangle$ se todas as atribuições de valores em D satisfizerem F no modelo $\langle D, R\rangle$. Quanto às interpretações da linguagem formal L, se associarmos uma estrutura definida como o modelo $\langle D, R\rangle$ a uma atribuição de valores no universo D obtemos a interpretação de L. Há, segundo Fernando Martinho [5][5], autores que consideram a interpretação como um sinónimo da estrutura $\langle D, R\rangle$, independentemente da atribuição de valores no universo D.

5.5.4 Fundamentos da Semântica

Tarski define os conceitos semânticos com alguma generalidade, sendo por isso necessário saber em que condições os teoremas obtidos relativamente às linguagens de primeira ordem podem ser aplicados a linguagens menos restritas. Segundo Robert Blanché e Jacques Dubus [2], as linguagens de ordem superior foram a primeira extensão em que pensou, no entanto foi com o trabalho de Leon Henkin, em 1950, que a resposta chegou e não consistia numa generalização do teorema de completude de Gödel para a primeira ordem. De facto existiam para as linguagens de segunda ordem vários tipos de semântica, nomeadamente a standard e a não-standard. A semântica standard diz respeito aos modelos cujo domínio é D, no qual as variáveis de segunda ordem são interpretadas, enquanto que na semântica

[5]Pág. 737-739.

não-standard o domínio D pode não conter todas as partes de D. Por este motivo na semântica standard considera-se os modelos plenos, enquanto que na semântica não-standard considera-se os modelos gerais. O resultado obtido por Henkin foi algo decepcionante uma vez que traduz apenas a completude para a semântica não-standard. Nenhum sistema de Lógica de segunda ordem pode ser completo no que diz respeito a modelos standard, o que vem esclarecer o primeiro teorema de incompletude de Gödel, uma vez que a semântica não-standard e a semântica de primeira ordem são essencialmente idênticas. Qualquer sistema de axiomas da primeira ordem para a aritmética, se for coerente, possui um modelo não-standard. Não esquecendo que a Lógica tinha duas funções essenciais, que era em primeiro lugar descrever exactamente certas estruturas, caracterizando-as por conjuntos de enunciados satisfeitos nessas estruturas e só nessas, e em segundo lugar, compilar todas as verdades relativas a essas estruturas num sistema formal capaz de enumerá-las, os resultados que acabámos de descrever mostram a impossibilidade de cumprir simultaneamente essas duas funções.

Já se sabia que para a Lógica Standard de 2ª ordem os teoremas de Löwenheim-Skolem e de Compacidade não são válidos. Porém não se sabia qual era a situação para as lógicas intermédias entre a 1ª e 2ª ordens. De facto, todas as lógicas mais potentes ou expressivas que a de 1ª ordem tinham em comum o facto de falhar ou o teorema da compacidade ou o teorema de Löwenheim-Skolem.

Finalmente em 1969 Lindström provou que esta situação não era casual ao demonstrar que: " É impossível que haja lógicas mais expressivas que a de 1ª ordem em que ambos os teoremas sejam válidos."

5.6 Alan Mathison Turing

Em 1935, Alan Turing(1912 − 1954), participa num conjunto de conferências, numa das quais Max Newman colocou o "*Entscheidungsproblem*" de Hilbert, problema da decisão, o qual questiona a existência de um procedimento efectivo que determine de antemão se uma dada conclusão é conse-

quência lógica de um dado conjunto de premissas. Turing propôs-se resolver o problema tendo deparado com a dificuldade de ainda não existir uma noção clara do que era "*um procedimento efectivo*", pois nessa data ainda não se sabia o que era a computação, pelo menos em termos lógicos.

Os resultados obtidos por Gödel e o problema da decisão, motivaram Turing a tentar caracterizar as funções que podem ser computadas. Turing, em 1936, faz antever os seus colegas para a possibilidade de uma máquina que tenha as regras de um sistema formal embutidas, e seja capaz de executar operações computacionais sobre a teoria dos números. De facto, foi através da descoberta de Turing que se deu um novo passo para a formalização da Matemática e ao mesmo tempo se avançou na Teoria da Computação.

A ideia de Turing consistia em substituir um processo efectivo por um objecto Matemático Formal, o que levou ao conceito matemático da noção de algoritmo. Turing considera um algoritmo como um processo de rotina, ou um conjunto de regras capaz de nos dar informações acerca do procedimento a ter em qualquer circunstância.

