Sónia Noverça Lages

A resolução de equações algébricas

- uma perspectiva histórica

Universidade Portucalense

Porto, 2007

Trabalho realizado por

Sónia Noverça Lages

A resolução de equações algébricas

- uma perspectiva histórica

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Matemática/Educação sob a orientação do professor Doutor António Carlos Sepúlveda Machado e Moura

Universidade Portucalense

Porto, 2007

Agradecimentos

Terminado este trabalho estou claramente agradecida ao meu orientador, professor Doutor António Machado e Moura, pelas suas sugestões, indicações marcadas pela sua experiência e claro, pela sua paciência.

Agradeço também em geral aos professores que me acompanharam durante a fase curricular e à Universidade Portucalense a oportunidade de efectuar este trabalho.

À minha família e aos meus amigos agradeço também o apoio em alturas de muito trabalho. Aos meus irmãos Rui e Jorge agradeço o apoio e incentivo sempre demonstrado. Não posso esquecer o Segal, o meu husky siberiano, que fielmente me acompanhou nas longas noites em que me dediquei à escrita da tese.

Resumo

Historicamente, resolver uma equação, sempre foi um problema com importância para os matemáticos e, essas equações, apareciam quase sempre como consequência da procura de resolução de problemas, normalmente, de áreas fora da Matemática.

Neste trabalho pretende-se historiar a evolução dos métodos de resolução de um tipo de equações, que actualmente designamos por equações polinomiais ou equações algébricas.

O trabalho desenvolve-se em três capítulos, os quais pretendem apresentar uma panorâmica da evolução dos referidos métodos de resolução.

No primeiro capitulo historiamos o período da civilização do antigo Egipto e Mesopotâmia, da civilização Grega e Hindu até inícios da Idade Média, onde quase todos os raciocínios estão de algum modo relacionados com conceitos geométricos, e que designaremos por "Era da Geometria".

No segundo capitulo entramos no estudo histórico dos matemáticos europeus onde o conceito de variável já desempenha um papel importante, e por isso é designado por "Era das variáveis".

No terceiro capitulo estudamos a Álgebra Abstracta da actualidade com especial realce para Galois e Abel, no que designamos por "Era do Abstracto".

O trabalho encerra com as conclusões e referências bibliográficas.

Índice

Introdução

Historicamente, resolver uma equação, sempre foi um problema com importância para os matemáticos e, essas equações, apareciam quase sempre como consequência da procura de resolução de problemas, normalmente, de áreas fora da Matemática.

Neste trabalho pretende-se historiar a evolução de um tipo de equações, que actualmente designamos por equações polinomiais.

A motivação para este tema surgiu, sem dúvida, na frequência de Álgebra na licenciatura mas, principalmente, na frequência da disciplina da fase curricular do mestrado onde estudámos aspectos históricos relacionados com o tema. A importância, apesar das limitações conhecidas, de resolver equações polinomiais nas mais variadas áreas incute-nos um interesse especial para pesquisa histórica e a nossa percepção dos problemas aqui envolvidos sofre um grande evolução depois desse estudo histórico. Além disso, ao longo do século XX, não só em Portugal mas também no resto do mundo, tem-se discutido acerca do que os alunos devem saber ou não sobre Álgebra. Consequência das novas abordagens, nos fins do século XIX e primeira metade do século XX, por parte de vários Matemáticos onde a Lógica passou a desempenhar um papel fundamental na Matemática («ocupando» o lugar que era da Física desde os séculos XV, XVI), a Matemática tornou-se mais abstracta, ou seja, nasceu a Matemática Pura. Claro que não é por causa da Matemática Pura que, nas escolas, se ensina Matemática a todos os alunos desde cedo. Se não houvesse uma grande aplicação da Matemática na resolução de problemas de outras áreas rapidamente a sociedade retirava a Matemática dos currículos escolares. No entanto, a nova abordagem abstracta da Matemática chegou às escolas na segunda metade do século XX e surgiu uma reforma educativa conhecida por «Matemática Moderna».

Durante vários anos tentou-se reflectir essa nova abordagem nos currículos de Matemática e ao longo de vários anos os resultados não foram muito animadores. Essa situação não é exclusiva do nosso país e, em todo o mundo, gerou-se controvérsia sobre as vantagens da Matemática Moderna no ensino. A Álgebra é a área da matemática onde essa nova abordagem mais se questiona pois a Álgebra antes do trabalho de Galois e a Álgebra depois de Galois tem diferenças consideráveis, e a necessidade de inclusão da alguma Álgebra nos currículos é inquestionável, pelo menos no que diz respeito à resolução de equações.

Mas o insucesso generalizado provocou o abandono das principais ideias da Matemática Moderna, mais nuns países que noutros. Como indica sabiamente na sua tese de doutoramento, a Doutora Maria Augusta Neves[1], «O que se passou em Portugal não foi exactamente o que se verificou noutros países, nomeadamente nos EUA. No nosso país, a Matemática Moderna foi personalizada pelo Professor Sebastião e Silva, que produziu textos para professores e alunos e toda a reforma foi conduzida de uma forma apoiada e gradual.», e ainda, «...se privilegia a compreensão, a importância da aquisição de conceitos, as metodologias activas, a aprendizagem por descoberta e desvaloriza-se a "Matemática das receitas". Sem dúvida que o caminho seguido no nosso país ao longo dos últimos vinte anos foi de desvalorizar a mecanização na resolução dos exercícios e, de algum modo, procurou-se contrariar os problemas causados pela abstracção, pois torna-se mais fácil privilegiar a compreensão quando estamos perante problemas com aplicação prática. Assim, nos últimos anos diminui-se claramente a importância do cálculo nos currículos de Matemática, Matemática essa que é apresentada aos alunos principalmente como Matemática Aplicada.

Esta tendência, referida no parágrafo anterior, é notória por exemplos nas dificuldades que a maior parte dos alunos têm nos exames de 12º ano, na interpretação dos problemas com aplicação prática à realidade física. No entanto, essa tendência não significa um abandono total da abstracção, que seria impossível e impróprio, apenas minimizando-a procurando aproveitar os seus aspectos benéficos. A utilização de letras no lugar de números é o primeiro contacto com a abstracção e esse contacto começa no 2º ciclo. A resolução de equações, procurando descobrir quantidades desconhecidas, é a principal noção de abstracção que os alunos têm ao completar o ensino secundário. A abstracção em Álgebra é muito mais. O trabalho desenvolvido no século XX foi no sentido de utilizar o conceito de isomorfismo para a resolução de problemas o mais gerais possíveis. A abstracção a este nível é sem dúvida a principal causadora das grandes dificuldades nos alunos. Trabalhar com letras que representam números pode ser um choque inicialmente mas qualquer aluno do 2º ciclo com um estudo médio se adapta ao problema. No entanto introduzir conceitos de operações algébricas satisfazendo determinadas propriedades cujos operandos podem ser números ou quaisquer outros seres, isso sim já é uma tarefa que se pode tornar bem complicada.

[1] Obra constante da bibliografia, [013]

Não resistimos aqui a incluir uma linhas escritas na Revista Millennium do Instituto Superior Politécnico de Viseu[2]:

«As primeiras noções do que é uma equação surgem nos primeiros anos, onde se estudam as equações algébricas dos primeiro e segundo graus. Para lá do carácter formativo de tais conceitos, a verdade é que a grande maioria dos alunos que prosseguem estudos superiores onde a Matemática continua a ser estudada, não mais voltam a abordar o aperfeiçoamento do que vem já de trás, muito em especial as equações do tipo algébrico, completas e de grau superior ao segundo.»

«É certo que, mesmo ao nível do ensino secundário, são ainda estudados alguns tipos simples de equações trigonométricas, embora os últimos anos venham mostrando uma lamentável tendência para uma redução perigosa da extensão do estudo da Trigonometria.»

«Ora, de um modo extremamente geral, quando se prosseguem estudos superiores, se se exceptuar o caso do Curso de Licenciatura em matemática, jamais se volta a tocar nesta problemática, mau grado chegarem mesmo a tratar-se outros tipos de equações, como são os casos das equações diferenciais, das equações integrais, ou das equações às diferenças, mas sem que se consiga deixar no aluno uma visão geral e abrangente da noção de equação.»

«Em certos casos, infelizmente também hoje em vias de grande minimização, nem mesmo se vêm a frequentar disciplinas de Métodos Numéricos, onde era tradicional abordar o problema da resolução de uma equação algébrica de grau inteiro e positivo qualquer. E a consequência desta situação é a criação de um lastro de desconhecimento e de ignorância e, concomitantemente, uma insensibilidade profunda e perigosa perante a compreensão do comportamento fenomenológico e, logo, da capacidade para modelar e parametrizar fenómenos correntes.»

«A presença, no mercado e na vida profissional, de instrumentos de trabalho com elevada capacidade para a resolução veloz e com um grau de exactidão extremamente elevado deste tipo de equações, faz com que a tendência que se refere acima se acentue, deixando um espólio, contudo, uma ignorância grande e uma insensibilidade profunda dos profissionais desses instrumentos perante o que estão a tratar e, muitas vezes, perante os próprios resultados que esses meios potentes vão fornecendo.»

Sem procurar aqui opiniões muito conclusivas, pois um estudo deste tipo não o permite, penso que posso, com este trabalho, ganhar sensibilidade para este problema

---

[2] Obra constante da bibliografia, [012]

e de modo mais sustentado enfrentar as dificuldades, referidas no parágrafo anterior, ao tentar ensinar Álgebra ou outro tema mais abstracto.

Como professora, procuro adquirir, e principalmente fortalecer, conhecimentos importantes e outra visão que me permita ensinar este tema, e também a Matemática em geral, de outro modo com uma perspectiva diferente, alicerçada no estudo histórico desenvolvido. No entanto, sendo este tema de grande importância mesmo em áreas fora da Matemática posso estar a dar início a um caminho atraente de desenvolvimento posterior deste tema.

Capítulo 1: A Era da Geometria

O conceito de número esteve sempre associado à Matemática e pode-se considerar que a Matemática nasceu com a criação dos primeiros símbolos para representar números mas, a resolução de equações ocupou os matemáticos de todas as épocas desde que há registos históricos. A região da Mesopotâmia corresponde em grande parte ao actual Iraque e os povos mais importantes da Mesopotâmia foram os Sumérios e os Babilónios, tendo o Império Babilónico sido fundado por volta de 1700 a.C. A civilização Egípcia começou cerca de 3200 a.C. e o seu declínio é por volta de 1085 a.C. A nossa retrospectiva histórica das equações começa nas civilizações Babilónica e Egípcia.

No entanto, nesses tempos, o trabalho feito para resolver as equações e principalmente o aspecto das mesmas, era muito diferente do actual. Posteriormente, com o desenvolvimento da civilização Grega, que começou cerca de 900 a.C., e com o desenvolvimento dos seus trabalhos em Geometria, as equações tinham uma interpretação geométrica e até mesmo uma resolução geométrica.

A partir de 300 d.C. o Império Grego entra em declínio e surgem no Oriente novos desenvolvimentos matemáticos, nomeadamente na resolução de equações.

1.1. Antes dos gregos[3]

As mais antigas descobertas matemáticas conhecidas são do Oriente. Os Mesopotâmios registavam-nas em placas de barro que coziam, obtendo dessa forma uma conservação excelente. Já os Egípcios usavam papiro para efectuar os seus

[3] Nesta secção foram preferencialmente usadas as obra constante da bibliografia, [002], [015] e [017].

registos e, apesar de não conseguirem tão boa conservação, atingiam uma razoável conservação em climas secos.

A maior parte do conhecimento que se possui actualmente sobre a matemática do Egipto, antes da civilização Grega, está em dois papiros: o Papiro de Ahmose, que contém 85 problemas, e o Papiro de Moscovo, que contém 25 problemas. Ahmose é o nome do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. Este papiro foi descoberto em 1858 no Templo mortuário de Ramesses II em Tebas, mas devido a este papiro ter sido comprado por Henry Rhind, que o levou para Inglaterra, actualmente é mais conhecido por Papiro de Rhind. Rhind morreu em 1863 e o papiro juntamente com outras peças da sua colecção foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Alguns fragmentos deste papiro foram identificados na colecção Egípcia da Sociedade Histórica de New York pelo Britânico Percy Edward Newberry, um Egipciologista, em 1922. Estes fragmentos foram adquiridos em Luxor pelo americano Edwin Smith em 1862/63, e foram oferecidos à Sociedade Histórica de New York pela sua filha pela ocasião da sua morte. Encontram-se agora no Museu de Brooklin. Supõe-se que o Papiro de Moscovo seja cerca de dois séculos mais antigo que o Papiro de Rhind, de 1890 a.C. Quanto ao conhecimento da matemática da Babilónia ele aumentou bastante no fim do século XX por terem sido decifradas várias placas de argila.

Os papiros do Egipto dão-nos informação sobre o tipo de numeração utilizada, o carácter essencialmente aditivo do cálculo e também que já utilizavam fracções. Os egípcios usavam uma notação decimal. A escrita hieroglífica tinha símbolos distintos para as unidades, dezenas, centenas, etc. Os números eram escritos por repetição de símbolos e não tinham um símbolo para o zero nem notação posicional. As fracções unitárias eram, em geral, indicadas pela colocação junto do número do símbolo , que representava uma boca, mas havia um símbolo especial para o $\frac{1}{2}$, .

A maior parte dos problemas tinham motivação prática e estavam relacionados com o que era o seu dia a dia, isto é, com a sua alimentação e a dos seus animais, com a fabricação e o armazenamento da mesma. Vários problemas utilizavam unidades de medida similares às categorias de comprimento, área e volume. Muitos estavam relacionados com a medições de terras e medições em arquitectura.

Alguns dos problemas colocados mostram-nos que nesse tempo já se dedicavam à resolução de equações lineares com uma incógnita. Esses problemas consistiam em exercícios numéricos envolvendo uma quantidade desconhecida, e por isso representam uma aproximação à álgebra mais recente. Os símbolos algébricos não eram usados e a quantidade desconhecida era designada verbalmente.

No Papiro de Rhind, nos problemas numerados por 24, 25, 26 e 27 estavam as equações mais simples. Em todos eles impunha-se que se somasse à incógnita uma fracção dela mesma e que desse um determinado número. De seguida apresentamos, em notação actual, as equações correspondentes a estes problemas:

Nº 24: $x+\frac{1}{7}x=19$

Nº 25: $x+\frac{1}{2}x=16$

Nº 26: $x+\frac{1}{4}x=15$

Nº 27: $x+\frac{1}{5}x=21$

Usando o método actual para resolver o problema Nº 27 chegamos à solução $x+\frac{1}{5}x=21 \Leftrightarrow x=\dfrac{35}{2}$. Naquele tempo, e durante muito mais tempo até que fossem usadas letras para representar os coeficientes, eram indicados os procedimentos para resolver cada equação em particular, embora fosse perceptível com maior ou menor dificuldade as suas generalizações. Vamos aqui indicar, usando a notação actual, como procediam para resolver o problema 27, mas o método serve para os outros três problemas.

Começa-se por substituir, no primeiro membro, a incógnita por 5, devido ao facto de termos a quinta parte da incógnita na equação. Vem então $5+\dfrac{1}{5}\times 5$, obtemos 6 e isto corresponde à eliminação de denominadores actual. Posteriormente procuramos como obter 21, o segundo membro da equação, como múltiplo não inteiro de 6. Ora, $6\times\left(3+\dfrac{1}{2}\right)=21$. Resta-nos multiplicar novamente 5 por esse valor encontrado, $5\times\left(3+\dfrac{1}{2}\right)=15+\dfrac{5}{2}=17+\dfrac{1}{2}$, portanto o nosso $\dfrac{35}{2}$. A solução era apresentada pela soma de um inteiro por uma fracção da unidade, isto é, $17+\dfrac{1}{2}$. As equações mais difíceis estavam nos problemas numerados por 31, 32, 33 e 34. Por exemplo, «A soma de $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{7}$ de uma quantidade, com ela própria dá 33. Qual é a quantidade?».

Na nossa notação teríamos:

Nº 31: $x+\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\right)x=33$

Nº 32: $x+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)=2$

Nº 33: $x+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)x=37$

Nº 34: $x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x=10$

A nossa fonte sobre o Papiro de Rhind usa, por exemplo, $\bar{\bar{3}}$ para representar $\frac{2}{3}$ onde o número 3 representa o denominador e o número de traços representa o numerador. Assim a equação do problema Nº 31 toma o aspecto $x+\left(\bar{\bar{3}}+\bar{2}+\bar{7}\right)x=33$.

Aceita-se que a matemática na Mesopotâmia tenha sido mais evoluída que a do Egipto. A existência de um sistema de numeração posicional, de base sexagesimal, no período dos Sumérios, permitia-lhes efectuar mais facilmente multiplicações e dava-lhes mais habilidade para calcular. Alguns problemas conhecidos dessa época mostram que resolviam, não só as equações lineares, mas também equações quadráticas. Por exemplo, um problema desse tempo pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30 (em notação sexagesimal). Este problema é equivalente a resolver a equação $x^2-x=870$, pois $14\times 60^1+30\times 60^0=870$. A solução apresentada pelos babilónios é expressa assim: tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique por 0,30 o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15 e que é o quadrado de 29;30, por fim some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30 que é o lado do quadrado.

Já no tempo dos Babilónios as equações quadráticas foram divididas em três tipos: $x^2+px=q$, $x^2=px+q$ e $x^2+q=px$ havendo exemplos de problemas de qualquer um dos tipos.

Podemos classificar de surpreendente o modo proposto pelos Babilónios para resolver equações do tipo $x^2+q=px$. Vamos aqui apresentar o método para um caso geral, portanto sem particularizar os parâmetros q e p mas, claro, que nessa época isso não se fazia ainda. Eles transformavam a equação quadrática num sistema de equações: $\begin{cases} x+y=p \\ xy=q \end{cases}$ e a orientação dada para resolver este sistema tinha os seguintes passos:

1º) tomar metade de p: $\frac{p}{2}=\frac{x+y}{2}$

2º) quadrar o resultado: $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

3º) subtrair q ao resultado obtido: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4} =$
$= \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

4º) tomar a raiz quadrada do resultado obtido: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x-y}{2}$

5º) somar o resultado obtido a metade de p: $\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x$

6º) o outro número procurado é a diferença deste para p: $p - x = (x+y) - x = y$.

Este método merece ainda um outro comentário à luz dos conhecimentos actuais. Estamos habituados a resolver a equação $ax^2+bx+c=0$ usando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e, se existirem duas soluções reais, temos $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Determinando a soma destas duas raízes temos $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$, e determinando o produto temos $x_1 \times x_2 = \frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a\times 2a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. Assim, para $a=1$, para resolver a equação pode bastar determinar dois números cuja soma seja o simétrico do coeficiente de x e o produto seja o termo independente. Quantas vezes já procurámos que os nossos alunos no ensino secundário resolvam, por exemplo, a equação $x^2-5x+6=0$ procurando dois números cuja soma seja 5 e o produto seja 6. De facto, esta equação é do tipo $x^2+q=px$ e a transformação num sistema de equações feita pelos babilónios corresponde a resolvê-la deste modo.

1.2. *Império Grego*[4]

Geralmente aceita-se que a matemática grega começou o seu desenvolvimento com Tales de Mileto (640-546 a.C.). A evolução da matemática grega, e da cultura

---

[4] Nesta secção foram preferencialmente usadas as obra constante da bibliografia, [002], [017], [URL5] e [URL6].

grega em geral, toma caminhos bem distintos de civilizações anteriores, principalmente por haver uma despreocupação com questões bélicas numa parte da sua sociedade. Isto possibilita uma abordagem diferente e, em particular na matemática, começou a haver a preocupação em saber o porquê, nascendo assim a demonstração. No entanto, ainda muito longe de se poder falar numa Matemática Pura, foi natural que houvesse um desenvolvimento da matemática através de questões geométricas devido à grande aplicação prática. Assim durante muitos séculos mesmo questões aritméticas tinham abordagens geométricas.

Durante o século VI a.C. além de Tales outro nome sobressai na matemática grega, Pitágoras de Samos (569-500 a.C.). Embora se aceite Tales como o "pai" da matemática grega, a literatura é normalmente cuidadosa e evita apresentar grandes certezas relativamente ao início da civilização grega. Assim, dos famosos Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras conhecemos pouco mais do que lendas e supõem-se mesmo que o resultado enunciado no Teorema de Pitágoras já era conhecido do povo babilónico e a Tales é atribuída a demonstração do teorema conhecido com o seu nome embora não haja grande certeza disso. A referência mais antiga sobre o facto de Tales efectuar demonstrações é do século III, portanto cerca de 1000 anos depois de Tales, embora se baseiem em escritos do século III a.C. Supõe-se também que Pitágoras estudou equações quadráticas e que sabia resolver algumas equações deste tipo baseados em métodos geométricos.

