

**DOMINGOS PIRES VALENTE SEVIVAS PINHO**



**MATRIZES E APLICAÇÕES NO ENSINO  
SECUNDÁRIO**

**UNIVERSIDADE PORTUCALENSE  
INFANTE D. HENRIQUE**

**PORTO**

**Fevereiro de 2010**

**DOMINGOS PIRES VALENTE SEVIVAS PINHO**



**MATRIZES E APLICAÇÕES NO ENSINO  
SECUNDÁRIO**

**Dissertação apresentada ao departamento de Inovação,  
Ciência e Tecnologia da Universidade Portucalense para  
obtenção do grau de Mestre em Matemática/Educação, sob  
a orientação da Professora Doutora Ana Paula Lopes**

**PORTO 2010**

## DECLARAÇÃO

Nome: \_\_\_\_\_

Nº. do B. I.: \_\_\_\_\_ Tel/Telem.: \_\_\_\_\_ e-mail: \_\_\_\_\_

Curso de Pós-Graduação:

Doutoramento

Área do doutoramento: \_\_\_\_\_ Ano de

conclusão: \_\_-\_\_-\_\_\_\_

Mestrado

Designação do mestrado: \_\_\_\_\_ Ano de

conclusão: \_\_-\_\_-\_\_\_\_

Título da tese / dissertação

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Orientador (es):

\_\_\_\_\_

**Declaro, para os devidos efeitos, que concedo, gratuitamente, à Universidade Portucalense Infante D. Henrique, para além da livre utilização do título e do resumo por mim disponibilizados, autorização, para esta arquivar nos respectivos ficheiros e tornar acessível aos interessados, nomeadamente através do seu repositório institucional, o trabalho supra-identificado, nas condições abaixo indicadas:**

Assinalar as opções aplicáveis em 1 e 2]

**1. Tipo de Divulgação:**

Total.

Parcial.

**2. Âmbito de Divulgação:**

Mundial (Internet aberta)

Intranet da Universidade Portucalense.

Internet, apenas a partir de  1 ano  2 anos  3 anos – até lá, apenas Intranet da UPT

**Advertência:** O direito de autor da obra pertence ao criador intelectual, pelo que a subscrição desta declaração não implica a renúncia de propriedade dos respectivos direitos de autor ou o direito de a usar em trabalhos futuros, os quais são pertença do subscritor desta declaração.

Assinatura: \_\_\_\_\_

Porto, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

\_\_\_\_\_

## **Agradecimentos**

A redacção da presente dissertação, embora fruto de meu esforço pessoal para vencer os inúmeros obstáculos encontrados nessa jornada, seria impossível sem o auxílio e colaboração de diversas pessoas, merecedoras de meus sinceros agradecimentos.

Faço um agradecimento especial à minha esposa Maria do Carmo, que em muitos momentos ajudou-me nesta difícil empreitada incentivando para que eu não desistisse e compreendeu a minha ausência em vários momentos de confraternização familiar.

Aos meus filhos, Gonçalo e Simão, a quem na verdade dedico este trabalho, agradeço pela compreensão, mesmo que involuntária nos vários momentos da minha ausência.

Aos meus pais, que apesar das dificuldades, ajudaram-me indirectamente na conclusão deste trabalho, tomando conta dos meus filhos em diversas ocasiões em que eu estive ausente.

Devo agradecer em memória do falecido Prof. Doutor António Pascoal que foi meu primeiro orientador e que a ele devo o caminho que comecei a percorrer referente ao tema proposto.

Considero manifestar sinceramente a gratidão à minha orientadora actual Prof<sup>a</sup> Doutora Ana Paula Lopes por se ter prestado a substituir o falecido Prof. Pascoal na orientação da minha tese e prontificando-se a ajudar, e a orientar, que com suas ideias foi possível que conseguisse chegar ao término deste trabalho.

À Prof<sup>a</sup>. Doutora Ana Júlia que num momento difícil da minha vida, estive prestes a desistir, ela contactou-me e convenceu-me a não desistir.

A todos os professores da universidade que em suas aulas puderam ajudar-me a reflectir melhor sobre minha conduta como professor e educador e que de certa forma provocaram algumas transformações em minha prática pedagógica.

Aos meus colegas de classe, que durante todo o percurso ajudaram-me a superar dificuldades pessoais e profissionais.

Aos meus amigos e colegas mais próximos que puderam compreender minha ausência em alguns eventos e incentivaram-me a continuar.

À Comissão de Horários da Escola Secundária Fernão de Magalhães, que possibilitou-me um horário ao qual eu pude frequentar as aulas respeitantes ao 1º ano do Mestrado.

E, finalmente, a Deus que acompanhou-me sempre nos momentos mais difíceis ao longo deste jornada.

## Resumo

Diversos problemas em Matemática recaem na discussão e na resolução de sistemas de equações lineares. As matrizes surgiram em Matemática com o objectivo de facilitar o tratamento de sistemas lineares.

O conceito de matriz é usado em muitas áreas da Matemática, estando também presente em áreas tão diversas como Engenharia, Física, Ciências de Computação, Biologia, entre outras. Considerando a importância deste conceito em tantas aplicações práticas, não é de surpreender que tenha sido e continue a ser objecto de intensa investigação, dando corpo a uma literatura muito vasta.

Neste trabalho, procuramos mostrar como o uso de matrizes na resolução de sistemas lineares no ensino da Matemática no Ensino Secundário pode ser um instrumento particularmente útil na descrição e estudo de certos fenómenos da natureza.

Assim, iremos propor a introdução das matrizes no currículo da Matemática do ensino secundário e o seu uso na resolução de problemas.

Começamos por fazer uma breve introdução histórica ao tema Matrizes e Sistemas Lineares, desde o seu aparecimento em tempos remotos até aos nossos dias. Apontamos a contribuição das Matrizes em distintas aplicações. Sugere-se ainda orientações, questões e problemas que um guia didáctico relativo ao tema sobre matrizes, deverá possuir, baseado em documentação bibliográfica.

Apresentamos alguns conceitos básicos e resultados fundamentais sobre matrizes sendo parte destes acompanhados de exemplos. Procuramos apresentar estes conceitos e resultados com simplicidade, de uma forma que esperamos que seja útil a todos aqueles que abordam este assunto.

Fazemos também uma breve referência à utilização de tecnologia, como material de apoio e sua contribuição no processo ensino aprendizagem, nomeadamente alguns softwares de Matemática e o uso das calculadoras gráficas.

Palavra-chave: Matrizes, Sistemas de Equações Lineares, Aplicações de Matrizes

## Abstract

Diverse problems in Mathematics fall upon the discussion and resolution of Linear Equation Systems. In Mathematics the matrixes appeared with the aim of dealing with Linear systems in an simpler way.

The concept of Matrixes is used in many areas of Mathematics, being also present in such diverse areas as Engineering, Physics, Computer Science, Biology and many others. Considering the importance of this concept in so many practical applications, it is not surprising that it has been and continues being object of intense investigation, contributing to an array of vast literature.

In this research work, we have tried to show how the use of matrices in the resolution of linear systems in the teaching of mathematics in the secondary school level may be a particularly helpful instrument in the description and study of certain natural phenomena.

Therefore, we are going to suggest the introduction of matrices in the curriculum of Mathematics of the secondary school level and their use in problem solving matters.

We begin by doing a brief historical introduction about the theme of Matrices and Linear Systems, since their arrival in remote times till today. We mention the contribution of Matrices in distinct applications. It is also suggested guidelines, questions and problems that a didactic guide about the theme of Matrices should have, based upon bibliographical documentation.

We present some basic concepts and fundamental results about Matrices, being part of these accompanied with examples. We make an effort to try to present these concepts and results with simplicity, in a way that we hope to be useful to those who address this matter.

We also make a quick reference to the use of technology, as an aid and its contribution to the learning and teaching process, such as: some Mathematical software's and the use of graphic calculators.

Key words: Matrices, Systems of Linear Equations, Applications of Matrices.

# Índice

RESUMO .....	VI
ABSTRACT .....	VII
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. RESENHA HISTÓRICA SOBRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES E MATRIZES NA ÁLGEBRA LINEAR.....	5
3. PROPOSTA DE INTRODUÇÃO DO TEMA MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NO PROGRAMA DE MATEMÁTICA A DO 11º ANO DE ESCOLARIDADE .....	11
3.1. OBJECTIVOS ESPECÍFICOS .....	14
3.2. UNIDADE DIDÁCTICA 1- MATRIZES .....	14
3.2.1. ACTIVIDADES, RECURSOS E ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS .....	15
3.3. UNIDADE DIDÁCTICA 2 - RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	16
3.3.1. ACTIVIDADES, RECURSOS E ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS .....	16
3.4. PROPOSTA DE INTRODUÇÃO DO TEMA MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NO PROGRAMA DE MATEMÁTICA A DO 11º ANO DE ESCOLARIDADE .....	17
3.5. CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO.....	20
4. PROPOSTA DIDÁCTICA DE ENSINO DE MATRIZES.....	21
4.1. COMO INTRODUIR O CONCEITO DE MATRIZ .....	21
4.2. TIPOS DE MATRIZES .....	24
4.3. OPERAÇÕES COM MATRIZES.....	27
4.3.1. ADIÇÃO .....	27
4.3.1.1 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES.....	30
4.3.2. MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ .....	30
4.3.2.1 PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR UMA MATRIZ .....	31
4.3.3. PRODUTO DE DUAS MATRIZES.....	32
4.3.3.1 PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES .....	37
4.3.4. TRANSPOSIÇÃO .....	39
4.3.4.1 PROPRIEDADES DA TRANSPOSIÇÃO DE MATRIZES .....	40
4.4. INVERSA DE UMA MATRIZ QUADRADA.....	40
4.4.1. PROPRIEDADES DA MATRIZ INVERSA .....	40
5. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES .....	43
5.1. CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS.....	44
5.2. MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO .....	44
5.3. MÉTODO DE ADIÇÃO ORDENADA OU REDUÇÃO.....	46
5.4. SISTEMAS E EQUAÇÕES MATRICIAIS.....	48
5.5. OPERAÇÕES ELEMENTARES .....	50
5.6. RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA PELO MÉTODO DE GAUSS-JORDAN .....	51