5.6.1 Máquina de Turing

Num artigo publicado em 1936 e intitulado: "*On Computable Numbers with an aplication to the Entscheidungsproblem*", Turing descreveu em termos matemáticos o poder que pode ter um sistema formal automático, baseado em regras muito simples de operação.

Turing baseou-se na pergunta: "O que faz o raciocínio humano quando executa uma operação?", para definir os cálculos mentais como operações que transformam números em série de estados intermédios que avançam de um para o outro de acordo com um conjunto de regras previamente estabelecidas, até ser encontrada a resposta. Uma vez que as regras matemáticas exigem definições mais rígidas do que as descritas nas discussões sobre os estados da mente humana, Turing debruçou-se sobre a definição desses estados de modo a não conterem ambiguidades e de modo a que as definições pudessem ser capazes de comandar as operações da máquina. Para tal, Turing começou por

elaborar uma tabela de instruções, que especificavam os movimentos a fazer para qualquer configuração possível do sistema, de modo que a descrição do sistema formal fosse precisa. Foi então que Turing conseguiu provar que os passos de um sistema axiomático formal, semelhante à lógica e os estados da máquina, que executam os movimentos num sistema formal automático, são equivalentes entre si.

Considerando que um sistema formal automático é um dispositivo físico que manipula automaticamente os símbolos de um sistema formal, de acordo com as regras previamente estabelecidas, a Máquina Teórica de Turing consegue ser um exemplo da Teoria de Computação bem como uma prova de que é possível construir certos tipos de máquinas computacionais. Alan M. Turing conseguiu provar a existência de uma Máquina de Turing que ao ser programada consegue executar os passos de um qualquer sistema formal. A importância da Máquina de Turing, sob o ponto de vista teórico, está no facto de ela representar um objecto matemático formal. Além disso, com a invenção da Máquina de Turing passou a existir uma boa definição para o termo *computar*, apesar de se levantar uma nova questão, que é saber o que realmente pode ser computado com este dispositivo matemático, e em particular se existe uma máquina de Turing capaz de computar qualquer número.

A Máquina de Turing é uma máquina de estado finito que relê os seus dados de entrada, e também apaga e escreve por cima dos dados de entrada. Possui a particularidade de ter uma memória auxiliar ilimitada, e deste modo, conseguir superar as deficiências de uma máquina de estado finito, tornando-se assim num modelo e não num dispositivo de verdade.

A Máquina de Turing consiste, como já foi dito, em uma máquina de estado finito e uma fita ilimitada dividida em células, e cada célula contém no máximo um símbolo pertencente a um alfabeto permitido. Apenas um número finito de células na fita está em branco (células em branco denotadas por b), em qualquer instante. A unidade de estado finito, com a sua cabeça de leitura lê uma célula da fita em qualquer momento dado.

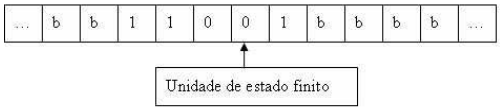

Figura 5.1: Máquina de Turing.

A Máquina, dependendo do estado actual da unidade e do símbolo lido, pára ou completa uma das três acções:

1. Imprimir um símbolo do alfabeto na célula lida, podendo ser o mesmo que já está lá.

2. Ir para o próximo estado, podendo ser até o mesmo.

3. Mover a cabeça de leitura uma célula para a direita ou para a esquerda.

As acções das Máquinas de Turing são descritas através de um conjunto de quíntuplas da forma (s, i, i', s', d) onde s e i indicam,respectivamente, o estado e símbolo actual que está a ser lido; i', indica o símbolo impresso; s' o novo estado e d indica a direcção do movimento da cabeça (D para a direita e E para a esquerda).

Exemplo 5.6.1 *Consideremos a Máquina de Turing na configuração ilustrada pela fig.5.2.*

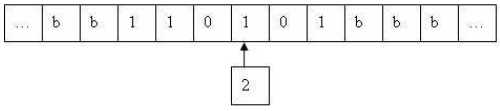

Figura 5.2: Configuração da Máquina de Turing.

Se a máquina agir de acordo com as instruções contidas na quíntupla $(2, 1, 0, 1, D)$*, mover-se-á para a configuração da fig.5.3.*

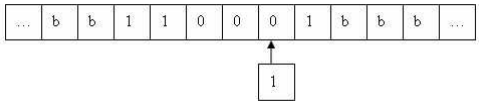

Figura 5.3: Configuração final da Máquina de Turing.