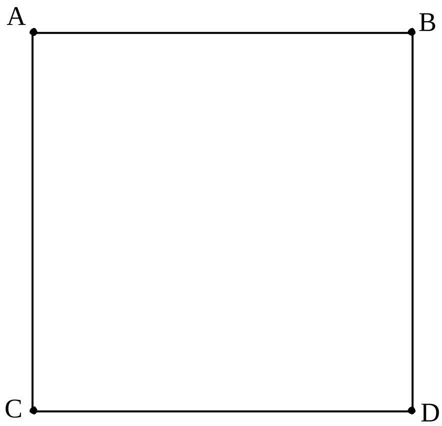
Talvez o maior nome da matemática na civilização grega seja Euclides. Euclides, nos seus Elementos, apresenta uma resolução geométrica para dividir um segmento de recta em média e extrema razão. O raciocínio algébrico em Euclides é expresso totalmente numa forma algébrica. Por exemplo, a expressão hoje representada por $\sqrt{x}$ é usada como sendo o lado do quadrado de área x. Euclides não faz raciocínio algébrico nem numérico. Mesmo para enunciar, por exemplo, que a área de um triângulo é igual a metade da base vezes a altura tinha de dizer que é metade da área de um paralelogramo com a mesma base e situado entre as mesmas paralelas. Também o teorema de Pitágoras era uma relação entre as áreas de três quadrados e não entre os comprimentos dos três lados de um triângulo.

Nos Elementos, Euclides, tem uma teoria de equações quadráticas mas toda ela expressa no que se costuma designar actualmente por aplicações das áreas. A proposição XI, do livro II, tem aproximadamente este enunciado: «dividir uma linha recta de sorte que o rectângulo de toda e de uma parte seja igual ao quadrado da outra parte», isto é, dado um segmento de recta $[AB]$ determinar um ponto X nesse segmento de modo que $\overline{AB} \times \overline{AX} = \overline{XB}^2$. Note-se que a determinação deste ponto corresponde a resolver uma equação quadrática. De facto, fazendo $a = \overline{AB}$ e sendo x uma das partes, por exemplo $x = \overline{XB}$, resulta $\overline{AB} \times \overline{AX} = \overline{XB}^2 \Leftrightarrow a(a - x) = x^2 \Leftrightarrow x^2 + ax = a^2$ embora, na época, não se trabalhasse com números negativos e são eram consideradas essas mesmas soluções.

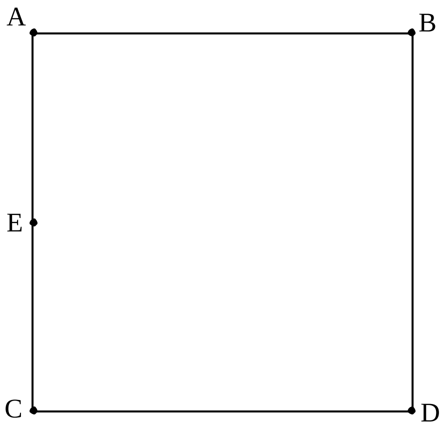
Apresentemos o método de Euclides. Seja $[AB]$ o segmento de recta dado: 

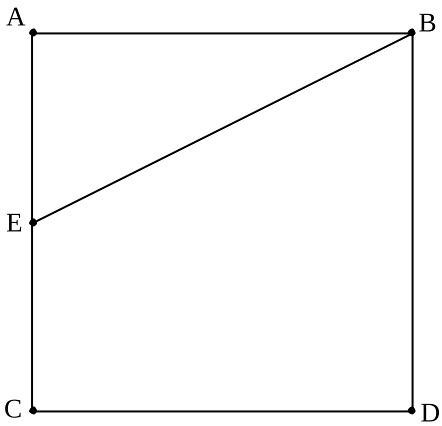
.

Começamos por desenhar o quadrado $[ABDC]$:

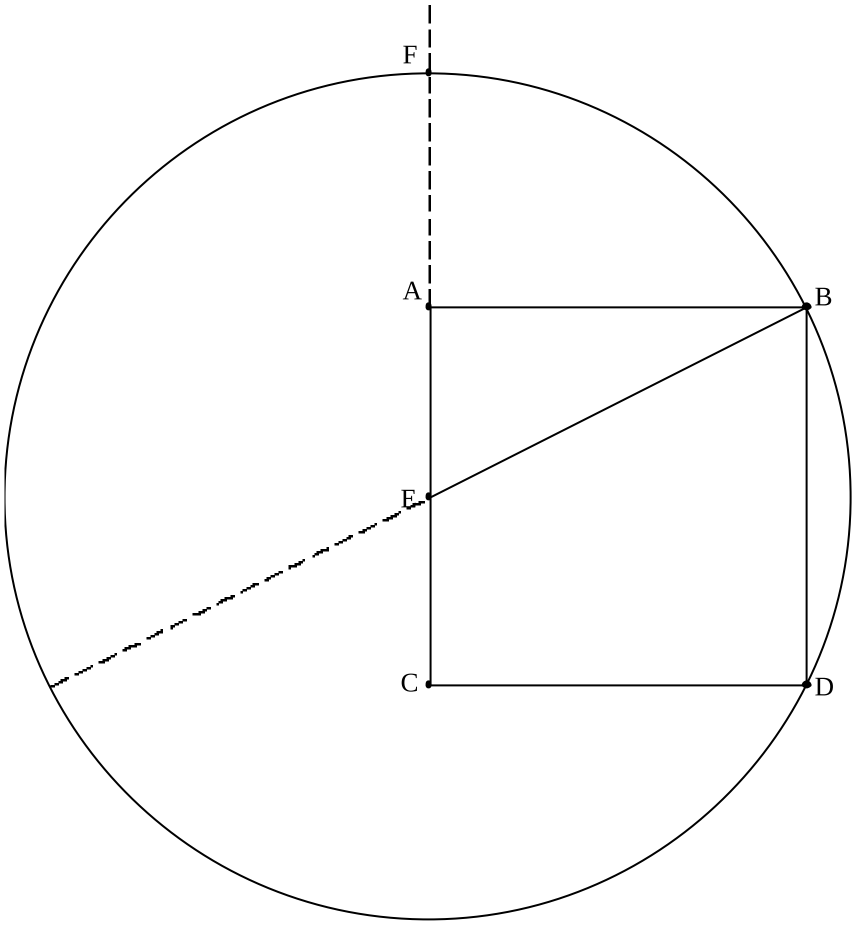


De seguida marcamos o ponto médio do segmento $[AC]$, E, que uniremos com B.

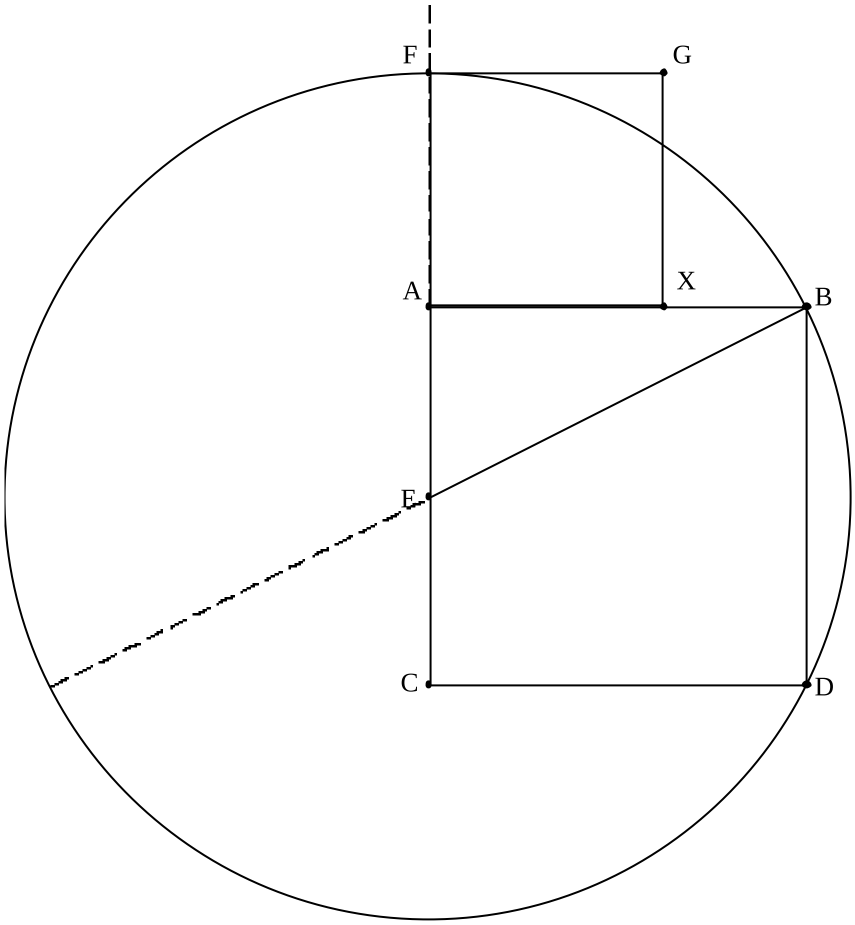




Seguidamente, marcamos o ponto F na recta AC de modo que $\overline{EF} = \overline{EB}$:



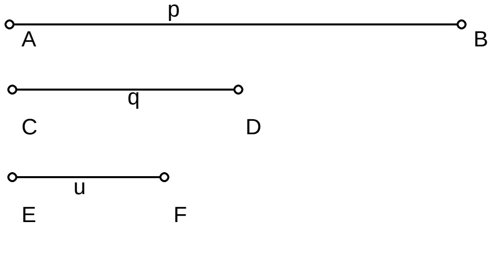
De seguida desenha-se o quadrado $[AFGX]$:



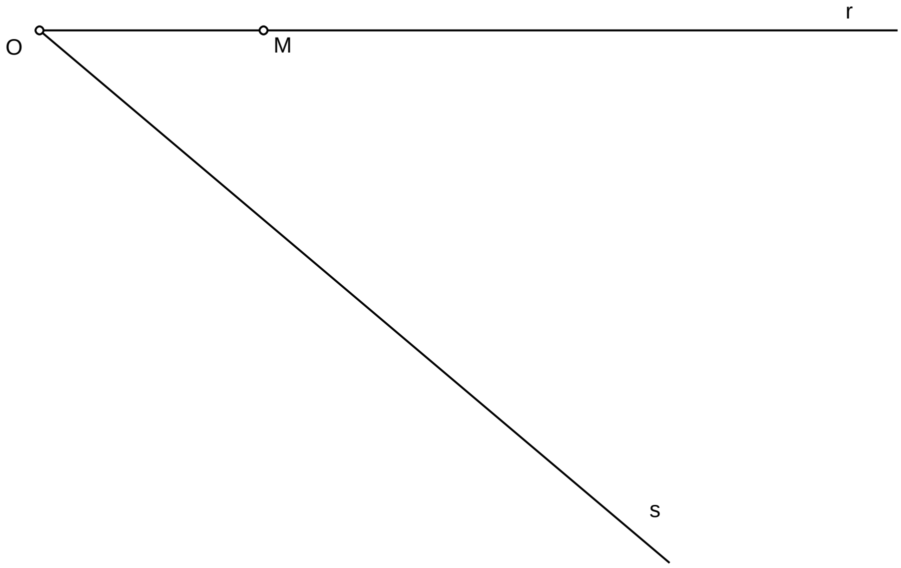
O ponto X divide o segmento $[AB]$ do modo pretendido, portanto, de modo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$.

Suponhamos agora que queríamos resolver a equação $x^2 + px = q$. Sabemos que isso equivale a resolver a equação $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q$, ou seja, $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, ou ainda, $x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}$. Vejamos então os passos geométricos para construir a solução.

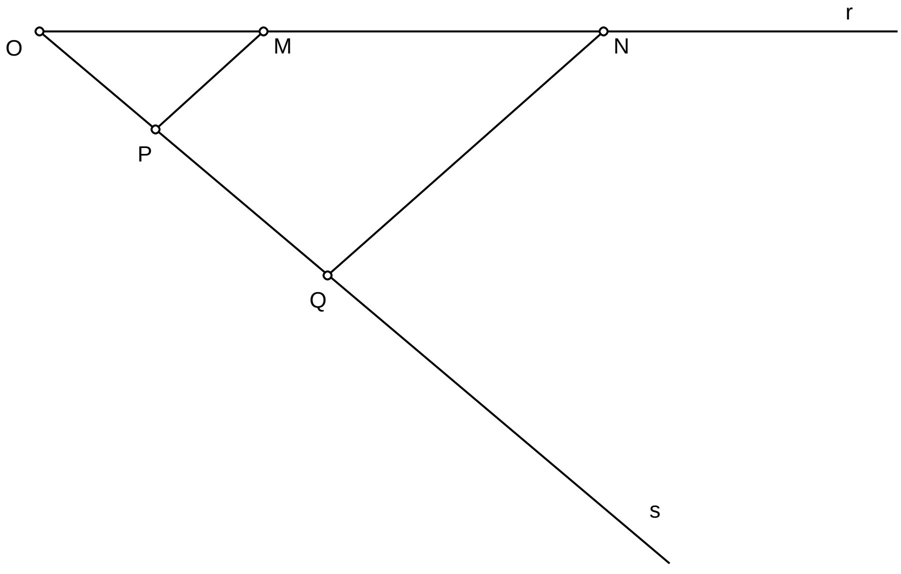
Consideremos que são dados os comprimentos p, q e a unidade u.



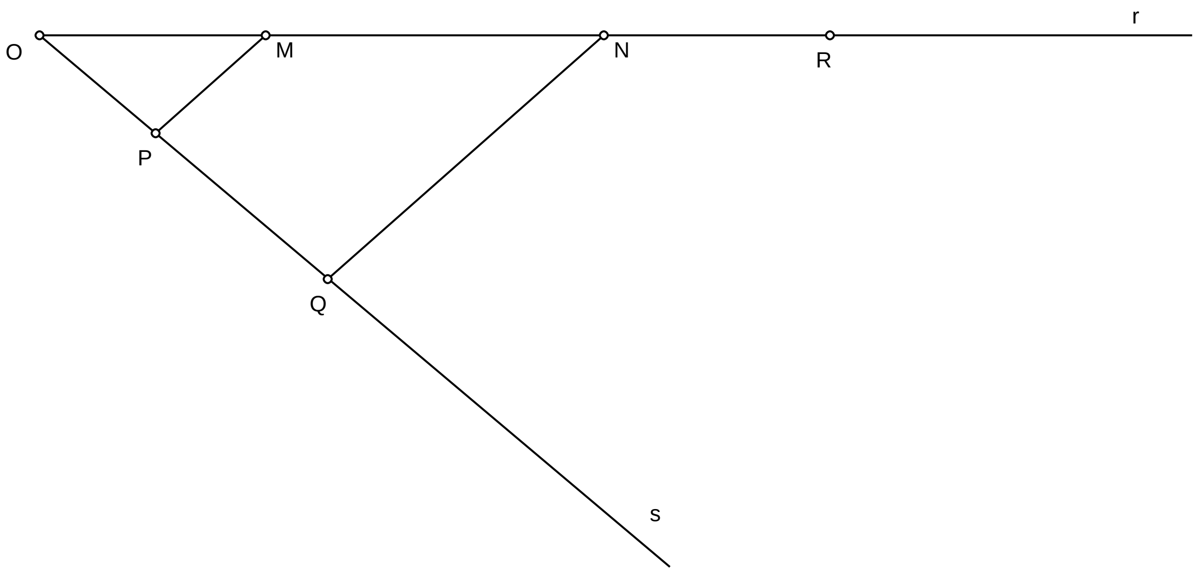
Comecemos por considerar duas rectas, r e s, com um ponto comum, O, e sobre r marcar um ponto M tal que $\overline{OM} = \frac{p}{2}$.



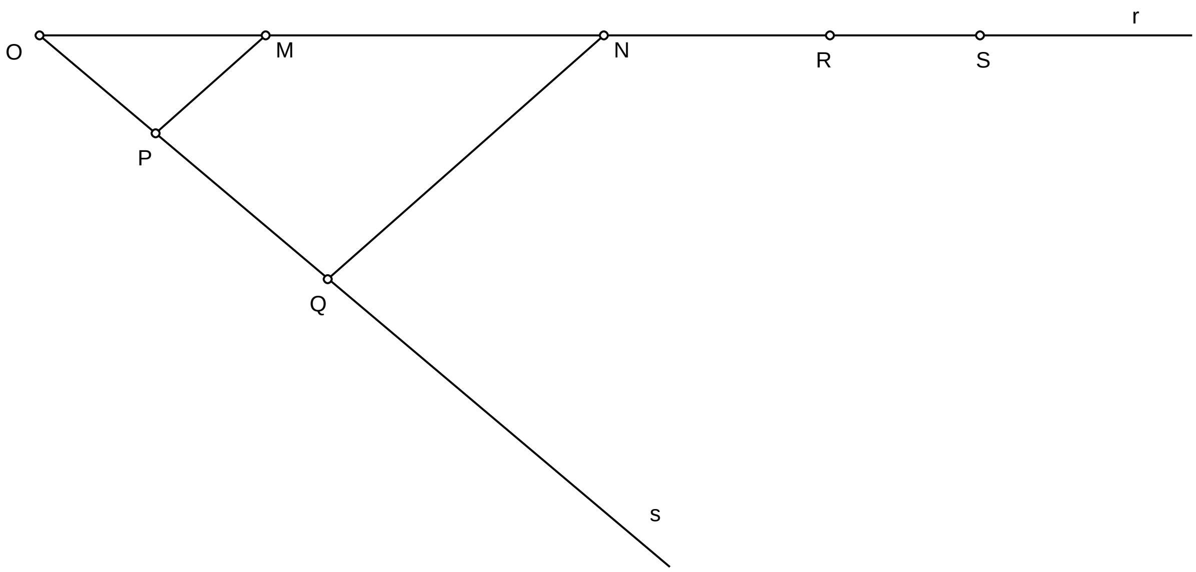
Consideremos agora dois pontos, P e Q, sobre s de modo que $\overline{OP} = u$ e $\overline{PQ} = \frac{p}{2}$. Unimos P com M e traça-se uma paralela a PM passando por Q, que define o ponto N na sua intersecção com a recta r.



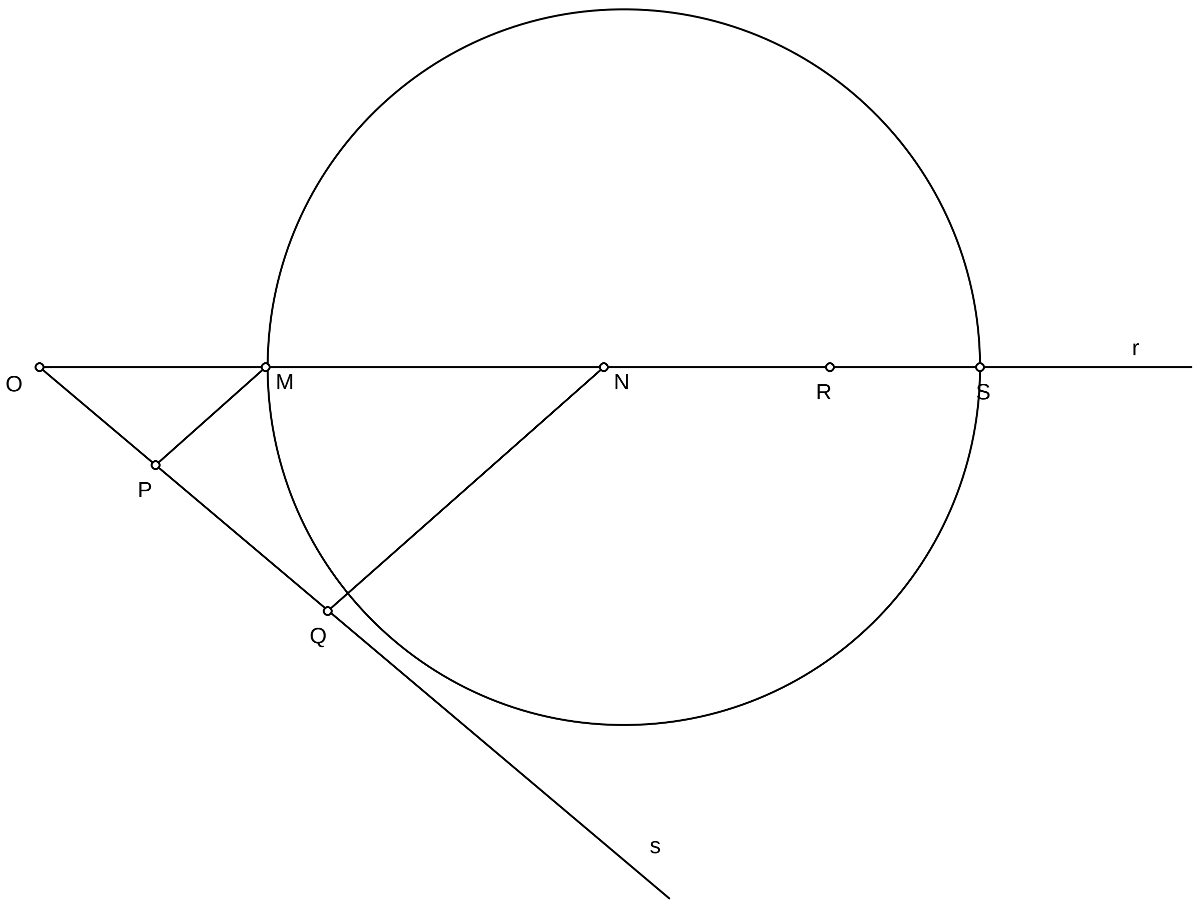
Sabemos que $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{MN}}$ logo $\overline{MN} = \dfrac{\overline{OM} \times \overline{PQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{\frac{p}{2} \times \frac{p}{2}}{u} = \dfrac{p^2}{4}$. Vamos marcar agora na recta r um ponto R tal que $\overline{MR} = \dfrac{p^2}{4} + q$, portanto de modo que $\overline{NR} = q$.



