

Carla Pinto Cerqueira Pereira

# Soluções Periódicas em Equações Diferenciais Ordinárias



Universidade Portucalense

Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia

Setembro / 2009

Carla Pinto Cerqueira Pereira

# Soluções Periódicas em Equações Diferenciais Ordinárias



*Tese submetida à Universidade Portucalense Infante D. Henrique para obtenção do grau de  
Mestre em Matemática/Educação*

*Trabalho realizado sob a orientação da Professora Stella Abreu*

Universidade Portucalense

Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia

Setembro / 2009

Ao Fernando, aos meus pais e irmão.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Professora Doutora Stella Abreu, a disponibilidade com que sempre me acompanhou, o seu incentivo a sua dedicação na orientação deste trabalho, pela cedência de bibliografia e todos os conselhos e críticas que foram extremamente úteis para a elaboração desta tese.

Agradeço também à minha família e amigos pelo seu apoio.

# Resumo

Neste trabalho começou-se por introduzir os conceitos considerados básicos, para o estudo e classificação de sistemas lineares hipérbolicos no plano, tendo como ferramenta auxiliar o software MAPLE. Em seguida, mostramos como encontrar soluções periódicas em certos sistemas de equações diferenciais, usando equações de amplitude-fase escritas em coordenadas polares. Outro método para encontrar soluções periódicas é utilizar o teorema de bifurcação de Hopf. Trata-se de uma bifurcação onde se cria soluções periódicas a partir de um ponto de equilíbrio cuja linearização seja um centro. Esta bifurcação é muito estudada em diversas áreas como a química, biologia, hidrodinâmica, meteorologia entre outros. São estudados, neste trabalho, alguns exemplos aplicados nas áreas da química e biologia. Estudamos um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, autónomas, modelo da reacção de Belousov-Zhabotinski, que é uma reacção química oscilatória, criada com o objectivo de simular o Ciclo de Krebs - processo metabólico relacionado com a respiração celular com o auxílio de mitocôndrias. Mostramos, utilizando o teorema de Hopf, que as equações que modelam esta reacção apresentam soluções periódicas. De seguida, apresentamos um sistema aplicado na Biologia, o sistema de FitzHugh - Nagumo.

# Abstract

We begin this work by introducing the basic concepts necessary for the classification and study of the hyperbolic linear systems in the plane. We use the software MAPLE as an auxiliary tool for this study. We show how periodic solutions to certain systems of differential equations can be found using phase-amplitude equations in polar coordinates. Another technique to find periodic solutions is the Hopf bifurcation theorem. This is a bifurcation where periodic solutions are created from an equilibrium, whose linearization is a center. This bifurcation is studied in several areas: chemistry, biology, hydrodynamics and meteorology. Some examples applied to chemistry and biology are studied in this work. We study one first order autonomous system of ordinary differential equations, which is a model of the Belousov-Zhabotinsky reaction. This is a chemical reaction with oscillating behavior, created with the goal to represent de Krebs cycle - metabolic process related with the supply of cellular energy by mitochondria. We use the Hopf bifurcation theorem to find periodic solutions in the equations that model this reaction. Next, we study one system applied to biology - the FitzHugh-Nagumo equations.

# Conteúdo

<b>Índice de Tabelas</b>	<b>9</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>17</b>
2.1 Introdução . . . . .	17
2.2 Valores Próprios de Matrizes Quadradas . . . . .	20
2.3 Classificação de Sistemas Lineares Hiperbólicos no Plano . . . . .	23
<b>3 Soluções periódicas</b>	<b>31</b>
3.1 Valores próprios complexos . . . . .	31
3.2 Soluções periódicas em equações de amplitude-fase . . . . .	33
3.3 Exemplo 1 . . . . .	35
3.4 Exemplo 2 . . . . .	36
<b>4 Bifurcação de Hopf</b>	<b>41</b>
4.1 Introdução . . . . .	41

4.2	Exemplos . . . . .	44
4.2.1	Exemplo 1 . . . . .	44
4.2.2	Exemplo 2 . . . . .	46
4.3	Bifurcação de Hopf subcrítica e supercrítica . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>51</b>
5.1	Introdução . . . . .	51
5.2	Equações de Brusselator . . . . .	54
5.2.1	Noções básicas das equações motrizes . . . . .	55
5.2.2	Equações diferenciais do mecanismo de Brusselator . . . . .	57
5.2.3	Análise das equações diferenciais . . . . .	58
5.3	Equações do tipo FitzHugh-Nagumo . . . . .	61
5.3.1	Abordagem feita por Keener e Sneyd das equações FN [11] . . .	64
5.3.2	Abordagem ao modelo polinomial das equações FN [12] . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>68</b>
<b>A</b>	<b>Teorema da Função Implícita</b>	<b>70</b>
	<b>Referências</b>	<b>73</b>

# Lista de Tabelas

5.1 Tabela - Estudo da variação de  $y$  . . . . . 65

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de fase da equação $\dot{x} = x - x^3$ . . . . .	20
2.2	Diagrama de fase do sistema (2.8) - <b>Sela</b> . . . . .	24
2.3	Diagrama de fase do sistema (2.9) - <b>Nó</b> . . . . .	26
2.4	Diagrama de fase do sistema (2.10) - <b>Poço Espiral</b> . . . . .	27
2.5	Diagrama de fase do sistema (2.11)- <b>Foco</b> . . . . .	28
2.6	Diagrama de fase do sistema (2.12) - <b>Nó impróprio</b> . . . . .	28
2.7	Classificação de sistemas lineares hiperbólicos no plano . . . . .	29
2.8	Classificação de sistemas lineares hiperbólicos no plano em coordenadas ( $tr(A), det(A)$ ) . . . . .	30
3.1	Diagrama de bifurcação do sistema (3.8) para $\alpha = -1$ . . . . .	39
3.2	Diagrama de bifurcação do sistema (3.8) para $\alpha = 1$ . . . . .	40
4.1	Diagrama de fase do sistema (4.3) para $\rho = 1$ - <b>Fonte espiral</b> . . . . .	45
4.2	Diagrama de fase do sistema (4.3) para $\rho = -1$ - <b>Poço espiral</b> . . . . .	46
4.3	Diagrama de fase do sistema (4.3) para $\rho = 0$ - <b>Centro</b> . . . . .	47
4.4	Bifurcação de Hopf supercrítica . . . . .	49

4.5	Bifurcação de Hopf subcrítica . . . . .	50
5.1	Estabilidade em (5.17) - Equações de Belousov-Zhabotinski . . . . .	60

# Capítulo 1

## Introdução

O objectivo deste trabalho é estudar soluções periódicas em equações diferenciais ordinárias.

Dado um sistema de equações diferenciais ordinárias  $\dot{x} = F(x, \rho)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$ , o teorema de bifurcação de Hopf dá condições suficientes para encontrar soluções periódicas. Esta bifurcação consiste no desenvolvimento de órbitas periódicas a partir de um ponto fixo estável à medida que o parâmetro  $\rho$  passa por um valor crítico. No documento original de Hopf, a determinação de órbitas periódicas estáveis foi motivada por problemas concretos e envolvia cálculos complicados.

Este tema foi estudado por Hopf em 1942 ([1]). Não se sabe exactamente o que motivou Hopf a estudar tais questões. Quando questionado, muitos anos depois, acerca do tema, afirmou que não se lembrava como tinha chegado a esses resultados. No entanto, no seu trabalho, mencionou que o fenómeno que descreveu era bem conhecido em hidrodinâmica. Sobre este assunto, Hopf escreveu: *“I scarcely think that there is anything new in the above theorem. The methods have been developed by Poincaré (1892) perhaps 50 years ago and belong today to the classical conceptual structure of the theory of periodic solutions in the small”* (ver [1]).

De facto, usando tais métodos, Andronov já tinha obtido resultados de estabil-

idade em bifurcações de sistemas a duas dimensões, que foram publicados no seu livro *Andronov-Vitt-Khaikin (1937)*. Em 1977, Rabinowitz descreveu o Teorema de Bifurcação Central como um fenómeno global. Em 1978, Alexander e Yorke escreveram uma versão global do Teorema.

A partir daqui, o Teorema de bifurcação de Hopf tornou-se um resultado importante e elementar que tem sido extremamente prestigiado.

Existem várias versões de dimensão infinita do teorema de bifurcação de Hopf. A primeira que se conhece apareceu em 1970, motivada pela tentativa de estabelecer a bifurcação de soluções periódicas das equações de Navier-Stokes. Mais tarde, apareceram mais aplicações em diferentes áreas tais como: problemas de reacção-difusão (Henry, 1981), transporte em líquidos binários (Knobloch, 1986), sistemas de dupla difusão (Knobloch e Proctor, 1981), problemas de predador-presa, entre outros.

Novas demonstrações e extensões foram feitas em várias direcções. Existem hoje versões degeneradas, equivariantes, hamiltonianas, globais e infinitas do Teorema. Foram também encontradas inesperadas ligações ao Teorema Central de Liapunov (Liapunov, 1907), e vários códigos numéricos foram escritos para implementar o Teorema, tendo este várias aplicações físicas.

A teoria da bifurcação é uma das áreas da Matemática Aplicada que sofreu um notável desenvolvimento durante os últimos trinta anos. Existem pelo menos duas razões para tal: provou-se, nos finais dos anos setenta, que quando um sistema é invariante pela acção de um grupo de simetrias, podem obter-se consequências tremendas nas bifurcações. Em particular, na produção de variedades ricas de soluções com fenómenos inesperados, que estão fortemente associados à simetria dos problemas e que podem usar a formalização da teoria de grupos de modo a classificá-los e a calculá-los. Assim, foi completamente natural o desenvolvimento de um novo ramo na teoria da bifurcação, ou mais correctamente, extender esta teoria para sistemas de equações com simetria. Uma grande contribuição nesta direcção foi o livro de Golubitsky, Stewart e Schaeffer [2] publicado em 1988, que é uma referência nas últimas décadas, nesta

área. A segunda razão, é que esta área é uma ferramenta muito eficiente na análise e computação de soluções de sistemas complicados.

As aplicações da bifurcação de Hopf foram surgindo de uma forma rápida em diversas áreas como a engenharia, biologia, química e oscilações na atmosfera e no campo magnético da Terra.

Na área da química, a reacção de Belousov-Zhabotinski (BZ) é uma reacção oscilatória clássica, que mostra uma variedade dinâmica interessante, com implicações não somente para a química, mas também para a dinâmica observada em sistemas biológicos.

Os modelos matemáticos das reacções de BZ utilizam os sistemas não - lineares para descrever o comportamento destas reacções. Estes sistemas apresentam uma dinâmica bastante rica e têm despertado um grande interesse teórico.

Tudo começou quando Belousov no início dos anos 50, tentava criar, num tubo de ensaio, o processo metabólico relacionado com a respiração em mitocôndrias (Ciclo de Krebs - ver [8] para mais pormenores). Ao realizar a mistura (ácido cítrico, bromato de potássio e sulfato de cério), observou que se esta fosse agitada tinha o seguinte comportamento durante um minuto: fica amarela  $\longrightarrow$  perde a cor  $\longrightarrow$  fica amarela  $\longrightarrow$  perde a cor. Mas, verificou que se a mistura não fosse agitada, surgiam padrões na forma de ondas espirais.

No ramo da biologia surgiram as equações do tipo Hodgkin e Huxley (HH), que constituem o modelo mais importante da condução do nervo. Um estudo quantitativo sobre a actividade eléctrica das células teve o seu principal impulso com o trabalho notável de Hodgkin e Huxley (HH) em 1951, na transmissão do nervo, no axónio gigante da lula, galardoado com o prémio Nobel.

O trabalho de HH foi e tem sido reconhecido como uma proeza científica, pois veio explicar não só o processo, mas também os diversos fenómenos observados em experiências conduzidas por fisiologistas. Foi o culminar de vários anos de trabalho

teórico e experimental feito por fisiologistas pioneiros na área que, em conjunto, definiram a direcção e os objectivos de muitos investigadores em biofísica.

Hodgkin e Huxley construíram um modelo matemático com quatro equações diferenciais ordinárias dependentes de um parâmetro, que traduzem a diferença de potencial eléctrico criada pela passagem de iões de sódio e potássio para um e outro lado da membrana celular do axónio gigante da lula *Loligo*. Neste estudo, utilizaram uma técnica designada por “voltage clamp”, que consiste em manter o potencial da membrana do axónio a um certo nível pré-fixado e espacialmente constante, e estudar as correntes iónicas através da mesma, sujeitas a esta restrição.