5.6.2 Problema da Paragem

Quando em 1936, Alan Turing mostrou que o funcionamento da sua máquina é semelhante à aplicação das regras de formação de um sistema formal, ele também demonstrou a existência de alguns problemas para os quais não era possível prever se o dispositivo pararia ou não. Ou seja, dado um programa P, para uma Máquina de Turing, e um conjunto de informações de entrada I, será que existe um único programa que aceite P e I como informações de entrada e pare após um número finito de passos, gerando uma configuração final na fita que informe se o programa P encerra a sua execução após um número finito de passos ao processar I? Alan Turing com esta questão pretende saber se existe um programa único que trabalhe para todas as versões do programa P e todas as informações de entrada possíveis I. Tendo em atenção as afirmações sobre verdades aritméticas, dentro de um sistema formal consistente da aritmética, que não são passíveis de prova dentro do próprio sistema, o Problema de Paragem de Turing é o próprio Teorema de Gödel, expresso em termos de uma máquina computacional e programas, no lugar de uma linguagem de um sistema dedutivo da Lógica Matemática.

Em 1936, Turing consegue resolver o problema quando prova formalmente o seguinte teorema que ficou conhecido pelo Teorema de Paragem.

Teorema 5.6.1 *(Teorema de Paragem) Dado um programa arbitrário P da máquina de Turing e um conjunto arbitrário de dados de entrada I, não existe um programa simples da Máquina de Turing que pare depois de um número finito de passos e nos diga se P termina a sua execução ao processar I.*

Como consequência imediata deste teorema temos que a solução negativa deste implica uma solução negativa para o problema de Hilbert e como tal, nem todos os enunciados verdadeiros da aritmética poderão ser provados usando um computador.

5.6.3 A Tese de Church-Turing

As Máquinas de Turing foram um dos resultados obtidos pelas buscas de muitos lógicos que após os resultados de Gödel, em 1931, partiram à descoberta do que seria uma noção formalizada de um procedimento efectivo. Pode-se também salientar a sistematização e o desenvolvimento de funções recursivas por Stephen Cole Kleene (1909 – 1994); o cálculo-lambda, um componente característico e fundamental de uma linguagem de programação desenvolvida por Alonzo Church (1903 – 1995); e a Máquina de Post (1897 – 1954), semelhante à Máquina de Turing e que é fruto de um trabalho independente.

Em 1936, Alonzo Church demonstrou não ser possível existir um procedimento geral de decisão para todas as expressões do Cálculo de Predicados de 1ª Ordem, mesmo que exista esse procedimento para classes especiais de expressões desse cálculo. Apesar do Cálculo de Predicados de 1ª Ordem ser completo, e como tal o próprio cálculo, com os seus axiomas e regras, constituir um algoritmo capaz de enumerar todas as suas expressões válidas, essas expressões são muito numerosas o que torna difícil a sua enumeração até ao fim. O que leva a que muitas vezes se afirme que uma fórmula é válida, mesmo que só se tenha conseguido demonstrar uma fórmula P, num certo momento. No entanto, se depois de se ter deduzido inúmeros teoremas a partir dos axiomas, P ainda não tiver aparecido, nada se pode afirmar, pois P poderia aparecer após várias tentativas ou nunca aparecer, por não ser uma fórmula válida. A decisão tornar-se-ia possível se houvesse um algoritmo capaz de enumerar as expressões que não fossem válidas, uma vez que P apareceria, em algum momento, dentro desse conjunto. De facto, o Teorema de Church consiste em demonstrar que não existe nenhum algoritmo capaz de enumerar as expressões não válidas, de tal modo que fique a priori excluído todo o procedimento de decisão para as expressões do Cálculo de Predicados, em geral.

Church empregando o conceito formalizado de λ-definibilidade (lambda-definibilidade), no lugar do conceito informal do procedimento efectivo, tinha alcançado o mesmo resultado que Turing, sobre o problema da decisão de

Hilbert. Kleene, ainda em 1936, mostrou que o conceito de λ-definibilidade é equivalente ao de recursividade de Gödel-Herbrand (1908 – 1931) e ao mesmo tempo Alonzo Church formulou a tese em que estabelecia que a recursividade é a própria formalização do efectivamente computável. Kleene e Rosser(1907 – 1989) mostraram que o cálculo-λ (cálculo-lambda), como sistema para fundamentar a Matemática era inconsistente mas a parte que se referia a funções recursivas estava correcta. Foi então que Church propôs a formalização da noção de "efectivamente computável", através do conceito de λ-definibilidade.