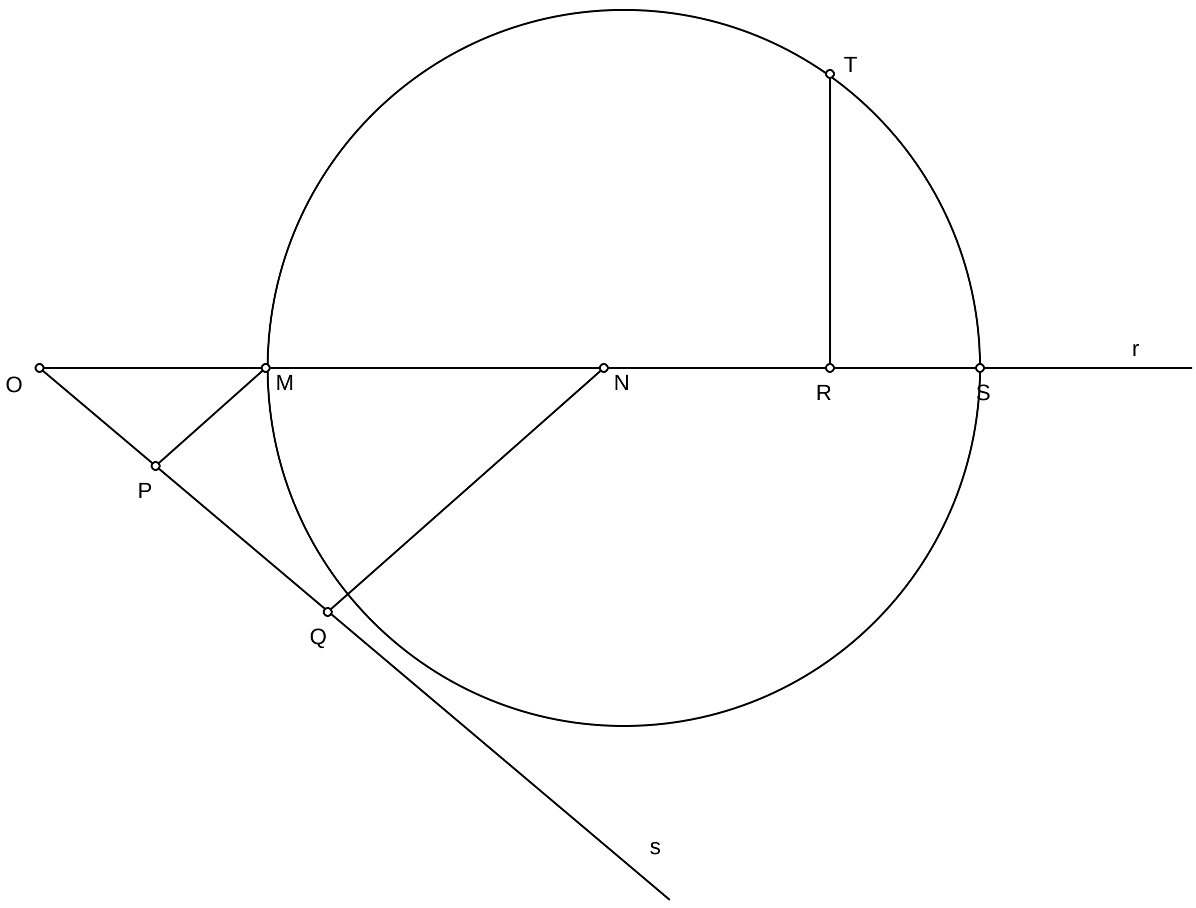
Temos agora de determinar a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4}+q$. Para isso marcamos um ponto S em r de modo que $\overline{RS}=u$.



De seguida desenhamos a circunferência de diâmetro $[MS]$.

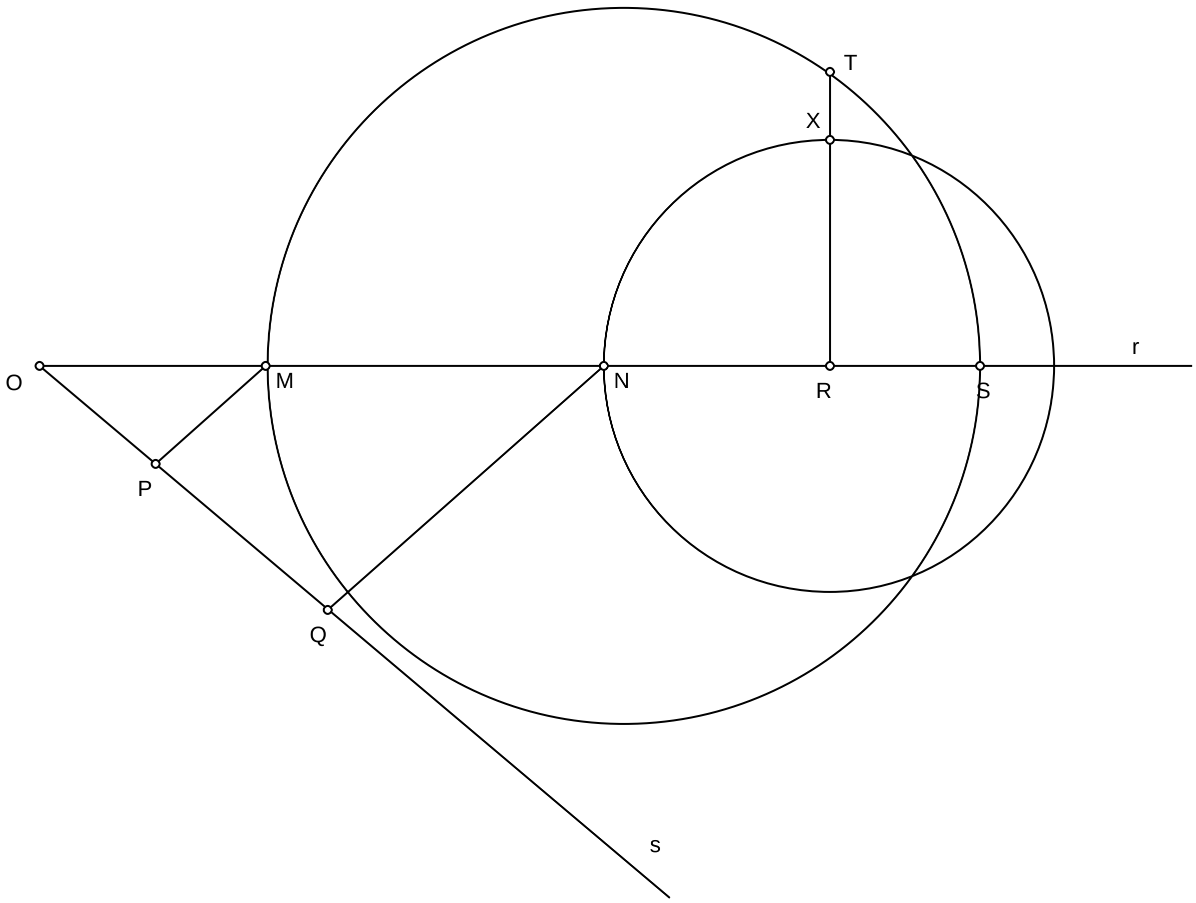


Pelo ponto R traçamos uma perpendicular a r, que intersecta a circunferência num ponto, que designaremos por T.



Como $\angle MTS$ é um ângulo inscrito numa semi-circunferência então $M\hat{T}S = 90º$ sendo $[MS]$ a hipotenusa do triângulo rectângulo $[MTS]$ logo, $\overline{MS}^2 = \overline{MT}^2 + \overline{TS}^2 \Leftrightarrow *$, como $[MT]$ é a hipotenusa do triângulo rectângulo $[MRT]$ e $[TS]$ é a hipotenusa do triângulo rectângulo $[SRT]$, $* \Leftrightarrow (\overline{MR} + \overline{RS})^2 = \overline{MR}^2 + \overline{RT}^2 + \overline{RT}^2 + \overline{RS}^2 \Leftrightarrow (\overline{MR}+1)^2 =$
$= \overline{MR}^2 + 2\overline{RT}^2 + 1 \Leftrightarrow \overline{MR}^2 + 2\overline{MR} + 1 = \overline{MR}^2 + 2\overline{RT}^2 + 1 \Leftrightarrow \overline{RT} = \sqrt{\overline{MR}} \Leftrightarrow \overline{RT} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Vamos agora traçar uma circunferência centrada no ponto R com raio igual ao segmento $[PQ]$, circunferência essa que intersecta RT no ponto X.



Relembrando que $\overline{PQ} = \frac{p}{2}$ e $\overline{RT} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ resulta $\overline{XT} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}$ e tomamos $x = \overline{XT}$.

1.3. Oriente[5]

Depois da época áurea do império grego vem a ocupação romana e a absorção da cultura grega. O Império Romano estava naturalmente dividido em duas partes, Ocidental e Oriental, usando-se na parte Ocidental muito trabalho feito por escravos. Aceita-se que este facto tenha influenciado o desenvolvimento cultural pois os donos dos escravos não se interessavam por grandes descobertas técnicas. Assim foi no Oriente que mais se desenvolveu a ciência em geral e também a matemática, em particular. Assim, a partir do século V e durante vários séculos, são árabes e hindus os principais matemáticos. Os mais conhecidos são Aryabhata e Brahmagupta na primeira metade da Idade Média. Aryabhata (476-?) foi um poeta, matemático e astrónomo hindu, autor da obra «Aryabhatiya» escrita em verso em 499. Por volta de 1150, Bhaskara retoma o trabalho de Brahmagupta na resolução de equações do primeiro grau e, nas equações do segundo grau alguma literatura indica que se começa a apresentar soluções negativas. Relativamente à equação $x^2 - 45x = 250$ apresenta as soluções $x = 50$ e $x = -5$ embora ainda tenha dúvidas quanto à validade da solução negativa. Na obra de Bhaskara (1150) enuncia-se uma regra hindu para a resolução de equações quadráticas, regra talvez enunciada em primeiro lugar por outro matemático hindu, Sridhara (1025). Dada a equação $ax^2 + bx = c$, multiplicando ambos os membros por $4a$ vem, $4a^2 + 4abx = 4ac$, depois somando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida vem, $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$, ou seja, $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$, extraindo a raiz quadrada vem, $2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$ e transformamos a equação quadrática numa equação do primeiro grau. Talvez seja esta regra que faz com que alguma literatura brasileira apresente a nossa fórmula actual para resolver equações do segundo grau como a fórmula de Bhaskara. Parece que isso não é hábito em mais lado nenhum e parece também desajustado fazê-lo. De facto, «regra» de Bhaskara não ficaria muito mal mas, «fórmula» de Bhaskara não é adequado pois nesse tempo só se usavam letras para representar as incógnitas, ainda não se usavam letras para representar os coeficientes para poder fazer uma abordagem geral ao ponto de procurar uma fórmula resolvente para equações quadráticas.

[5] Nesta secção foram preferencialmente usadas as obra constante da bibliografia, [002], [017], [URL1], [URL2] e [URL4].

No inicio do século 9, o Califa Al Mamum, recebeu através de um sonho, no qual teria sido visitado por Aristóteles, a instrução de fundar um centro de pesquisa e divulgação cientifica. Assim foi fundada a casa de Sabedoria, em Bagdad, hoje capital do Iraque, nas margens do rio Tigre. A convite do Califa, nela estabeleceu-se Al-Khwarizmi, juntamente com outros matemáticas do mundo árabe. Al-Khwarizmi escreveu um tratado popular sobre equações, chamado Hisabal-jabr wa'al muqabalah, ou seja, o livro da Restauração e Balanceamento. Al-Khwarismi introduziu conceitos que simplificaram a álgebra das equações do 2º grau. O seu método de resolução de equações do 2º grau é inspirado na interpretação de números como segmentos, introduzida por Euclides. Al-khwarismi também popularizou o sistema de representação decimal posicional dos números inteiros, criado pelos hindus, hoje de uso corrente. De Al-khwarismi derivam as palavras algarismo e algoritmo, ambas latinizações de Al-Khwarismi. Do termo al-jabr, que significa restauração, deriva-se a palavra álgebra! O tremo al-muqabalah, que significa oposição ou balanceamento, é o que hoje entendemos como cancelamento. Por exemplo, dada a equação $x^2+3x-2=3x+4$ a al-jabr dá-nos $x^2+3x=3x+4+2$ enquanto que a muqabalah cancela o termo $3x$, dando $x^2=6$.

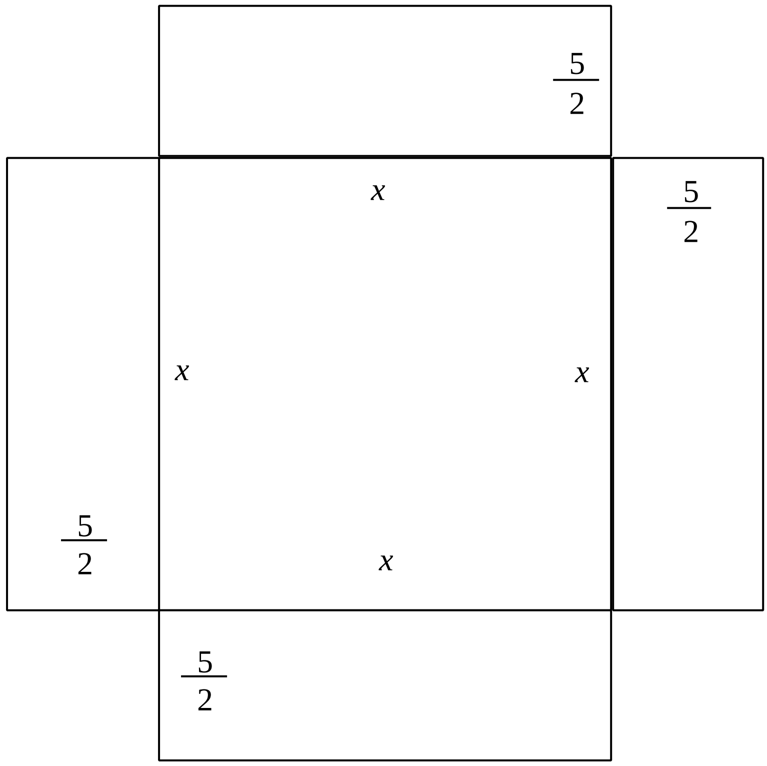
Al-khwarismi apresenta dois métodos geométricos de resolução de equações do 2º grau. No seu tratado, não faz uso de notações simbólicas e as suas equações são escritas no estilo retórico, isto é, sem o emprego de símbolos. Como exemplo de aplicação do 1º método de Al-khwarismi consideremos a equação:

$$x^2+10x=39$$

Primeiramente, a equação é escrita na forma

$$x^2+4\times\frac{5}{2}\times x=39$$

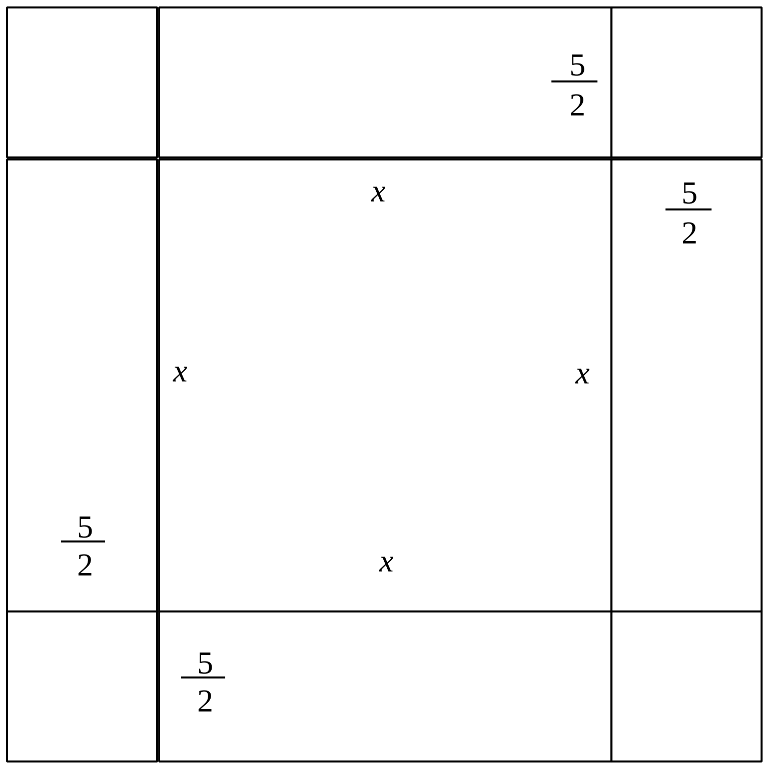
que geometricamente pode ser representada para figura abaixo.



$= 39$

O completamento do quadrado é realizado, resultando na equação equivalente

$$x^2 + 4\times\frac{5}{2}x + 4\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 4\times\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$



$= 39+25$

Algebricamente

$$x^2 + 4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)x + 4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 39 + 4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

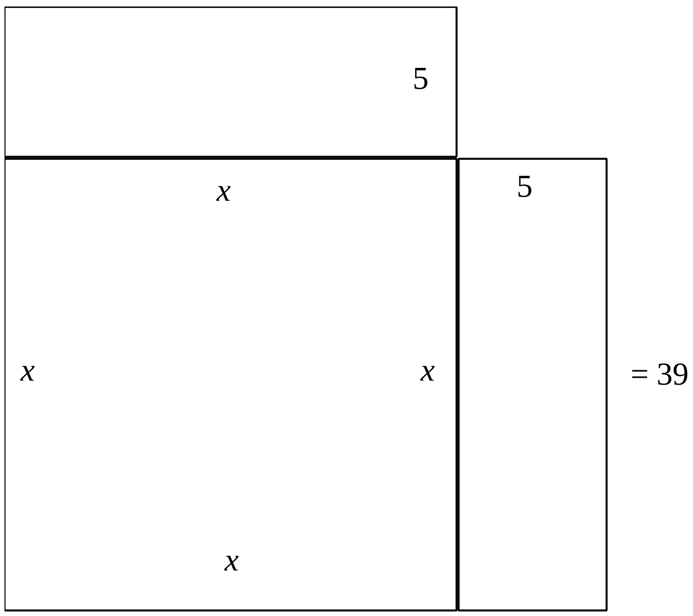
porém geometricamente,

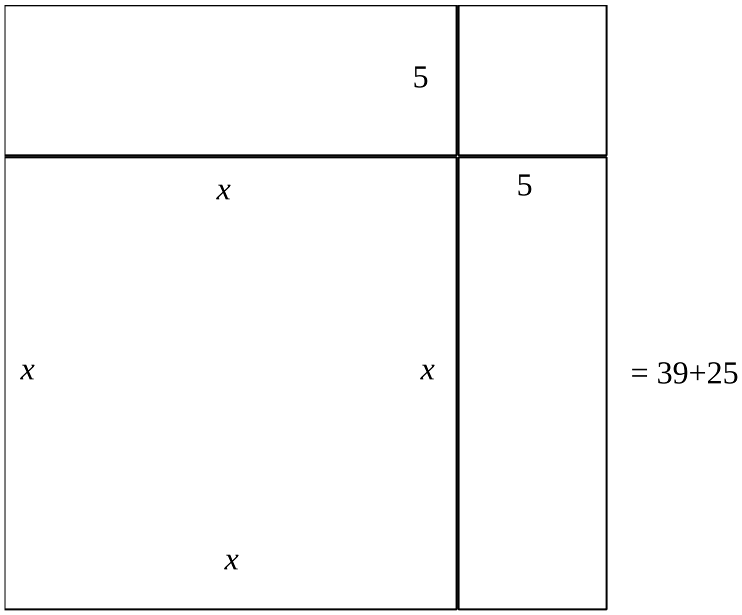
$$(x+5)^2 = 39 + 25 = 64$$

daí, Al-khwarismi deduz que $x+5=\sqrt{64}=8$. Chega-se então à solução $x=8-5=3$. Para Al-Khwarismi, quantidades negativas não tinham sentido. No seu método, a solução $x=-8-5=-13$ não aparece. Podemos no entanto, usar o método geométrico de Al-Khwarismi como um guia para completar quadrados e, no final, esquecê-lo, deduzindo também eventuais soluções negativas da equação.