Os neurónios são as células responsáveis pela recepção e transmissão dos estímulos do meio. A comunicação neural é um campo muito importante no estudo das células nervosas do corpo humano. Sinais ou impulsos eléctricos num neurónio são fenómenos comuns e regulares, que ocorrem milhões de vezes por segundo no organismo.

Actualmente, a questão de como um impulso percorre um axónio é um problema muito amplo. As técnicas experimentais e matemáticas introduzidas por HH têm sido adaptadas e extendidas para poderem ser utilizadas no estudo de diferentes células eléctricas activas.

Pouco tempo após a publicação das equações de HH para o axónio da lula gigante, Richard FitzHugh trabalhava no Laboratório do Instituto Nacional de Saúde (NIH) em Bethesda, Maryland. Comprometendo-se a analisar as propriedades matemáticas das equações de HH, utilizou as novas técnicas não lineares que tinham sido desenvolvidas pelo matemático russo Andronov.

Uma das motivações do aparecimento do modelo de FitzHugh-Nagumo (FN), um sistema com duas equações diferenciais, foi a de isolar as propriedades essenciais da matemática das propriedades electroquímicas dos iões do sódio e do potássio da propagação e da excitação da célula.

A primeira análise numérica das equações de HH com um computador moderno,

foi conduzida por Cole et al. (1955), e também por FitzHugh e Antosiewicz (1959).

John Moore e FitzHugh começaram por planejar como programar as equações de HH e resolvê-las através do computador, tendo encontrado soluções numéricas para estas equações.

Enquanto que o modelo de HH é mais realista e biofisiologicamente mais seguro, apenas é visualizado em projecções a duas dimensões. A simplicidade do modelo de FN permite a visualização total da solução. Isto permite dar uma explicação geométrica deste importante fenómeno biológico e explicar a excitação neuronal e o seu mecanismo.

Esta dissertação contém seis capítulos. No capítulo 2 começamos por introduzir conceitos matemáticos básicos para o estudo dos capítulos 3 e 4, onde se introduzem os fenómenos de soluções periódicas e bifurcação de Hopf, respectivamente, em sistemas de equações diferenciais ordinárias. Ilustramos este tipo de bifurcação com dois exemplos. No capítulo 5, formulamos o mesmo problema - a procura de soluções periódicas nas equações de Brusselator e de FN. Mostramos, assim, algumas das muitas aplicações da bifurcação de Hopf. Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

Neste capítulo revemos noções básicas sobre equações diferenciais ordinárias. Classificamos os sistemas lineares no plano utilizando os valores próprios da matriz associada ao sistema. Se o determinante dessa matriz for diferente de zero, o sistema diz-se hiperbólico. Sistemas hiperbólicos são classificados em: selas, poços e fontes. Sistemas não hiperbólicos (determinante da matriz é igual a zero) serão estudados nos capítulos 3 e 4).

### 2.1 Introdução

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

onde  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  é um vector da variável independente (usualmente o tempo) da função, e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável definida num subconjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  (Ver [3] p.2).

**Teorema 2.1** [3] *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto no espaço euclidiano e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável e contínua ( $C^1$ ) e  $x_0 \in U$ . Então, existe uma*

constante  $c > 0$  e uma única solução  $\phi(x_0, \cdot) : (-c, c) \rightarrow U$  que satisfaz a equação diferencial  $\dot{x} = f(x)$  com condição inicial  $x(0) = x_0$ .

**Demonstração:** Ver [3], p.150

**Definição 2.1** [5] Diz-se que o campo de vectores  $f$  gera o fluxo  $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , quando  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$  é uma função diferenciável definida por todo o  $x \in U$  e  $t$  num intervalo  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , e  $\phi$  satisfaz (2.1):

$$\frac{d}{dt}(\phi(x, t)) \Big|_{t=\tau} = f(\phi(x, \tau))$$

para todo  $x \in U$  e  $\tau \in I$ .

Note-se que  $\phi_t$ , satisfaz as seguintes propriedades no seu domínio de definição:

- i)  $\phi_0 = Id$ , isto é,  $\phi(x, 0) = x, \forall x \in U$
- ii)  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ , isto é,  $\phi(x, t+s) = \phi(\phi(x, t), s)$

Toda a solução  $\phi_t(x)$  de (2.1) é designada por **órbita** ou **trajectória**.

Sistemas da forma (2.1), em que o campo de vectores não contém o tempo explicitamente, são designados por **autónomos**.

Para cada condição inicial

$$x(0) = x_0 \in U \tag{2.2}$$

procura-se a solução  $\phi(x_0, t)$ , em que:

$$\phi(x_0, 0) = x_0 \tag{2.3}$$

**Lema 2.1** [5]  $x(t) = x_0$  é um **ponto de equilíbrio** de (2.1) se e só se  $f(x_0) = 0$ .

Diz-se que um ponto de equilíbrio,  $x_0$ , é **estável** se qualquer solução com condição inicial perto de  $x_0$  permanece perto para todo o tempo, isto é, se para toda a vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $U$  existe uma vizinhança  $V_1 \subset V$  tal que toda a solução  $x(t)$  com  $x(0) = x_0$  e  $x_0 \in V_1$  está definida e permanece em  $V$  para todo o  $t > 0$ . Se, além disso,  $V_1$  pode ser escolhida tal que  $x(t) \rightarrow x_0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , então  $x_0$  é **assimptoticamente estável** ([3], p.3).

Um ponto de equilíbrio é designado por **instável** se não for estável.

Seja  $x_0$  um ponto de equilíbrio do sistema (2.1). No caso de  $n = 1$ , isto é,  $x \in \mathbb{R}$ , diz-se que  $x_0$  é **hiperbólico** se e só se

$$f'(x_0) \neq 0$$

**Teorema 2.2** [5]

Seja  $x_0$  um ponto de equilíbrio hiperbólico da equação

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Se  $f'(x_0) < 0$ , então o ponto de equilíbrio  $x_0$  é *assimptoticamente estável*.

Se  $f'(x_0) > 0$ , então o ponto de equilíbrio  $x_0$  é *instável*.

**Demonstração:** Ver Golubitsky e Dellnitz [5]

**Exemplo:**

Seja  $f(x) = x - x^3$ . Os pontos de equilíbrio do sistema associado são:  $-1, 0, 1$ . Sendo  $f'(x) = 1 - 3x^2$  e  $f'(-1) \neq 0$ ,  $f'(0) \neq 0$  e  $f'(1) \neq 0$  podemos concluir que os três pontos de equilíbrio são hiperbólicos.

Como  $f'(-1) = f'(1) = -2 < 0$ , os pontos de equilíbrio  $x = -1$  e  $x = 1$  são ambos *assimptoticamente estáveis*.

Como  $f'(0) = 1 > 0$ , o ponto de equilíbrio  $x = 0$  é *instável*.

Esta informação está representada na figura (2.1), designada por diagrama de fase da equação.



Figura 2.1: Diagrama de fase da equação  $\dot{x} = x - x^3$

Existem dois métodos de visualização do comportamento de soluções de equações diferenciais ordinárias: as séries temporais e o esboço do diagrama de fase - gráfico na recta real  $x$ . Os métodos baseiam-se em interpretar a derivada  $\frac{dx}{dt}$  como o declive da recta tangente, caso da série temporal, ou como a velocidade - taxa de variação - de uma partícula, caso do diagrama de fase. Considerando  $x(t)$  a posição de uma partícula na recta real no tempo  $t$ , a função  $f(t, x)$  denota a velocidade dessa partícula quando ela está na posição  $x$  no tempo  $t$ . Para esboçar o diagrama de fase é necessário visualizar como  $x(t)$  muda no tempo.

Se  $x_0$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.4), utilizando a aproximação da recta tangente a  $f(x)$  em  $x_0$ , ( $\Delta f = f'(x_0)\Delta x$ ) e o facto de  $f(x_0) = 0$  conclui-se que:  $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$  (Ver [5], p.129).

Segue-se que, se  $f'(x_0) < 0$ , então  $f(x)$  é negativo quando  $x > x_0$  e positivo quando  $x < x_0$ . Sendo assim, as soluções com condição inicial perto de  $x_0$  tendem a aproximar-se de  $x_0$ . De modo semelhante, se  $f'(x_0) > 0$ , então  $f(x)$  é positivo quando  $x > x_0$  e negativo quando  $x < x_0$ . Conclui-se que as soluções com condição inicial perto de  $x_0$  afastam-se de  $x_0$ .

## 2.2 Valores Próprios de Matrizes Quadradas

Sejam  $A$  uma matriz quadrada  $n \times n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Diz-se que  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$  se existe um vector não nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$Av = \lambda v \tag{2.5}$$

O vector  $v$  é designado de vector próprio e podemos escrever (2.5) como:

$$(A - \lambda I_n)v = 0$$

Isto implica que a matriz  $A - \lambda I_n$  seja singular, isto é, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um valor próprio da matriz  $A$  tem-se:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0$$

**Definição 2.2** [5] O **polinómio característico** da matriz  $A$  é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

No caso de matrizes  $2 \times 2$ , sendo  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , tem-se:

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc). \end{aligned}$$

Um valor próprio de  $A$  é uma raiz do polinómio característico  $p_A$ . Suponhamos que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes de  $p_A$ . Segue-se que:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Sendo assim,

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2$$

O polinómio característico pode então ser escrito na forma:

$$p_A(\rho) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) \tag{2.6}$$

**Teorema 2.3** [5] *Seja  $A$  uma matriz quadrada  $2 \times 2$  e denote-se o **Discriminante** da matriz  $A$  por:*

$$D = [\text{tr}(A)]^2 - 4\det(A)$$

*Existem três possibilidades para os valores próprios da matriz  $A$ , que podem ser descritas em termos do discriminante:*

- a) Os valores próprios são reais e distintos ( $D > 0$ ).*
- b) Os valores próprios são um par de complexos conjugados ( $D < 0$ ).*
- c) Os valores próprios são reais e iguais ( $D = 0$ ).*

**Demonstração** ([5], p. 164):

Seja  $A$  a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

as raízes do polinómio característico são:

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{[\text{tr}(A)]^2 - 4\det(A)}}{2a} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Se,

- $D > 0$ , então os valores próprios são reais e distintos;
- $D < 0$ , então os valores próprios são complexos conjugados;
- $D = 0$ , então os valores próprios são reais e iguais.

□

## 2.3 Classificação de Sistemas Lineares Hiperbólicos no Plano

Consideremos o sistema linear de equações diferenciais:

$$\dot{x} = Ax \tag{2.7}$$

em que  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ . A **origem** é sempre um ponto de equilíbrio de (2.7).

**Definição 2.3** [5] *O sistema de equações diferenciais (2.7) é um **Poço** se os valores próprios da matriz  $A$  têm ambos parte real negativa. O sistema (2.7) de equações diferenciais é uma **Fonte** se os valores próprios da matriz  $A$  têm ambos parte real positiva e uma **Sela** se os valores próprios da matriz  $A$  forem reais sendo um positivo e o outro negativo.*

**Teorema 2.4 Estabilidade Assimptótica** [5] *Se os valores próprios de  $A$  tiverem parte real negativa, então a origem é um ponto de equilíbrio **assimptoticamente estável** para (2.7).*

**Demonstração:** Ver [5].

O sistema linear (2.7) diz-se **hiperbólico** se todos os valores próprios de  $A$  têm parte real não nula. Os poços, fontes e selas são portanto, sistemas lineares hiperbólicos.

Podemos usar o determinante, o traço e o discriminante de  $A$  para obter o tipo de diagrama de fase do sistema (2.7), numa vizinhança da origem.

Como o determinante de  $A$  é o produto dos valores próprios,  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ , tem-se:

**Caso 1:**  $\det(A) = 0$ , a matriz  $A$  tem pelo menos um valor próprio real igual a zero, sendo o sistema não hiperbólico. Este caso, não será aprofundado nesta secção.