5.7. CÁLCULO DA INVERSA DE UMA MATRIZ PELO MÉTODO DE GAUSS-JORDAN .....	56
5.8. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA .....	58
6. ALGUMAS APLICAÇÕES DE MATRIZES .....	74
6.1. APLICAÇÃO À GEOGRAFIA.....	74
6.2. APLICAÇÃO À ECONOMIA .....	78
6.3. APLICAÇÃO À BIOLOGIA .....	80
6.4. APLICAÇÃO À GEOMETRIA – TRANSFORMAÇÃO NO PLANO.....	82
6.5. APLICAÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS .....	86
6.6. APLICAÇÃO À CRIPTOGRAFIA. COMO ESCREVER E DECIFRAR CHAVES.....	95
6.7. APLICAÇÃO À ECONOMIA: ANÁLISE INPUT-OUTPUT .....	98
7. UTILIZAÇÃO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS.....	100
7.1. APLICAÇÃO DAS CALCULADORAS GRÁFICAS.....	101
7.2. FOLHA DE CÁLCULO EXCEL .....	108
7.3. SOFTWARE GRÁFICO .....	115
8. CONCLUSÃO E TRABALHO FUTURO .....	123
BIBLIOGRAFIA.....	125

## **Lista de tabelas**

<b>Tabela 1 - Programa de Matemática A do 11º Ano.....</b>	<b>14</b>
<b>Tabela 2 – Proposta de introdução do Tema Matrizes e Sistemas de Equações Lineares no programa de Matemática A do 11º Ano de Escolaridade .....</b>	<b>18</b>
<b>Tabela 3 – Proposta de introdução do Tema Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, detalhado .....</b>	<b>19</b>
<b>Tabela 4- Produção dos três produtos por fábrica.....</b>	<b>22</b>
<b>Tabela 5- Altura, peso e idade por pessoa.....</b>	<b>22</b>
<b>Tabela 6- Produção de queijos durante o primeiro ano .....</b>	<b>27</b>
<b>Tabela 7- Produção de queijos durante o segundo ano .....</b>	<b>27</b>
<b>Tabela 8 – nº de transístores e resistências adquiridas .....</b>	<b>31</b>
<b>Tabela 9 - Quantidades de vitaminas por alimento.....</b>	<b>33</b>
<b>Tabela 10- Resultados da 1ª Fase .....</b>	<b>34</b>
<b>Tabela 11- Pontuação.....</b>	<b>35</b>
<b>Tabela 12 – Operações elementares sobre linhas de uma matriz .....</b>	<b>50</b>
<b>Tabela 13 - Método Gauss-Jordan.....</b>	<b>56</b>
<b>Tabela 14 – Ligações entre cidades por estradas asfaltadas.....</b>	<b>75</b>
<b>Tabela 15- Quadro de números atribuídos a caracteres.....</b>	<b>95</b>
<b>Tabela 16 - Quadro de números atribuídos a caracteres.....</b>	<b>97</b>
<b>Tabela 17 - Comparação entre calculadoras gráficas. ....</b>	<b>107</b>
<b>Tabela 18- Distribuição de componentes para autocarros .....</b>	<b>114</b>
<b>Tabela 19- produção nos dois primeiros meses .....</b>	<b>114</b>
<b>Tabela 20 – Resumo das características mais significativas das ferramentas estudadas .</b>	<b>121</b>

## Lista de Figuras

Figura 1 - Leibniz.....	7
Figura 2 – Personalidades históricas na teoria dos sistemas e matrizes: (a) Sylvester; (b) Cayley .....	8
Figura 3 – Classificação de sistemas.....	44
Figura 4 – Exemplo de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x$ e $y$ , possível e determinado .....	60
Figura 5 – Exemplo de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x$ e $y$ , possível e indeterminado.....	61
Figura 6 – Exemplo de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x$ e $y$ , impossível. 62	
Figura 7 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e determinado. ....	64
Figura 8 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e indeterminado.....	66
Figura 9 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e indeterminado.....	67
Figura 10 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e indeterminado.....	69
Figura 11 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.....	70
Figura 12 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.....	71
Figura 13 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.....	72
Figura 14 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.....	73
Figura 15 -Ligações entre cidades por estradas .....	
Figura 16 - Representação da imagem de um dado obtida uma transformação.....	83
Figura 17- representação de quatro pontos (quadriláteros) .....	84
Figura 18 representação de pontos e suas transformações.....	85
Figura 19 representação de pontos e suas transformações.....	85
Figura 20 - Exemplo de um Grafo .....	87
Figura 21- Exemplo de um Grafo com 6 vértices e 9 arestas .....	88
Figura 22- Exemplo de um Grafo com 6 vértices e 7 arestas .....	88
Figura 23-Mapa das pontes de Königsberg .....	88
Figura 24 – Grafo das Pontes de Königsberg .....	89
Figura 25 – Conexões entre Vértices .....	89
Figura 26 – Grafo e sua representação matricial.....	90
Figura 27 – Grafo e sua representação matricial .....	91

Figura 28 – Grafo que traduz os resultados do torneio e a sua representação matricial ...	92
Figura 29 – Esquema de tráfego de uma cidade .....	92
Figura 30- Resolução com a Calculadora .....	103
Figura 31- Resolução gráfica.....	104
Figura 32 – Resolução com calculadora.....	106
Figura 33 - Exemplo de adição de matrizes utilizando a folha de cálculo do Excel .....	109
Figura 34 - Exemplo de adição de matrizes utilizando o Excel passo a passo .....	109
Figura 35 - Exemplo de adição de matrizes utilizando a folha de cálculo Excel. ....	110
Figura 36 - Exemplo de multiplicação de um escalar por uma matriz utilizando a folha de cálculo Excel.....	111
Figura 37 - Exemplo de multiplicação de um escalar por uma matriz utilizando o Excel. ....	111
Figura 38 - Exemplo de multiplicação de matrizes configurando o Excel. ....	112
Figura 39 - Exemplo de multiplicação de matrizes utilizando os procedimentos.....	113
Figura 40 - Exemplo de multiplicação de matrizes utilizando o Excel.....	113
Figura 41 - Exemplo de multiplicação de matrizes utilizando o Excel.....	115
Figura 42 – Intersecção da função $50\ln(x)/x^2$ com a sua tangente em $x=4$ através da ferramenta <i>Graph</i> .....	116
Figura 43 – Histograma através do <i>AutoGraph</i> . ....	116
Figura 44 – Movimento parabólico através do <i>AutoGraph</i> .....	117
Figura 45 – Espiral logarítmica através do <i>AutoGraph</i> .....	117
Figura 46 Intersecção de planos no espaço através <i>AutoGraph</i> .....	118
Figura 47 – Intersecção de uma função com a sua tangente <i>GeoGebra</i> . ....	119
Figura 46 – Intersecção de um plano, um paralelepípedo e uma esfera através da ferramenta <i>Cabri-Géomètre</i> . ....	119
Figura 49 – Intersecção de um cubo com um plano através da ferramenta <i>Calques 3D</i> ..	120
Figura 50 – Resolução gráfica através do software <i>Winplot</i> .....	121

## 1. Introdução

Ao longo das etapas de formação, os alunos serão bombardeados com conceitos e procedimentos cuja utilidade o futuro dirá. Alguns estudantes que estudam tópicos de Álgebra no Ensino Secundário farão uso limitado de alguns de seus conteúdos, enquanto outros terão que ampliar e aperfeiçoar estes conteúdos.

Segundo LABRAÑA *et al.*<sup>1</sup>, numa conferência em Cambridge (Massachusetts) em 1963, Bruner, psicólogo cognitivo, profere diante de educadores matemáticos os seus estudos e apresenta a sua Teoria do “Currículo em Espiral”. Este afirma que qualquer ciência pode ser ensinada, pelo menos nas suas formas mais simples, a alunos de todas as idades, uma vez que os mesmos assuntos serão, posteriormente, retomados e aprofundados mais tarde.

LABRAÑA *et al.*<sup>2</sup>, a respeito das concepções de Bruner refere que a perspectiva cognitiva da aprendizagem, o conhecimento é reorganizada por cada aluno. A informação recente deve interligar-se com as estruturas do conhecimento já estabelecidas, produzindo uma reorganização das mesmas. Nestes termos ter-se-á melhor cimentado o conhecimento e conseqüentemente será mais duradouro, como uma transferência a novas situações.

Relativamente ao currículo na Matemática e em especial ao Tema Álgebra Linear, no Ensino Secundário, LABRAÑA *et al.*<sup>3</sup> cita o famoso matemático francês J. Dieudonné na sua intervenção num seminário da OCDE que teve lugar em Royaumont (França) em 1959 “*é imprescindível introduzir no currículo da “Matemática Moderna”, os tópicos referentes à Teoria das Matrizes de 2ª e 3ª ordem, a partir dos 14 anos*”.

A dificuldade da linguagem algébrica e a grande abstracção de seus conceitos provocam certas considerações e análise, como referiu FAINGUELERNT<sup>4</sup> e, por isso, o rigor deverá ser introduzido, aos poucos, a partir dos conhecimentos pré-estabelecidos dos alunos e procurando a discussão de ideias e temas, para que o jogo simbólico não perca a sua força comunicativa.

---

<sup>1</sup> LABRAÑA *et al* (1995). Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales. Madrid. Síntesis. Pág 11.

<sup>2</sup> LABRAÑA *et al* (1995). Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales. Madrid. Síntesis. Pág 11.

<sup>3</sup> LABRAÑA *et al* (1995). Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales. Madrid. Síntesis. Pág 12.

<sup>4</sup> FAINGUELERNT, E. e GOTTIELB, F., Matrizes e Determinantes, Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro, RJ, 2004. Pág 1.