No 2º método de Al-Khwarismi, mais simples, a equação é escrita na forma

$$x^2 + 5x + 5x = 39$$





Completando então essa soma de áreas com a área de um quadrado de lado 5, portanto de área 25, obtém-se $x^2 + 5x + 5x + 5^2 = 39 + 5^2$, logo $(x+5)^2 = 39 + 25 = 64$, então $x + 5 = 8$, ou seja $x = 3$.

1.4. A Europa no fim da Idade Média[6]

Durante a expansão e domínio do Império Romano na Europa o interesse pela Matemática foi muito reduzido e não existem grandes marcos históricos a registar nessa área. A partir do século XII com a expansão iniciada pelas civilizações cristãs aumentou o contacto com as culturas árabes e isso possibilitou a aquisição de conhecimentos matemáticos até aqui desconhecidos dos povos europeus. A tradução do livro, «Hisab al-jabr wal-mugabala», de al-Khowarazmi (780-850) do árabe para o latim pode ser tomada como o início da álgebra na Europa. As mais importantes cidades em termos de comércio com o oriente foram, naturalmente, o local onde surgiram os principais matemáticos e as principais descobertas da época. Génova, Pisa, Milão, Florença e Veneza foram, em Itália, os grandes centros comerciais e onde apareceram, em relativamente pouco tempo, muitos matemáticos a produzir trabalho importante no domínio da resolução de equações.

[6] Nesta secção foram preferencialmente usadas as obra constante da bibliografia, [002], [005], [007], [014] e [017].

Leonardo de Pisa (1170-1250) mais conhecido por Fibonacci viajou pelo Oriente na sua actividade como mercador e consequência dos conhecimentos adquiridos escreveu o seu livro mais famoso, «Liber Abaci» em 1202. A principal virtude deste livro é o seu contributo para a introdução do sistema de numeração árabe que acabaria por substituir o sistema de numeração romano. No entanto, foca também questões relacionadas com equações do 2º e 3º grau apresentando o que aprendeu com autores árabes mas em alguns casos também tecendo comentários originais. Por exemplo, Fibonacci estudou a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ e calculou uma aproximação da solução real embora não se saiba qual o método usado para a encontrar. Nessa aproximação calculou seis casas sexagesimais e exprimindo-a em fracção sexagesimal vem $1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}$.

1.4.1. A descoberta da solução de equações do 3º grau

A queda de Constantinopla, em 1453, terminou com o Império Bizantino e trouxe muitos sábios gregos às cidades ocidentais. Com eles criou-se um enorme interesse pela cultura grega e durante muitos anos os matemáticos ocidentais estudaram, embora sem a desenvolver, a matemática dos gregos, traduziram-se muitas obras e a invenção da imprensa por volta de 1450 teve também um papel estimulador pois facilitava a publicação dos trabalhos.

A grande novidade vem com a criação de uma teoria sobre a resolução de equações do terceiro grau, as equações cúbicas. Scipio del Ferro (1465-1526) não tinha por hábito deixar os seus trabalhos escritos e apenas comunicava as suas descobertas a um pequeno número de amigos e alunos. Possuía, no entanto, um pequeno livro de apontamentos que deixou ao seu filho quando morreu. (escrever aqui o que se supõe que del Ferro conseguiu resolver) Niccolo Fontana (1500-1557), conhecido por Tartaglia, aparentemente sem conhecer o método de del Ferro descobriu também como resolver as equações cúbicas e apenas tornou público quais as soluções e não o método que levava a essas soluções. Mas Tartaglia acabou por comunicar esse método a um seu amigo Gerolamo Cardano (1501-1576) pedindo-lhe que guardasse segredo. Cardano concordou mas ao tomar conhecimento do livro de apontamentos de del Ferro e descobrindo que Tartaglia não tinha sido o primeiro a descobrir como resolver equações cúbicas resolve tornar público o método. Sai então em 1545 o seu livro Ars Magna, um marco na história da matemática. Para os contemporâneos de Cardano este livro significava uma ruptura no campo da matemática, exibindo e publicitando pela primeira vez os princípios para a resolução das equações cúbicas e também as equações do 4º grau, as biquadráticas, dando as raízes como expressões formadas por radicais, de forma similar ao método que era usado, na altura, para as equações do segundo grau. Cardano não reivindica para si estas duas novidades e apresenta os nomes dos seus descobridores: Scipio del Ferro para as cúbicas e Ludovico Ferrari (1522-1565) para as biquadráticas. Estas descobertas possibilitaram-lhe criar uma teoria geral que engloba todos os casos, casos esses produzidos pela necessidade de separar os argumentos para números positivos e negativos e por não possuir uma adequada notação algébrica. Era costume trabalhar apenas algumas das soluções mas neste trabalho aparece ainda algo de novo: a clara aceitação da existência de soluções mais tarde chamadas imaginárias. Elas aparecem como consequência necessária das fórmulas e ele não as ignora, como era costume dos autores anteriores, pelo contrário constrói exemplos que mostram a necessidade de trabalhar com essas raízes imaginárias. Cardano complica as suas demonstrações por se basear em argumentos geométricos, utilizando o raciocínio de Euclides, o que actualmente não é necessário. No entanto, como dissemos, vivia-se uma época de veneração da matemática grega e dos Elementos de Euclides em particular. A solução geométrica das equações do 2º grau, segundo Euclides, baseava-se na construção de um quadrado e, a proposta de resolução de equações do 3º grau deveria ser baseada na construção de um cubo mas, para grau superior deixa de haver representação geométrica. É curioso notar que Cardano sentia que não havia ligação entre isso e o facto de o espaço ser a três dimensões.

1.4.2. O contributo português

Pedro Nunes (1502-1578) nasceu em Alcácer do Sal, ele próprio o declara na sua obra Opera quae complectuntur, quando afirma ”… anno Domini 1502 quo ego natus sum …” (Pedro Nunes citado por Fontoura da Costa, 1969) viveu em pleno apogeu dos Descobrimentos Portugueses e foi uma referência na Europa como matemático e homem de ciência. Na sua obra, reflexo da época histórica em que viveu, desenvolveu soluções para diversos problemas inerentes à Arte de Navegar, tendo dado um valioso contributo para a Náutica Astronómica, facto reconhecido mesmo pelos seus críticos.

Em 1522, estuda na Universidade de Salamanca, de onde sai licenciado em Artes. No ano seguinte (1523), casa com D. Guiomar Áreas, donde nasceram seis filhos: Apolónio, Briolanja, Francisca, Isabel, Guimoar e Pedro. Neste mesmo ano concluiu o grau de bacharel médico.

Em 1529 foi nomeado, por D. João III, cosmógrafo do reino e em 1547 cosmógrafo-mor do reino. De 1530 a 1533 ensinou, na Universidade de Lisboa, disciplinas como Filosofia, Lógica e Medicina, mas cedo abandonou estas disciplinas para se dedicar à Matemática, Física e Náutica. Foi nomeado professor de Matemática e Astronomia na Universidade de Coimbra, em 1544, instituição que desfrutava de uma boa reputação na Europa e aí ministrou ensinamentos de Elementos de Geometria de Euclides, Aritmética, Cosmografia, Mecânica de Aristóteles e parte da obra Almajesto de Ptolomeu.

Em 21 de Outubro de 1557, o rei escreveu uma carta dirigida ao reitor da Universidade de Coimbra, onde avisava que Pedro Nunes se devia ausentar, durante três ou quatro anos, da sua cadeira na universidade a partir de 10 de Janeiro de 1558, para se dedicar exclusivamente aos seus deveres de cosmógrafo-mor. Esta missiva não foi recebida pacificamente, uma vez que a carta impunha à universidade o pagamento, durante o tempo de ausência, de oitenta mil reais (dos cem mil do salário). Pedro Nunes também estava consciente que esta interrupção lectiva podia levantar à sua jubilação, uma vez que, para atingir esse objectivo, era necessário reger vinte anos seguidos, não podendo parar por um período superior a um ano. Esta polémica está amplamente explicada e documentada em Homens de outros Tempos (T. Carvalho, 1924).

Em 1537, obtém autorização do rei para mandar imprimir todas as obras que tivesse feito. A obra de Pedro Nunes é composta por traduções anotadas e textos originais. Publica em língua portuguesa a importante obra Tratado da Sphera, a qual foi dedicada ao Infante D. Luís e foi impressa em Lisboa na oficina de Germão Galharde. Este tratado integrava três obras traduzidas do latim:

Tratado da Esfera do monge inglês Sacrobosco

Teoria do Sol e da Lua de Purbachio

Livro I da Geografia de Ptolomeu

que enriqueceu com observações da sua autoria e duas obras originais:

Tratado em defensam da carta de marear, onde Pedro Nunes definiu condições para a construção de mapas, apresentou o processo para determinar a declinação magnética, apoiado em observações solares, bastante utilizado na navegação do séc.

XVI, e o processo para determinação de latitudes baseado nas alturas extrameridianas do Sol.

Tratado sobre certas dúvidas de navegação que contém respostas dadas a dúvidas colocadas por Martim Afonso de Sousa, em 1533, aquando do seu regresso de uma viagem ao Brasil. Pedro Nunes ocupa-se das célebres linhas de rumo, luxodromias, que vieram a ter grande reflexo na Cartografia.

Os originais são:

De Crepusculis, considerada a sua obra-prima, foi publicada em latim, em 1542 e dedicada ao Rei D. João III. É um tratado de astronomia esférica. Estuda o problema da variação da duração do crepúsculo em função da latitude do lugar e da declinação do sol. Numa época em que a análise matemática era desconhecida, Pedro Nunes resolve o problema do menor crepúsculo por processos engenhosos. É neste livro que Pedro Nunes propõe construir um instrumento que seja muito apropriado às observações dos astros, e com o qual se possam determinar rigorosamente as respectivas alturas. Este instrumento foi designado por nónio ou nónius.

De Erratis Orontii Finaei, esta obra foi publicada em Coimbra no ano de 1546. Pedro Nunes refuta os erros que Orôncio Fineu cometeu quando considerou ter resolvido cinco importantes problemas matemáticos, na sua obra O Quadratura Circuli em 1543, Orôncio Fineu era lente de Matemáticas no Colégio real de Paris e Pedro Nunes ocupava cargo idêntico na Universidade de Coimbra.

Pedro Nunes, para além da refutação das posições defendidas por Orôncio Fineu, aborda, nesta obra, a descoberta de Platão para achar os dois meios proporcionais e duplicar o cubo, a demonstração que Arquimedes fez acerca da razão entre a circunferência e o seu diâmetro, a explicação das definições do livro V dos Elementos de Euclides e a razão porque a partir do movimento da Lua se conclui a diferença de longitude dos lugares. Trata a construção e uso do relógio nocturno, vertical e horizontal que foram mal concebidos por Orôncio Fineu.

Libro de Algebra en Arithmetica y Geometría, publicado em 1567, em castelhano, em Anvers e é dedicada ao Cardeal Infante D. Henrique. Trata com rigor assuntos exclusivamente dedicados à Álgebra – resolução de equações do primeiro e segundo grau, redução ao segundo grau de equações de grau superior, operações com polinómios, etc.

Pedro Nunes refere outros trabalhos que se julgam perdidos. Passamos a citá-lo:

“Em breve como esperamos, sairão a público outros opúsculos nossos designadamente: Do astrolábio, tratado demonstrativo; Dos triângulos esferais; Do planisfério geométrico; Da proporção ao V de Euclides; Do traçado das pomas para a arte de navegar, e alguns outros que actualmente preparamos.” (Pedro Nunes, 1943, 723).

Pedro Nunes trabalhou de uma forma muito estreita com os navegadores e pilotos, preocupado que estava em resolver problemas que estes sentiam na navegação sugeriu-lhes técnicas de observação, criou instrumentos de medição da altura dos astros ou de medição da declinação magnética. No entanto, foi alvo de severas criticas por parte de alguns deles. Segundo Pedro Nunes os marinheiros não lhe perdoavam o facto de, sem nunca ter navegado, intervir nos problemas da náutica, reformulando as soluções por eles protagonizadas, interrogando-se sobre a validade das práticas seguidas.

A sua vasta formação teórica e preocupação com o rigor das medições incentivaram-no a inventar vários instrumentos astronómicos e métodos gráficos para a resolução de alguns problemas. Realçamos o anel náutico, o instrumento jacente no plano (mais tarde designado por instrumento de sombras por D. João de Castro), o nónio e a determinação gráfica da declinação do Sol. Os dois primeiros, conforme o sentido da graduação, permitiam determinar a altura ou a distância zenital do Sol ou de outras estrelas, o terceiro, quando adaptado ao astrolábio ou quadrante, permitia medir fracções do grau e dava com maior rigor a altura de uma estrela, e o quarto permitia conhecer a declinação do Sol ao longo do ano sem recorrer às tábuas solares.

Alguns destes instrumentos foram experimentados com êxito por D. João de Castro nas suas viagens a Goa e ao Mar Vermelho que, perante resultados tão satisfatórios, não se cansou de elogiar o mestre segundo descreve na sua obra Roteiro de Lisboa a Goa. D. João de Castro deu aí notícia da utilização de dois instrumentos de sombra com diferentes finalidades: um deles permitia calcular a declinação da agulha magnética e o outro permitia medir a altura do Sol a toda a hora.

As dificuldades sentidas na época pelo atraso da técnica levavam a que a menor divisão na graduação dos instrumentos náuticos não fosse para além de um grau, ou excepcionalmente, de meio grau. Assim, os cálculos eram feitos por estimativa o que tornava a navegação incerta (muitos foram os naufrágios), pois cometiam-se erros na determinação da latitude que produziam erros de dezenas de quilómetros nas distâncias a percorrer. Não consideramos aqui os erros de navegação resultantes do cálculo da longitude uma vez que o problema de determinação desta coordenada geográfica persistiu até ao séc. XVIII, quando Jorna Charritos, já na segunda metade deste século, construiu um relógio náutico cujas oscilações, por dia, eram da ordem de alguns segundos.

Com a criação do nónio, Pedro Nunes permitiu que se abandonasse a leitura por estimativa cujo resultado dependia do critério do medidor e fosse possível fazer leituras precisas de fracção do grau. Pedro Nunes refere o nónio na Proposição III do seu livro De Crepusculis, em 1542, de enunciado: um instrumento que seja muito apropriado às observações dos astros, e com o qual se possam determinar rigorosamente as respectivas alturas.

O nónio por ele concebido foi adaptado e utilizado na construção de dois grandes quadrantes pelo astrónomo Tacho Brade (1546 - 1601) que tinha uma grande preocupação em fazer observações astronómicas sistemáticas e com muito rigor. Tacho Brade convidou Kaiser (1571 - 1630) para trabalhar com ele e legou-lhe o seu património. Deste modo, Kaiser pôde analisar as divergências entre as posições observadas e as previsões teóricas, o que lhe permitiu, em 1604, publicar as duas primeiras leis referentes ao movimento dos planetas. Ultrapassado que estava o problema de medição rigorosa de grandezas e do seu registo sistemático, foi possível o aparecimento de novas leis e dar um novo rumo à Ciência.

Pedro Nunes foi um homem que interligou a observação e a teoria, a ciência e a técnica e, neste ano de 2002 em que se comemora o V centenário do seu nascimento, a melhor homenagem que lhe podemos prestar é divulgar a sua obra cientifica, é estudar e discutir problemas teóricos que ocuparam a sua mente, é aprender a construir e a manusear os instrumentos por ele inventados.

Pedro Nunes considera cinco conjugações diferentes de equações de 2º grau. Naquele tempo chamava-se «coisa» à incógnita, «censo» à incógnita quando elevada ao quadrado e «número» ao que hoje chamamos termo independente. Assim as conjugações de Pedro Nunes eram designadas por:

1. censos iguais a coisas: $ax^2 = bx$

2. censos iguais a número: $ax^2 = c$

3. censo mais coisas iguais a número: $x^2 + bx = c$

4. coisas mais número iguais a censo: $bx + c = x^2$

5. censo mais número iguais a coisas: $x^2 + c = bx$

Para cada conjugação apresenta uma regra prática de resolução:

Primeira conjugação:

Dividimos o coeficiente de x^2 pelo coeficiente de x. O resultado será o termo independente.

Exemplo:

$$ax^2 = bx$$

$$x = \frac{b}{a}$$

Segunda conjugação:

Dividimos o termo independente pelo coeficiente de x^2. A raiz do resultado será o coeficiente de x.

Exemplo:

$$ax^2 = c$$

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Terceira conjugação:

"Quando um censo e as coisas são iguais a número, multiplicaremos a metade do número das coisas em si mesma, criando quadrado, e a este quadrado juntaremos o número proposto, e de toda a soma tomaremos a raiz. Da qual raiz tiraremos a metade do número das coisas, e ficará manifesto o valor da coisa.", isto é, determinamos o quadrado da metade do coeficiente de x. A este resultado somamos o termo independente e determinamos a raiz da soma. À raiz da soma subtraímos a metade do coeficiente de x. A solução da equação será o resultado da diferença anterior.

Exemplo:

$$x^2 + bx = c$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Quarta conjugação:

Determinamos o quadrado da metade do coeficiente de x. Ao resultado somamos o termo independente e calculamos a sua raiz. A solução da equação será a soma do ultimo resultado com a metade do coeficiente de x.

Exemplo:

$$bx + c = x^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$$

Quinta conjugação:

Determinamos o quadrado da metade do coeficiente de x. Ao resultado subtraímos o termo independente e determinamos a sua raíz. A solução da equação será a soma do ultimo resultado com a metade do coeficiente de x.

Exemplo:

$$x^2 + c = bx$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

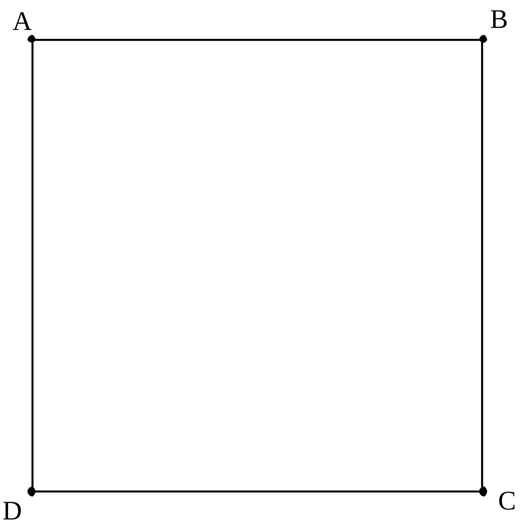
$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}$$

Pedro Nunes apresenta, no seu trabalho, demonstrações geométricas das regras práticas aplicadas.

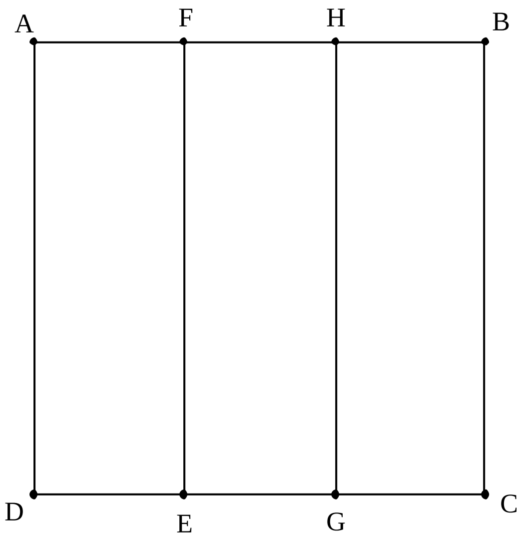
Primeiro caso: $ax^2 = bx$

Consideremos a equação $3x = x^2$

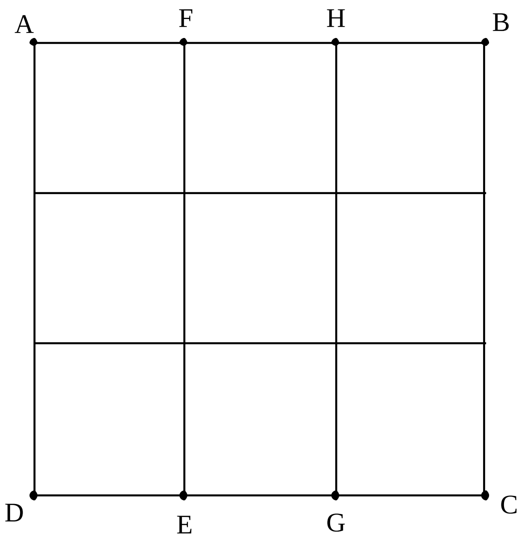
Se três raízes são iguais ao seu quadrado é necessário que cada uma delas valha 3 porque 3 raízes 3 vezes fazem o seu quadrado que é 9.