**Caso 2:**  $\det(A) < 0$ , a matriz  $A$  tem um valor próprio positivo e outro negativo, sendo a origem uma **Sela**. Por exemplo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x \quad (2.8)$$

em que o  $\det(A) = -8 < 0$  e os valores próprios são:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4 \vee \lambda = 2$$

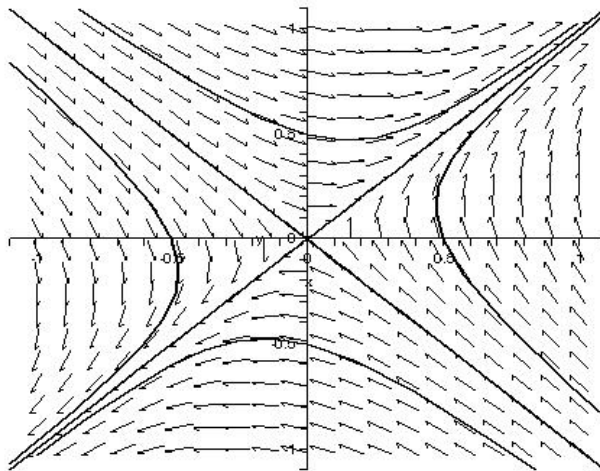


Figura 2.2: Diagrama de fase do sistema (2.8) - **Sela**

O diagrama de fase do sistema (2.8) numa vizinhança da origem foi obtido no programa MAPLE<sup>®</sup> <sup>1</sup> e está representado na figura (2.1). Esta figura, e as que se seguem, foram obtidas usando o comando DEplot do programa MAPLE.

**Caso 3:**  $\det(A) > 0$ , a matriz  $A$  tem dois valores próprios reais com o mesmo sinal ou um par de valores próprios complexos conjugados.

<sup>1</sup>Versão 9.01, MAPLE é uma marca registada de Waterloo Maple Inc.

**Caso 3.1:**  $\det(A) > 0$  e  $\operatorname{tr}(A) < 0$

Como o traço de  $A$  é a soma dos valores próprios, se  $\operatorname{tr}(A)$  é negativo obtemos um **Poço**. É o caso de (2.9), em que  $\operatorname{tr}(A) = -3$  e de (2.10) em que  $\operatorname{tr}(A) = -2$ .

No sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \quad (2.9)$$

temos  $\det(A) = 2 > 0$ .

No sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} x \quad (2.10)$$

o  $\det(A) = 26 > 0$

Estes dois sistemas distinguem-se analisando o discriminante  $D = [\operatorname{tr}(A)]^2 - 4\det(A)$ . Tendo em conta o Teorema 2.3, tem-se:

**Caso 3.1.1:**  $D(A) > 0$ , os valores próprios da matriz  $A$  são reais distintos e ambos negativos, como é o caso do exemplo (2.9) em que  $D(A) = 1$  obtendo-se um **Nó** (estável). Ver figura (2.3).

**Caso 3.1.2:**  $D(A) < 0$ , é o caso de (2.10), em que  $D(A) = -100$ , sendo os valores próprios complexos conjugados com parte real negativa. A origem designa-se por **Poço espiral**. Ver figura (2.4).

**Caso 3.1.3:**  $D(A) = 0$

Finalmente, se  $D = 0$ , os valores próprios de  $A$  são reais e iguais, sendo necessário analisar se a matriz é **múltipla da identidade**.

- Se o for, a origem é um **Foco** (estável), pois existem dois vectores próprios linearmente independentes. Este é o caso do exemplo (2.11), abaixo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \quad (2.11)$$

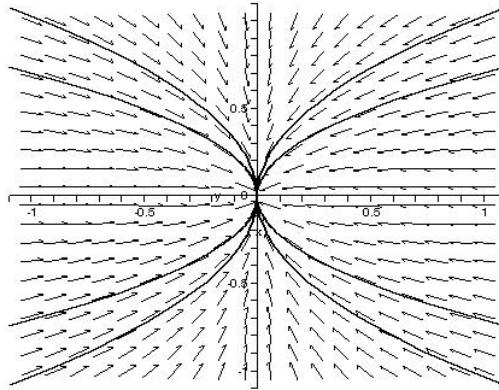


Figura 2.3: Diagrama de fase do sistema (2.9) - **Nó**

em que  $\det(A) = 4$ ,  $\text{tr}(A) = -4$  e  $D = 0$  sendo os valores próprios:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

- Se a matriz  $A$  não for múltipla da identidade a origem é um **Nó impróprio**, existindo só um vector próprio linearmente independente. É o caso do sistema (2.12):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} x \quad (2.12)$$

em que  $\det(A) = 4$ ,  $\text{tr}(A) = -4$  e  $D = 0$ . Note-se que em ambos os exemplos (2.11) e (2.12) se tem  $\det(A) = 4$ ,  $\text{tr}(A) = -4$  e  $D = 0$ . O que os distingue é o facto de  $A$  ser ou não ser múltipla da identidade.

**Caso 3.2:**  $\det(A) > 0$  e  $\text{tr}(A) > 0$

A classificação é semelhante ao caso 3.1. apenas com a diferença de os sistemas serem instáveis. Os diagramas de fase são idênticos aos do caso 3.1., mas as setas estão invertidas.

Sendo assim, se:

- $D(A) > 0$ , obtém-se um **Nó** instável.

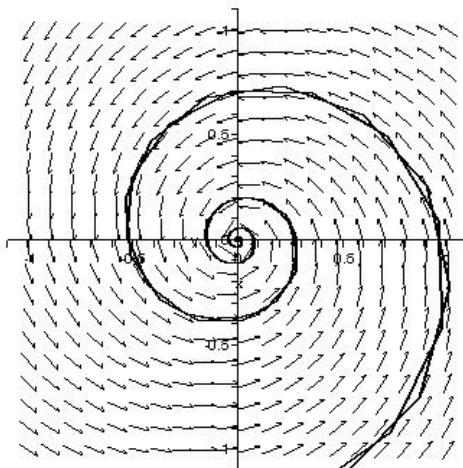


Figura 2.4: Diagrama de fase do sistema (2.10) - **Poço Espiral**

- $D(A) < 0$ , obtém-se uma **Fonte espiral**.
- $D(A) = 0$ , é necessário analisar se a matriz é ou não múltipla da identidade. Se o for temos um **Foco instável**, caso contrário temos um **Nó impróprio instável**.

**Caso 3.3:**  $\det(A) > 0$  e  $\text{tr}(A) = 0$ , então os valores próprios são complexos conjugados imaginários puros, sendo o sistema não hiperbólico. Este caso não será aprofundado nesta secção.

Esta classificação dos sistemas lineares hiperbólicos no plano pode ser resumida no esquema da figura 2.7:

A classificação dos sistemas lineares hiperbólicos no plano costuma também ser apresentada como na figura (2.8). Note-se que, nesta figura,  $D = 0$  significa  $[\text{tr}(A)]^2 - 4\det(A) = 0$ , que representa uma parábola no plano  $(\text{tr}(A), \det(A))$ .

Depois desta revisão sobre sistemas lineares, é pertinente perguntar: o que se pode dizer das soluções de

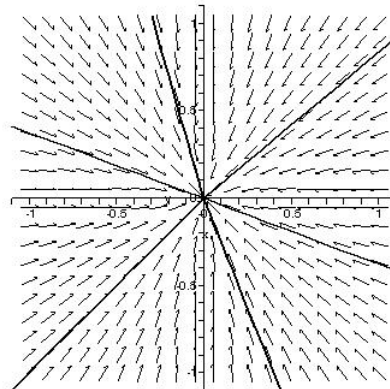


Figura 2.5: Diagrama de fase do sistema (2.11)- **Foco**

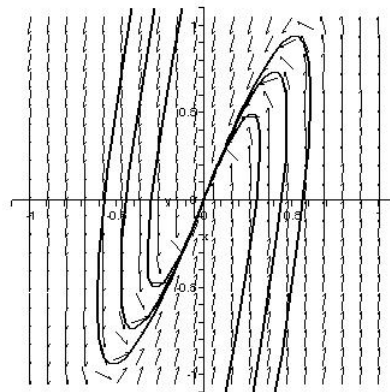


Figura 2.6: Diagrama de fase do sistema (2.12) - **Nó impróprio**

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

baseando-nos no sistema linear

$$\dot{x} = df_{x_0}x \quad (2.14)$$

associado a (2.13)?

A resposta é fornecida pelo seguinte Teorema:

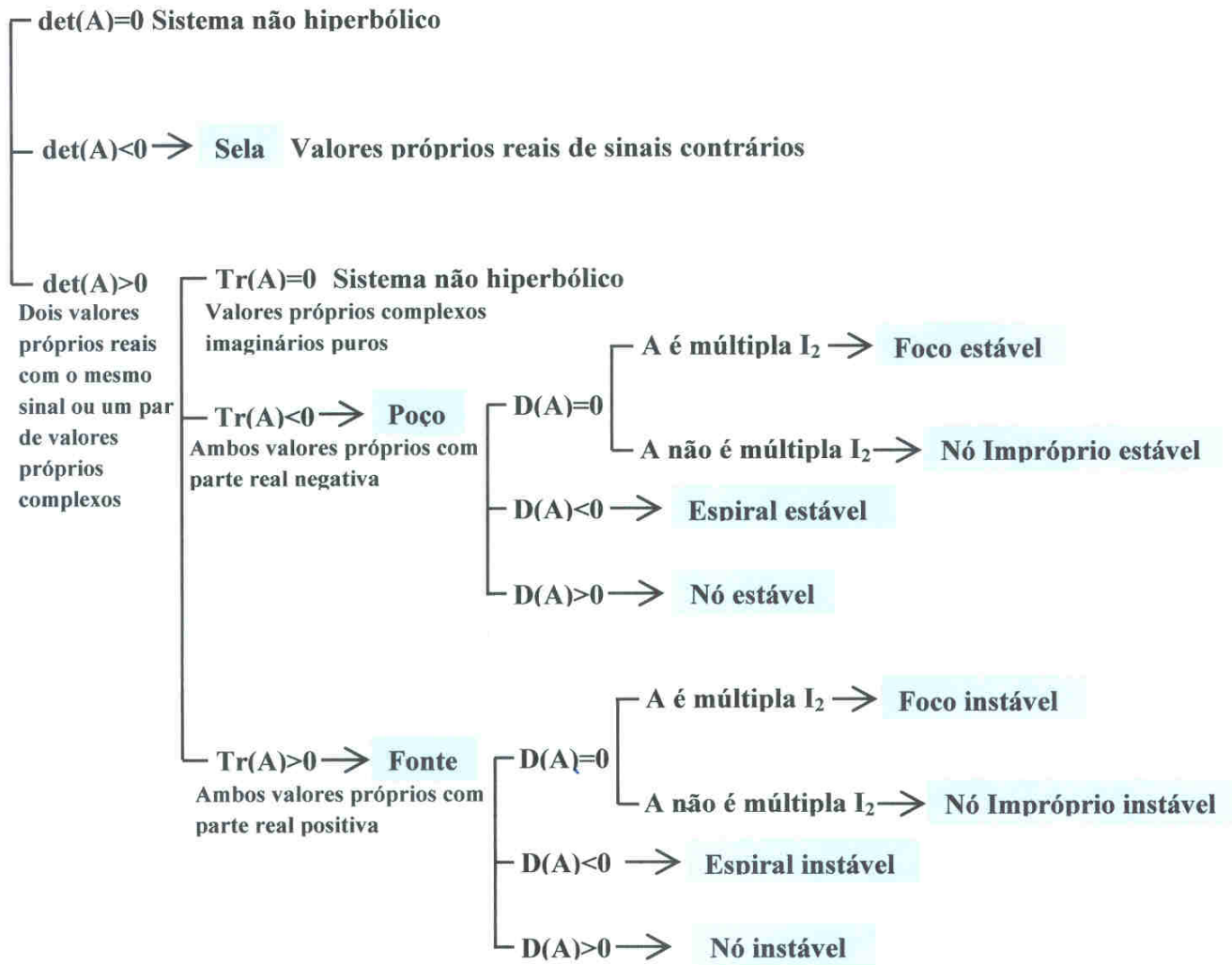


Figura 2.7: Classificação de sistemas lineares hiperbólicos no plano

**Teorema 2.5 Linearização de Hartman - Grobman [3]**

Consideremos o sistema (2.13) e um ponto de equilíbrio  $x_0$  de (2.13). Se  $df_{x_0}$  não tiver valores próprios nulos ou imaginários puros então existe um homeomorfismo  $h$  definido numa vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $\mathbb{R}^n$ , enviando localmente soluções do fluxo não linear de 2.13, nas soluções do fluxo linearizado 2.14. O homeomorfismo preserva o sentido das soluções e pode ser escolhido de modo a preservar a parametrização no tempo.