O trabalho de Turing e Church vai ficar para sempre ligado, quando Turing ao dar a noção de computabilidade associada a uma máquina abstracta mostra que a sua noção de computável é equivalente à λ-definibilidade. Deste modo o trabalho de Turing e Church vai ligar os computadores com as Máquinas de Turing, e os limites destas vão também descrever os limites de todos os computadores.

Foi a partir dos resultados de Gödel, Turing e Church que se pode começar a dizer que existem funções para as quais não existe uma sequência de passos que determinam o seu valor, com base nos seus argumentos, o que significa que não existem algoritmos para a solução de determinadas funções. São as chamadas *funções incomputáveis*, o que implica que para estas funções não há capacidade computacional para as resolver. O que nos leva a concluir que descobrir as fronteiras entre funções computáveis e incomputáveis é equivalente a descobrir os limites dos computadores em geral. A tese de Church-Turing é de facto um importante passo nesse sentido.

Turing conjecturou que o poder computacional das Máquinas de Turing abarcava qualquer processo algorítmico, o que equivale a dizer que o conceito de Máquina de Turing propicia um contexto no qual todas as funções computáveis podem ser descritas.

A contribuição dada por Church-Turing foi de facto terem percebido que as funções computáveis são as mesmas funções Turing-computáveis, o que possibilita verificar o alcance e o limite de um computador.

Assim se atingia formalmente o fim do que podemos chamar o Mito de

Euclides: Todas as ciências tentarem desenvolver axiomáticas que provassem os seus resultados à luz da razão.

Por outro lado, o ponto de vista de David Hilbert, que este defendia desde o início do século XX (historicamente já referido por Ramón Llull, na Idade Média, e como vimos por Leibniz, na Idade Moderna) de que todo o problema lógico/matemático poderia ser resolvido por procedimentos mecânicos, atingia também o seu fim.

O teorema de Church, de 1936, segundo o qual é impossível determinar um procedimento decisório adequado para a Lógica Quantificada, supõe conhecimentos profundos. Church acaba por propor a substituição do conceito vago de "função efectivamente calculável" pelo conceito matematicamente preciso e rigoroso de recursividade. Tal é a finalidade da **Tese de Church (1936):** Toda a função efectivamente calculável é uma função recursiva.

Esta tese não é susceptível de demonstração e tem carácter de uma conjectura. A razão disso é o facto de o conceito de "função calculável" ser vago e intuitivo, contrariamente ao conceito preciso e rigoroso de "função recursiva".

Com a ajuda da sua tese, Church demonstrou no seu trabalho de 1936 "*Anote on the Entscheidingsproblem*" que o sistema formal da Teoria Elementar dos Números podia ser reduzido ao sistema formal da Lógica Elementar. Tendo em conta o anterior resultado de Church sobre a indecidibilidade da Teoria Elementar dos Números, consequentemente a Lógica Elementar Quantificada de 1ª ordem seria indecidível, ou seja, **Teorema de Church**.

Teorema 5.6.2 *A Lógica Elementar de Quantificação de 1ª ordem é indecidível.*

Este teorema possui relevância filosófica. Com efeito, do ponto de vista da Filosofia, o principal interesse reside em que, a partir do teorema de Church parece poder estabelecer-se a não mecanização da Lógica Formal, ou seja:

A operação dedutiva da razão não é totalmente mecanizável.

Num trabalho de 1956, Beth considerou a ideia de construir uma máquina lógica que efectuasse a confecção de tabelas semânticas, usando regras de

inferência. Haveria assim três casos possíveis:

a) Fecho total da tabela.

b) Desenvolvimento de contra-exemplos num número finito de passos.

c) Derivação até ao infinito.

A máquina deveria poder enfrentar com êxito estas três possibilidades, por exemplo, com um sistema de semáforos: luz vermelha no caso a), luz amarela no caso b) e luz verde no último caso. Ora segundo Beth deve poder construir-se uma máquina que cumpre as duas primeiras funções, mas não a terceira, porque nunca é possível decidir mecanicamente se uma busca de um contra-exemplo, aberta até ao infinito, alcançará ou não êxito, embora a mente humana possa muitas vezes resolver de modo não mecânico essa questão.