O quadrado $[ABCD]$ é composto por 3 raízes que são os rectângulos $[ADEF]$, $[FEGH]$ e $[HGCB]$.



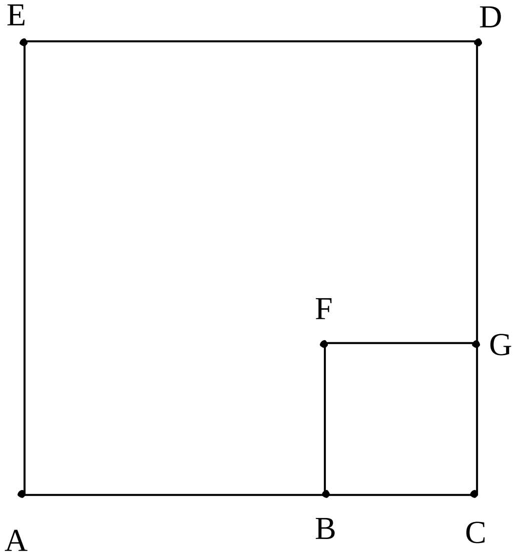
Partindo depois cada um dos rectângulos em 3 partes iguais, fica o quadrado $[ABCD]$ partido em 9 quadrados pequenos, que são as unidades.



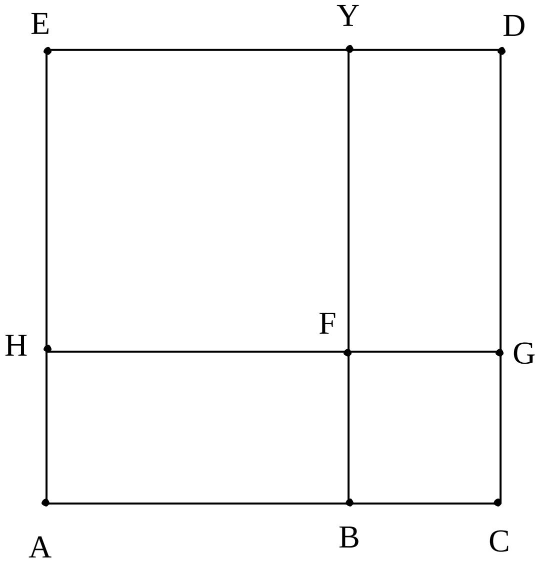
Como 3 raízes são iguais ao quadrado, cada um tem 3 unidades.

Segundo caso: $x^2 + bx = c$

Sobre o segmento $[AC]$ temos o quadrado $[ACDE]$ e sobre o segmento $[BC]$ o quadrado $[BCGF]$ de lado x.



Prolonguemos os segmentos $[BF]$ e $[FG]$que se intersectam com os lados do quadrado $[ACDE]$ no ponto Y e no ponto H, respectivamente.



Os rectângulos $[ABFH]$ e $[FGDY]$são iguais.

Consideremos $\overline{AB}=\frac{b}{2}$, isto é, metade do coeficiente de x.

A soma das áreas dos dois rectângulos com a área do quadrado$[BCGF]$ é igual ao termo independente c $\left(x^2+2\frac{b}{2}x=c\right)$.

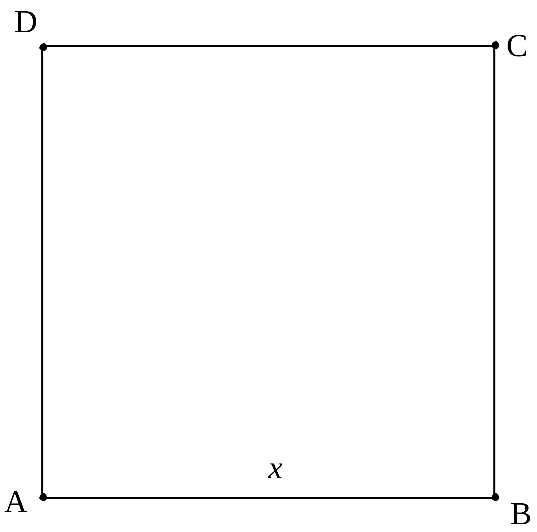
Se juntarmos a área do quadrado $[EYFH]$ resulta o quadrado completo $\left(x^2+2\frac{b}{2}x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$

O lado $[BC]$será a raiz do quadrado $[BCGF]$, agora conhecido

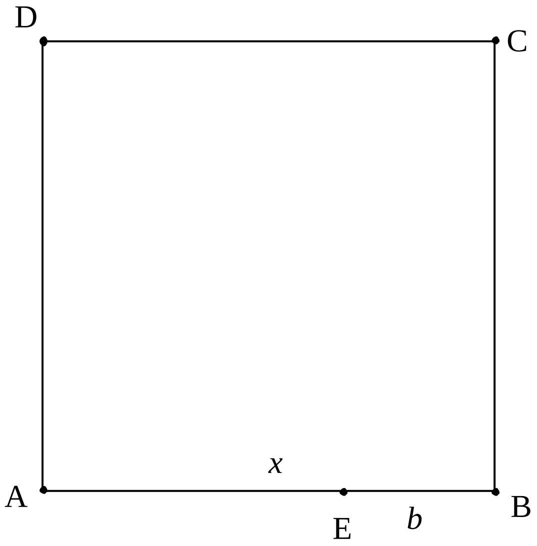
$$\left(\begin{array}{l}\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ x+\frac{b}{2}=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \\ x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}\end{array}\right)$$

Terceiro Caso $bx+c=x^2$

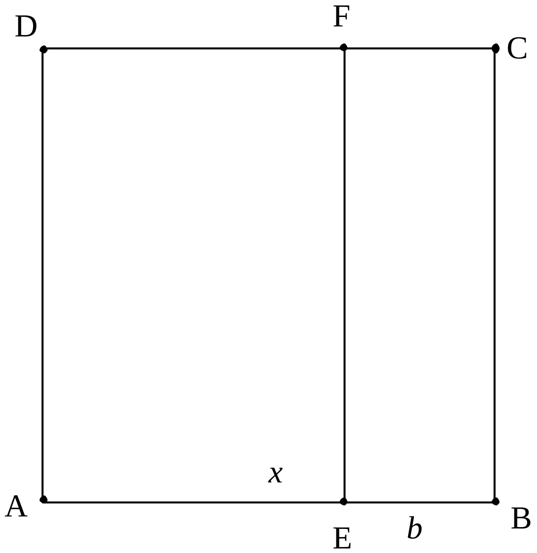
Seja $[ABCD]$ o quadrado de lado x.



Sobre $[AB]$ marquemos o segmento $[AE]$ de comprimento b

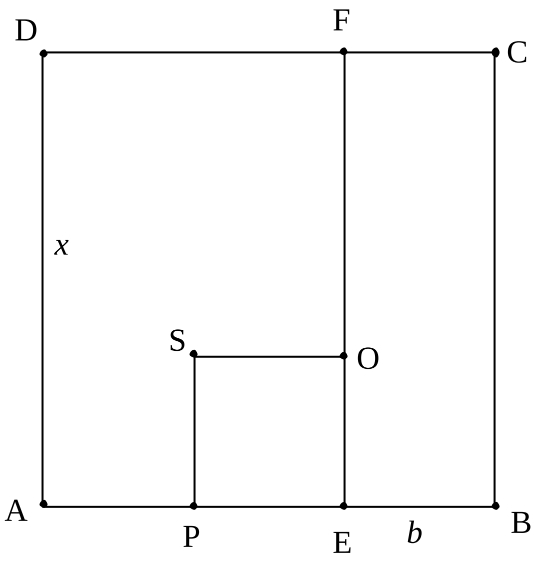


Por E, tracemos uma paralela a $[BC]$ cuja intersecção com o lado $[DC]$ é o ponto F.

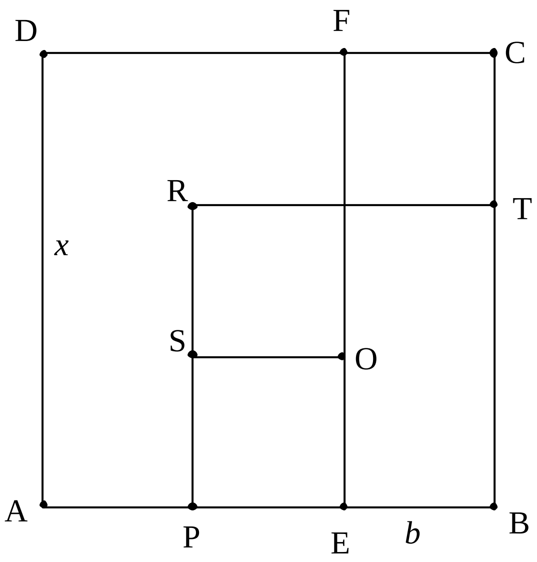


Note-se que o rectângulo $[AEFD]$ tem área bx, logo o rectângulo $[EBCF]$ tem área c.

Seja P o ponto médio de $[AE]$, então o quadrado $[PEOS]$ tem área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.



Somemos a este a área do rectângulo $[EBCF]$, c. Repare-se que a soma destas duas áreas é igual à área do quadrado $[PBTR]$, logo $\overline{PB} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$.



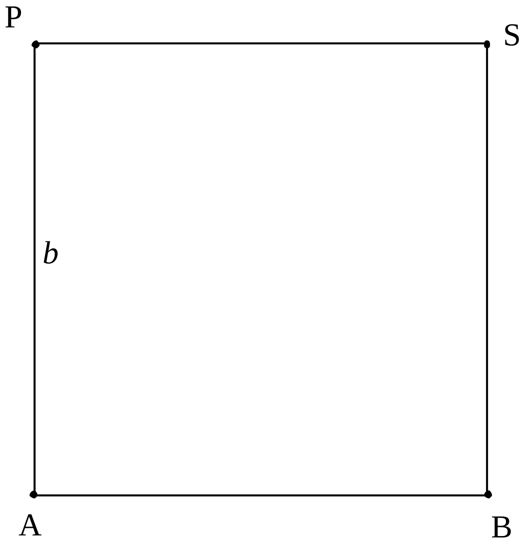
Resulta então que

$\overline{AP} + \overline{PB} = x \Leftrightarrow$

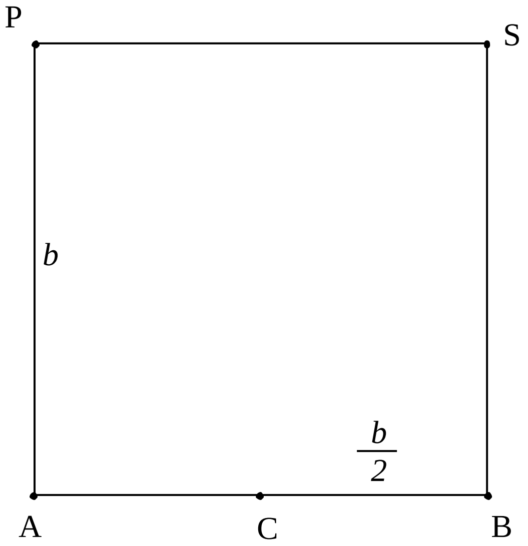
$\Leftrightarrow \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = x$, como pretendíamos.

Quarto Caso $x^2 + c = bx$

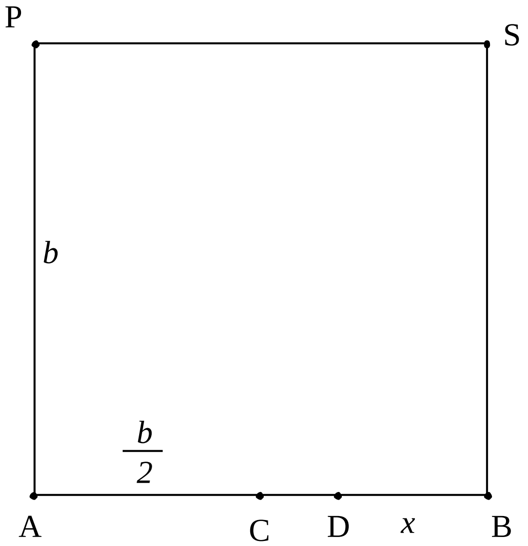
Consideremos o quadrado $[ABPS]$ de lado b.



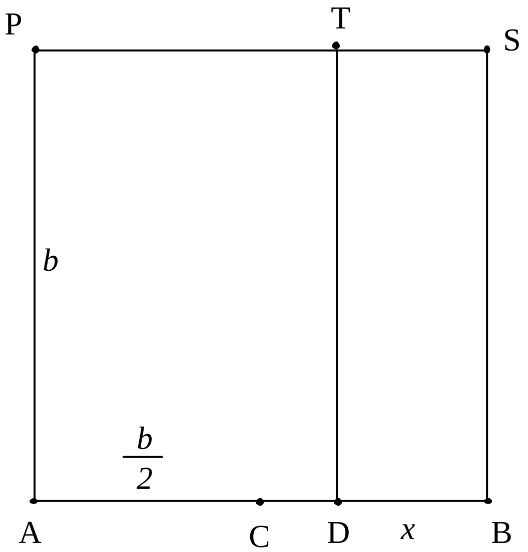
Então $\overline{AB} = b$. Marquemos C em $[AB]$ de tal modo que este seja o seu ponto médio.



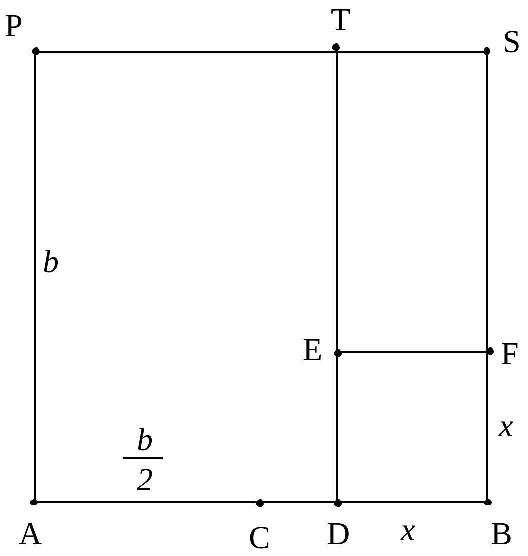
Então $\overline{AC} = \overline{CB} = \frac{b}{2}$. Marquemos, agora o ponto D em $[AB]$ de tal modo que $\overline{DB} < \overline{CB}$ e admitamos que $\overline{DB} = x$



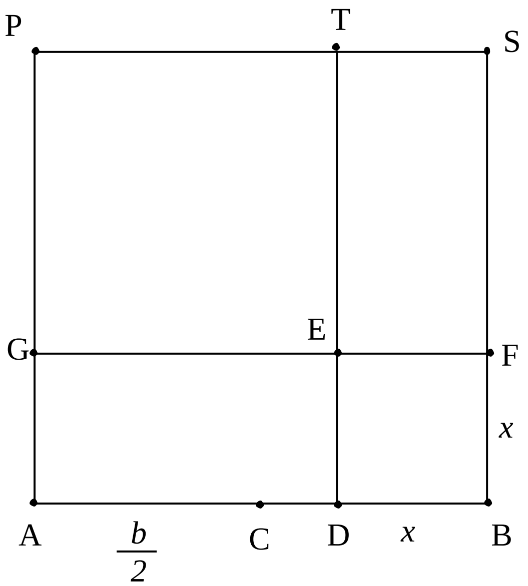
Tracemos o segmento $[DT]$ paralelo ao lado $[BS]$ e o segmento $[FG]$ paralelo ao lado $[AB]$.



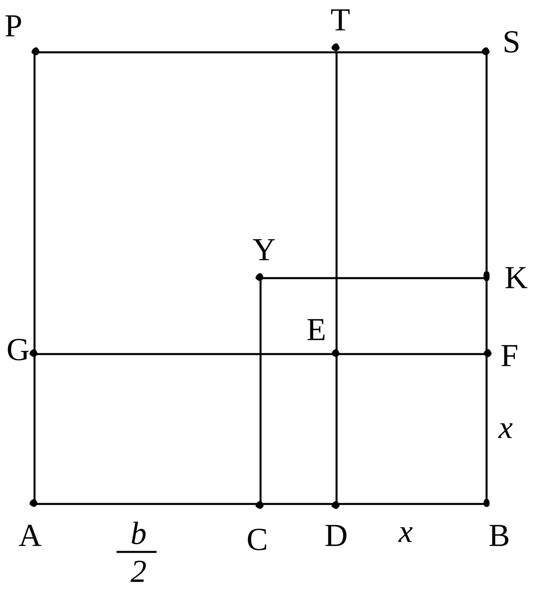
Desta forma obtemos o rectângulo $[ABFG]$ de área bx e o quadrado $[DBFE]$ de área x^2.



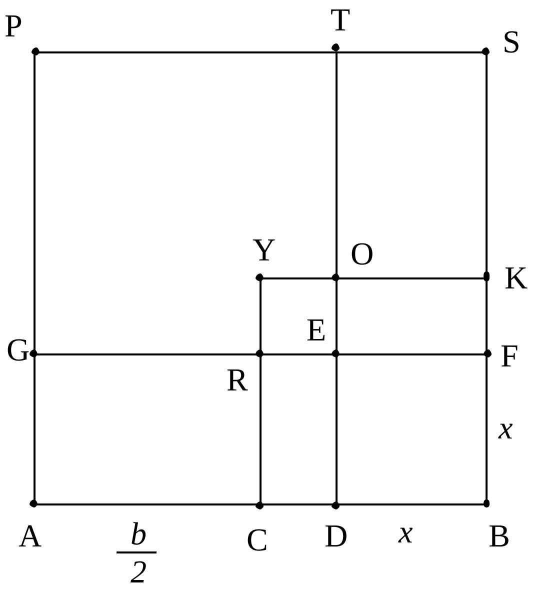
Se somarmos as áreas do rectângulo $[ADEG]$ e do quadrado $[DBEF]$ obtemos a área do quadrado $[ABFG]$, isto é, bx. Logo podemos concluir que a área do rectângulo $[ADEG]$ é c.



Construamos o quadrado $[CBKY]$. Este quadrado tem área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.



Consideremos R o ponto de intersecção dos segmentos $[GF]$ com $[CY]$, e O o ponto de intersecção dos segmentos $[TD]$ com $[KY]$.



Note-se que a área do rectângulo $[ADEG]$ é igual à área do polígono $[CBKOER]$, que é c, e que a área do quadrado $[REOY]$ é $\left(\frac{b}{2}-x\right)^2$. Temos então: $A[CBKY]-A[CBKYR]=A[REOY]$, isto é,

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2-c=\left(\frac{b}{2}-x\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = x - \frac{b}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}$$, como pretendíamos.

Capítulo 2: A Era das Variáveis

Na introdução histórica falámos de vários matemáticos italianos que estudaram métodos para resolver equações polinomiais e do grande interesse despertado por esse estudo ao longo de determinada época. Quando esse estudo foi feito não se trabalhava com os números negativos do mesmo modo que actualmente e ainda menos com números complexos. Aliás, como foi visto, os números complexos aparecem como consequência deste mesmo estudo. Assim nos parágrafos que se seguem vou expor as ideias e os métodos base dessas técnicas embora usando as notações actuais e orientando a exposição para objectivos actuais, no sentido de dar uma percepção da evolução de tratamento ao longo dos tempos.

2.1. Equações do 2º Grau

Considerando um polinómio genérico do 2º grau, ax^2+bx+c, pretende-se determinar todos os seu zeros, ou seja, resolver a equação $ax^2+bx+c=0$. Considerando os coeficientes pertencendo ao conjunto dos números reais, **R**, e $a \neq 0$ vem $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0 \Leftrightarrow a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

As equivalências anteriores merecem os seguintes comentários. Foram usadas determinadas propriedades que sabemos serem válidas em **R** sem preocupação, por agora, da sua fundamentação. Ao aparecer $\sqrt{a^2}$ escrevemos $|a|$, no entanto, atendendo a que temos o sinal $\pm$ antes da fracção , portanto duas soluções, o facto de ter $|a|$ apenas trocaria $\pm$ por $\mp$ no caso de $a<0$. Assim podemos considerar a no lugar de $|a|$. O último comentário tem a ver com o significado do símbolo $\sqrt{}$ no caso de

$b^2 - 4ac < 0$. Se quisermos considerar todas as raízes da equação, reais e imaginárias, poderemos considerar que o símbolo $\sqrt{z}$ representa todos os números complexos w tais que $w^2 = z$. Deste modo o sinal $\pm$ antes da raiz deixa de ser necessário e temos uma fórmula que nos apresenta todas as raízes complexas da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes reais:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Considere-se agora o caso em que os coeficientes podem ser números imaginários, portanto $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbf{C}$ e $a \neq 0$. Repetindo os passos anteriores, justificados por propriedades também válidas em $\mathbf{C}$ temos, $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$.