**Demonstração:** Hartman, p.438

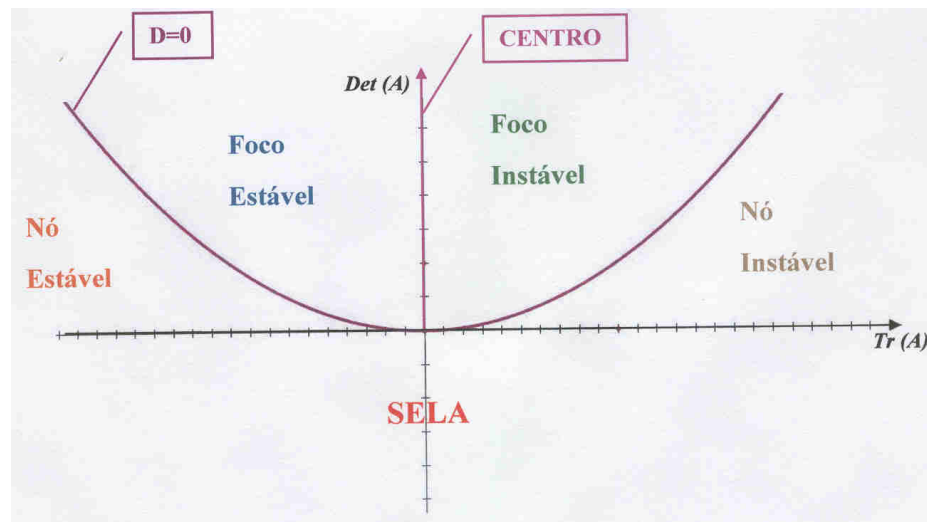


Figura 2.8: Classificação de sistemas lineares hiperbólicos no plano em coordenadas  $(tr(A), det(A))$

Por outras palavras, existe uma vizinhança do ponto de equilíbrio em que o diagrama de fase do sistema não linear se assemelha com o sistema linearizado, isto é, existe uma mudança de coordenadas contínua, que envia um diagrama de fase no outro. Numa pequena região em torno do ponto de equilíbrio, os diagramas de fase são qualitativamente equivalentes.

# Capítulo 3

## Soluções periódicas

Neste capítulo, mostra-se a existência de soluções periódicas, usando as equações de amplitude-fase. Fazemos um breve estudo de um sistema escrito em coordenadas polares, apresentando de seguida uma proposição que dá condições suficientes para encontrar soluções periódicas em equações de amplitude-fase.

O comportamento periódico é observado em todos os ramos da ciência. Soluções periódicas isoladas (ou ciclos limite) são o comportamento mais comum observado em sistemas físicos modelados no plano.

Uma solução periódica de um sistema de equações diferenciais  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , é uma solução não constante  $x(t)$  tal que  $x(t) = x(t + T)$  para algum número real positivo  $T$  e para qualquer  $t$ . O menor número real positivo  $T$  que satisfaz a equação anterior é designado por período da solução periódica. A frequência é a quantidade  $\frac{1}{T}$ .

### 3.1 Valores próprios complexos

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

As coordenadas cartesianas  $(x, y)$  podem ser escritas em termos de coordenadas polares  $(r, \theta)$  do seguinte modo:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Resolvendo em ordem a  $r$  e  $\theta$  obtém-se o novo sistema:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (3.2)$$

Derivando o sistema (3.2) em ordem a  $t$ , obtém-se:

$$\begin{cases} 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ \dot{\theta} = \left(\frac{y\dot{x} - y\dot{x}}{x^2}\right) / \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ \dot{\theta} = (y\dot{x} - y\dot{x}) / r^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Substituindo em (3.3) os valores de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  de (3.1) obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}x(\alpha x + \beta y) + y(-\beta x + \alpha y) \\ \dot{\theta} = [(-\beta x + \alpha y)x - y(\alpha x + \beta y)] / r^2 \end{cases}$$

simplificando:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}\alpha(x^2 + y^2) \\ \dot{\theta} = [-\beta(x^2 + y^2)] / r^2 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = -\beta \end{cases} \quad (3.4)$$

O tipo de diagrama de fase depende dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  ([4]):

- Se  $\alpha > 0$ , o ponto de equilíbrio é uma fonte espiral.
- Se  $\alpha = 0$ , o ponto de equilíbrio é um centro. (Estudo realizado no Capítulo 4)
- Se  $\alpha < 0$ , o ponto de equilíbrio é um poço espiral.
- Se  $\dot{\theta} > 0$ , as trajectórias da espiral circulam em torno da origem no sentido contrário dos ponteiros do relógio.
- Se  $\dot{\theta} < 0$ , as trajectórias da espiral circulam em torno da origem no sentido dos ponteiros do relógio.

## 3.2 Soluções periódicas em equações de amplitude-fase

Suponhamos que  $(x(t), y(t))$  seja solução de um sistema planar de equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x^2 + y^2)x - b(x^2 + y^2)y \\ \dot{y} = a(x^2 + y^2)y + b(x^2 + y^2)x \end{cases} \quad (3.5)$$

onde  $a$  e  $b$  são funções diferenciáveis de  $x^2 + y^2$ .

Para escrever este sistema em coordenadas polares, substitui-se em (3.3) os valores de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  de (3.5) e obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}a(x^2 + y^2)(x^2 + y^2) \\ \dot{\theta} = [b(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)]/r^2 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}a(r^2)r^2 \\ \dot{\theta} = [b(r^2)r^2]/r^2 \end{cases}$$

Estas são as equações de fase ( $\dot{\theta} = b(r^2)$ ) e amplitude ( $\dot{r} = a(r^2)r$ ).

$$\begin{cases} \dot{r} = a(r^2)r \\ \dot{\theta} = b(r^2) \end{cases} \quad (3.6)$$

**Proposição 3.1** [5] *Consideremos o sistema (3.6) e suponhamos que  $r_0$  seja um zero positivo da equação de amplitude, isto é,  $a(r_0^2) = 0$ . Se  $b(r_0^2) \neq 0$ , então a circunferência de raio  $r = r_0$  é a trajectória de uma solução periódica de (3.5).*

*Mais, se  $a'(r_0^2) < 0$ , então a solução periódica é assintoticamente estável; se  $a'(r_0^2) > 0$ , então a solução periódica é instável.*

**Demonstração:**

A função  $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$  mede a distância à origem da solução  $(x(t), y(t))$  de (3.5). Sendo assim, se  $r_0$  é um zero positivo da equação de amplitude, então a distância à origem da solução permanece constante:

$$\dot{r}(t) = 0$$

logo,

$$r(t) = r_0$$

Isto significa que a trajectória de  $(x(t), y(t))$  no plano permanece na circunferência  $r = r_0$  (ou  $x^2 + y^2 = r_0^2$  em coordenadas cartesianas). A solução da equação de fase  $\dot{\theta} = b(r^2)$  correspondente a este ponto de equilíbrio de amplitude é  $\theta(t) = b(r_0^2)t + \theta_0$ .

Sendo assim, se  $b(r_0^2) \neq 0$  (à medida que o tempo varia  $\theta$  varia) a trajectória move-se ao longo da circunferência  $r = r_0$  com velocidade ( $b(r_0^2)$ ) constante não nula. Note-se que se  $b(r_0^2) = 0$ , temos como solução um ponto.

Para verificar a estabilidade assintótica, escrevemos a equação de amplitude na forma  $\dot{r} = a(r^2)r \equiv f(r)$ . O ponto  $r_0 > 0$  é um ponto de equilíbrio da equação de amplitude se  $f(r_0) = 0$ , isto é, se  $a(r_0^2) = 0$ .

Esse ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se  $f'(r_0) < 0$  (ver Teorema 2.2). Usando a regra do produto e a regra da cadeia, verifica-se que:

$$f'(r) = [a(r^2)]'_r \cdot r + a(r^2) = 2(r^2) \cdot a'(r^2) + a(r^2)$$

Substituindo  $r$  por  $r_0$ , fica  $f'(r_0) = 2r_0^2 \cdot a'(r_0^2) + a(r_0^2)$ .

Por hipótese  $a(r_0^2) = 0$  logo,  $f'(r_0) = 2r_0^2 \cdot a'(r_0^2)$ .

Segue que:  $f'(r_0) < 0$  se e só se  $a'(r_0^2) < 0$  e  $f'(r_0) > 0$  se e só se  $a'(r_0^2) > 0$ .

Se  $a'(r_0^2) < 0$ , o ponto de equilíbrio da equação de amplitude é assintoticamente estável e trajectórias numa vizinhança da solução periódica no plano têm como limite essa solução periódica  $r = r_0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

### 3.3 Exemplo 1

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Aplicando a Proposição 3.1:

$$a(r^2) = 0 \Leftrightarrow r_0 = \pm 1$$

Sendo assim, as circunferências de raios  $r_0 = -1$  e  $r_0 = 1$ , são as trajectórias das soluções periódicas de (3.7).

Como  $\dot{\theta} = -1$ , o sentido das dessas trajectórias é a dos ponteiros do relógio.

Estudando a estabilidade:

$$a(r^2) = 1 - r^2$$

$$a'(r^2) = -2r$$

- $a'(-1) = 2 > 0$ , concluindo-se que a solução periódica é instável.
- $a'(1) = -2 < 0$ , concluindo-se que a solução periódica é estável.

Se as trajectórias começarem na origem, permanecem lá indefinidamente. Por outro lado, se começarem por exemplo no ponto  $(1, 0)$ , conseguem alcançar o ponto  $(-1, 0)$ , quando  $t_1 = \pi$ , com as trajectórias no sentido dos ponteiros do relógio, conseguindo atingir de novo o ponto  $(1, 0)$  com  $t_2 = \pi$ .

### 3.4 Exemplo 2

Segue-se um outro exemplo [6], em coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x - \omega y + \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \omega x + \rho y + \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (3.8)$$

Verifica-se que  $(x, y) = (0, 0)$  é ponto de equilíbrio do sistema (3.8).

Analisemos o sistema 3.8 utilizando a Proposição (3.1):

- Substituindo na primeira equação do sistema (3.3) os valores de (3.8) tem-se:

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \{x[\rho x - \omega y + \alpha x r^2] + y[\omega x + \rho y + \alpha y r^2]\}$$

colocando em evidência  $\rho$  e  $\alpha r^2$ , vem:

$$\dot{r} = \frac{1}{r}[\rho(x^2 + y^2) + \alpha r^2(x^2 + y^2)]$$

como  $r^2 = x^2 + y^2$ , tem-se:

$$\dot{r} = \frac{1}{r}[\rho r^2 + \alpha r^2 r^2]$$

Colocando agora  $r^2$  em evidência:

$$\dot{r} = \frac{1}{r}[r^2(\rho + \alpha r^2)]$$

e simplificando, obtém-se:

$$\dot{r} = r(\rho + \alpha r^2)$$

- Do mesmo modo, substituindo na segunda equação do sistema (3.3) os valores de (3.8) tem-se:

$$\dot{\theta} = [(\omega x + \rho y + \alpha y r^2) x - y (\rho x - \omega y + \alpha x r^2)] / r^2$$

simplificando:

$$\dot{\theta} = [\omega(x^2 + y^2)] / r^2$$

substituindo  $r^2 = x^2 + y^2$  e simplificando de novo, obtém-se:

$$\dot{\theta} = \omega$$

Obtém-se assim, o sistema (3.8) em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\rho + \alpha r^2) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (3.9)$$

É de notar que se fizermos  $\alpha = 0$  obtemos um centro no caso de  $\rho = 0$ , uma fonte espiral se  $\rho > 0$  e um poço espiral se  $\rho < 0$ .

Por outro lado, considerando  $\dot{\theta} > 0$  (ou  $\dot{\theta} < 0$ ) temos o mesmo comportamento que se considerarmos  $\omega = 1$  (ou  $\omega = -1$ ). A origem é o único ponto de equilíbrio uma vez que  $\dot{\theta} \neq 0$ .

**Caso 1:** Seja  $\alpha = -1$ , o sentido das trajectórias é o dos ponteiros do relógio. Como as duas coordenadas polares podem ser analisadas separadamente, e a componente de rotação é a mesma independentemente do parâmetro  $\theta$ . Só precisamos de olhar para a equação de amplitude  $\dot{r} = r(\rho - r^2)$ .

Usando a Proposição 3.1 para calcular os zeros não triviais da equação de amplitude fica:

$$a(r^2) = 0 \Leftrightarrow \rho - r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\rho} \Rightarrow r = \sqrt{\rho}, (r > 0)$$

Então  $r_0 = \sqrt{\rho}$ .

Estudando a estabilidade:

$$a(r^2) = \rho - r^2$$

$$a'(r^2) = -2r$$

$$a'(\sqrt{\rho}) = -2\sqrt{\rho} < 0$$

conclui-se que  $x^2 + y^2 = \rho$  é uma solução estável.