Conclusão: Podemos admitir que a nossa mente está equipada com a luz verde de Beth (enfim, uma certa espécie de luz verde). Porém não podemos supor que a nossa mente opera a partir dessa luz verde de uma forma sistemática e controlável, pois isso implicaria que a mente humana incorporasse "uma máquina lógica com os três semáforos" e sabemos que uma tal máquina não pode existir.

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Observações finais

Ao longo deste trabalho debruçamo-nos sobre o estudo da Lógica desde Aristóteles até aos nossos dias, referindo-nos aos diferentes papéis que a Lógica foi desempenhando ao longo dos tempos.

Embora se possa pensar que a Lógica Proposicional, é de algum modo, uma substituição mais moderna da Silogística, isto não é completamente correcto. Com efeito, embora o desenvolvimento actual completo da Lógica Proposicional resulta dos trabalhos de lógicos dos séculos XIX e XX, as bases coincidem claramente com os trabalhos de Aristóteles e seus contemporâneos e discípulos.

De facto, após o período da formulação silogística da Lógica, Leibniz tenta construir uma linguagem universal do raciocínio, "Ars Combinatória" , na qual os processos de raciocínio e pensamento poderiam ser reduzidos a procedimentos de cálculo numérico. Leibniz não chegou a completar esta ideia, mas Boole em "The Mathematical analysis of Logic"(1847), continuou as ideias de Leibniz, considerando uma nova álgebra: a Álgebra de Boole. Boole contribuiu para o aparecimento dos computadores, uma vez que o seu sistema lógico permitiu chegar à Máquina de Turing, que se baseou no princípio de que era possível através da simples aplicação de regras, passar mecanicamente de uns símbolos para os outros.

A álgebra de Boole estava limitada ao raciocínio proposicional e somente mais tarde com o desenvolvimento dos quantificadores, a lógica formal pode ser aplicada ao raciocínio matemático em geral.

Uma da metas dos matemáticos no final do século XIX foi a de obter um rigor conceptual das noções de cálculo infinitesimal, tendo-se procurado reduzir conceitos fundamentais da Análise aos conceitos da Aritmética. A Aritmética vinha-se, assim a configurar como a base de todo o edifício matemático, pois não nos podemos esquecer que também a Geometria podia ser reduzida à Análise. O culminar deste processo deu-se com Peano, ao serem elaborados os axiomas de Peano e que vieram fundamentar toda a Aritmética posterior.

No entanto, Frege, Cantor e Russell, procuravam conduzir a própria aritmética a uma base mais profunda, reduzindo o conceito de número natural ao conceito lógico de classe. Nesta altura, o esforço dos matemáticos foi o de dar à Álgebra uma estrutura Lógica, procurando-se caracterizar a Matemática não tanto pelo seu conteúdo quanto pela sua forma.

Com Hilbert, no início do século XX, inicia-se um novo período da Lógica Matemática que se caracteriza pela aparição da Metamatemática (Hilbert, Löwenheim, Skolem) e posteriormente por uma sistematização formalista dessa mesma metamatemática. Foi então, que se iniciaram as discussões sobre o valor e os limites da axiomatização, o nexo entre Lógica e Matemática, o problema da verdade (Hilbert, Gödel e Tarski).

Sem dúvida que foi durante o século XX que se assistiu à generalização e diversificação dos estudos da Lógica Matemática, atingindo um elevado grau de formalização. A Lógica possui actualmente um sistema completo de símbolos e regras de combinação de símbolos que nos permite obter conclusões válidas. Este facto tornou-a particularmente adaptada a ser aplicada à concepção de máquinas inteligentes.

O trabalho de Turing levanta-nos a um novo problema. Pois de facto, existem funções para as quais não existe uma sequência de passos que determinem o seu valor, com base nos seus argumentos, e quando assim é estamos perante funções não computáveis, isto significa que estamos perante funções

para as quais não há capacidade computacional suficiente para as resolver. Logo, descobrir as fronteiras entre funções computáveis ou não computáveis é descobrir os limites do computador em geral.

6.2 Sugestões para trabalho futuro

Algumas portas foram deixadas abertas por este trabalho, nomeadamente sobre Complexidade Algorítmica.

Sem dúvida que o trabalho de Turing nos conduz à teoria da computabilidade, e consequentemente nos leva a entrar no espírito da complexidade algorítmica.