Segundo SANCHES<sup>5</sup>, a prática lectiva no ensino secundário deu a entender de que, praticamente, o ensino-aprendizagem de matrizes é um ensino de um modo geral fomentado por regras e procedimentos, deslocado da realidade e conseqüentemente da Álgebra, não estando em sintonia com os avanços da sociedade da informação e com os estudos já realizados pela Psicologia Educacional.

MENDONÇA<sup>6</sup>, refere que o estudo de sistemas de equações baseia-se na aprendizagem mecânica de regras, carentes de significado. Este é um dos mais graves impedimentos ao processo de ensino/aprendizagem de resolução sistema de equações.

LABRAÑA *et al.*<sup>7</sup>, defendem que uma Aprendizagem Significativa induz no aluno uma maior autonomia e uma maior eficiência na sua manipulação. Muitas vezes não é fácil a sua introdução, se não estiver num contexto e com uma prática racional. O que importa é apreensão e compreensão dos conhecimentos matemáticos, de modo a resolver problemas e atingir a maior possibilidade de acertos.

“As operações com Matrizes abordam-se a partir de problemas sobre situações familiares cuja solução segue somas, multiplicações entre si ou multiplicar por um número de matrizes, o que proporciona um suporte psicológico das mesmas, relacionando-as com as estruturas das operações aritméticas, que já possuem.”

As investigações de Katona (1940/1967) referido por LABRAÑA *et al.*<sup>8</sup>, definem que uma aprendizagem por associação ou memorização com autonomia está em constante com a aprendizagem significativa. Este investigador assinala pontos importantes que diferenciam os métodos referidos, tais como:

- As aprendizagens significativas criam alicerces na estrutura cognitiva e, por isso, a sua durabilidade em termos de memória é mais longa e por conseguinte são fáceis de transferir a novas situações;
- Os alunos que são autodidactas e que conseguem atingir por si só o entendimento de regras e procedimentos, teriam menos dificuldades para estabelecer soluções para problemas passados um certo intervalo de tempo.

LABRAÑA *et al.*<sup>9</sup>, refere que o modo formal da Matemática como é ensinado nas escolas, leva a esta disciplina a conjunto de símbolos, técnicas, regras e

---

<sup>5</sup> SANCHES, M.H.F. (2002). *Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes*. Dissertação (Mestrado em educação matemática) UNICAMP, São Paulo. Pág 6

<sup>6</sup> MENDONÇA, MCD. (2000). *Resolução de Problemas Pede (Re) Formulação*. In: ABRANTES, P. *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo*. Lisboa, APM, 2. (p. 15-33).

<sup>7</sup> LABRAÑA *et al.* (1995). *Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Madrid. Síntesis. Pág 14.

<sup>8</sup> LABRAÑA *et al.* (1995). *Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Madrid. Síntesis. Pág 15.

<sup>9</sup> LABRAÑA *et al.* (1995). *Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Madrid. Síntesis. Pág 13

procedimentos dum grande valor instrumental, mas que carece de entendimento por uma grande parte dos alunos. A grande perfeição na elaboração dos resultados e a complexidade da carga simbólica da sua linguagem leva a dificuldades nas possibilidades de serem recuperados para uso posterior.

Segundo ALEKSANDROV *et al.*<sup>10</sup>, a transformação dum problema escrito em linguagem corrente a linguagem algébrica permite reduzir a carga de memória, visto que estabelecidas as equações, a resolução do problema reside num procedimento mecânico das técnicas conhecidas.

É importante realçar que além da experiência e uma melhora dos procedimentos cognitivos do aluno, GEENO (1978) citado por LABRAÑA *et al.*<sup>11</sup>, indica procedimentos para avaliar a qualidade da compreensão, e refere três pontos que podem resultar de grande aplicação:

- A interligação entre as representações internas que cada aluno faz dos conteúdos de trabalho;
- A interacção dos conhecimentos por parte do aluno;
- O processamento entre a imagem mental dos conteúdos e as noções matemáticas correctas.

A procura de uma transversalidade leva a um desenvolvimento que interage com os conteúdos, para além das relações que servem de base a novos conceitos. Na resolução de sistemas de equações lineares de três equações a três incógnitas que faz parte dos programas de Matemática A e B de 11º ano no Capítulo de Geometria Analítica é ensinado o Método de Redução ou Adição Ordenada. Outro dos métodos que poderíamos usar nesta resolução seria o Método de Eliminação de Gauss, que reduz o problema inicial a um outro, equivalente ao dado (isto é, com o mesmo conjunto solução), mas de resolução mais simples, utilizando matrizes.

A aplicação de sistemas de equações lineares na resolução de problemas surge em diversas áreas, como por exemplo, na Biologia, na Sociologia, na Economia, na Engenharia entre outras.

Propõe-se, por isso, uma organização dos tópicos de Álgebra no Ensino Secundário e a introdução do tema “ Matrizes e suas Aplicações”, coerente com a inovação desejada na área da Educação Matemática.

---

<sup>10</sup> ALEKSANDROV A. D., Kolmogorov A.N., Laurentiev M.A. y otros.(1994). **La matemática:**su contenido, métodos y significado, Verson española de Manuel López Rodriguez. Madrid: Alianza Editorial. Pág 21

<sup>11</sup> LABRAÑA *et al.* (1995). *Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales.* Madrid. Síntesis. Pág 17.

Verifica-se que os alunos olham para a Matemática como um aglomerado de operações abstractas de pouca aplicação à vida prática, pois por vezes apresentam uma certa complexidade de modo que dificultam a compreensão e aplicação da Álgebra de modo significativo.

TELLES<sup>12</sup>, estabelece que a relação entre a Aritmética e Álgebra é um campo muito importante no que diz respeito à Matemática na sua vertente educativa. Para os investigadores que se dedicam a elaborar estudos sobre esta área, diversas barreiras de cariz didáctico e epistemológico têm sido referidas.

Note-se que existem países como o Brasil, Espanha, Inglaterra entre outros, que têm incluído nos seus programas curriculares, a nível de Ensino Secundário, o tema “Matrizes”.

Mas à que ter em consideração o facto de que se pretendermos introduzir um novo tema ou unidade didáctica na área da Álgebra, nomeadamente “Matrizes e suas Aplicações” no currículo de Matemática do Ensino Secundário, este certamente obrigará a um aumento da carga-horária semanal da disciplina ou provavelmente à redução ou até mesmo eliminação de um outro tema existente.

Mas será que a importância deste tema para a formação dos alunos não justifica todos os esforços nesse sentido?

No presente trabalho serão apresentados alguns conceitos e resultados básicos de Álgebra Linear, funcionando como suporte teórico. Iremos ainda analisar de que forma o tema Matrizes e suas Aplicações poderão contribuir para a resolução de problemas, em particular na resolução de sistemas no Ensino Secundário.

Com esta dissertação desejámos, de algum modo, contribuir para uma evolução do ensino no sentido de tornar mais atractivo e significativo o estudo da Matemática.

---

<sup>12</sup> TELLES, Rosinalda Aurora de Mello. *A Aritmética e a álgebra na matemática escolar*. Educação Matemática em Revista, São Paulo: SBEM, ano 11, n. 16, pág. 8 -15, Maio 2004.

## 2. Resenha Histórica Sobre Sistemas de Equações e Matrizes na Álgebra Linear

A História da Matemática dá um contributo muito importante na formação do conhecimento matemático. A perspectiva histórica influencia a formação curricular, visto que pode sugerir importantes contributos didáticos e metodológicos compreendendo a formação de conceitos ao longo dos tempos.

Quais foram os passos ao longo da história da matemática que nos conduziram aos métodos de resolução de sistemas de equações que hoje se utiliza, baseados na teoria de matrizes? Que descobrimentos prévios foram necessários e em que condições e contexto se deram? Quais foram as motivações dos matemáticos, nas distintas épocas, para o estudo das mesmas?

Ao tentar responder a estas questões somos levados até às origens da Álgebra Linear.

Verificamos que já nas civilizações babilónicas e egípcia eram resolvidos sistemas de equações de primeiro grau. A Álgebra proporcionou uma ferramenta muito útil para resolver problemas práticos da vida quotidiana, como consta no Papiro de Rhind ou de Ahmes.

Os gregos foram os primeiros a estabelecer que as proposições da Matemática deveriam ter valor universal. Os problemas eram formulados em linguagem “retórico” e resolvidos em termos de comprimentos e áreas.

Diofante de Alexandria, foi considerado por alguns o pai da Álgebra, devido ao facto de ter sido um dos primeiros matemáticos a utilizar símbolos e letras na resolução dos problemas algébricos.

LABRAÑA *et al.*<sup>13</sup>, no seu livro refere que há mais de dois mil anos os Matemáticos chineses descobriram um método de resolução de sistemas de equações lineares equivalente ao Método de Gauss, onde utilizavam tabelas com números, como se pode observar no método que aparece “*Nos Nove Capítulos*” a principal obra matemática chinesa da antiguidade.

Segundo Boyer<sup>14</sup>, os Chineses gostavam especialmente de diagramas. Não é de surpreender que o primeiro registo (de origem antiga mas desconhecida) de um quadrado mágico tenha aparecido na China. O quadrado

---

<sup>13</sup> LABRAÑA *et al.* (1995). *Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Madrid. Síntesis. Pág 26.

<sup>14</sup> BOYER, Carl B. (1974). *História da Matemática*. São Paulo, Brasil. Pág 144

4	9	2
3	5	7
8	1	6

foi supostamente trazido para os homens por uma tartaruga do Rio Lo nos dias do lendário Imperador Yii (considerado como um engenheiro hidráulico). A preocupação com tais diagramas levou o autor dos *Nove Capítulos* a resolver o sistema de equações lineares simultâneas

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

efectuando operações sobre colunas na matriz

1	2	3	para reduzi-la a	0	0	3
2	3	2		0	5	2
3	1	1		36	1	1
26	34	39		99	24	39

onde a segunda forma representava as equações  $36z = 99$ ,  $5y + z = 24$  e  $3x + 2y + z = 39$ , das quais se retiravam facilmente os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Se a matemática chinesa tivesse tido ininterrupta continuidade, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente o desenvolvimento da matemática, mas infelizmente a cultura chinesa foi seriamente prejudicada por quebras abruptas. Em 213 A.C., por exemplo, o imperador da China mandou queimar os livros. Algumas obras escaparam, quer pela persistência de cópias quer por transmissão oral.