Quando  $\rho \leq 0$ , não existem soluções periódicas e a origem é o único ponto de equilíbrio. Qualquer solução converge para  $(0, 0)$ , sendo este um poço espiral. Quando  $\rho \geq 0$ , a origem torna-se um fonte espiral (ver figura (3.1)).

**Caso 2:** Seja  $\alpha = 1$ , logo  $\dot{r} = r(\rho + r^2)$ .

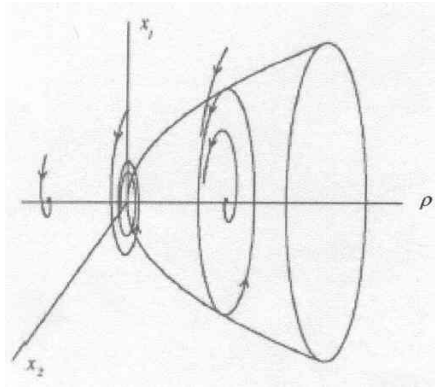


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação do sistema (3.8) para  $\alpha = -1$

$$a(r^2) = 0 \Leftrightarrow \rho + r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-\rho} \Rightarrow r = \sqrt{-\rho}, (r > 0)$$

Então  $r_0 = \sqrt{-\rho}$ .

Estudando a estabilidade:

$$a'(r^2) = 2r$$

$$a'(\sqrt{-\rho}) = 2\sqrt{-\rho} > 0$$

À medida que  $\rho$  varia de negativo para positivo, o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  passa de estável para instável, mas agora quando  $\rho < 0$  existe uma trajetória periódica instável. Para  $\rho \geq 0$ , já não há trajetória periódica que evite que as soluções com condição inicial perto de zero diverjam para infinito.

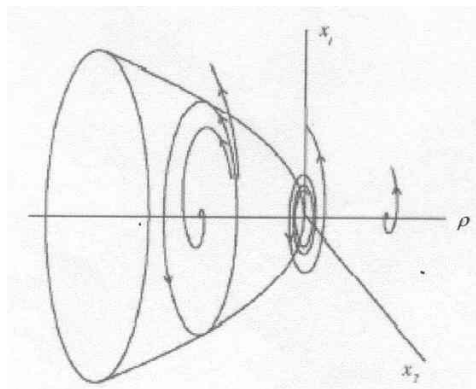


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação do sistema (3.8) para  $\alpha = 1$

# Capítulo 4

## Bifurcação de Hopf

### 4.1 Introdução

Um tipo de bifurcação que pode ocorrer em sistemas de equações diferenciais ordinárias é a criação de soluções periódicas a partir de um ponto de equilíbrio, designada de bifurcação de Hopf.

Em 1942, Hopf estabeleceu as condições para a ocorrência desta bifurcação num sistema  $n$ -dimensional. No entanto, este resultado já tinha sido sugerido por Poincaré, em 1892, e estudado por Andronov, em 1929, para um sistema bidimensional. Por isso, a bifurcação de Hopf é designada também de bifurcação Poincaré-Andronov-Hopf.

Uma condição necessária para a criação de soluções periódicas a partir de um ponto de equilíbrio variando um parâmetro, é a existência de um ponto de equilíbrio cuja linearização seja um centro, isto é, o Jacobiano no ponto de equilíbrio deverá ter um par de valores próprios imaginários puros.

A bifurcação de Hopf é muito estudada, apresentando aplicações em diversas áreas, tais como: hidrodinâmica, meteorologia, economia, biologia, química entre outros.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = F(x, \rho) \quad (4.1)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$  é o parâmetro de bifurcação e  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é  $C^\infty$ . Suponhamos que  $F(0, \rho) \equiv 0$ , então  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio de (4.1) para todo o  $\rho$ . Hopf provou a existência de uma família a um parâmetro de soluções periódicas de (4.1) surgindo de  $(x, \rho) = (0, 0)$  quando  $F$  satisfaz duas hipóteses. Seja  $J_{(0, \rho)}$  a matriz Jacobiana de  $F$  (quadrada de ordem  $n$ ) avaliada em  $(0, \rho)$ .

As duas hipóteses de Hopf são:

- a)  $J_{(0,0)}$  tem um par de valores próprios simples  $\pm i$  e não tem outros valores próprios pertencentes ao eixo imaginário.
- b) Os valores próprios de  $J_{(0, \rho)}$  são da forma  $\sigma(\rho) \pm i\lambda(\rho)$  com  $\sigma'(0) \neq 0$ , isto é, cruzam o eixo imaginário com velocidade não nula quando  $\rho$  cruza zero.

No caso de  $n = 2$ , estas condições a) e b) podem ser reescritas na seguinte forma:

- a)  $\det(J) > 0$  e  $\text{tr}(J) = 0$
- b)  $\sigma'(0) = \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{2} \text{tr}(J_{X(\rho)}) \right] \neq 0$

Uma vez que  $J_{(0, \rho)}$  é invertível, o Teorema da Função Implícita (*Apêndice A*) garante que existe uma curva de pontos de equilíbrio  $X(\rho)$  com um ponto de equilíbrio para cada valor de  $\rho$  perto do valor da bifurcação.

Para verificar a segunda hipótese, seja  $X(\rho)$  a curva dos pontos de equilíbrio e  $J_{X(\rho)}$  a matriz Jacobiana correspondente. Então, a parte real dos valores próprios complexos conjugados da matriz jacobiana é:

$$\sigma(0) = \frac{1}{2} \text{tr}(J_{X(\rho)})$$

A condição de as partes reais dos valores próprios atravessarem a origem com velocidade diferente de zero pode portanto ser escrita na forma:

$$\sigma'(0) = \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{2} \text{tr}(J_{X(\rho)}) \right] \neq 0$$

**Observações 4.1:**

(i) Se reescalarmos o tempo  $t$  fazendo  $t = ks$  para  $k$  fixo e positivo, então (4.1) passa a ser  $\frac{dx}{ds} = kF(x, \rho)$ . A linearização deste campo de vetores em  $(0, \rho)$  é a matriz  $J_{(0, \rho)}$  multiplicada por  $k$ . A hipótese a) é equivalente à hipótese de que  $J_{(0, 0)}$  tem um par de valores próprios imaginários puros não nulos que foram reescalados para  $\pm i$ .

(ii) Prova-se que órbitas periódicas de (4.1) existem se  $J_{(0, \rho)}$  tiver outros valores próprios no eixo imaginário desde que não sejam múltiplos inteiros de  $\pm i$ . Contudo, a hipótese a) é fundamental para a análise da estabilidade.

**Teorema 4.1 Teorema de Hopf**

Seja  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação  $C^\infty$  e consideremos a equação

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha) \tag{4.2}$$

onde  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ , em que  $\alpha_0 = \rho$  é o parâmetro de bifurcação. Suponhamos que

$$F(0, \alpha) \equiv 0$$

e que o sistema de equações diferenciais ordinárias (4.2) satisfaça:

(H<sub>1</sub>) a hipótese a) dos valores próprios simples, e

(H<sub>2</sub>) a condição de cruzamento dos valores próprios b).

Então, existe uma família com  $k + 1$  parâmetros de órbitas periódicas de (4.2) bifurcando da solução de equilíbrio  $x = 0$  em  $\alpha = 0$ .

**Demonstração:** Ver Golubitsky e Schaeffer [2] Teorema VIII 3.1.

## 4.2 Exemplos

### 4.2.1 Exemplo 1

Um **primeiro** exemplo simples de aplicação do Teorema de Hopf (estudado em [5]), ocorre no seguinte sistema linear planar.

$$\begin{cases} x = \rho x - y \\ y = x + \rho y \end{cases} \quad (4.3)$$

Calculando os pontos de equilíbrio do sistema (4.3), obtém-se como solução a origem  $(x, y) = (0, 0)$ .

A matriz Jacobiana de (4.3) é:

$$J = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ 1 & \rho \end{pmatrix}$$

Note-se que os seus valores próprios são  $\sigma(\rho) \pm i\lambda(\rho) = \rho \pm i$

- Consideremos um valor de  $\rho$  positivo, por exemplo  $\rho = 1$ :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios da matriz são complexos conjugados, com parte real positiva, iguais a  $1 \pm i$ , obtendo-se uma fonte espiral (Figura 4.1).

Na verdade, para qualquer  $\rho > 0$ , obtém-se uma fonte espiral.

- Consideremos agora um valor de  $\rho$  negativo, por exemplo  $\rho = -1$ :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são da forma  $-1 \pm i$ , sendo complexos conjugados com parte real negativa, obtendo-se um poço espiral (Figura 4.2).

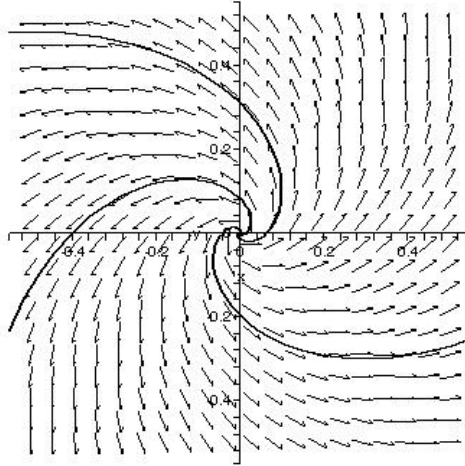


Figura 4.1: Diagrama de fase do sistema (4.3) para  $\rho = 1$  - **Fonte espiral**

Para qualquer  $\rho < 0$ , os valores próprios da matriz Jacobiana  $J$  são também complexos conjugados sendo  $\det(J) > 0$  e  $\text{tr}(J) = -2\rho < 0$ , com  $D = -4 < 0$ . Tem-se, portanto, um poço espiral para qualquer  $\rho < 0$ .

- Para  $\rho = 0$ , a matriz Jacobiana é

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são complexos imaginários puros, verificando-se assim, a primeira hipótese ( $H_1$ ) do Teorema 4.1. Obtém-se um **Centro** onde existe uma família contínua de soluções periódicas a rodear o ponto de equilíbrio (Figura 4.3).

Analisando o Jacobiano verifica-se que  $\frac{1}{2}\text{tr}(J_{X(\rho)}) = \rho$  e tem-se que

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{2}\text{tr}(J(\rho)) \right] = 1 \neq 0$$

então a condição  $H_2$  de cruzamento dos valores próprios, é satisfeita para o sistema (4.3). Conclui-se pelo teorema de Hopf que existe uma família de soluções periódicas no sistema (4.3).

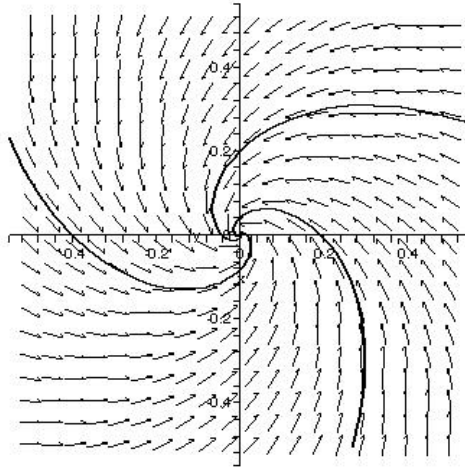


Figura 4.2: Diagrama de fase do sistema (4.3) para  $\rho = -1$  - **Poço espiral**

### 4.2.2 Exemplo 2

Consideremos um segundo sistema (estudado em [5]) não linear e dependendo de dois parâmetros reais  $\rho$  e  $\mu$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu + \rho x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Fixamos  $\mu > 0$  e variamos o parâmetro  $\rho$ . Determinando os pontos de equilíbrio do sistema obtém-se a origem  $(x, y) = (0, 0)$  e um ponto de equilíbrio não trivial, para cada  $\rho$  e  $\mu$ :

$$(x, y) = (1, \mu + \rho)$$

Neste ponto de equilíbrio vai ocorrer bifurcação de Hopf. No entanto, para que possamos usar o teorema de Hopf conforme está enunciado neste capítulo, o ponto de equilíbrio deve ser  $(x, y) = (0, 0)$ . Vamos fazer a seguinte mudança de variável:

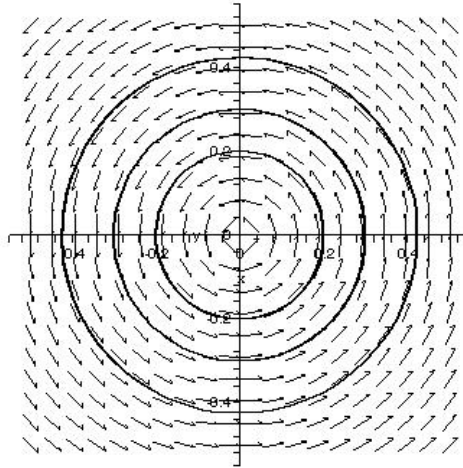


Figura 4.3: Diagrama de fase do sistema (4.3) para  $\rho = 0$  - **Centro**

$$X \rightarrow x - 1$$

$$Y \rightarrow y - \mu - \rho$$

resolvendo em ordem a  $x$  e  $y$  fica:

$$x \rightarrow X + 1$$

$$y \rightarrow Y + \mu + \rho$$

que representa uma translação que desloca o ponto de equilíbrio  $(x, y) = (1, \mu + \rho)$  para  $(x, y) = (0, 0)$ .