Novamente aqui $\sqrt{z}$ representa todas as raízes quadradas de z. No entanto, não podemos agora substituir $\sqrt{a^2}$ por $|a|$. Vejamos então como proceder. Determinar todas as raízes quadradas de a^2 é determinar todos os números complexos w tais que $w^2 = a^2$. Por propriedades também válidas em $\mathbf{C}$ vem, $w^2 = a^2 \Leftrightarrow w^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (w - a)(w + a) = 0 \Leftrightarrow w = a \vee w = -a$. Podemos então escrever $x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\pm 2a}$. Vem então a fórmula

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde, se quisermos, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ pode representar apenas uma das raízes quadradas, não importa qual, no caso de $b^2 - 4ac < 0$. Temos então estabelecida uma fórmula válida tanto para coeficientes reais como no caso mais geral para coeficientes complexos, fornecendo-nos todas as raízes complexas da equação.

2.2. Equações do 3º Grau

Na introdução histórica focámos um método para resolver equações do 3º grau que ficou conhecido por método de Cardano-Tartaglia. Este método aplica-se a equações do 3º grau que possam ser escritas na forma $x^3 + px + q = 0$. Acontece que todas as equações do 3º grau podem ser reduzidas a uma equação da forma $x^3 + px + q = 0$. É este processo que vamos ver em primeiro lugar.

2.2.1. *Redução à forma canónica*

Consideremos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes reais e $a \neq 0$. Ora, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) = 0$. O que se pretende é fazer uma mudança de variável de modo que nessa nova variável se obtenha uma equação na forma vista atrás, isto é, sem termo do segundo grau. Fazendo então $x = y + h$ vamos descobrir h tal que se verifique o pretendido. Temos, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (y+h)^3 + \frac{b}{a}(y+h)^2 + \frac{c}{a}(y+h) + \frac{d}{a} = y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + \frac{b}{a}(y^2 + + 2yh + h^2) + \frac{c}{a}y + \frac{c}{a}h + \frac{d}{a} = y^3 + \left(3h + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3h^2 + \frac{2b}{a}h + \frac{c}{a}\right)y + \left(h^3 + \frac{b}{a}h^2 + \frac{c}{a}h + \frac{d}{a}\right)$. O nosso objectivo é obrigar que não exista termo do segundo grau portanto $3h + \frac{b}{a} = 0$, donde, $h = -\frac{b}{3a}$ e a mudança de variável que se deve fazer é $x = y - \frac{b}{3a}$. Temos então, na nova equação, o coeficiente de y^2 como sendo zero. Para determinar o novo coeficiente de y temos de substituir h pelo valor encontrado e vem $3h^2 + \frac{2b}{a}h + \frac{c}{a} = 3\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{2b}{a}\frac{-b}{3a} + \frac{c}{a} = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}$. Quanto ao termo independente temos $h^3 + \frac{b}{a}h^2 + \frac{c}{a}h + \frac{d}{a} = \left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = -\frac{1}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}$.

Vimos então que qualquer equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode ser escrita na forma $y^3 + py + q = 0$ sendo $p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}$ e $q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}$.

2.2.2. Apresentação de uma solução da equação na forma canónica

Passamos então agora a ver como resolver a equação $y^3+py+q=0$. Consideremos a solução y como soma de dois valores u e v. Então $y^3+py+q=0 \Leftrightarrow (u+v)^3+py+q=u^3+3u^2v+3uv^2+$

$+v^3+p(u+v)+q=0 \Leftrightarrow u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0 \Leftrightarrow u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$.

É verdade que o objectivo é determinar todas as soluções da equação, reais ou imaginárias, no entanto começar por descobrir apenas uma solução é um primeiro passo para descobrir as outras. Assim, se descobrirmos u e v tais que $u^3+v^3+q=0$ e $3uv+p=0$, então necessariamente, para esses valores de u e v, teremos $u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$. Ora, $3uv+p=0 \Leftrightarrow v=-\dfrac{p}{3u}$ e substituindo em $u^3+v^3+q=0$ vem $u^3+\left(-\dfrac{p}{3u}\right)^3+q=0 \Leftrightarrow u^3-\dfrac{p^3}{27u^3}+q=0 \Leftrightarrow 27\left(u^3\right)^2+ \quad +27q\left(u^3\right)-p^3=0 \Leftrightarrow$, usando a fórmula vista para resolução de equações do 2º grau,

$$\Leftrightarrow u^3=\frac{-27q\pm\sqrt{27^2q^2+4\times 27p^3}}{2\times 27} \Leftrightarrow u^3=\frac{-27q}{2\times 27}\pm\sqrt{\frac{27^2q^2+4\times 27p^3}{4\times 27^2}} \Leftrightarrow u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Como vimos basta, por enquanto, obter uma solução portanto considera-se $u=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$.

Para determinar v podemos substituir u em qualquer uma das equações atrás onde u e v estavam relacionados. Usando $u^3+v^3+q=0$ vem $-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}+v^3+q=0 \Leftrightarrow v^3= \quad =-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}} \Leftrightarrow v=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$. Está então encontrada uma solução da equação $y^3+py+q=0$ que é

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

2.2.3. As restantes soluções

Nas linhas anteriores precisámos de descobrir u tal que $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e aproveitámos apenas a solução $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Novamente estamos perante a situação de definir inequivocamente qual o significado dos símbolos $\sqrt[3]{\ }$ e $\sqrt{\ }$. Recorde-se que a nossa equação inicial $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tinha coeficientes reais e o modo como obtemos p e q originava também reais, no entanto, $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ pode ser negativo e termos então $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ a ser um imaginário.

Num caso geral, em que os coeficientes podem ser complexos, estamos a considerar que $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ está a representar uma qualquer raiz cúbica de $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e vamos agora determinar as outras. Para isso precisamos das seguintes considerações.

Seja $z = r cis q$ um número complexo. Para representar todas as suas raízes de índice n, com $n \in \mathbf{N}$, temos a fórmula $\sqrt[n]{r cis q} = \sqrt[n]{r}\, cis \frac{q + 2kp}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Notemos que, para qualquer k,

$$\sqrt[n]{r}\, cis \frac{q+2kp}{n} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{q}{n} + \frac{2kp}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{q}{n} + \frac{2kp}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{q}{n}\cos\frac{2kp}{n} - \operatorname{sen}\frac{q}{n}\operatorname{sen}\frac{2kp}{n} +\right.$$

$$\left. + i \operatorname{sen}\frac{q}{n}\cos\frac{2kp}{n} + i\cos\frac{q}{n}\operatorname{sen}\frac{2kp}{n}\right] = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{q}{n}\cos\frac{2kp}{n} + i\operatorname{sen}\frac{q}{n} \times i\operatorname{sen}\frac{2kp}{n} + i\operatorname{sen}\frac{q}{n}\cos\frac{2kp}{n} +\right.$$

$$\left. + i\cos\frac{q}{n}\operatorname{sen}\frac{2kp}{n}\right] = \sqrt[n]{r}\left[\left(\cos\frac{q}{n} + i\operatorname{sen}\frac{q}{n}\right)\cos\frac{2kp}{n} + \left(\cos\frac{q}{n} + i\operatorname{sen}\frac{q}{n}\right) \times i\operatorname{sen}\frac{2kp}{n}\right] =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{q}{n} + i\operatorname{sen}\frac{q}{n}\right) \times \left(\cos\frac{2kp}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2kp}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{r}\, cis\frac{q}{n}\right) \times cis\frac{2kp}{n}.$$

Note-se que atribuindo a k os valores de $\{0,1,\ldots,n-1\}$ obtemos, a partir de $cis\frac{2kp}{n}$, todas as raízes de índice n da unidade. O que foi feito anteriormente permite então ver que, as raízes de índice

n dadas pela fórmula $\sqrt[n]{r}\, cis\,\dfrac{q+2kp}{n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$ podem também ser obtidas multiplicando uma dessas raízes que seja conhecida, pelas várias raízes de índice n da unidade.

No caso importante para nós neste momento temos $n=3$ e $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{cis0}=cis\,\dfrac{2kp}{3}$, $k=0,1,2$. Se $k=0$ temos $cis0=1$, se $k=1$ temos $cis\,\dfrac{2p}{3}=\cos\dfrac{2p}{3}+i\,\text{sen}\,\dfrac{2p}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e por fim se $k=2$ temos $cis\,\dfrac{4p}{3}=\cos\dfrac{4p}{3}+i\,\text{sen}\,\dfrac{4p}{3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Podemos agora listar todas as soluções da equação $u^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$. São elas $u_1=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$,

$u_2=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}\times\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ e $u_3=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}\times\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Ao fazer $u=u_1$ obtemos $v_1=v$ já obtido anteriormente. Considerando $u=u_2$ temos $u_2{}^3=\left(-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ e como $u_2{}^3+v_2{}^3+q=0$ vem $v_2{}^3=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$ e novamente teríamos três soluções possíveis para v_2. Acontece que originando u_1 três valores para v_1, u_2 três valores para v_2 e, u_3 três valores para v_3 iríamos repetir soluções quando somássemos para obter a solução y. Assim ficam definidas três soluções:

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$y_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \text{ e}$$

$$y_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

2.3. Equações do 4º Grau

Para resolver as equações do 4º grau vamos usar o método de Ferrari já referido na introdução histórica. Suponhamos então que temos uma equação $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ sendo os coeficientes reais, por enquanto. Para simplificação do que vai ser feito é importante supor que o coeficiente de x^4 é 1, o que podemos fazer sem perder generalidade pois, sendo $a_4\neq 0$, temos $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0\Leftrightarrow a_4\left(x^4+\frac{a_3}{a_4}x^3+\frac{a_2}{a_4}x^2+\frac{a_1}{a_4}x+\frac{a_0}{a_4}\right)=0$. O nosso objectivo primeiro é escrever uma equação equivalente a $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ mas com o aspecto seguinte: $(Ax^2+Bx+C)^2=(Dx+E)^2$. Ora,

$$(Ax^2+Bx+C)^2=(Dx+E)^2\Leftrightarrow A^2x^4+2Ax^2(Bx+C)+(Bx+C)^2=$$
$$D^2x^2+2DxE+E^2\Leftrightarrow A^2x^4+2ABx^3+2ACx^2+B^2x^2+2BCx+C^2-D^2x^2-2DEx-E^2=0\Leftrightarrow$$

$A^2x^4+2ABx^3+(2AC+B^2-D^2)x^2+2(BC-DE)x+C^2-E^2=0$. Impomos então as seguintes igualdades:

$$\begin{cases}A^2=1\\2AB=b\\2AC+B^2-D^2=c\\2(BC-DE)=d\\C^2-E^2=e\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}A=1\\B=\dfrac{b}{2}\\2C+\dfrac{b^2}{4}-D^2=c\\bC-2DE=d\\C^2-E^2=e\end{cases}.$$

Basta-nos então pensar no sistema, nas incógnitas C, D e E,

$$\begin{cases}2C-D^2=c-\dfrac{b^2}{4}\\bC-2DE=d\\C^2-E^2=e\end{cases}.$$

Na segunda equação temos $bC-2DE=d$. Se $D=0$ vem $bC=d$. Se ainda $b=0$ viria $d=0$ e estaríamos na presença de uma equação inicial da forma $x^4+cx^2+e=0$ que pode ser transformada numa equação do segundo grau mediante a mudança de variável $y=x^2$. Podemos então supor que $b\neq 0$ resultando $C=\frac{d}{b}$. Substituindo na primeira equação teríamos $2C-D^2=c-\frac{b^2}{4}\Leftrightarrow\frac{2d}{b}=c-\frac{b^2}{4}$, o que não é verdade para quaisquer valores de b, c e d. Notemos que as considerações anteriores são dispensáveis. De facto, se não as fizermos, o máximo que poderíamos estar a fazer era perder soluções. Mas não precisamos de conhecer todas as soluções do sistema, basta-nos uma. Consideramos então $D\neq 0$ e temos $bC-2DE=d\Leftrightarrow E=\frac{bC-d}{2D}$.

Substituindo na terceira equação vem $C^2-\left(\frac{bC-d}{2D}\right)^2=e\Leftrightarrow C^2-\frac{b^2C^2-2bCd+d^2}{4D^2}=e\Leftrightarrow$ $D^2=\frac{b^2C^2-2bCd+d^2}{4\left(C^2-e\right)}$, desde que $C^2-e\neq 0$. Substituindo agora na primeira equação vem,

$$2C-\frac{b^2C^2-2bCd+d^2}{4\left(C^2-e\right)}=c-\frac{b^2}{4}\Leftrightarrow 8C^3-8Ce-b^2C^2+2bCd-d^2=4cC^2-4ce-b^2C^2+eb^2\Leftrightarrow$$

$8C^3-4cC^2+\left(2bd-8e\right)C+4ce-eb^2-d^2=0$. Chegamos a uma equação do terceiro grau. Se os coeficientes de da equação inicial do quarto grau forem reais, como temos a certeza que o polinómio do terceiro grau tem alguma raiz real, procuramos um valor de C real. Seguidamente substituímos em $D^2=\frac{b^2C^2-2bCd+d^2}{4\left(C^2-e\right)}$ para tirar o valor de D e depois substituímos em $E=\frac{bC-d}{2D}$ para descobrir o valor de E.

Como escrevemos atrás, o nosso objectivo primeiro é escrever uma equação equivalente a $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ mas com o aspecto $\left(Ax^2+Bx+C\right)^2=\left(Dx+E\right)^2$. Está resolvido este problema e, atendendo a que nessa resolução temos $A=1$, podemos então escrever de seguida

$$\left(Ax^2+Bx+C\right)^2=\left(Dx+E\right)^2\Leftrightarrow x^2+Bx+C=Dx+E\vee x^2+Bx+C=-Dx-E\Leftrightarrow$$

$$x^2+\left(B-D\right)x+C-E=0\vee x^2+\left(B+D\right)x+C+E=0\Leftrightarrow x=\frac{-B+D\pm\sqrt{\left(B-D\right)^2-4\left(C-E\right)}}{2}\vee$$

$$\vee\, x=\frac{-B-D\pm\sqrt{\left(B+D\right)^2-4\left(C+E\right)}}{2}.$$

Tal como em situações anteriores interessam-nos todas as soluções, reais ou imaginárias.

Capítulo 3: A Era do Abstracto

No final do século XVI, uma vez que tinham sido encontrados os métodos para resolver equações gerais cubicas e quadráticas, apareceu naturalmente o problema de se resolver a equação geral de 5º grau.

Este método, seguindo os exemplos conhecidos até então, faria uso de um número finito de operações racionais e extracção de raízes nos coeficientes das equações, as chamadas soluções por radicais ou algébricas.

Era costume dos algebristas desse período reexaminar os métodos conhecidos e buscar soluções diferentes das de Cardano e Ferrari para resolver equações cubicas e quadráticas.

Entre eles podemos destacar o algebrista francês Francois Viète(1540-1603) nascido em Fontenay-le-Comte. Viète formou-se em advocacia e trabalhou para o parlamento da Bretania em Rennes. Quando foi banido destas actividades devido á sua postura política de oposição, dedicou-se ao estudo da matemática. Na obra "In artem analyticem isagoge"(1591), construiu o seu tratado sobre as equações algébricas. Porém a sua grande contribuição foi dada no simbolísmo algébrico.

Segundo Milies, foi através das leituras dos trabalhos de Diofanto, Cardano, Tartaglia, Bombelli e Simon Stevin (1548-1620), que Viète teve a ideia de utilizar letras para representar quantidades. Ele usava consoantes para representar quantidades conhecidas e vogais para as incógnitas. Também descobriu um novo método de resolver equações cúbicas e um método particularmente elegante para resolver equações quarticas do tipo $x^4 + 2ax^2 = c - bx$. Estabeleceu ainda uma maneira de generalizar o conhecido procedimento para a resolução da equação quadrática através da formula de Cardano.

A procura do método para resolver a equação geral quíntica usando radicais tornou-se infrutífera entre tais matemáticos mas conduziu a alguns resultados interessantes. Entre eles o de Ehrenfried von Tschirnhaus (1651-1708). Este matemático teve lições particulares de matemática enquanto ainda frequentava a escola. Entrou na Universidade em 1668 e lá estudou Matemática, Filosofia e

Medicina. Durante algum tempo o seu objectivo foi o de conseguir uma boa posição na Academia Royale de Ciências em Paris. Seu nome está perpetuado nas “transformações de Tschirnhaus”, pelas quais ele esperava achar um método geral para resolver equações de grau superior. Uma transformação de Tschirnhaus de uma equação $f(x)=0$ é uma transformação da forma $y=\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$ onde g e h são polinómios e h não se anula para uma raiz de . Em Acta Eruditorum de 1683, Tschirnhaus mostrava que um polinómio de grau n>2 pode ser reduzido pelas suas transformações , a uma forma em que os coeficientes dos termos de grau n-1 e n-2 são ambos zero; para a cubica ele achou uma transformação da forma $y=x^2+ax+b$que reduz a cubica geral à forma $y^3=K$. Uma outra transformação reduzia a quártica $ay^4+py^2+q=0$.

Tschirnhaus esperava desenvolver algoritmos semelhantes que reduzissem a equação geral de grau n a uma equação de grau n contendo apenas os termos de grau n e de grau zero. As suas transformações constituíram a contribuição mais prometedora para a resolução de equações durante o século XVII mas estavam longe de bastar para resolver a quíntica.

E.S.Bring (1736-1798) em 1786 mostrou que pode ser encontrada uma transformação de Tschirnhaus que reduz a quíntica geral à forma $y^5+py+q=0$ mas não conseguiu chegar à solução. Em 1834 G:B:Jerrard, Matemático inglês, mostrou que se pode achar uma transformação de Tschirnhaus que elimine os termos de graus n-1, n-2 e n-3 de qualquer equação polinomial de grau n>3 mas o alcance do método é limitado pelo facto de que equações de grau superior ou igual a cinco não serem, em geral resolúveis algebricamente. A forma $x^5+x+a=0$ é a chamada forma de Bring-Jerrard.

Um método único para resolver equações dos primeiros quatro graus foi proposto por Leonard Euler em 1732. Euler sempre supôs que uma equação algébrica de grau n podia ser reduzida a uma equação de grau n-1 como acontece, de facto, com as equações de grau menor ou igual a quatro. Então propôs, para as raízes da equação de grau n, a forma $x=\sqrt[n]{A_1}+\sqrt[n]{A_2}+\ldots+\sqrt[n]{A_n}$, onde os A_i são as raízes do chamado resolvente da equação (expressão construída em função das raízes da equação dada) embora nunca tenha feito os cálculos para n igual a cinco.

Foi Joseph Louis Lagrange (1736-1813) quem fez um exame cuidadoso, dos métodos até então conhecidos, para a resolução das equações algébricas, tratando em detalhe as equações de graus 1, 2, 3 e 4, no seu trabalho Reflexions sur la resolution algebrique des equations, publicado em 1770.

A História normalmente considera Lagrange como um matemático francês mas existem fontes que se referem a ele como italiano. O pai de Lagrange era Tesoureiro do Escritório de Trabalhos Públicos e Fortificações, em Turim e sua mãe filha de um médico Cambiano. Lagrange foi o primogénito de onze crianças. O seu interesse por matemática começou quando, em 1693, leu uma cópia do trabalho de Halley, sobre o uso da álgebra em óptica. Também foi atraído para a física pelo excelente ensino na Faculdade de Turim, mas decidiu fazer carreira em matemática.
Após examinar os métodos de resolução de equações algébricas, Lagrange concluí que todos esses métodos recaem no mesmo princípio geral: determinar funções racionais das raízes da equação dada, que sejam tais que, a equação ou equações dessas funções tenham grau menor que o grau da equação dada, ou pelo menos possam ser factorizadas em equações de grau menor que o da equação dada, e que se possa facilmente calcular as raízes desejadas a partir dos valores dessas funções.

As reflexões de Lagrange forneceram, pelo menos, duas contribuições para uma teoria geral das equações. Primeiramente ele introduziu símbolos para as raízes e fez cálculos com essas quantidades como se elas fossem conhecidas. Examinou como essas e outras quantidades realmente desconhecidas se relacionam com as quantidades realmente conhecidas que são os coeficientes da equação a ser resolvida. A segunda grande contribuição avança ainda mais no sentido de uma teoria das equações algébricas, pois foi ele o primeiro a observar que propriedades de uma equação geral podem ser deduzidas a partir do efeito produzido na equação e em equações auxiliares, pele permutação das raízes da equação dada. Ele observou, por exemplo, que se para a equação $x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, denotarmos as suas raízes por x_1, $x_2, \ldots$, x_n então teremos que

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n$$

.

.