Durante o Renascimento dá-se a criação da “Álgebra Simbólica” que, juntamente com o sistema de numeração hindu - arábico, facilitou imenso os cálculos, devido à obra dos algebristas italianos, nomeadamente de Viéta, Cardano e Tartaglia.

No século XVII Descartes e Fermat, com a introdução dos sistemas de coordenadas, utilizaram a Álgebra para resolver problemas geométricos, estabelecendo assim uma conexão entre a Álgebra e a Geometria.

Leibniz, até 1693, utilizou um conjunto sistemático de índices para os coeficientes de um sistema de equações, sendo a sua solução dada em função destes.



Figura 1 - Leibniz<sup>15</sup>

Segundo LABRAÑA *et al.*<sup>16</sup>, Leibniz relata numa das suas cartas dirigidas a L'Hopital como utilizava um conjunto sistemático de índices para os coeficientes de um sistema de três equações lineares com duas incógnitas, como podemos observar a seguir:

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases} \text{ ou ainda } \begin{cases} 1_0 + 1_1x + 1_2y = 0 \\ 2_0 + 2_1x + 2_2y = 0 \\ 3_0 + 3_1x + 3_2y = 0 \end{cases}$$

Este sistema actualmente pode ser escrito sob a forma

$$\begin{cases} a_1 + b_1x + c_1y = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y = 0 \end{cases}$$

As suas contribuições a nível de notação demonstram que a eleição de uma linguagem adequada a cada situação era muito importante para Leibniz. Considera que o facto de usar um simbolismo adequado facilita o processo de pensamento e a comunicação. Na sua obra “Característica generalis” tentou criar uma linguagem científica universal, de forma a poder aplicar-se a todas as ciências.

Por volta de 1840, desenvolve-se o progresso da Álgebra Linear e Multilinear no sentido moderno. Pensa-se que o primeiro matemático a utilizar o termo “*Matriz*” foi o

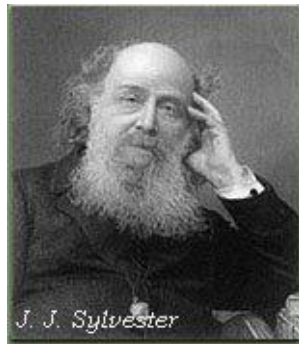
---

<sup>15</sup> Figura retirada de:

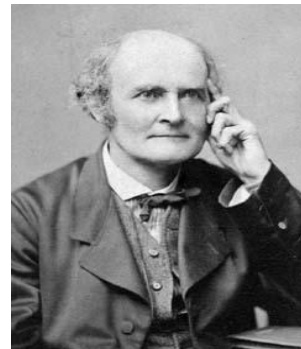
<http://pt.wikipedia.org/wiki/Leibniz> em Dezembro de 2008

<sup>16</sup> LABRAÑA *et al* (1995). Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales. Madrid. Síntesis. Pág 37.

Ingles James Sylvester em 1850. Cayley e Sylvester são considerados os precursores da teoria das Matrizes.



(a)



(b)

Figura 2 – Personalidades históricas na teoria dos sistemas e matrizes: (a) Sylvester<sup>17</sup>; (b) Cayley<sup>18</sup>

Segundo Boyer<sup>19</sup>, foi Cayley, que definiu operações com matrizes e suas propriedades. Da sua obra, destacamos um resultado obtido em 1858 sobre a teoria das transformações. Se, por exemplo, aplicamos após a transformação

$$T_1 \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

uma outra transformação

$$T_2 \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

o resultado é equivalente à transformação composta

$$T_2 T_1 \begin{cases} x'' = (Aa + Bc) x + (Ab + Bd) y \\ y'' = (Ca + Dc) x + (Cb + Dd) y \end{cases}$$

Se, por outro lado, invertermos a ordem de  $T_1$  e  $T_2$ , de modo que  $T_2$  é a transformação

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy \end{cases}$$

e  $T_1$  é a transformação

$$\begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy' \end{cases}$$

Figuras retiradas de:

<sup>17</sup> <http://images.google.com.br/imgres?imgurl=http://lena.professora.googlepages.com/sylvester.jpg/sylvester> em Dezembro de 2008

<sup>18</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Arthur\\_Cayley](http://pt.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley) em Dezembro de 2008.

<sup>19</sup> BOYER, Carl B. (1974). História da Matemática. São Paulo, Brasil. Pág 424

Então essas duas aplicadas sucessivamente equivalem à transformação única

$$T_1 T_2 \begin{cases} x'' = (aA + bC) x + (aB + bD) y \\ y' = (cA + dC) x + (cB + dD) y \end{cases}$$

A troca da ordem das transformações em geral produz um resultado diferente. Expresso na linguagem das matrizes, tem-se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

mas,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

Como duas matrizes são iguais sse todos os elementos correspondentes são iguais, é claro que estamos perante um exemplo de multiplicação não comutativa.

A definição da multiplicação de matrizes é a indicada acima, e a soma de duas matrizes (de iguais dimensões) é definida como a matriz obtida somando os elementos correspondentes das matrizes. Assim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + A & b + B \\ c + C & d + D \end{pmatrix}$$

A multiplicação de uma matriz por um escalar  $K$  é definida como

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é usualmente designada por  $I$ , deixa toda a matriz quadrada de ordem 2 invariante por multiplicação. A única matriz que deixa outra matriz invariante por adição é evidentemente a matriz nula

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é portanto a matriz identidade para a adição. Com estas definições podemos pensar nas operações sobre matrizes como nas de uma “álgebra”, passo que foi dado por Cayley e pelos matemáticos americanos Benjamin Peirce (1809-1880) e o seu filho Charles S. Peirce (1839-1914). O estudo da álgebra de matrizes e outras álgebras não

comutativas foi um dos principais factores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstracta da álgebra, especialmente no século vinte.

Mas, a Álgebra Linear continua em desenvolvimento, sendo esta aplicada a diferentes campos, impulsionados pela possibilidade de automatização dos cálculos por meio de máquinas. Entre elas destaca-se a Programação Linear, Cadeias de Markov, Modelos de Desenvolvimentos, Teoria dos Jogos, entre outros.

### 3. Proposta de Introdução do Tema Matrizes e Sistemas de Equações Lineares no Programa de Matemática A do 11º Ano de Escolaridade

A Matemática deve ser um instrumento de grande utilidade e formação para resolver as mais diversas situações e problemas que possam surgir inseridos na sociedade que se aproximam dos alunos. Sua leccionação e apreensão devem servir para desenvolver as capacidades cognitivas, que despertem o desenvolvimento do indivíduo e ajudem a interpretação do mundo físico e social.

É fundamental que os alunos, adquiram certos domínios e manipulem os objectos matemáticos em estudo e, conseqüentemente, de modo transversal que os interligue com outros ramos do saber e como aplicação ao desenvolvimento de futuras actividades profissionais.

Poderemos então incluir como proposta, a introdução no **Programa de Matemática A** o Tema “**Matrizes e Sistemas de Equações Lineares**”, onde o ensino da matemática ficará mais valorizado com a contribuição do ensino de Matrizes, visto que está praticamente em todos os campos da ciência e comunicação da vida quotidiana, fazendo parte da formação do indivíduo.

Programa de Matemática A do 11º Ano<sup>20</sup>  
Tema I – Geometria no Plano e no espaço II  
Aulas previstas – 30 aulas de 90 minutos (10 semanas)

Desenvolvimento	Indicações
▪ Resolução de problemas que envolvam triângulos..	No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria, logo o professor deve propor, agora, problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos) bem como aperceberem-se da importância da Trigonometria para as várias Ciências. Os estudantes devem ser solicitados a deduzir as razões trigonométricas em $\pi/6$ , $\pi/4$ e $\pi/3$ radianos por se considerar que é importante que se conheçam alguns valores exactos das funções

<sup>20</sup> Retirado de :

[http://www.dgicd.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica\\_A\\_11.pdf](http://www.dgicd.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_11.pdf)

<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Ângulo e arco generalizados: <ul style="list-style-type: none"> <li>– Radiano;</li> <li>– Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.</li> </ul> </li> <li>▪ Funções seno, co-seno e tangente: <ul style="list-style-type: none"> <li>Definição; variação (estudo no círculo trigonométrico);</li> <li>– Comparação de senos e co-senos de dois números reais.</li> </ul> </li> </ul>	<p>trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possam confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas. Isto não significa que se trabalhe preferencialmente com estes valores, até porque se usa a calculadora.</p> <p><u>A compreensão do círculo trigonométrico</u> é fundamental. A generalização das noções é intuída e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares pretendendo-se, agora, que, ao resolver problemas, os estudantes recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo e se enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuitivas. Pretende-se que os estudantes aprendam os conceitos de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas. É necessário que se apercebam da diferença em trabalhar por exemplo com <math>\text{sen}1</math> em graus e radianos de modo a ter sempre bem presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados. Recorrendo ao círculo trigonométrico as relações entre as funções circulares de <math>\alpha</math>, <math>\pi/2-\alpha</math>, <math>\pi/2+\alpha</math>, <math>\pi-\alpha</math>, <math>\pi+\alpha</math> e <math>-\alpha</math>, aparecem naturalmente aos estudantes mobilizando unicamente a compreensão dos conceitos já adquiridos. Não tem pois sentido que lhes sejam propostos exercícios rotineiros em que estas relações intervenham. Não vale a pena sequer privilegiar estes valores. Podem propor-se bons problemas que lhes permitam desenvolver a aptidão para reconhecer ou analisar propriedades de figuras geométricas. É importante verificar que se mantêm as relações:</p> $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1; \quad \text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x};$ $1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$ <p>Que devem ser usadas na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.</p>
---	--



<p>Programação linear - breve introdução.</p>	<p>A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10º e ampliados no 11º.</p>
<p>Domínios planos – interpretação geométrica de condições</p>	<p><i>Recorda-se novamente que se dá a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o estudante, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura, precisa de usar intuição e raciocínios geométricos. Ao professor compete assegurar que, neste estudo da Geometria, o estudante não se limita à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação. A aprendizagem dos novos conceitos aparece ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o estudante poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas)</i></p>

Tabela 1 - Programa de Matemática A do 11º Ano

### 3.1. Objectivos Específicos

Representar dados mediante matrizes, realizar diferentes operações com elas, expressar matricialmente sistemas de equações e resolver equações nas que a incógnita seja uma matriz.