O sistema (4.4) fica:

$$\begin{cases} \dot{X} = (X + 1)(\rho X - Y) \\ \dot{Y} = (Y + \mu + \rho)X \end{cases} \quad (4.5)$$

Os pontos de equilíbrio são:

$$\begin{cases} X = -1 \\ Y = -\mu - \rho \end{cases} \vee \begin{cases} Y = 0 \\ X = 0 \end{cases}$$

A matriz Jacobiana de (4.5) é:

$$J_{(X,Y)} = \begin{pmatrix} 2\rho X - Y + \rho & -1 - X \\ Y + \mu + \rho & X \end{pmatrix}$$

Avaliando J em  $(X, Y) = (0, 0)$  obtemos:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ \mu + \rho & 0 \end{pmatrix}$$

e avaliando J em  $(X, Y) = (-1; -\mu - \rho)$  obtemos:

$$J_{(1,\mu+\rho)} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que representa uma sela.

Verificando-se assim, que  $X(\rho) = (0, 0)$ .

Determinando os valores próprios de  $J_{(X(\rho))}$  tem-se:

$$|C - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \rho - \lambda & -1 \\ \mu + \rho & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando este determinante obtemos:

$$\lambda^2 - \rho\lambda + \mu + \rho = 0$$

Como  $\mu > 0$  e se considerarmos  $\rho = 0$ , obtemos valores próprios imaginários puros  $\lambda = \pm\sqrt{\mu}i$ . Atendendo à observação 4.1 i) poderíamos reescalar a variável  $t$  de modo a que os valores próprios fossem  $\lambda = \pm i$ . Estamos perante um centro.

A condição de que as partes reais dos valores próprios atravessam a origem com velocidade diferente de zero é:

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{2} \text{tr}(J_{X(\rho)}) \right] \neq 0$$

Analisando o Jacobiano verifica-se também que  $\frac{1}{2} \text{tr}(J_{X(\rho)}) = \rho/2$  e tem-se que  $\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{2} \text{tr}(J_{X(\rho)}) \right] = 1/2 \neq 0$ , então a condição de cruzamento dos valores próprios é também satisfeita para o sistema (4.4). Conclui-se, usando o Teorema de Hopf, que existe uma família de soluções periódicas.

### 4.3 Bifurcação de Hopf subcrítica e supercrítica

Existem dois tipos de bifurcação de Hopf, uma em que a solução periódica é criada em torno de um ponto de equilíbrio instável, designada de bifurcação de Hopf **supercrítica**, e a outra em que a solução periódica é criada em torno de um ponto de equilíbrio estável, bifurcação de Hopf **subcrítica**. [5]

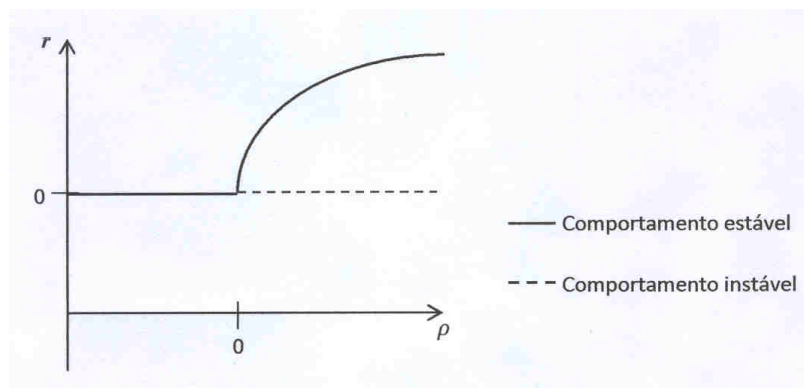


Figura 4.4: Bifurcação de Hopf supercrítica

Um exemplo que ilustra estes dois tipos de bifurcação de Hopf foi estudado no capítulo 3.

Olhando para o estudo realizado no sistema (4.2), podemos concluir que no caso em que  $\alpha = -1$ , a bifurcação de Hopf é supercrítica.

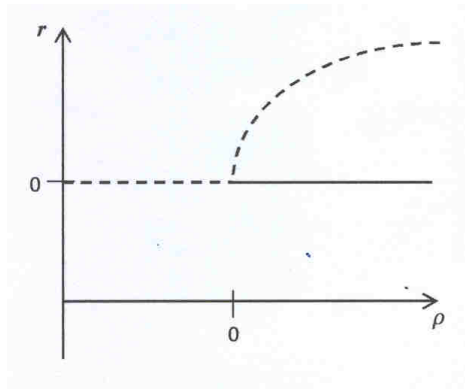


Figura 4.5: Bifurcação de Hopf subcrítica

No caso em que  $\alpha = 1$  estamos perante uma bifurcação de Hopf subcrítica.

# Capítulo 5

## Aplicações

Neste capítulo são abordadas duas aplicações da teoria exposta atrás: a reacção química de Belousov Zhabotinsky (BZ) e uma versão mais simples, em duas dimensões, das equações de Hodking e Huxley (HH)(modelo em quatro dimensões para explicar a propagação do impulso nervoso do axónio gigante da lula) que são as equações de FitzHugh - Nagumo (FN).

### 5.1 Introdução

A reacção de BZ é uma reacção oscilatória clássica, com bastante interesse teórico. É uma reacção complexa, formada por sistemas simplificados que apresentam soluções periódicas. É estudado neste capítulo o esquema de Brusselator, cuja versão mais simples foi proposto por I. Prigogini (Prémio Nobel da Física em 1977) e R. Lefever, em 1968.

A reacção de BZ, é uma reacção química que oscila entre dois estados. Pertence a uma classe de reacções, conhecidas por osciladores químicos não lineares, que não são dominadas pelo equilíbrio termodinâmico - temperatura única num sistema. Para além do interesse teórico deste tipo de sistemas, que juntamente com a convecção

de Bénard desempenharam um papel central no estudo da formação de padrões em sistemas dissipativos, as oscilações químicas são importantes como modelos de reacções biológicas que ocorrem longe do equilíbrio.

Em 1951, o bioquímico Belousov interessou-se pelo estudo do ciclo metabólico, o ciclo de Krebs ou ciclo do ácido cítrico. Descobriu que, numa solução de brometo de potássio, sulfato de cério e ácido cítrico em ácido sulfúrico diluído, a razão das concentrações de iões de cério  $Ce^{3+}$  e  $Ce^{4+}$ , em vez de variar de maneira monótona, oscilava no tempo. A consequência destas oscilações de concentração é que, na reacção de BZ, quando os reagentes são bem misturados, observa-se uma mudança regular da cor da solução, de amarelo a transparente, uma e outra vez. A reacção oscila no tempo com um período bem definido. Belousov reparou também que, se os reagentes não fossem misturados, a reacção dava origem a padrões espaciais com a forma de ondas de cor amarela.

Tentou publicar o artigo mas, após várias tentativas falhadas desistiu. Em 1962, A.M. Zhabotinsky, manifestou interesse por este trabalho tendo Belousov cedido os seus manuscritos. Em 1968, Zhabotinsky divulgou os seus resultados e, a partir daí, a reacção de BZ começou a chamar a atenção da comunidade científica.

Esta reacção é bastante complexa, envolvendo mais de 20 reacções elementares, sendo propostos sistemas simplificados, formados por um conjunto de reacções químicas que apresentam soluções periódicas. Dois desses sistemas são o de Brusselator e o de Oregonator, sendo aqui estudado só o de Brusselator.

Alan Lloyd Hodgkin e Andrew Huxley descreveram em 1952 um modelo para explicar o mecanismo subjacente à iniciação e à propagação do impulso nervoso por potenciais de acção no axónio gigante da lula. Ambos receberam o Prémio Nobel em 1963 para a Fisiologia/Medicina com este trabalho.

Um potencial de acção é uma reacção do neurónio a um estímulo que traduz a transmissão do sinal. É uma descarga de iões positivos e negativos que percorrem a membrana da célula, e ocorre quando há um estímulo externo que excede um

determinado valor (o limiar). Trata-se de uma variação brusca no potencial-eléctrico que se propaga ao longo da célula, com forma e velocidade bem definidas. Depois de ocorrer um potencial de acção, a célula volta ao seu estado de equilíbrio, sendo no entanto, aumentado o valor do limiar durante um determinado período de tempo, designado por período refractório (duração 1.5 msec). Estas acções são essenciais nas características da vida animal, transportando rapidamente a informação dentro e entre os tecidos. Podem ser criadas por vários tipos de células, mas são usadas mais extensivamente pelo sistema nervoso para a comunicação entre os neurónios e para transmitir informação entre os neurónios e outros tecidos como os músculos e glândulas.

A maioria dos resultados no que se refere às equações de HH são numéricos e, por isso, ao estudar modelos de outros tecidos excitáveis é necessário refazer os cálculos. Alguns resultados analíticos podem ser obtidos sem usar a forma explícita dos canais dinâmicos. Estes resultados são qualitativos e podem facilmente ser adaptados a uma vasta classe de modelos, que descrevem o comportamento dos diferentes tipos de células excitáveis.

O modelo de HH só permite observar as trajectórias em diagramas de fase a quatro dimensões. Existe um modelo mais simples, o de FitzHugh-Nagumo (FN), que permite visualizar de uma só vez a solução total num diagrama de fase a duas dimensões.

Depois das equações de HH serem introduzidas e estudadas numericamente, foram realizados esforços para encontrar sistemas de equações diferenciais mais simples e que preservassem as propriedades qualitativas essenciais das equações de HH. Para conseguir isto com sucesso, foi necessário combinar conhecimentos de matemática e fisiologia. Note-se que não poderia ter sido feito baseado simplesmente nos conhecimentos matemáticos, devido às propriedades qualitativas essenciais das equações de HH não serem conhecidas e do ponto de vista puramente lógico, encontrar um sistema mais simples é impossível.

No entanto, tendo em conta a base fisiológica, FitzHugh (1961), Nagumo Arimoto e Yoshizawa (1962), propuseram um sistema a duas dimensões baseado nas equações de HH, sendo mais fácil a análise destas equações no espaço de fase.

## 5.2 Equações de Brusselator

A chave para compreender a reacção de BZ é um processo chamado catálise, que consiste na aceleração da taxa da reacção pela acção de um catalizador (um composto químico que não é consumido durante a reacção). Quase todas as reacções bioquímicas nos seres vivos usam enzimas, proteínas naturais que actuam como catalizadores, e Belousov tentava precisamente modelar uma destas reacções quando descobriu as oscilações químicas.

A reacção de BZ produz o seu próprio catalizador. Um dos produtos actua como catalizador para acelerar a formação de mais produto. Este processo autocatalítico, a que vamos chamar A, é caracterizado por feedback positivo: à medida que se forma mais produto a taxa de reacção aumenta, como numa reacção nuclear. A reacção de BZ envolve dezenas de reacções químicas, mas o mecanismo responsável pelas oscilações pode ser compreendido se considerarmos apenas um segundo processo B, que compete com o processo A e impede o processo autocatalítico de continuar. O feedback positivo do processo A consome os reagentes rapidamente e a concentração dos produtos aumenta à mesma taxa. Um destes produtos é colorido e a solução toma essa cor. Quando os reagentes são consumidos, o processo A pára e o processo B começa a produzir um produto com uma cor diferente. Com o decorrer do tempo este processo também consome os reagentes e o processo autocatalítico recomeça. A existência do ciclo resulta do facto de cada um dos processos produzir alguns reagentes necessários ao outro. Os ciclos repetem-se, numa espécie de ciclo vicioso, enquanto o fluxo de reagentes e produtos se mantiver. (site)

Zhabotinsky demonstrou que  $Ce(III)$  e  $Ce(IV)$  eram as espécies cíclicas e propôs

um mecanismo para estes ciclos ocorrerem. As equações seguintes mostram o mecanismo simplificado.