.

$$a_n = (-1)^n x_1x_2 \ldots x_n$$

Assim esses coeficientes não se alteram por qualquer permutação das raízes. No entanto, algumas equações auxiliares, que ele chamou de reduzidas, não permanecem inalteradas por todas as permutações das raízes. É importante notar que as raízes x_1, $x_2, \ldots$, x_n são consideradas variáveis distintas e independentes, por isso o que permanece inalterado ou não, é a aparência formal da expressão e não o seu valor numérico. Foram esses conceitos introduzidos no trabalho de Lagrange que serviram de base para Paolo Runi (1765-1822) e Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrarem a insolubilidade das equações de grau maior ou igual a cinco e para Evariste Galois (1811-1832) desenvolver o trabalho que estabelece as condições de solubilidade de uma equação.

De facto, foi Runi quem primeiro destruiu a convicção dos estudiosos de álgebra quando demonstrou em 1799 a não existência de uma formula resolvente que reduzisse o grau de equações de grau 5. Logo, também demonstrou indirectamente que as equações de quinto e maiores graus, não eram solúveis por radicais. Estes resultados estão contidos numa longa memória intitulada Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generale di grado superiore al quarto. O trabalho de Runi mostra de forma implícita, alguns conceitos que Evarist Galois usaria depois.

O que mais tarde viria ser chamado de grupo de permutação, Runi chamou apenas de permutação, e a palavra no singular, significava o grupo de todas as permutações para os quais uma função permaneceu inalterada.

No seu trabalho Riflessione intorno all´a soluzione delle equazioni algebraiche generali de 1813, Runi deu uma demonstração diferente de seu teorema, que aparece nos mais recentes trabalhos da álgebra clássica, chamado erradamente a modificação de ”Wantzel’ do teorema de Abel, pois esta modificação deve-se a Runi. Devido a um de seus professores, Bernt Holmboe, Abel começou a estudar textos de matemática de nível universitário, lendo os trabalhos de Euler, Isaac Newton (1643-1727), Joseph Jerôme Lalande (1732-1807) e Jean D’Alembert (1717-1783). Com a morte de seu pai, ele teve a responsabilidade de apoiar a mãe e família, sem recursos extras que o permitissem completar sua educação escolar e iniciar uma universidade. Com uma bolsa de estudos permaneceu na escola e pôde entrar na Universidade de Christiania em 1821, formando-se em 1822. Trabalhou na solução das equações quínticas e enviou seu artigo a vários matemáticos inclusive Gauss, o qual pretendia visitar em uma viagem usando uma bolsa do governo norueguês. Porém, com a reacção negativa de Gauss a seu trabalho, decidiu fixar-se em Paris. Lá continuou produzindo uma matemática de alta qualidade, porém com sua saúde comprometida. Abel morre sem conseguir um cargo numa universidade, que daria sustento a ele e a sua família.

A importância particular do trabalho de Abel, «Memoire sur une classe particulière d’equations résolubles algèbriquement» (1829), está na demonstração de que, nas equações resolúveis por radicais, todas as raízes podiam ser expressas por funções radicais de qualquer outra raiz, e que estas funções eram permutáveis com respeito às quatro operações aritméticas.

3.1. A figura de Galois

Évariste Galois, nasceu em Bourg-la-Reine, no sul de Paris, a 25 de Outubro de 1811. O seu pai Nicholas Gabriel Galois era partidário de Napoleão e cabeça do partido liberal da localidade, chegando a ser eleito prefeito da Vila.

Durante os primeiros doze anos da sua vida, Galois foi educado pela sua mãe, Adelaide Marie Demante, que lhe proporcionou uma sólida formação em Latim e Grego.

A educação regular de Galois começou em 1823, quando ingressou no Colégio interno de Lois-le-Grand.

No internato, Galois começou imediatamente a sensibilizar-se politicamente. As simpatias liberais e democráticas adquiridas de seus pais, estavam em consonância com a simpatia da maioria dos colegas da escola.

Durante o primeiro ano de internato vários acontecimentos marcaram e influenciaram a sua vida. Nesse período , devido às lutas entre monárquicos e republicanos, alguns dos seus colegas mais velhos, simpatizantes dos republicanos, planearam uma rebelião mas foram descobertos. Os seus lideres foram imediatamente expulsos e no dia seguinte, quando o director da escola exigiu uma demonstração de fidelidade a Luís XVIII muitos alunos se recusaram e mais de cem foram expulsos. Galois ao ver os seus colegas serem humilhados, aumentou as suas tendências republicanas.

Durante os primeiros anos de liceu, Galois ganhou vários prémios de Grego e Latim. No entanto, durante o terceiro ano o seu trabalho de retórica foi considerado insuficiente e teve de repetir o curso. Só depois deste tropeção Galois começa o seu primeiro curso de Matemática. Tinha então quinze anos. O Curso dirigido por Hippolyte Jean Vernier, despertou o génio matemático de Galois. Depois de devorar os manuais em uso, foi direito às grandes obras da época, devorando os elementos de Geometria de Adrien Marie Legendre e os apontamentos originais de Joseph Louis Lagrange: A resolução de equações algébricas, a Teoria das funções analíticas e lições sobre o calculo de funções. Foi sem duvida de Lagrange que aprendeu a primeira teoria das equações, teoria essa que ele mesmo haveria de desenvolver, durante os quatro anos seguintes, deixando contribuições fundamentais.

Em 1828, tenta ingressar na Escola Politécnica mas a sua admissão é recusada pois Galois não consegue cumprir as exigências formais dos examinadores. A sua reprovação não o impediu de continuar a estudar. Volta ao colégio e começa a assistir ás aulas do professor Louis Paul Émile Richard, como aluno ouvinte. Neste período conhece os trabalhos de Abel, Cauchy e Jacobi.

Cauchy era um matemático consagrado do seu tempo e professor na Academia das Ciências em França. Já Abel e Jacobi, com idades próximas da de Galois, contribuíram com os seus trabalhos, sobre as resolubilidade de equações de 5º grau, para os estudos que Galois fez mais tarde.

Em 1829, Galois publica o seu primeiro trabalho. Intitulava-se “Demonstração de um teorema sobre fracções continuas periódicas”, e apareceu nos “Annales de Mathématiques” de Joseph Diaz Gergonne. Este artigo, sem dúvida foi um pequeno aparte. Galois tinha já dirigido a sua atenção para a teoria das equações. Aos 17 anos estava já a trabalhar num dos mais difíceis problemas da matemática da sua época. Galois conseguiu dar critérios definitivos para determinar se as soluções de uma equação polinomial podiam ou não calcular-se por radicais. As suas investigações abriram as portas a uma teoria cujas aplicações superam em muito os limites da Teoria de Equações: A Teoria de Grupos. Os seus trabalhos de pesquisa foram tão bons que foi incentivado a envia-los para avaliação à Academia das Ciências, onde Cauchy era um dos membros.

Faltavam-lhe menos de 2 meses para se propor pela 2ª vez às provas de acesso à escola Politécnica, mas os acontecimentos da sua vida tiveram um mau desfecho. Apenas umas semanas antes do exame o seu pai suicida-se após uma campanha de difamação realizada por um sacerdote Jesuíta. As circunstancias em que ia realizar o exame eram as piores. Conta-se que perdeu a calma durante a prova oral e atirou um apagador á cabeça do examinador, acertando em cheio. Depois deste sórdido episódio a sua entrada no politécnico fica irremediavelmente vedada.

Sem se deixar abalar pelos acontecimentos, Galois continuou a sua escalada na investigação matemática, procurando formas de resolver equações de 5º grau e em 29 de Dezembro de 1829 é admitido na Escola Normal Superior.

Em Fevereiro de 1830, Galois envia a Cauchy trabalhos adicionais sobre as teorias das equações. Cauchy ficando bastante impressionado com os seus trabalhos incentiva-o a participar na competição do Grande Prémio de Matemática da Academia Entusiasmado com a proposta, Galois trabalha incessantemente na compilação dos seus trabalhos e remete-os ao secretário da Academia, Joseph Fourier, também um grande matemático da sua época. Infelizmente Fourier morre antes de entregar os trabalhos de Galois ao comité de avaliação. Galois atribuiu a sua pouca sorte à Academia, acusando o Jurado de recusar o seu trabalho antes de ser submetido a avaliação por ser dele. Hoje existem poucas duvidas que o seu comportamento perante as autoridades começava a mostrar tendências paranóicas.

Apesar destes contratempos, Galois continuou produtivo e começou a publicar no Boletim das Ciências (matemáticas, astronómicas, físicas e químicas) do Barão de Férussac. Os seus artigos provam claramente que em 1830 tinha ido mais longe que qualquer outro matemático na busca das condições que determinam a solubilidade das equações, embora não dispusesse de uma análise completa.
Em Janeiro de 1831, chegou a uma conclusão que submeteu à Academia numa nova memória a pedido do matemático Simeón Denis Poisson. Esta memória é a mais importante das obras de Galois. Poisson fez tudo o que estava ao seu alcance para compreender o manuscrito, mas não conseguindo recomendou à Academia que o recusa-se e incentivou Galois a melhorar a sua exposição.

Na época em que Galois tinha quase terminado o seu trabalho em Teoria de Grupos, a sua vida seguia uma forte influência política. Em Julho de 1830 a oposição republicana invadiu as ruas e obrigou o rei Carlos X a exilar-se. Enquanto os estudantes esquerdistas da Escola Politécnica tiveram um papel activo na luta, Galois e os seus companheiros da Escola Normal foram fechados dentro da escola pelo director indignado.

Para frustração de Galois e de outros liberais o trono foi novamente ocupado, desta vez por Luís Filipe de Orléans.

Nos meses imediatos à revolução, Galois entrou em contacto com líderes republicanos, ingressou em sociedades republicanas e participou nas grandes manifestações que atormentavam Paris.

Em Dezembro de 1830, a ruptura de Galois com a Escola Normal era já oficial. Galois tinha escrito uma carta ao seu director, onde o chamando-o traidor pela sua atitude durante a revolução de Julho, sendo por isso expulso. Depois de abandonar a Escola Normal viveu uns tempos com a sua mãe em Paris, mas a convivência com ele era tão complicada que a sua própria mãe o abandonou.

Em 9 de Maio de 1831, dezanove oficiais da Artilharia da Guarda Nacional, que foram presos por conspiração para derrubar o governo comemoravam a absolvição, num jantar, juntamente com mais duzentos republicanos. Durante o jantar, Galois, um dos mais ardentes republicanos, ergueu o seu cálice e com um punhal na mão fazia ameaças contra o Rei Luís Filipe I.

Após alguns dias do incidente foi detido e levado para a prisão de Saint-Pélagie onde passou um mês. Durante esse período, foi acusado de ameaçar a vida do Rei e, em consequência, foi levado a julgamento. O júri formado por jovens da sua idade absolveu-o porque devido ao barulho quando do jantar em que participara Galois, não se ouviu qualquer ameaça directa contra o Rei.

Em catorze de Julho, dia da Bastilha, menos de um mês depois da sua absolvição, Galois foi novamente detido, desta vez por usar ilegalmente um uniforme da Artilharia da Guarda Nacional que tinha sido abolida por ser considerada uma ameaça ao trono. Este gesto de Galois foi considerado um desafio às autoridades levando-o à condenação foi de seis meses de prisão.

A permanência de Galois na prisão exerceu sobre ele, efeitos devastadores, que passavam do mais profundo desalento à ira cega.

Em meados de Março de 1832 foi transferido de Saint-Pélagie para a casa de Saude Sieur Faultrier devido a uma epidemia de cólera que se alastrou por Paris. Aí conheceu Stéphanie-Félice Poterine du Motel, filha de um médico residente e apaixonou-se.

Depois da sua libertação, em vinte e nove de Abril de 1832, começou a troca de correspondência com Stephanie, isto porque ela estava comprometida com Pescheux d'Herinville que, posteriormente, descobriu a infidelidade da sua noiva.

D'Herinville não teve outra alternativa, a não ser desafiar Galois para um duelo que acabou com a sua vida.

Apesar da trágica e curta vida, Galois deixou um grande contributo para a evolução desta ciência. Segundo Bento Jesus Caraça[7], tal com Galois, também Abel, mencionado anteriormente, teve uma vida semelhante. Abel morreu com 27 anos, vitima de tuberculose, em 1929 e era detentor de uma fantástica precocidade. Aos vinte e quatro anos apresentou à Academia das Ciências de Paris uma memória sobre as Transcendentes Elípticas de que mais tarde Hermite havia de dizer que contém matéria para ocupar matemáticos durante quinhentos anos.

Une-os ainda a incompreensão e o desinteresse de que foram alvo por parte dos consagrados do seu tempo: os maiores, Cauchy em França e Gauss na Alemanha, deixaram passar, sem os verem, os dois maiores génios matemáticos do século XIX. Gauss não se dignou a ler a memória que Abel lhe mandara sobre a impossibilidade da resolução da equação de 5º grau por meio de radicais, afastando-a desdenhosamente com este comentário ao título- “mais uma monstruosidade!”; Cauchy, absorvido na sua obra, perdeu as que Abel em 1826, e Galois dois anos mais tarde, enviaram à Academia das Ciências. Para que a infelicidade da Academia fosse completa, não faltaram episódios pitorescos- Poisson escreveu na capa duma memória de Galois, que não compreendera, um visto em boa caligrafia, Legendre desculpando-se, a respeito da memória de Abel, disse que esta era ilegivel e escrita numa tinta quase branca.

Outro traço de união consiste no facto de ambos se terem ocupado, independentemente um do outro, e sem se terem conhecido, do mesmo assunto- a resolubilidade das equações algébricas.

Acima de tudo, os dois estão irmanados numa coisa- a criminosa indiferença com que a Sociedade os tratou, condenando, como diz Tannery, um a morrer de fome, outro a viver ou a morrer no cárcere.

Mas ao lado de tantas semelhanças existiam diferenças abismais nas condições psicológicas, nos modos de trabalhar e na atitude perante a vida que ambos apresentaram. O que num, Abel, é doçura, timidez, resignação, é no outro altivez, acção e revolta.

Ambos sofrem, mas na maneira de sofrer são dispares- Abel, fraco, de sensibilidade infantil, retrai-se e procura um ponto de apoio afectivo; Galois, personalidade incomparavelmente mais forte, revolta-se e ataca, ataca sempre. Abel

[7] Obra constante da bibliografia, [003]

incapaz de ultrapassar os limites do individual, nunca aborda de alto a posição do homem, não relaciona os seus males com males gerais da sociedade do seu tempo, restringe a sua ambição à tranquilidade de um lugar na Universidade; Galois, mais esclarecido, discerne as conexões intimas do corpo social, vê nos defeitos orgânicos de base a razão profunda de que os casos individuais são o reflexo, e, logicamente, combate as causas, atira-se para a luta, bate-se na rua, com tal ardor, tal exaltação no dom de si mesmo que chega a dizer “se for preciso um cadáver para que o povo se revolte, dar-lhe-ei o meu”.

Ao seu espirito superiormente claro nada passa despercebido e, pensando nas condições desastrosas da investigação cientifica, diz: “Aqui, como em todas as ciências, cada época tem de alguma maneira as suas questões do momento: há questões vivas que fixam ao mesmo tempo os espíritos mais esclarecidos... Parece muitas vezes que as mesmas ideias aparecem a vários como uma revelação. Se se procura a causa, é fácil encontrá-la nas obras daqueles que nos precederam, nas quais essas ideias estão presentes sem os seus autores darem por isso. A ciência não tirou, até hoje, grande partido desta coincidência tantas vezes observada nas investigações dos sábios. Uma concorrência desgraçada, uma rivalidade degradante têm sido os seus principais frutos. Não é, contudo, difícil reconhecer neste facto a prova de que os sábios não são, mais que outros homens, feitos para o isolamento, que eles pertencem também à sua época e que, cedo ou tarde, multiplicarão as suas forças pela associação. Então, quanto tempo será poupado para a Ciência!” E noutro passo, escrito na prisão de Santa Pelágia em Outubro de 1831: “... infelizmente, não se pensa que o livro mais precioso do mais sábio seria aquele em que ele dissesse tudo o que não sabe, não se pensa que um autor nunca prejudica tanto os seus leitores como quando dissimula uma dificuldade. Quando a concorrência, isto é, o egoísmo, deixarem de reinar nas ciências, quando uns se associarem com os outros para estudar, em vez de mandar cartas fechadas às Academias, então tratar-se-á de publicar as menores observações, por pouco novas que sejam, acrescentando: “não sei o resto”.

3.2. Álgebra Pura[8]

Vamos evidenciar um polinómio do 5º grau com coeficientes racionais que não será solúvel por radicais. Dizer que um polinómio é solúvel por radicais equivale a dizer que as suas raízes podem ser obtidas a partir dos elementos de K usando um número finito as operações do corpo K e a operação «raiz índice n». Assim sendo, evidenciar um polinómio que não seja solúvel por radicais representa que há equações de 5º grau que não podem ser resolvidas mediante uma fórmula resolvente geral e, portanto, não existe uma fórmula resolvente para equações de grau superior a quatro.

Nesta secção apresentamos alguns conceitos e proposições de Álgebra necessários para o trabalho posterior. Na última proposição apresentamos uma ideia da demonstração mas nas proposições anteriores essa demonstração não é apresentada. No entanto, esta lista foi elaborada de modo que qualquer proposição possa ser demonstrada usando definições e proposições já anteriormente apresentadas.

Seja A um conjunto não vazio e sejam $+$ e $\times$ duas operações binárias em A. Dizemos que $(A,+,\times)$ é um **anel** quando:

i) $(A,+)$ é grupo abeliano

ii) $(A,\times)$ é semigrupo

iii) $\forall_{a,b,c\in A} : a(b+c) = ab + ac \wedge (a+b)c = ac + bc$

Sejam A e B anéis. Seja $\varphi\!:\!\mathrm{A} \to \mathrm{B}$. Dizemos que φ é um **isomorfismo** de anéis quando:

i) φ é bijectiva

ii) $j(x+y) = j(x) + j(y), \forall_{x,y\in A}$

iii) $j(xy) = j(x)j(y), \forall_{x,y\in A}$

Dizemos ainda que A e B são **isomorfos** quando existe pelo menos um isomorfismo de A em B.

Seja $(A,+,\times)$ um anel. Dizemos que $(A,+,\times)$ é **corpo** quando, todos os elementos de $A\backslash\{\mathbf{0}\}$ têm oposto para $\times$ e além disso $\times$ é comutativa.

---

[8] Nesta secção foram preferencialmente usadas as obra constante da bibliografia, [004], [008], [011].

Seja A um anel. Um subconjunto N de A diz-se um **ideal** de A quando:

i) $(N,+)$ é um subgrupo de $(A,+)$

ii) $NA \cup AN \subset N$

Começamos aqui a sequência de proposições necessárias para cumprir o nosso objectivo de demonstrar que não existem métodos gerais para resolver equações polinomiais de grau superior a 4.

Proposição 1:

Seja A um anel com elemento um. Seja N um ideal de A onde existe n invertível. Então $N = A$.

Consideremos agora dois anéis, A e B. Seja $\varphi: A \to B$. φ diz-se um **homomorfismo** de A sobre B quando, para todo $x, y \in A$ temos $j(x+y) = j(x) + j(y)$ e $j(xy) = j(x)j(y)$.

Agora algumas propriedades importantes dos homomorfismo.

Proposição 2:

Sejam A e A' anéis. Seja $\varphi: A \to A'$ um homomorfismo de anéis. Então:

i) $j(0_A) = 0_{A'}$

ii) $\forall_{a \in A} : j(-a) = -j(a)$

iii) S subanel de A $\Rightarrow$ $j(S)$ subanel $j(A)$

iv) N ideal de A $\Rightarrow$ $j(N)$ ideal de $j(A)$

v) 1 é elemento um de A $\Rightarrow$ $j(1)$ é elemento um de $j(A)$

vi) S' subanel de A' $\Rightarrow$ $j^{-1}(S')$ subanel A

vii) N' ideal de $j(A)$ $\Rightarrow$ $j^{-1}(N')$ ideal de A

viii) Ker φ é ideal de A

De seguida um teorema que, pela sua importância, merece até o nome de Teorema Fundamental do Homomorfismo.

Proposição 3:

Seja $\varphi: A \to B$ um homomorfismo de anéis. Então $\begin{array}{rccc} \Phi: & A_{/Ker\, j} & \to & j(A) \\ & a + Ker j & \mapsto & j(a) \end{array}$ é um isomorfismo.

Seja A um anel e M um ideal de A. Dizemos que M é um **ideal maximal** de A quando $M \neq A$ e para todo o subconjunto próprio N de A, se N é ideal de A então M não está estritamente contido em N.

Proposição 4:

Seja A um anel comutativo com elemento um e seja M um ideal de A. M é maximal se e só se $A_{/M}$ é corpo.

Seja A um anel e N um ideal de A. Dizemos que N é um **ideal primo** quando $\forall_{a,b\in A}: ab \in N \Rightarrow a \in N \vee b \in N$.

Proposição5:

Seja A um anel comutativo com elemento um. Então, todo o ideal maximal M é primo.