Resolver problemas reais e sistemas de equações lineares com duas e três incógnitas utilizando diferentes métodos.

Resolver sistemas de equações lineares, utilizando o método de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan e resolver geometricamente e dar explicação ao significado geométrico.

### 3.2. Unidade didáctica 1- Matrizes

Nesta unidade a noção de matriz será dada como uma representação e ordenação de dados numéricos em linhas e colunas em tabelas de dupla entrada. É uma ferramenta algébrica importantíssima que favorece a representação, interpretação e manipulação de

dados que podem estar relacionados com diferentes situações de carácter científico, económico e social.

Quando o aluno estiver familiarizado estes novos elementos algébricos, estudará as operações algébricas com matrizes e as suas propriedades. Posteriormente irá ter conhecimento de várias aplicações: tabelas de dados numéricos de dupla entrada, representação de grafos e matrizes utilizadas em problemas de economia, agricultura, engenharia entre outros.

### **3.2.1. Actividades, recursos e orientações metodológicas**

O estudo teórico de matrizes (formalização) que se realiza nesta unidade deve ser comprovado com aplicações à vida real, assim como:

- Problemas reais que se interpretam mediante tabelas de dupla entrada.
- Situações aplicadas às diferentes áreas do conhecimento, tais como: ciências sociais e económicas, ciências experimentais e tecnológicas entre outras.
- Comentários sobre a apresentação de diversas informações como: horários de comboios, de autocarros entre outros.
- Apresentação de resultados de inquéritos e processos eleitorais.

Deve ser realizada uma meditação sobre o papel das TIC e aplicações na resolução de matrizes de grandes dimensões, persistindo no valor dos computadores.

É imprescindível uma prática intensa das operações com matrizes para que o aluno adquira destreza e rapidez na execução das novas regras operatórias de matrizes.

Estudo mediante exemplos e contra-exemplos das propriedades que distinguem as matrizes dos números, visto que o aluno pode confundir as matrizes com os números.

A utilização de tabelas de dupla entrada, elaboradas com dados obtidos de situações da vida real ajudará a que os alunos devam ter sobre o papel que vai desempenhar a notações e o cálculo matricial.

O estudo de matrizes quadradas deve ser importante nesta unidade.

### **3.3. Unidade didáctica 2 - Resolução de sistemas de equações lineares**

Nesta unidade o aluno deverá:

- Transcrever enunciados mediante sistemas lineares e resolve-los, quando seja possível.
- Utilizar o método de Gauss - Jordan para interpretar e resolver sistemas

#### **3.3.1. Actividades, recursos e orientações metodológicas**

Deve-se encetar esta unidade a relembrar o estudo de sistemas de equações com duas incógnitas, retomando assim conhecimentos já adquiridos e dotando assim duma continuidade. Nesta altura é adequado propor as primeiras actividades de tradução de enunciados em linguagem algébrica, visto tratar-se de enunciados acessíveis, com duas incógnitas em que os alunos as manipulam com facilidade. Nos anos anteriores, os alunos estiveram em contacto com as equações e sistemas com um certo grau de complexidade e, portanto, deve-se fazer referência a situações acessíveis para que as possa conectar com os seus conhecimentos prévios. Propor alguns exercícios.

A seguir iremos estudar a resolução de sistemas utilizando uma nova técnica, o método de Gauss-Jordan.

É muito importante que o professor tenha a aula sistematizada e organizada nas actividades que intervêm na tradução, interpretação e resolução de sistemas lineares. Deve-se persistir na escolha certa da incógnita para uma melhor percepção do problema.

Como exemplos de aplicação deste assunto à vida quotidiana poderemos referir por exemplo:

- Situações geográficas e de população;
- Estudos económicos;
- Crescimento Populacional;
- Importações e exportações;
- Compras e vendas;
- Idades e esperança de vida.

Após dominar a resolução de sistemas de equações, podem-se utilizar programas informáticos e máquinas de calcular gráficas para a sua resolução.

### 3.4. Proposta de introdução do tema Matrizes e Sistemas de Equações Lineares no Programa de Matemática A do 11º Ano de Escolaridade

Tema I – Geometria no Plano e no Espaço II

Aulas previstas – 35 aulas de 90 minutos (10 semanas)

Subtema - Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Aulas previstas – 5 aulas de 90 minutos

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<ul style="list-style-type: none"> <li>● Inserir o Conceito de Matriz, Matrizes como expressão de tabelas e grafos.</li> <li>● Tipos de Matrizes;</li> <li>● Operações entre Matrizes;</li> <li>● Propriedades da Adição e Multiplicação de Matrizes</li> </ul>	<p>Nesta unidade o aluno deve relacionar matrizes com a representação e ordenação de dados numéricos em linhas e colunas nas tabelas de dupla entrada. É uma ferramenta algébrica importantíssima que favorece a representação, interpretação e manipulação de dados que podem estar relacionados com diferentes situações de carácter científico, económico e social.</p> <p>O aluno deve saber os diferentes tipos de matrizes, tais como: Matriz Linha; Matriz Coluna; Matriz Nula; Matriz Vertical; Matriz Horizontal; Matriz Oposta; Matriz Transposta; Matriz Triangular Superior; Matriz Triangular Inferior.</p> <p>O estudo das Matrizes Quadradas tais como: Matriz Simétrica; Matriz Diagonal; Matriz Escalar; Matriz Identidade; Matriz Inversa; Matriz Aumentada e Matriz dos Coeficientes.</p> <p>Pretende-se que os alunos realizem operações com matrizes (adição, produto por um escalar, produto de matrizes) e façam uma interpretação dos resultados que possam aplicar, valorizando a utilidade desta unidade.</p> <p>Os alunos devem conhecer as propriedades da Adição e multiplicação de Matrizes.</p>

<ul style="list-style-type: none"> <li>● Sistemas de Equações Lineares</li> </ul> <p>Representação Matricial;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Classificação de Sistemas;</li> <li>● Método de Gauss-Jordan.</li> <li>● Aplicações</li> </ul>	<p>Deve-se iniciar esta unidade a relembrar o estudo de sistemas de equações com duas incógnitas, retomando conhecimentos já adquiridos e dotando assim de uma continuidade.</p> <p>Utilização das transformações de sistemas para obter outros equivalentes e do método de Adição ordenada ou redução para resolver sistemas.</p> <p>Obtenção da expressão matricial dum sistema de equações lineares dado.</p> <p>Resolução de sistemas de equações lineares pelo método gráfico de duas ( três) equações a duas (três) incógnitas, aplicando a resolução a distintos problemas da vida quotidiana e classificação segundo o resultado da análise das soluções do sistema.</p> <p>Resolução de sistemas de equações lineares aplicando o método da matriz inversa ou o método de eliminação de Gauss-Jordan.</p> <p>Utilizar os recursos das novas tecnologias tais como calculadoras gráficas e softwares na resolução de sistemas de equações lineares.</p> <p>Pretende-se que os alunos saibam resolver problemas que exijam a aplicação da modelação a problemas da vida real.</p>
---	--

Tabela 2 – Proposta de introdução do Tema Matrizes e Sistemas de Equações Lineares no programa de Matemática A do 11º Ano de Escolaridade

Subtema - Matrizes e Sistemas de Equações Lineares  
Aulas previstas – 5 aulas de 90 minutos

<b>Tema</b>	<b>Conceitos</b>	<b>Procedimentos</b>	<b>Atitudes</b>
<p>1.-MATRIZES</p> <p>(3aulas de 90 minutos)</p>	<p>-Matrizes como expressão de tabelas e grafos.</p> <p>-Tipos de matrizes. Operações com Matrizes.</p> <p>-Noção de Matriz transposta e de Matriz Inversa.</p> <p>- Operações Elementares sobre Linhas.</p>	<p>- Utilização de linguagem matricial para expressar tabelas e grafos.</p> <p>- Identificação dos distintos tipos de matrizes.</p> <p>- Operações com matrizes. Soma, produto por um escalar, produto de matrizes.</p> <p>- Aplicação das operações com matrizes para a resolução de problemas</p> <p>- Noção de transposta de uma matriz dada.</p> <p>- Noção de matriz inversa de uma matriz quadrada.</p>	<p>-Reconhecimento da utilidade da linguagem matricial e das operações com matrizes para expressar e representar determinadas situações próximas da realidade.</p> <p>-Interesse e gosto por facilitar de forma clara e precisa a informação mediante tabelas, grafos e matrizes.</p>
<p>2.- SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES</p> <p>(2 aulas de 90 minutos)</p>	<p>-Sistemas de equações lineares, representação matricial.</p> <p>- Classificação dos sistemas segundo suas soluções.</p>	<p>- Representação matricial dum sistema de equações lineares.</p> <p>- Obtenção de sistemas equivalentes.</p> <p>- Obtenção das soluções de um sistema pelo método de Gauss-Jordan</p> <p>- Aplicação do estudo e resolução de sistemas à resolução de problemas.</p>	<p>- Interesse na obtenção de soluções dum sistema de equações, comprovando os resultados.</p> <p>- Sensibilidade e gosto pela apresentação ordenada e clara do processo seguido na resolução de sistemas de equações lineares.</p> <p>- Apreciação dos sistemas de equações lineares para resolver determinadas situações da vida quotidiana.</p> <p>-Interesse na procura de novas estratégias de resolução de sistemas de equações, na obtenção das soluções e na comprovação das mesmas..</p>

Tabela 3 – Proposta de introdução do Tema Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, detalhado

### 3.5. CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

- Utilizar a linguagem matricial e aplicar as operações com matrizes na vida quotidiana, nas que há que fornecer uma informação estruturada na forma de tabelas ou grafos.