A equação (5.1) é autocatalizada por  $BrO_3^-$ , e por iões  $Br^-$ . Por outro lado, enquanto  $Ce(IV)$  é produzido na equação (5.1), a taxa da equação (5.2) aumenta. Isto origina elevadas concentrações de  $Br^-$ , o que inibe e abranda a equação (5.1).

### 5.2.1 Noções básicas das equações motrizes

As equações químicas são escritas na seguinte forma:



em que  $A$  e  $B$  reagem juntos para formar as espécies  $C$  e  $D$ . A partir da equação química podemos facilmente escrever a equação taxa. Note-se que na maioria dos sistemas químicos a taxa da reacção é proporcional à concentração dos reagentes.

Suponhamos que a concentração da espécie  $A$  é  $[A]$ , e a concentração de  $B$  é  $[B]$ . Uma vez que  $A$  é consumida na reacção, a taxa de reacção,  $r_a$ , é negativa. Então, a equação da taxa da reacção é dada por:

$$-[\dot{A}] = -r_a = k[A][B] \quad (5.4)$$

onde  $k$  é a constante da taxa da reacção, sendo  $[\dot{A}] = \frac{d[A]}{dt}$ .

Só com uma reacção é fácil verificar que a equação diferencial da concentração de cada espécie é dada por:

$$-\dot{[A]} = -\dot{[B]} = \dot{[C]} = \dot{[D]} = k[A][B] \quad (5.5)$$

Adicionando uma segunda equação química:



obtemos um sistema um pouco mais complexo.

Na equação (5.6) as espécies  $A$  e  $E$  têm coeficientes maiores do que a unidade, as equações diferenciais para cada espécie são:

$$-\dot{[B]} = -\dot{[C]} = \dot{[D]} = k[A][B] \quad (5.7)$$

$$\dot{[A]} = -k_3[A][B] - 2k_6[A]^2 \quad (5.8)$$

$$\dot{[E]} = 3k_6[A]^2 \quad (5.9)$$

O mecanismo do Brusselator é dado por (5.10-5.13).



As espécies autocatílicas que interessam são  $X$  e  $Y$ .

### 5.2.2 Equações diferenciais do mecanismo de Brusselator

Suponhamos que  $x = [X]$ ,  $y = [Y]$  são as concentrações das espécies autocatílicas, e  $a = [A]$  e  $b = [B]$  são constantes.

Determinemos a equação diferencial da espécie  $x$ , obtemos:

$$\dot{x} = k_1a + 2k_2x^2y - k_3bx - k_4x$$

em que:

- $k_1a$  e  $2k_2x^2y$  representam a produção de  $x$  na primeira e segunda equação respectivamente,
- $-k_3bx$  e  $-k_4x$  representam o consumo de  $x$  na terceira e quarta equação.

Determinando a equação diferencial da espécie  $y$ , obtemos:

$$\dot{y} = -2k_2x^2y + k_3bx$$

em que:

- $-2k_2x^2y$  representa o consumo de  $y$  na segunda equação,
- $k_3bx$  representa a produção de  $y$  na terceira equação.

Obtém-se o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1a + 2k_2x^2y - k_3bx - k_4x \\ \dot{y} = -2k_2x^2y + k_3bx \end{cases} \quad (5.14)$$

Nesta análise vamos supor que todas as constantes de taxa são iguais a um, e que os reagentes  $A$  e  $B$  estão de tal modo em excesso que as suas concentrações não se alteram no tempo. Os parâmetros  $a$  e  $b$  são portanto constantes. O sistema fica:

$$\begin{cases} \dot{x} = a + 2x^2y - bx - x \\ \dot{y} = -2x^2y + bx \end{cases} \quad (5.15)$$

Fazendo as mudanças de variável  $X^* = \frac{x}{a}$  e  $Y^* = \frac{y}{a}$  obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{X}^* = 1 - (b+1)X^* + 2a^2X^{*2}Y^* \\ \dot{Y}^* = bX^* - 2a^2X^{*2}Y^* \end{cases} \quad (5.16)$$

### 5.2.3 Análise das equações diferenciais

Por simplicidade de notação vamos considerar  $X^* = x$  e  $Y^* = y$  e  $2a^2 = a$ . A reacção dinâmica de Brusselator pode ser reescrita através de duas equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y \\ \dot{y} = bx - ax^2y \end{cases} \quad (5.17)$$

onde  $x, y \in \mathbb{R}$ , representam as concentrações das duas reacções e  $a$  e  $b$  são constantes positivas.

Determinando os pontos de equilíbrio de (5.17), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 1 - (b+1)x + ax^2y = 0 \\ bx - ax^2y = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Adicionando e simplificando as duas equações:  $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Substituindo numa das equações o valor de  $x$  obtido, obtém-se:  $b - ay = 0 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}$ .

Obtém-se assim, o ponto de equilíbrio  $(x, y) = (1, \frac{b}{a})$ .

A matriz Jacobiana de (5.17) é:

$$J = \begin{pmatrix} -b - 1 + 2axy & ax^2 \\ b - 2axy & -ax^2 \end{pmatrix}$$

Avaliando  $J$  em  $(x, y) = (1, \frac{b}{a})$ :

$$J_{(1, \frac{b}{a})} = \begin{pmatrix} b - 1 & a \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Analisando o Jacobiano verifica-se também que  $tr(J) = b - a - 1$  e que  $det(J) = -ba + a + ba = a$ .

Calculando os valores próprios da matriz tem-se:

$$|C - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b - 1 - \lambda & a \\ -b & -a - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

obtendo-se:

$$\lambda^2 + \lambda(a - b + 1) + a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-(a - b + 1) \pm \sqrt{(a - b + 1)^2 - 4a}}{2}$$

Como  $a > 0$  logo  $det(J) > 0$ , então o ponto de equilíbrio não é um ponto sela.

Se  $b < a + 1$ , então  $tr(J) < 0$ , e o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável (poço espiral).

Se  $b > a + 1$ , então  $tr(J) > 0$ , ocorre um ciclo-limite no ponto de equilíbrio. A ocorrência deste ciclo-limite é responsável pela existência de movimentos oscilatórios no sistema.

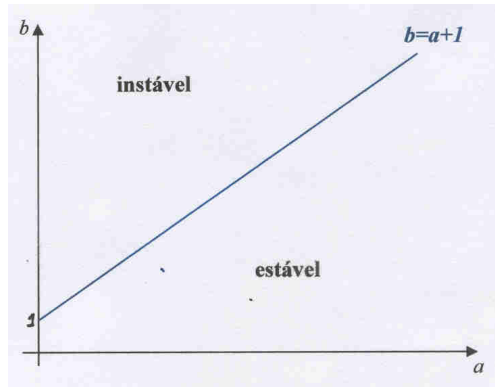


Figura 5.1: Estabilidade em (5.17) - Equações de Belousov-Zhabotinski

Fixando  $a$  e variando  $b$ , o ponto de equilíbrio  $(x, y) = (1, \frac{b}{a})$  muda de estabilidade. Como o sistema (5.17) não apresenta mais pontos de equilíbrio, é de esperar que ocorra uma bifurcação de Hopf no ponto  $b_c = a + 1$ .

Os valores próprios de (5.18) são imaginários puros se e só se  $tr(J)^2 - 4det(J) < 0$ .

Se  $b_c = a + 1$ ,  $b - a - 1$  tende a aproximar-se de zero. Sendo o ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Como  $det(J) = a$ , então  $tr(J)^2 - 4det(J) = -a < 0$ , o que é pretendido.

Analisando o Jacobiano verifica-se também que  $\frac{1}{2}tr(J_{(1, \frac{b}{a})}) = (b - a - 1)/2$ .

Tem-se que  $\frac{d}{db} \left[ \frac{1}{2}tr(J_{(1, \frac{b}{a})}) \right] = 1/2 \neq 0$ .

Então, a condição de cruzamento dos valores próprios é também satisfeita para o sistema, mostrando assim, que a bifurcação de Hopf ocorre para  $b_c = a + 1$ .

Concretizando no sistema (5.17)  $a = 1$  e  $b = 2$ , obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 3x + x^2y \\ \dot{y} = 2x - x^2y \end{cases} \quad (5.19)$$

Sendo de esperar o ponto de equilíbrio:  $(x, y) = (1, 2)$ . Calculando os valores próprios obtemos:  $\lambda = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm\frac{2i}{2} = \pm i$ , valores próprios imaginários puros.

### 5.3 Equações do tipo FitzHugh-Nagumo

As equações de FitzHugh-Nagumo (FN), representam um modelo simplificado das equações de Hodgkin e Huxley (HH), para a propagação do impulso nervoso. O sistema de equações proposto por FN em 1961, descreve as propriedades eléctricas de uma célula nervosa, e modelam sistemas excitáveis oscilatórios, entre eles, o coração.

Todos os seres vivos, produzem sinais de origem biológica, que podem ser eléctricos, mecânicos ou químicos. Estes sinais são de interesse para o diagnóstico e monitorização de doentes ou mesmo para investigação biomédica. [10]

Para se conseguir estudar alguns sistemas biológicos como o coração, foi necessário construir modelos teóricos que em condições controladas criavam sinais coerentes com os reais. Dessa forma, a modelagem do coração tornou-se importante no estudo e descrição da dinâmica desse sistema.

O modelo de FN é um modelo simplificado do funcionamento do miocárdio. Este modelo tem sido extremamente útil para o entendimento do comportamento em meios excitáveis e de como estes dependem de um conjunto pequeno de parâmetros.

Resultados preliminares confirmaram a presença de bifurcações nas equações de FN, onde estão presentes as bifurcações do tipo sela-nó e Hopf. Sendo esta última até ao momento a única analisada, dando origem ao comportamento oscilatório periódico dos impulsos nervosos.

As bifurcações podem estar relacionadas com o aparecimento ou eliminação de oscilações ou com a mudança no período dessa oscilação. Os diagramas de bifurcação mostram as transições entre flutuações cíclicas e caóticas, com comportamento ordenado (associado a doenças e falhas na resposta frente à perturbação) e complexo (frequentemente associado à reacção de novas condições e originar uma regulação adequada).

A ocorrência de bifurcações complexas são bem conhecidas em medicina, nomeadamente no ramo da cardiologia, onde mudanças complexas de ritmos associados a várias

arritmias podem estar associadas a bifurcações em equações dinâmicas não lineares.

As equações de FitzHugh-Nagumo são representadas a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I \\ \dot{y} = \phi(x + \alpha - \rho y) \end{cases} \quad (5.20)$$

onde  $x$  designa o potencial da membrana,  $y$  é a variável de recuperação,  $\phi$ ,  $\alpha$  e  $\rho$  são constantes positivas e  $I$  é a corrente total da membrana. Esta corrente pode ser uma função arbitrária do tempo, mas vamos considerar o caso que descreve a condição normal do funcionamento do nervo, isto é,  $I = 0$ . Fixando o parâmetro  $\alpha > 0$ , por exemplo  $\alpha = 1$ , e variando o parâmetro  $\rho$  ( $\rho > 0$  ou  $\rho < 0$ ), obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = \phi(x + 1 - \rho y) \end{cases} \quad (5.21)$$

Fazendo uma mudança de variável adequada e calculando os pontos de equilíbrio do sistema (5.22), obtém-se:

$$\begin{cases} x - \frac{x^3}{3} - y = 0 \\ x + 1 - \rho y = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

sendo a origem  $(x, y) = (0, 0)$  como uma das possíveis soluções.

A matriz Jacobiana de (5.22) é:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & -1 \\ 1 & -\rho \end{pmatrix}$$

Avaliando  $J$  em  $(x, y) = (0, 0)$ :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\rho \end{pmatrix}$$

Calculando os valores próprios da matriz tem-se:

$$|C - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -\rho - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

obtendo-se:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda(\rho - 1) + (1 - \rho) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{-(\rho - 1) \pm \sqrt{\rho^2 + 2\rho - 3}}{2} \end{aligned}$$

como  $\rho > 0$ , se considerarmos:

- $0 < \rho < 1$ , obtemos dois valores próprios complexos com parte real positiva. Assim, o  $\det(J) = \text{tr}(J) = 1 - \rho > 0$  e  $D(J) = \rho^2 + 2\rho - 3 < 0$ . Logo, a origem é uma **Fonte espiral**.
- $\rho > 1$ , obtemos dois valores próprios reais distintos de sinais contrários, sendo  $\det(J) = \text{tr}(J) = 1 - \rho < 0$  e  $D(J) = \rho^2 + 2\rho - 3 > 0$ . Então a origem é uma **Sela**.
- $\rho = 1$ , obtemos dois valores próprios complexos imaginários puros,  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$ , sendo  $\det(J) = \text{tr}(J) = 0$  e  $D(J) = b^2 + 2b - 3 = 0$ .