Ao procurar soluções para um problema de decisão estamos a responder à seguinte pergunta: "Existe algum algoritmo capaz de resolver o problema?". Sabemos que nem sempre a respostas é positiva o que nos conduz a problemas *insolúveis* ou *indecidíveis*.

E aqui está um dos grandes problemas de hoje: porquê que nem sempre a máquina consegue fazer o que o nosso cérebro consegue resolver?

Bibliografia

[1] Blanché, R., *A Axiomática*, Editorial Presença, segunda edição, 1987

[2] Blanché, R. e Dubucs, J., *História da Lógica*, Edições 70, 2001.

[3] Börger, E., Grädel, E. e Gurevich, Y., *The Classical Decision Problem*, Springer, 2001.

[4] Bovet, D. P. e Crescenzi, P., *Introduction to the Theory of Complexity*, Prentice-Hall International, 1994.

[5] Branquinho, J. e Murcho, D., *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos*, Gradiva, 2001.

[6] Burris, S. N., URL: www.thoralfat.uwaterloo.ca/.

[7] Chaitin, G. J., *A Century of Controversy over the Foundations of Mathematics*, URL: http://www.umcs.maine.edu/ chaitin/lowell.html, 1999.

[8] Cook, S., *The P versus NP Problem*, URL: www.claymath.org/prizeproblems/pvsnp.htm, 2000.

[9] Cormen, T., e Leiserson, C. *Algoritmos Teoria e Prática*, Editora Campos, 2001

[10] Davis, P. J., e Hersh, R., *A experiência Matemática*, Gradiva, 1995.

[11] Ershov, Y. e Paliutin, E., *Lógica matemática*, Editorial Mir Moscú, 1987.

[12] Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, The Saunders College Publishing, 1992.

[13] Ferreira, F., *O Problema P versus Np*, Departamento de Matemática da FCUL, URL: alf1.cii.fc.ul.pt/ ferferr/PversusNP.pdf.

[14] Gavrilov, G. P. e Sapozhenko, A. A., *Selected Problems in Discrete Mathematics*, Mir Publishers Moscow, 1989.

[15] Gersting, J. L., *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, LTC, 2001.

[16] Grattan-Guinness, I., *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Volume 1, Routledge, 1994.

[17] Hein, J. L., *Discrete Structures, Logic, and Computability*, Jones and Barlett Publishers International, 1995.

[18] Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach: Laços Eternos*, Gradiva, 2000.

[19] Katz, V. J., *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley, 1998.

[20] Kneale, W., e Kneale, M., *O Desenvolvimento da Lógica*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

[21] Kolmogorov, A. N., e Yushkevich, A. P., *Mathematics of the 19th Century: Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Birkhäuser, 1992.

[22] Kubrusly, R. S., *Uma Viagem Informal ao Teorema de Gödel*, Departamento de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, URL: http://www.im.ufrj.br/projeto/diversos/godel.html.

[23] Moreira, N., *Lógica Proposicional, Álgebra de Boole e Circuitos Lógicos*, URL: http://www.ncc.up.pt/ nam/aulas/0001/ic/boole/.

[24] Muñoz, G. D., *Zubiri, Lakatos y la crisis gödeliana del fundamento matemático*, Centro de Enseñanzas Integradas Zaragoza, España, URL: http://www.zubiri.org/general/xzreview/1999/guillerma1999.htm.

[25] Oliveira, Augusto F., *Lógica e Aritmética*, Gradiva, 1996.

[26] Papadimitriou, C. H., *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1994.

[27] Papadimitriou, C. H., e Lewis, H., *Elementos da Teoria da Computação*, E. Bookman, 2000.

[28] Pier, J., *Development of Mathematics 1900-1950*, Birkhäuser, 1994.

[29] Rezende, P. A., *A crise nos fundamentos da Matemática e a teoria da Computação*, Departamento da Ciência da Computação, Universidade de Brasília, URL: www.cic.unb.br/docente/pedro/trabs/acrise.htm.

[30] Rosen, K., *Discrete Mathematics and its applications*, McGrawhill, 1995.

[31] Silva, J. M., *Introdução aos Problemas NP-completos*, Departamento De Engenharia Informática, IST, URL: http://sat.inesc.pt/asa/lect-notes/lect-npc.pdf, 2001.

[32] Thiry, P., *Noções de Lógica*, Edições 70, 1998.