3.3. *Polinómios Algébricos*

Seja A um anel com elemento um. Definimos **polinómio** com coeficientes em A como sendo uma sequência infinita do tipo $(a_0,\ldots,a_n,0,\ldots)$ com $a_i \in A$ para $i\in\{0,\ldots,n\}$. Sendo $X=(0,1_A,0,\ldots)$, representamos o conjunto dos polinómios por $A[X]$.

Proposição 6:

Seja A um anel e sejam $a=(a_0,\ldots,a_n,0,\ldots)$ e $b=(b_0,\ldots,b_n,0,\ldots)$ elementos de $A[X]$. A correspondência de $A[X]\times A[X]$ em $A[X]$ que a (a,b) associa $(a_0+b_0,\ldots,a_n+b_n,0,\ldots)$ é uma operação binária em $A[X]$ que se designa por +, e a correspondência de $A[X]\times A[X]$ em $A[X]$ que a (a,b) associa $(c_0,\ldots,c_{2n},0,\ldots)$ onde, para $i\in\{0,\ldots,2n\}$, $c_i = \sum_{\{(j,k)\in(\mathbf{N}_0)^2:j+k=i\}} a_j b_k$, é uma operação binária em $A[X]$ que se designa por $\times$.

Consideremos o polinómio $(a_0,\ldots,a_n,0,\ldots)$ representado por $f(X)$. Se $a_n \neq 0$ então a_n diz-se o **coeficiente guia** do polinómio e n diz-se o **grau do polinómio**. O grau do polinómio nulo é zero. Denotamos o grau de $f(X)$ por $gr[f(X)]$.

Proposição 7:

Seja A um anel com elemento um. Então $(A[X],+,\times)$ é anel com elemento um $(1_A,0,\ldots)$. Além disso se A é anel comutativo então $A[X]$ é anel comutativo.

Proposição 8:

Sejam K e M corpos, com K subcorpo de M. Seja $\alpha \in M$ e

$$\begin{array}{llll} \Phi_a : & K[X] & \longrightarrow & M \\ & b_n X^n + \ldots + b_0 & \mapsto & b_n a^n + \ldots + b_0 \end{array}$$, então Φ_α é um homomorfismo.

Ao homomorfismo da proposição anterior chamamos **homomorfismo de avaliação**. Sejam K e M corpos, com K subcorpo de M e seja $\alpha \in M$. Dizemos que α é **zero (ou raiz) de um polinómio** não nulo $f(X) \in K[X]$ quando $\Phi_a(f(X)) = 0$. Representamos $\Phi_a(f(X))$ por $f(a)$.

3.3.1. Factorização

Começamos esta secção por um algoritmo que permite dividir polinómios.

Proposição 9:

Seja K um corpo e sejam $f(X), g(X) \in K[X]$ de forma que $gr[g(X)] \geq 1$. Então existem $q(X), r(X) \in K[X]$ tais que $f(X) = g(X)q(X) + r(X)$ e $gr[r(X)] < gr[g(X)]$. Além disso q(X) e r(X) são únicos.

Seja $f(X) \in K[X]$. Dizemos que f(X) é **redutível** em K quando existem $g(X), h(X) \in K[X]$ tais que $f(X) = g(X)h(X)$ com $gr[g(X)] < gr[f(X)]$ e $gr[h(X)] < gr[f(X)]$. Caso contrário dizemos que f(X) é irredutível em K.

Proposição 10:

Sejam $f(X), g(X), h(X) \in \mathbf{Z}[X]$ tais que $f(X) = g(X)h(X)$. Seja p um número primo. Se p divide todos os coeficientes de f(X) então p divide todos os coeficientes de g(X) ou p divide todos os coeficientes de h(X).

Seja N um ideal de A. N diz-se um **ideal principal** de A quando existe $a \in A$ tal que $N = <a>$.

Proposição 11:

Seja K um corpo e N um ideal de K[X]. Então N é principal.

Proposição 12:

Seja $p(X) \in K[X]$ com $gr[p(X)] > 0$. Então $\langle p(X) \rangle$ é maximal se e só se p(X) é irredutível.

3.3.2. Extensão de Corpos

Sejam K e M corpos. Dizemos que M é uma **extensão** de K quando K é um subcorpo de M.

Seja K um corpo e seja M uma extensão de K. Um elemento $\alpha \in M$ diz-se **algébrico sobre** K quando existe um polinómio não nulo $f(X) \in K[X]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Caso contrário α diz-se **transcendente** sobre K. Diz-se que α é algébrico quando α é algébrico sobre $\mathbf{Q}$, e diz-se que α é transcendente quando α é transcendente sobre $\mathbf{Q}$.

Proposição 13:

Seja K um corpo, seja M uma extensão de K e seja $\alpha \in M$ algébrico sobre K. Então existe um e um só polinómio mónico irredutível $p(X) \in K[X]$ tal que:

i) $p(\alpha) = 0$

ii) se $f(X) \in K[X]$ é tal que $f(\alpha) = 0$ então p(X) divide f(X).

Ao polinómio da proposição anterior chamamos **polinómio mínimo** de α sobre K e denotamo-lo por $min(a, K)$. O grau de $min(a, K)$ diz-se o grau de α sobre K e denota-se por $gr(a, K)$.

Proposição 14:

Seja M uma extensão de K e seja $\alpha \in M$ algébrico sobre K. Sendo Φ_α o homomorfismo de avaliação em α, temos

i) $\Phi_a(K[X])$ é um subcorpo de M

i) K é um subcorpo de $\Phi_a(K[X])$

iii) $\Phi_a(K[X])$ é o menor subcorpo de M que contém K e ao qual pertence α.

Seja K um corpo, L uma extensão de K, $\alpha \in L$ e Φ_α o homomorfismo de avaliação. O contradomínio de Φ_α é representado por $K(\alpha)$. Seja K um corpo, L uma extensão de K. Dizemos que L é uma **extensão simples** de K quando $L = K(a)$ para algum $\alpha \in L$.

3.3.3. Espaços vectoriais

Seja K um corpo. Um **espaço vectorial** sobre K consiste num grupo abeliano $(V,+)$ e numa multiplicação $\begin{array}{rcl} K\times V & \to & V \\ (l,a) & \mapsto & la \end{array}$

i) $\forall_{l,m\in K}\forall_{a\in V}:(l+m)a = la + ma$

ii) $\forall_{l\in K}\forall_{a,b\in V}: l(a+b) = la + lb$

iii) $\forall_{l,m\in K}\forall_{a\in V}: l(ma) = (lm)a$

iv) $\forall_{a\in V}: 1a = a$

Os elementos de V designam-se por **vectores** e os elementos de K designam-se por **escalares**.

Seja V um espaço vectorial sobre K e sejam $(a_i)_{i\in I}$ vectores de V. Estes vectores dizem-se **linearmente independentes** quando para qualquer $n \geq 1$, quaisquer $i_1,\ldots,i_n \in I$ com $i_j \neq i_k$ e $j \neq k$, e quaisquer $l_1,\ldots,l_n \in K$ temos $l_1 a_{i_1} + \ldots + l_n a_{i_n} = 0 \Rightarrow l_1 = \ldots = l_n = 0$. Caso contrário os vectores dizem-se **linearmente dependentes**.

Uma família de geradores de V linearmente independentes diz-se uma **base** de V.

Dizemos que V tem dimensão infinita quando tem uma base infinita. Caso contrário a **dimensão** é o número de vectores numa base de V e denota-se por [V:K].

Seja M uma extensão de K. Dizemos que M é uma **extensão algébrica** de K quando todo o elemento de M é algébrico sobre K.

Seja M uma extensão de K. Dizemos que M é uma **extensão finita** de grau n quando $[M:K]=n$.

Proposição 15:

Seja L uma extensão finita do corpo K e seja M uma extensão finita de L, então M é uma extensão finita de K e $[M:K]=[M:L][L:K]$.

3.4. Teoria de Galois

3.4.1. Grupo de Galois

Seja K um corpo e seja M uma extensão de K. O conjunto dos automorfismos de M que fixam os elementos de K chama-se **grupo de Galois** e representa-se por $\mathbf{G}(M,K)$.

Dizemos que o operador γ: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ tem as **propriedades de fecho** quando, para todo $A \in \mathbf{A}$ e para todo $B \in \mathbf{A}$ temos

i) $g(g(A))=g(A)$

ii) $A \subset B \Rightarrow g(A) \subset g(B)$

iii) $A \subset g(A)$

Seja K um corpo e seja M uma extensão de K. Seja $\mathbf{C}=\{L corpo : K \leq L \leq M\}$. Para cada $L \in \mathbf{C}$ define-se $L^{+}=\{j \in \mathbf{G}(M,K) : j(u)=u, \forall_{u\in L}\}$.

Proposição 16:

Seja K um corpo e seja M uma extensão de K. Sejam $L_1, L_2 \in \mathbf{C}$ com L_1 subcorpo de L_2. Temos L_2^{+} é um subgrupo de L_1^{+}.

Seja K um corpo e seja M uma extensão de K. Para todo $H \in \mathbf{S}$, H^f é o **corpo fixo** de H.

Seja K um corpo e seja M uma extensão de K e seja $L \in \mathbf{C}$. Dizemos que L é **fechado** quando $g(L) = L$. Dizemos que a extensão M de K é fechada quando K é fechado.

3.4.2. Corpo das Raízes

Seja A um conjunto não vazio e seja $\leq$ uma relação de ordem parcial definida em A. Seja $B \subset A$. B diz-se uma **cadeia** de A quando para quaisquer $b, b' \in B$ temos $b \leq b'$ ou $b' \leq b$.

Necessitamos de assumir o seguinte axioma, conhecido por Lema de Zorn.

Seja A um conjunto não vazio e seja $\leq$ uma relação de ordem parcial definida em A. Se, para qualquer cadeia $B \subset A$ existe $a \in A$ tal que $b \leq a$ para todo $b \in B$, então existe $c \in A$ tal que c é maximal em A.

Proposição 17:

Sejam $K, K' \in \mathbf{C}$. Seja φ: $K \rightarrow K'$ um isomorfismo. Seja M uma extensão algébrica de K tal que $M \leq \mathbf{C}$. Então existe um homomorfismo injectivo Φ: $M \rightarrow \overline{K}'$ tal que $\Phi_{|K} = \varphi$.

Proposição 18:

Seja φ: $\overline{K} \rightarrow \overline{K}$ um homomorfismo injectivo que fixa os elementos de K. Então φ é um automorfismo.

Seja $K \leq \mathbf{C}$ e $f(X) \in K[X] \setminus \{0\}$. O **corpo das raízes** de f(X) é o menor subcorpo de $\mathbf{C}$ que contém K e ao qual pertencem todas as raízes de f(X) em $\mathbf{C}$.

Seja M uma extensão finita de K. Dizemos que M é uma **extensão normal** de K quando para qualquer $j \in \mathbf{G}(\overline{K}, K)$ temos $j_{|M} \in \mathbf{G}(M, K)$.

Proposição 19:

Sejam $K \leq L \leq M \leq \mathbf{C}$ tais que M é uma extensão normal de K. Então:

i) se $j \in \mathbf{G}(L,K)$ então existe $\Phi \in \mathbf{G}(M,K)$ tal que $\Phi_{|L} = j$

ii) se L é uma extensão normal de K e $y \in \mathbf{G}(M,K)$ então $y_{|L} \in \mathbf{G}(L,K)$.

Proposição 20:

Sejam $K \leq L \leq M \leq \mathbf{C}$ tais que M é uma extensão normal de K. Temos L é uma extensão normal de K se e só se $\mathbf{G}(M,L) \trianglelefteq \mathbf{G}(M,K)$. Temos também, se L é uma extensão normal de K então $\mathbf{G}(L,K) \approx \mathbf{G}(M,K)/_{\mathbf{G}(M,L)}$.

3.4.3. *Resolução de Equações por Meio de Radicais*

Seja $(G,+)$ um grupo e H um seu subgrupo. Dizemos que H é um **subgrupo normal** de G quando, para todo $a \in G$ temos, $a + H + (-a) = H$, e escrevemos $H \trianglelefteq G$.

Seja G um grupo. Dizemos que G é **solúvel** quando existem $H_0, \ldots, H_n$ subgrupos de G tais que

i) $\{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = G$

ii) $(H_i : H_{i-1})$ é primo para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Proposição 21:

Seja G um grupo e seja $H \trianglelefteq G$. Seja $K \leq G/_H$ e seja $\tilde{K} = \{g \in G : gH \in K\}$. Então $\tilde{K} \leq G$, $H \trianglelefteq \tilde{K}$ e $K \approx \tilde{K}/_H$.

Proposição 22:

Seja G um grupo e seja $H \trianglelefteq G$ tal que H e $G/_H$ são solúveis. Então G é solúvel.

Proposição 23:

Sejam $\{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_n = G$ tais que $H_i/_{H_{i-1}}$ é solúvel para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então G é solúvel.

Para $n \in \mathbf{N}$ define-se o **grupo simétrico em** n **letras**, denotado por S_n, como sendo o conjunto das funções bijectivas em $\{1,2,...,n\}$ algebrizado pela operação composição de funções.

Proposição 24:

S_5 não é solúvel.

As duas próximas proposições são conhecidas por teoremas de Sylow.

Proposição 25:

Seja G um grupo de ordem $p^r m$ com p primo, $p \nmid m$ e $r > 0$. Então para $i \in \{1,\ldots,r\}$ G tem um subgrupo H_i de ordem p^i. Além disso, para $i \in \{1,\ldots,r-1\}$ todo o subgrupo K_i de G de ordem p^i é normal em algum subgrupo K_{i+1} de ordem p^{i+1} que contém K_i.

Proposição 26:

Seja G um grupo de ordem $p^r m$ com p primo, $p \nmid m$ e $r > 0$. Todos os subgrupos de ordem p^r são conjugados. Além disso o seu número é congruente módulo p e divide ord G.

Seja M uma extensão de K. M diz-se uma **extensão por radicais** quando existem $a_1,\ldots,a_n \in M$ tais que $M = K(a_1,\ldots,a_n)$, existe $r_1 \in \mathbf{Z}^+$ tal que $\alpha_1^{r_1} \in K$ e para $i \in \{2,\ldots,n\}$ temos $a_i^{r_i} \in K(a_1,\ldots,a_{i-1})$ para algum $r_i \in \mathbf{Z}^+$.

Seja M uma extensão de K. Seja $f(X) \in K[X]^*$ e sejam $a_1,\ldots,a_n \in M$ as raízes de $f(X)$. Dizemos que $f(X)$ é solúvel por radicais quando $K(a_1,\ldots,a_n)$ é uma extensão por radicais de K.

Proposição 27:

Seja $K \leq \mathbf{C}$ e $a \in K$. Seja M o corpo das raízes de $x^n - a$. Então $\mathbf{G}(M,K)$ é solúvel.

Proposição 28:

Seja $K \leq \mathbf{C}$ e seja $f(X) \in K[X]^*$ solúvel por radicais. Seja M o corpo das raízes de $f(X)$. Então $\mathbf{G}(M,K)$ é solúvel.

Proposição 29:

Seja $H \leq S_n$. Se H tiver permutações ímpares, então o número de permutações ímpares é igual ao número de permutações pares.

Proposição 30:

Seja $H \leq S_5$ tal que H contém um 5-ciclo e uma transposição. Então $H = S_5$.

3.4.4. Equações do 5º Grau

Proposição 31:

Seja $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ irredutível do 5º grau com três raízes reais e duas imaginárias em $\mathbf{C}$. Seja M o corpo das raízes de $f(X)$. Então $\mathbf{G}(M,\mathbf{Q}) \approx S_5$

Proposição 32:

Existe um polinómio em $\mathbf{Q}[X]$ do 5º grau que não é solúvel por radicais em $\mathbf{Q}$.

Demonstração:

Seja $f(X) = 2X^5 - 5X^4 + 5$. Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 5$, $f(2) = -11$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ então sabemos que existem pelo menos três zeros de $f(X)$. Como $f'(X) = 10X^4 - 20X^3 = 10X^3(X-2)$ que se anula para $X = 0$ e $X = 2$ então em cada um dos intervalos $]-\infty,0[$, $]0,2[$ e $]2,+\infty[$ existe um e um só zero real.

Designemos por M o corpo das raízes de $f(X)$. Pela proposição 31, para qualquer polinómio do 5º grau em $\mathbf{Q}[X]$ que tenha três reais e duas complexas é tal que o seu grupo de Galois, $\mathbf{G}(M,\mathbf{Q})$, é isomorfo a S_5. Ora, pela proposição 24, S_5 não é solúvel, logo $\mathbf{G}(M,\mathbf{Q})$ não é solúvel. Se $f(X)$ fosse solúvel por radicais em $\mathbf{Q}$ então, pela proposição 28, $\mathbf{G}(M,\mathbf{Q})$ seria solúvel, logo $f(X)$ não é solúvel por radicais em $\mathbf{Q}$.

Conclusão

Com esta tese, cumpro o objectivo, de vários anos, de relacionar vários métodos de resolução de equações polinomiais e sua evolução ao longo dos tempos.

Depois da pesquisa histórica feita tiramos conclusões surpreendentes ao perceber o quão evoluídos já eram os métodos empregados há alguns milénios na Mesopotâmia, e até mesmo no antigo Egipto, e que vários métodos usados na álgebra mais recente são exactamente os mesmos dessa altura diferindo na notação com que são apresentados.

Com os matemáticos europeus no fim da Idade Média, principalmente os italianos entramos na descoberta histórica da resolução de equações com uma abordagem do tipo que estamos habituados a ensinar no ensino básico e secundário. A resolução de equações cúbicas é dos temas mais interessantes em termos históricos, talvez mesmo apaixonante, por toda a disputa entre Tartaglia e Cardano que mostra bem a importância que estas descobertas têm para que dedica muitos anos da sua vida para as conseguir.

Parece até que o tema das equações polinomiais tem uma certa tendência para histórias impressionantes dos seus mais importantes estudiosos. A vida trágica de Galois gerou, apesar disso, a teoria necessária para conhecer os limites na resolução deste tipo de equações.

Como referido na Introdução o tema Álgebra e a necessária abstracção para o seu estudo foi uma das dificuldades principais no ensino da Matemática na segunda metade do século XX. Com este trabalho pude lidar com essas dificuldades nos seus vários níveis, quer no seu aspecto actual quer em termos de desenvolvimento histórico.

Bibliografia

Livros:

[001] J. Bouttier, R. Desrousseaux, T. Doumenc, T. Feldman, P. Héam, A. Labreque, J. Novelli; Algèbre et Géométrie 2; Éditions Bréal; 1999

[002] C. B. Boyer; História da Matemática; Editora Edgard Blucher Ltda; 1974; Traduzido em Português por Elza F. Gomide; 1993

[003] B. J. Caraça; Abel e Galois; Gazeta de Matemática Nº 2 Ano1; 1940

[004] B. J. Caraça; Conceitos Fundamentais da Matemática; Livraria Sá da Costa Editora; 9ª edição; 1989

[005] G. Cardano ; Ars Magna or the rules of algebra; Traduzido por T. Richard Witmer; Dover; 1968

[006] S. Desdreux, R. Durand, J. Novelli; Algèbre et Géométrie 1; Éditions Bréal; 1998

[007] E. Figueira; Pedro Nunes matemático e cosmógrafo; Educação e Matemática Nº67; 2002

[008] J. B. Fraleigh; A First Course in Abstract Algebra; Addison-Wesley Publishing Company; 7ª Edição; 2003

[009] P. E. Gennart; Compreender a Matemática Moderna; Livraria Bertrand, S.A.R.L.; 1973

[010] M. Guillen; Pontes para o Infinito; Gradiva; 1987

[011] A. J. Monteiro, I. T. Matos; Álgebra - um primeiro curso; Escolar Editora; 2ª edição; 2001

[012] H. B. Lopes, A resolução de equações; Revista Millenium nº 29; Instituto Superior Politécnico de Viseu;

[013] M. A. F. Neves; Aprendizagem em Álgebra; Tese de Doutoramento na Universidade Portucalense; 1999

[014] P. Nunes; Libro de Algebra en Arithmetica Y Geometria; Universidade de Coimbra

[015] G. Robins, C. Shute ; The Rhind mathematical papyrus : an ancient Egyptian text

[016] I. Sokolnikoff, R. Redheffer; Mathematics of Physics and Modern Engineering; McGraw-Hill; 2ª edição; 1966

[017] D. J. Struik ; História Concisa das Matemáticas; Gradiva; Traduzido em Português por João Guerreiro; 2ª Edição; 1992

URL:

[URL1] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm21/equacoes.htm

[URL2] http://br.geocities.com/christianjqp/artigos/equacoes.pdf

[URL3] http://encyclopedie-pt.snyke.com/articles/evariste_galois.html

[URL4] http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/BhaskaraII.htm

[URL5] http://www.ipv.pt/millenium/16_ect1.htm

[URL6] http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

Índice Remissivo