Pretende-se que os alunos façam uma descrição da informação através de tabelas, grafos e matrizes. Realizem operações com matrizes e façam uma interpretação dos resultados que possam aplicar à disciplina de Matemática A valorizando a utilidade do tema.

Pelo menos os alunos deverão saber resolver operações de adição, multiplicação por um escalar e produto de matrizes. Deverão saber resolver problemas cuja informação leve sob forma matricial e que realizem as operações que forem necessárias para a resolução e interpretação correcta das soluções.

- Passar um sistema de equações lineares à forma matricial e o contrário. Classificar um sistema, resolver no máximo um sistema de três equações a três incógnitas e fazer o seu enquadramento geométrico.

Pretende-se que os alunos sejam capazes de aplicar o método de Gauss-Jordan para a resolução de sistemas.

- Resolver problemas ligados à vida prática relacionados com: Economia, Física, Ciências Sociais, entre outros mediante a resolução de sistemas de equações lineares com duas ou três incógnitas.

Pretende-se que os alunos saibam resolver problemas que exijam modelação e resolução de sistemas de equações lineares de três equações a três incógnitas, utilizando o método referido anteriormente.

## **4. Proposta Didáctica de Ensino de Matrizes**

As matrizes e os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático e acessível aos estudantes do Ensino Secundário. Segundo PANCIERA<sup>21</sup>, as matrizes ordenam e simplificam os problemas, contribuindo para a resolução de vários tipos de questões. Estes têm como aplicações diversas áreas, como Administração, Economia, Sociologia, Ecologia, Demografia, Genética, Electrónica, Engenharia, Física entre outros. Não é difícil imaginar situações que conduzem a sistemas de equações, podendo os próprios alunos ser solicitados a fornecer exemplos.

Parece assim lógico juntar a utilidade e aplicação prática dos sistemas lineares à sua resolução através de matrizes. Pensamos que esta nova forma de resolver problemas irá beneficiar o desenvolvimento da capacidade de raciocínio lógico dos alunos, ao mesmo tempo que os motiva para a aprendizagem.

Pretende-se assim implementar um tipo de ensino, mais interactivo. Defende-se neste trabalho que o ensino deve ser uma “troca de experiências” entre os alunos e o professor, dando oportunidade aos alunos de fazer comentários, colocar problemas, utilizar software informático e máquinas de calcular gráficas.

### **4.1. Como introduzir o conceito de matriz**

Na apresentação do conceito de matriz, deve-se encetar pelas aplicações práticas, as quais surgem de forma natural na resolução de problemas, pois começam por ordenar e simplificar os mesmos. Deve-se procurar uma abordagem lógico-dedutiva, pois auxiliará os alunos que, ao concluírem o Ensino Secundário, pretendam ingressar em cursos como os de Engenharia, Economia, Ciências Sociais ou onde se utiliza este tipo de abordagem.

Deve-se introduzir estes conteúdos começando por mostrar uma representação numa tabela com uma aplicação prática e em seguida uma situação-problema, com aplicação à vida quotidiana.

---

<sup>21</sup> PANCIERA, M. V. F. (2006), *Modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares*. URL: <http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf> (em Dezembro de 2008)

## Exemplo 1

Uma indústria tem quatro fábricas *A*, *B*, *C*, *D*, cada uma da qual produz três produtos 1, 2 e 3. A tabela mostra a produção da indústria durante uma semana.

	<i>Fábrica A</i>	<i>Fábrica B</i>	<i>Fábrica C</i>	<i>Fábrica D</i>
<i>Produto 1</i>	560	360	380	0
<i>Produto 2</i>	340	450	420	80
<i>Produto 3</i>	280	270	210	380

Tabela 4- Produção dos três produtos por fábrica

Em relação à Tabela acima:

- Quantas unidades do produto 2 foram fabricadas pela fábrica *C*?
- Qual foi a Fábrica que produziu mais produto 3?
- Qual foi a Fábrica que produziu menos produto 2?
- Qual a quantidade de linhas e de colunas de cada tabela?

## Resolução

Em relação à Tabela acima interessa que os alunos façam uma ligação intuitiva entre tabela e a noção de matriz e situem os elementos da Tabela como elementos da matriz.

- Foram produzidos 420.
- Foi a Fábrica *D*.
- Foi a Fábrica *D*.
- Três linhas e quatro colunas.

## Exemplo 2

Na tabela apresentam-se os dados referentes à altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas:

	<i>Altura (m)</i>	<i>Peso (kg)</i>	<i>Idade (anos)</i>
<i>Pessoa 1</i>	1,70	70	23
<i>Pessoa 2</i>	1,75	60	45
<i>Pessoa 3</i>	1,60	52	25
<i>Pessoa 4</i>	1,81	72	30

Tabela 5- Altura, peso e idade por pessoa

Podemos organizar esta informação na forma de matriz. Assim, tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 1,70 & 70 & 23 \\ 1,75 & 60 & 45 \\ 1,60 & 52 & 25 \\ 1,81 & 72 & 30 \end{pmatrix}$$

Quando o número de variáveis e de observações é muito grande, esta disposição ordenada de dados, ou seja, a representação dos dados sob a forma de matriz é a mais adequada.

**Definição:**

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ , chama-se **matriz real** de tipo  $m \times n$  (lê-se “ $m$  por  $n$ ”) a uma função de domínio  $\{(i, j) : i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n\}$  e com conjunto de chegada  $\mathbb{R}$ . É usualmente representada por um quadro rectangular de elementos dispostos em  $m$  linhas (horizontais) e  $n$  colunas (verticais).

De um modo geral, uma matriz é representada por uma letra maiúscula e os seus elementos pela mesma letra minúscula indexada por dois números. O índice de linha precede o índice de coluna. Os elementos  $a_{ij}$  dizem-se as **entradas da matriz**. Uma matriz genérica  $A$ , com  $m$  linhas e  $n$  colunas, poderá ser escrita sob a seguinte forma:

$$A = \left[ a_{ij} \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Assim, por exemplo,  $a_{21}$  representa o elemento de  $A$  que se encontra na segunda linha e primeira coluna.

Os elementos de uma matriz podem ser números reais, números complexos, polinómios, funções, etc. Ao longo deste trabalho iremos apenas usar matrizes reais.

### Exemplo 3

1.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$  é uma matriz de tipo  $2 \times 3$ , isto é, uma matriz com duas linhas e três colunas.

2.  $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$  é uma matriz de tipo  $2 \times 2$ , isto é, uma matriz com duas linhas e duas colunas.

## 4.2. Tipos de Matrizes

**Matriz Rectangular**, quando o número de linhas for diferente do número de colunas ( $m \neq n$ ). Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz rectangular, de tipo } (2 \times 4).$$

**Matriz Quadrada**, quando o número de linhas for igual ao número de colunas ( $m = n$ ).

Por exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem } 3$$

Os elementos da forma  $a_{ii}$  dizem-se **elementos diagonais** da matriz  $A$ , e formam a **diagonal principal** ou simplesmente diagonal de  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Os elementos que se distribuem simetricamente em relação à diagonal principal chamam-se **elementos opostos**. O elemento  $a_{ij}$  é oposto do elemento  $a_{ji}$ . Por exemplo, na matriz anterior, os elementos  $a_{12}$  e  $a_{21}$  são opostos.

Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes do mesmo tipo. Estas **matrizes** dizem-se **iguais** se os elementos homólogos (elementos com índices iguais) forem iguais, isto é,

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Matriz Linha**, quando for constituída por uma só linha ( $1 \times n$ ) (vector linha). Por exemplo:

$$C = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 3] \text{ é uma matriz linha, de tipo } (1 \times 4).$$

**Matriz Coluna**, quando for constituída por uma só coluna ( $m \times 1$ ) (vector coluna). Por exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz coluna, de tipo } 3 \times 1.$$

**Matriz Nula**, se todos os seus elementos forem nulos. Simbolicamente representa-se por

$$O = [a_{ij}] : a_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

Vejam os alguns exemplos de matrizes nulas:

$$O_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{(2 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } O_{(1 \times 3)} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

**Matriz Triangular Superior**, é uma matriz quadrada em que todos os elementos situados abaixo da diagonal principal são nulos, isto é,

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j. \text{ Por exemplo:}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz triangular superior.}$$

**Matriz Triangular Inferior**, é uma matriz quadrada em que todos os elementos situados acima da diagonal principal são nulos, isto é,  $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} : a_{ij} = 0$  se  $i < j$ . Por exemplo:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz triangular inferior.}$$

**Matriz Diagonal**, se for simultaneamente triangular superior e inferior, isto é, uma matriz quadrada em que são nulos todos os elementos excepto os da diagonal principal. Por exemplo:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz diagonal.}$$

**Matriz Escalar**, se for diagonal e em que todos os elementos da diagonal principal são iguais. Por exemplo:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz escalar.}$$

**Matriz Identidade**, se for diagonal e em que todos os elementos da diagonal são iguais à unidade, representa-se por  $I$ . Por exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4.3. Operações com matrizes

#### 4.3.1. Adição

A **soma** de duas matrizes  $A_{(m \times n)}$  e  $B_{(m \times n)}$ , é a matriz  $C_{m \times n}$  cujos elementos são iguais à soma dos elementos homólogos de  $A$  e  $B$ , isto é:  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

#### Exemplo 4

Adicione as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

#### Resolução

A soma (adição) das duas matrizes é possível porque são ambas do mesmo tipo ( $3 \times 2$ ),

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 0 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}, \text{ que continua a ser uma matriz } (3 \times 2).$$

#### Exemplo 5

Consideremos as tabelas que descrevem a produção de queijos em dois anos consecutivos.