Analisando o Jacobiano verifica-se também que  $\frac{1}{2}\text{tr}(J_{(0,0)}) = (1 - \rho)/2$  e tem-se que  $\frac{d}{db} \left[ \frac{1}{2}\text{tr}(J_{(0,0)}) \right] = -1/2 \neq 0$ , então a condição de cruzamento dos valores próprios é também satisfeita para o sistema (5.22).

A adição da constante  $I$  pode originar o aparecimento de soluções periódicas. Em duas dimensões, se  $I$  excede um valor fixo surge uma solução periódica descontínua e a sua amplitude excede o valor fixado, isto é, a amplitude não aumenta continuamente a partir de zero como é o caso da bifurcação de Hopf.

O gráfico de Cole et al. (1955, p.166), mostra que se a corrente  $I$  toma valores elevados, o primeiro potencial de acção ocorre para um valor elevado de  $I$ . Se  $I$

for elevado o suficiente, o potencial de acção continua indefinidamente, ocorrendo o fenómeno oscilatório. Em termos de descrição matemática, existe uma solução periódica.

Todos os potenciais de acção têm a mesma amplitude, o que contradiz o teorema de Hopf, que afirma que à medida que o parâmetro muda, a amplitude da solução periódica aumenta monotonamente a partir de zero para valores mais elevados. A solução periódica aparece através de um amplitude fixa.

### 5.3.1 Abordagem feita por Keener e Sneyd das equações FN [11]

O estudo das equações de HH para a formação e propagação do impulso nervoso no axónio gigante da lula, deu início ao aparecimento de outros modelos na electrofisiologia, como o ritmo cardíaco. Esta abordagem estabelece um sistema dinâmico de equações diferenciais parciais não lineares.

Consideremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 4x - x^3 \\ \dot{y} = x - \rho y - c \end{cases} \quad (5.23)$$

Considerando  $\rho = 0$  e  $c = c_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ . A função cúbica  $y = f(x) = 4x - x^3$  tem um mínimo local para  $x = c_0$  e um máximo local para  $x = -c_0$ .

Verificando a afirmação anterior, vamos determinar os pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} -y + 4x - x^3 = 0 \\ x = c \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\begin{cases} y = 4x - x^3 \\ x = c \end{cases} \quad (5.25)$$

$x$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
$y'$	-	0	+	0	-
$y$	$\searrow$	$m$	$\nearrow$	$M$	$\searrow$

Tabela 5.1: Tabela - Estudo da variação de  $y$ 

Derivando a primeira equação:

$$y' = 4 - 3x^2 \quad (5.26)$$

Determinando os zeros da derivada:

$$4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

O sistema (5.23) tem um único ponto de equilíbrio:  $(x, y) = (c_0, f(c_0))$ .

Fazendo os cálculos obtemos o ponto de equilíbrio:  $(x, y) = (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{9})$

A matriz Jacobiana de (5.23) é:

$$J = \begin{pmatrix} 4 - 3x^2 & -1 \\ 1 & -\rho \end{pmatrix}$$

Avaliando  $J$  em  $(x, y) = (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{9})$ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\rho \end{pmatrix}$$

Sendo  $\rho = 0$ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica-se assim, que  $tr(J) = 0$  e  $det(J) = 1 > 0$ , obtendo-se a confirmação da primeira hipótese do Teorema de Hopf (4.1).

Como  $\frac{1}{2}tr(J) = (-\rho)/2$  e tem-se que  $\frac{d}{d\rho} [\frac{1}{2}tr(J)] = \frac{-1}{2} \neq 0$ , verificando a condição de as partes reais dos valores próprios atravessarem a origem com velocidade diferente de zero.

### 5.3.2 Abordagem ao modelo polinomial das equações FN [12]

Uma versão mais generalizada das equações de FN, é substituir  $-x + \frac{x^3}{3}$  por uma função  $F(x) = x(x - \alpha)(1 - x)$ , obtendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x - \alpha)(1 - x) - y + I \\ \dot{y} = \varepsilon(x - \rho y) \end{cases} \quad (5.27)$$

Assumindo os parâmetros de modo que exista um ponto de equilíbrio  $(x, y) = (0, 0)$  e calculando a matriz Jacobiana de (5.27):

$$J = \begin{pmatrix} -3x^2 + 2\alpha x + 2x - \alpha & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon\rho \end{pmatrix}$$

obtendo:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon\rho \end{pmatrix}$$

Sendo,  $tr(J) = -(\alpha + \varepsilon\rho)$  e  $det(J) = \varepsilon(\rho\alpha + 1)$ .

Os valores próprios são dados por:

$$\lambda^2 + (\alpha + \varepsilon\rho)\lambda + \varepsilon(\rho\alpha + 1) = 0$$

$$\lambda = \frac{-(\alpha + \varepsilon\rho) \pm \sqrt{(\alpha + \varepsilon\rho)^2 - 4\varepsilon(\rho\alpha + 1)}}{2}$$

A condição para que os valores próprios sejam imaginários puros é fazendo  $\alpha = -\varepsilon\rho$ .

$$\text{Os valores próprios são: } \lambda = \frac{\pm\sqrt{-4\varepsilon(-\varepsilon\rho^2+1)}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon\rho^2)}$$

Designando  $\mu = \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon\rho^2)}$  vem:  $\lambda = \pm\mu i$

Como  $tr(J) = 0$ ,  $det(J) = \varepsilon(\rho^2\varepsilon + 1) > 0$  e  $\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{2}tr(J) \right] = \frac{-1}{2} \neq 0$ , verificando-se também assim, as condições do Teorema de Hopf (4.1)

# Capítulo 6

## Conclusões

Muitas aplicações são modeladas por sistemas autônomos de equações diferenciais que contêm parâmetros. Quando estes parâmetros variam, os diagramas de fase das equações diferenciais podem também mudar. Valores dos parâmetros onde estas mudanças ocorrem são designados por valores de bifurcação.

A perda de estabilidade de um ponto de equilíbrio, ao variar os parâmetros das equações acontece quando a linearização em torno desse ponto tem um valor próprio cuja parte real muda de sinal. Obtém-se assim uma bifurcação de ponto de equilíbrio. Para valores próprios complexos, isto acontece quando a linearização em torno de um ponto de equilíbrio, tem um par de valores próprios imaginários puros. Estes pontos são os possíveis locais para a ocorrência de Bifurcação de Hopf, onde são criados ramos de soluções periódicas.

A procura de soluções periódicas - presentes em todos os ramos da ciência - nas equações de amplitude-fase, através da proposição apresentada no capítulo 3, mostra um outro método para encontrar estas soluções em sistemas escritos em coordenadas polares.

O estudo das equações diferenciais ordinárias desenvolveu diversas áreas do conhecimento. Estas equações são uma ferramenta importante na explicação de diversos

fenómenos observados na natureza.

Neste trabalho apresentamos dois exemplos: a reacção de Belousov Zhabotinsky e as equações de FitzHugh-Nagumo aplicados na química e biologia, respectivamente. A reacção de Belousov Zhabotinsky é uma reacção complexa oscilatória, com bastante interesse teórico, formada por sistemas simplificados que apresentam soluções periódicas. O modelo de FitzHugh-Nagumo tem o interesse de modelar o impulso nervoso nos neurónios e também o batimento cardíaco. A partir desse modelo, pode ser feita uma análise em termos dinâmicos para detectar e caracterizar possíveis bifurcações presentes nesse sistema biológico.

# Apêndice A

## Teorema da Função Implícita

**Teorema A.1** (Teorema da Função Implícita para funções de uma variável.)

*Seja  $F(x, y)$  uma função definida em  $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in i(C)$  e tal que:*

- a)  $F(x_0, y_0) = 0$ .
- b)  $F_x$  e  $F_y$  são contínuas numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ .
- c)  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

*Nestas condições existe pelo menos uma vizinhança do ponto  $(x_0, y_0)$  na qual a cada  $x$  corresponde um só valor de  $y$  que verifica a equação  $F(x, y) = 0$ . Fica assim, definida implicitamente uma função  $y = f(x)$  que toma o valor  $y = y_0$  para  $x = x_0$ . Essa função é continuamente derivável no ponto  $x_0$  sendo a sua derivada  $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ .*

**Teorema A.2** Teorema da Função Implícita para funções de duas variáveis.

*Seja  $F(x, y, z)$  uma função definida em  $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $(x_0, y_0, z_0) \in i(C)$  e tal que:*

- a)  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ .
- b)  $F_x, F_y$  e  $F_z$  são contínuas numa vizinhança de  $(x_0, y_0, z_0)$ .

c)  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Nestas condições existe pelo menos uma vizinhança do ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  na qual a cada par  $(x, y)$  corresponde um só valor de  $z$  que associado a  $(x, y)$  verifica a equação  $F(x, y, z) = 0$ . Fica assim, definida implicitamente uma função  $z = \varphi(x, y)$  que toma o valor  $z = z_0$  para  $x = x_0$  e  $y = y_0$ . Essa função é continuamente derivável no ponto  $(x_0, y_0)$  e as suas derivadas são dadas por  $z'_x = -\frac{F_x}{F_z}$ ;  $z'_y = -\frac{F_y}{F_z}$

### Teorema A.3 Teorema das Funções Implícitas. Caso geral.

Consideremos o sistema de  $n$  equações:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

sendo  $f_1, f_2, \dots, f_n$  funções das  $m + n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$  definidas em  $C \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ . Seja  $M(a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n) \in i(C)$  e

a) O ponto  $M$  verifica as equações do sistema A.1.

a) As funções  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são continuamente deriváveis em relação a todos os seus argumentos nas vizinhanças de  $M$ .

c) O determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

é diferente de zero no ponto  $M$ .

Nestas condições pode afirmar-se que existe pelo menos uma vizinhança do ponto  $M$  na qual a cada sistema  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  corresponde um e um só sistema  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  que associado ao primeiro verifica as equações do sistema A.1. Ficam assim definidas implicitamente  $n$  funções:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

que substituídas nas equações do sistema A.1 as convertem em identidades e que para  $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_m = a_m$  tomam os valores  $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \dots, y_n = b_n$ . As funções A.2 são continuamente deriváveis no ponto  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

Para calcular as derivadas  $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) derivamos as funções A.1 em ordem a  $x_i$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} + \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema pela regra de Cramer obtemos os valores  $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_i}$  procurados ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

#### NOTA:

Ao determinante  $\Delta$  chama-se determinante funcional ou determinante do Jacobiano e escreve-se muitas vezes

$$\Delta = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

# Referências

- [1] Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems, *Akad. Wiss.(Leipzig)* 94 , 3-22, 1942.
- [2] M. Golubitsky e D. Shaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Applied Mathematical Sciences 51, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [3] John Guckenheimer e Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] Stephen Lynch. *Dynamical Systems With Applications using MAPLE*, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [5] M.Golubitsky e Michael Dellnitz. *Linear Algebra and Differential Equations Using MatLab*, Brooks/Cole, 1999.
- [6] E.Sontag. *Notes on Hopf Bifurcation*, Sep 03, for Math 613. [www.coursehero.com/file/.../saturated-gains/](http://www.coursehero.com/file/.../saturated-gains/)
- [7] Shaun Ault and Erik Holmgren. *Dynamics of the Brusselator*, Math 715 Projects (Autumn 2002).
- [8] Luiz Edison Witkowski Filho. *O Comportamento Dinâmico e a Bifurcação de Hopf no Oregonator*, Fapesp, Setembro, 2006.
- [9] M. W. Hirsch e S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.

- [10] Juliana de Mattos Guerra, Yi Ling Liu e Reinaldo Roberto Rosa. *Análise dinâmica das equações de Bifurcações em Equações de FitzHugh-Nagumo*, Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, LAC,INPE, Brasil.
- [11] Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre Françoise e Claude Piquet. *Bursting Oscillations in Two Coupled FitzHugh-Nagumo Systems*. ComPlexUs. Original Research Paper, Outubro, 2001.
- [12] Arnaud Tonnelier. The Mckean's Caricature of the FitzHugh-Nagumo Model I. The Space-Clamped System, *SIAM J. Appl. Math.*, 63, No.2, 459-484, 2002.
- [13] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA 1979.
- [14] Arnold, V.I. *Catastrophe Theory*, Springer-Verlag, 1986.
- [15] Jane Cronin. *Mathematical Aspects of Hodgkin-Huxley Neural Theory*, Cambridge Studies in Mathematical Biology, Cambridge University Press.