Ano 1	Queijo de vaca	Queijo de ovelha	Queijo de cabra	Queijo de mistura
Região 1	3000	200	400	600
Região 2	700	350	700	100
Região 3	1000	100	500	800

Tabela 6- Produção de queijos durante o primeiro ano

Ano 2	Queijo de vaca	Queijo de ovelha	Queijo de cabra	Queijo de mistura
Região 1	5000	50	200	0
Região 2	2000	100	300	300
Região 3	2000	100	600	600

Tabela 7- Produção de queijos durante o segundo ano

Em relação às tabelas anteriores:

- Escrever, na forma matricial, as tabelas de dois anos consecutivos.

- b) Calcular a produção total dos queijos em cada Região nos dois anos.
- c) Determinar a ordem da matriz obtida na alínea anterior e identificar quais são os elementos  $a_{21}$ ,  $a_{13}$  e  $a_{34}$  dessa matriz e o que representam.
- d) Encontrar o aumento ou quebra na produção de queijo de vaca e queijo de ovelha no primeiro ano em relação ao segundo ano e escrever sob a forma de matriz.
- e) Comparar as variações de produção do segundo ano em relação ao primeiro ano.

### Resolução

- a) No primeiro ano,

$$A = \begin{pmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

No segundo ano,

$$B = \begin{pmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

- b) Se quisermos elaborar uma tabela que dê a produção de queijos por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas acima, isto é, em termos matriciais a produção nos dois anos é dada por  $(A+B)$  que forma a matriz  $C$ .

$$C = A + B$$

$$C = \begin{pmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{pmatrix}$$

c) A ordem da matriz é 3 x 4 (três linhas e quatro colunas) e

$a_{21}$  corresponde a 2700, o que representa a quantidade total de queijo de vaca produzidos na região 2 em dois anos consecutivos;

$a_{13}$  corresponde a 600, o que representa a quantidade de queijo de cabra produzido na Região 1 em dois anos consecutivos;

$a_{34}$  corresponde a 1400, o que representa a quantidade de queijo de mistura na região 3 em dois anos consecutivos.

d) Fazendo a diferença do que foi produzido de queijo de vaca e queijo de ovelha em dois anos consecutivos.

$$\begin{pmatrix} 2000 & -150 \\ 1300 & -250 \\ 1000 & 0 \end{pmatrix}$$

e)

Registou-se

- um decréscimo do segundo ano em relação ao primeiro no que diz respeito à produção de queijo de ovelha na Região 1 e 2

- a mesma produção de queijo de ovelha na região 3 nos dois anos;

- um aumento na produção no segundo ano em relação ao queijo de vaca nas três Regiões.

Os problemas da vida real levam a fomentar nos alunos um interesse e uma aplicabilidade das matrizes, alicerçando conhecimentos para relacionar e representar os significados matemáticos

### 4.3.1.1 Propriedades da adição de matrizes

Admitindo que a dimensão das matrizes envolvidas permite que as operações indicadas possam ser efectuadas, então são válidas as seguintes propriedades:

- **Comutativa:**  $A + B = B + A$
- **Associativa:**  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Existência de elemento neutro:**  $A + O = O + A = A$   
( $O$  - matriz nula é o elemento neutro)
- **Existência de elemento simétrico:**  $A + (-A) = (-A) + A = O$   
(A matriz simétrica da matriz  $A$  é a matriz  $-A$  cujos elementos são os simétricos dos elementos de  $A$ )

### 4.3.2. Multiplicação de um escalar por uma matriz

A *multiplicação de número real  $\lambda$  por uma matriz  $A_{(m \times n)}$*  é uma matriz cujos elementos são iguais aos elementos de  $A$  multiplicados por  $\lambda$ , ou seja,  
$$\lambda A = \left[ \lambda a_{ij} \right]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$$

#### Exemplo 6

Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  e  $\lambda = 3$ . Calcule  $\lambda A$ .

#### Resolução

$$3 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -3 & 3 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

### Exemplo 7

Uma empresa de componentes electrónicos compra baterias e resistências a dois distribuidores *A* e *B*. A seguinte tabela mostra o número de transístores e de resistências que adquiriu a cada um dos distribuidores durante o mês de Março do presente ano.

	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Baterias</i>	40	80
<i>Resistências</i>	60	50

Tabela 8 – nº de transístores e resistências adquiridas

Estes dados podem-se escrever numa matriz de ordem 2 x 2.

$$M = \begin{pmatrix} 40 & 80 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}$$

Se a empresa decide incrementar em 10% a compra de componentes para o mês de Abril, então deverá comprar:

$$T = M + 0,1M = 1,1M \quad T = 1,1 \cdot \begin{pmatrix} 40 & 80 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 88 \\ 66 & 55 \end{pmatrix}$$

Logo comprará 44 baterias ao distribuidor *A* e 88 ao distribuidor *B*. Sendo assim, o número de resistências que comprará ao distribuidor *A* será de 66, sendo 55 as adquiridas ao distribuidor *B*.

#### 4.3.2.1 Propriedades da multiplicação de um escalar por uma matriz

Sendo *A* e *B* matrizes do mesmo tipo e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se:

- **Distributividade:**  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- **Distributividade:**  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- **Associatividade:**  $(\beta\alpha)A = \alpha(\beta A)$

### 4.3.3. Produto de duas matrizes

Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes tais que o número de colunas de  $A$  é igual ao número de linhas de  $B$ . O *produto das matrizes*  $A$  e  $B$  é uma matriz  $C$  tal que:  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ .

$$A_{(m \times n)} \cdot B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}$$

O elemento genérico  $c_{ij}$  é obtido multiplicando os elementos da linha  $i$  da matriz  $A$ , pela coluna  $j$  da matriz  $B$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

#### Exemplo 8

Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Calcule se possível  $A \times B$ .

#### Resolução

$$A_{(3 \times 2)} \times B_{(2 \times 2)} = C_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} : c_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} b_{kj}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 4 \\ 9 \times 1 + 7 \times 3 & 9 \times 2 + 7 \times 4 \\ 8 \times 1 + 0 \times 3 & 8 \times 2 + 0 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 24 \\ 30 & 46 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

### Exemplo 9

Suponhamos que a seguinte tabela forneça as quantidades das vitaminas *A*, *B* e *C* obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>Alimento I</i>	4	3	0
<i>Alimento II</i>	5	0	1

Tabela 9 - Quantidades de vitaminas por alimento

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

### Resolução

Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz “consumo”:

$$(5 \ 2)$$

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o “produto”:

$$(5 \ 2) \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (5 \times 4 + 2 \times 5 \quad 5 \times 3 + 2 \times 0 \quad 5 \times 0 + 2 \times 1) \\ = (30 \ 15 \ 2)$$

Isto é, serão ingeridas 30 unidades de vitamina *A*, 15 de *B* e 2 de *C*.

Ainda relativamente a este exemplo, vamos considerar outra situação.

### Exemplo 10

Suponhamos que o custo dos alimentos depende só do seu conteúdo vitamínico e os preços por unidade de vitamina *A*, *B* e *C* são, respectivamente, 1,5 € u.m., 3,0 € u.m. e 5,0 € u.m., quanto pagaríamos pela porção de alimentos indicada no exemplo anterior?

### Resolução

$$(30 \ 15 \ 2) \times \begin{pmatrix} 1,50 \\ 3,00 \\ 5,00 \end{pmatrix} = (30(1,5) + 15(3) + 2(5)) = 100$$

Ou seja, pagaríamos 100 € u.m.

### Exemplo 11

Durante a 1ª fase do Europeu de Futebol 2004 (Portugal), o grupo de Portugal era formado também pela Grécia, Espanha e Rússia. Os resultados estão registados na tabela seguinte:

<i>País/Resultado</i>	<i>Vitória</i>	<i>Empate</i>	<i>Derrota</i>
<i>Portugal</i>	2	0	1
<i>Grécia</i>	1	1	1
<i>Espanha</i>	1	1	1
<i>Rússia</i>	1	0	2

Tabela 10- Resultados da 1ª Fase

Qual a pontuação obtida por cada equipa?

## Resolução

A partir destes dados podemos construir a seguinte matriz ( $4 \times 3$ ), que representa os resultados de cada equipa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A pontuação obtida em cada jogo apresentada na tabela seguinte,

<i>Número de Pontos</i>	
<i>Vitória</i>	<i>3</i>
<i>Empate</i>	<i>1</i>
<i>Derrota</i>	<i>0</i>

Tabela 11- Pontuação

pode ser descrita pela matriz B, de ordem  $3 \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, terminada a 1ª fase, a pontuação obtida por cada país é dada por:

$$\text{Portugal} : 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$$

$$\text{Grécia} : 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$$

$$\text{Espanha} : 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$$

$$\text{Rússia} : 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$$

Essa pontuação pode ser dada por uma matriz, representada por AB (produto de A por B).

$$AB = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### Exemplo 12

Considere as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Determine o produto da matriz  $A$

pela matriz  $B$ , caso seja possível.

### Resolução

Como a matriz  $A$  é uma matriz de tipo  $3 \times 2$  e  $B$  de tipo  $2 \times 2$ , o número de colunas de  $A$  é igual ao número de linhas de  $B$ , logo é possível o produto  $AB$  dando origem a uma matriz  $C$  de tipo  $3 \times 2$ .

O elemento  $c_{11}$ , que pertence à 1ª linha e à 1ª coluna de  $AB$ , é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da 1ª linha de  $A$  pelos elementos da 1ª coluna de  $B$ , e somando-se os produtos obtidos, obtendo-se

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 2 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

O elemento  $c_{12}$ , que pertence à 1ª linha e à 2ª coluna de  $AB$ , é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da 1ª linha de  $A$  pelos elementos da 2ª coluna de  $B$ , e somando-se os produtos assim obtidos portanto:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 1 \times 1 + 2 \times 4 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Assim sucessivamente, obtendo

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times 4 \\ 3 \times 7 + 4 \times 2 & 3 \times 1 + 4 \times 4 \\ 0 \times 7 + 5 \times 2 & 0 \times 1 + 5 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 29 & 19 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

### Exemplo 13

Considere as matrizes  $A$  e  $B$ , tais que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Calcule, se possível, o seu produto.

### Resolução

A matriz produto existe se o número de colunas de  $A$  é igual o número de linhas de  $B$ , o que se verifica, logo

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (2) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (2) & 1 \cdot (3) + 2 \cdot (4) + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (2) + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (2) & 2 \cdot (3) + 3 \cdot (4) - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -3 & 20 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

#### 4.3.3.1 Propriedades da multiplicação de matrizes

Admitindo que a dimensão das matrizes envolvidas permite que as operações indicadas possam ser efectuadas, então são válidas as seguintes propriedades:

- **Associativa:**  $(AB)C = A(BC)$
- **Distributiva em relação à adição**
  - à esquerda:  $A(B + C) = AB + AC$
  - à direita:  $(B + C)A = BA + CA$
- $I_n$  é o elemento neutro da multiplicação de matrizes quadradas

A multiplicação de matrizes não é comutativa  $AB \neq BA$ .

Se  $AB = BA$  então  $A$  e  $B$  dizem-se **matrizes permutáveis** ou **comutáveis**.

### Exemplo 14

a) Há casos em que é possível efectuar  $A \times B$ , e não  $B \times A$ .

$$\text{Consideremos } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

No entanto, não é possível efectuar  $B \times A$ .

b) Nos casos em que é possível efectuar  $A \times B$  e  $B \times A$ , nem sempre se obtêm mesmo resultado. Muitas vezes, as matrizes obtidas não são da mesma ordem.

$$\text{Consideremos } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 10 & -10 \end{pmatrix},$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 12 & 0 & 6 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

c) No caso das matrizes serem quadradas, pode não se verificar a propriedade comutativa.

$$\text{Seja } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Exemplo 15

Existem matrizes não nulas cujo produto é a matriz nula.

Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 4.3.4. Transposição

**Matriz transposta** de uma matriz  $A$  é a matriz que se obtém trocando ordenadamente linhas por colunas e representa-se por  $A^T$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Uma **matriz** quadrada diz-se **simétrica** se  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , isto é,  $A = A^T$ .

Por exemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \text{ é uma matriz simétrica pois } B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

#### 4.3.4.1 Propriedades da transposição de matrizes

Admitindo que a dimensão das matrizes permite que as operações indicadas possam ser efectuadas, então são válidas as seguintes regras:

- $(A^T)^T = A$
- Se  $k \in \mathbb{R}$  então  $(kA)^T = kA^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

#### 4.4. Inversa de uma matriz quadrada

Chama-se **matriz inversa** da matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , à matriz que multiplicada por  $A$ , à esquerda e à direita, dá a matriz identidade da mesma ordem.

A matriz inversa, quando existe, é da mesma ordem que  $A$  e representa-se por  $A^{-1}$ .

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

##### 4.4.1. Propriedades da matriz inversa

Admitindo que as matrizes admitem inversa e que a sua dimensão permite que as operações possam ser efectuadas, então são válidas as seguintes regras:

- $A^{-1}$  quando existe é única
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Se  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  então  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$
- $A^m A^n = A^{m+n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$
- $(A^m)^n = A^{m \times n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$

**Observação:**

- $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
- Se uma matriz quadrada admite inversa diz-se uma **matriz regular**.
- Se uma matriz quadrada não admite inversa diz-se uma **matriz singular**.

**Exemplo 16**

Verificar que a matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  é  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Resolução**

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}.A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

**Exemplo 17**

Determinar a matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ , se existir, utilizando a definição da matriz inversa.

**Resolução**

Suponhamos que a matriz inversa é  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ , então  $A.A^{-1} = I_n$ .

$$\begin{aligned}
A \cdot A^{-1} &= I_2 \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3z & y+3w \\ 6z & 6w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=1 \\ y+3w=0 \\ 6z=0 \\ 6w=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=0 \\ w=\frac{1}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, a matriz inversa da matriz  $A$  é  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ .

### Exemplo 18

Existem matrizes que não admitem inversa.

Verifique que a matriz  $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  não admite inversa.

### Resolução

Vamos supor que existe a matriz inversa  $M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ , então

$$\begin{aligned}
M \cdot M^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+6z & 2y+6w \\ x+3z & y+3w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6z=1 \\ 2y+6w=0 \\ x+3z=0 \\ y+3w=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=\frac{1}{2} \\ y+3w=0 \\ x+3z=0 \\ y+3w=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Este sistema não tem solução e, como consequência, a matriz  $M$  dada, não possui inversa.

As matrizes que possuem inversa também se dizem *invertíveis*.

## 5. Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Os coeficientes  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) e os termos independentes  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) são constantes conhecidas. Os  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) são as incógnitas cujos valores se pretendem determinar.

Uma solução deste sistema é um conjunto de valores, um para cada incógnita, que quando substituídos em todas as equações as tornam válidas.

Os métodos de resolução de sistemas de equações lineares foram desenvolvidas e sistematizadas, por distintos matemáticos através dos tempos, como por exemplo, o método de tentativa, método de substituição, método de escalonamento ou eliminação de Gauss, método de Gauss-Jordan, entre outros.

Qual o interesse dos diferentes métodos?

Na resolução de Sistemas de Equações Lineares, os métodos objecto de estudo do 3º ciclo são o Método de Tentativa e a seguir o de Substituição. Estes métodos são aplicados a problemas que envolvem sistemas que tenham no máximo duas equações e duas incógnitas.

Entretanto, no Ensino Secundário surgem problemas que envolvem três equações a três incógnitas, como problemas de geometria no espaço. Daí a necessidade de conhecer novos métodos que viabilizem a resolução dos mesmos.

Dos métodos existentes, tem-se o de Adição Ordenada ou Redução que é análogo ao de método de Gauss-Jordan, como se verá adiante.

O método que se propõe incluir no programa de Matemática A do 11º Ano de Escolariedade, é o Método de Gauss-Jordan o qual iremos estudar.

## 5.1. Classificação de sistemas

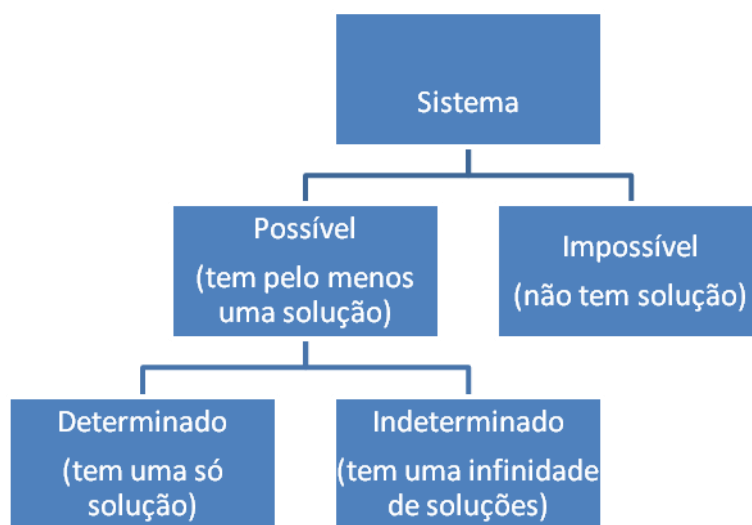


Figura 3 – Classificação de sistemas

## 5.2. Método de Substituição

O Método da Substituição, consiste em escolher e escrever uma incógnita em função das outras a partir de uma equação fixada e substituir nas demais equações, com o propósito de eliminá-la nessas equações, obtendo-se, assim, um novo sistema mais simples de resolução que o sistema anterior. Caso a primeira substituição de uma incógnita nas demais equações não tenha sido suficiente para encontrar a solução do sistema, continua-se o processo escolhendo e fixando nova incógnita e equação para substituição, e conseqüente eliminação da incógnita nas demais equações até que a solução seja alcançada.

Tal procedimento, como o descrito anteriormente, é facilmente sistematizado e permite a análise e resolução de sistemas com um número qualquer de equações e de variáveis por meio de manipulações algébricas elementares, conforme mostramos por meio de exemplos a seguir.

### Exemplo 19

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

Resolva-o por substituição.

### Resolução

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \dots\dots\dots(I) \\ 2x - y + 3z = 0 \dots\dots\dots(II) \\ -x + y - 5z = 2 \dots\dots\dots(III) \end{cases}$$

(I)  $x = 1 - y - z$  substituindo em (II) e em (III), temos:

$$(II) \quad 2(1 - y - z) - y + 3z = 0 \Leftrightarrow 2 - 2y - 2z - y + 3z = 0 \Leftrightarrow -3y + z = -2$$

$$(III) \quad -(1 - y - z) + y - 5z = 2 \Leftrightarrow -1 + y + z + y - 5z = 2 \Leftrightarrow 2y - 4z = 3$$

Resolvendo em ordem a  $z$  a equação (II), vem

$$z = 3y - 2$$

e substituindo em (III), temos

$$2y - 4(3y - 2) = 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Substituindo na equação anterior, obtemos o valor de  $z$  e em seguida o valor de  $x$ , ou seja,

$$z = 3 \times \frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 1$$

Trata-se de um sistema possível e determinado, cuja solução é  $S = \left\{ \left( 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$ .

### 5.3. Método de Adição Ordenada ou Redução

Este método consiste em:

- Multiplicar cada equação (de duas) por um número de modo que uma das incógnitas tenha coeficientes opostos nas duas expressões.
- Adicionar as equações do sistema para obter uma outra equação com uma única incógnita.
- Resolver a equação de primeiro grau assim obtida.

Devemos considerar que, em muitos casos, para obter as equações equivalentes que nos interessam, temos de multiplicar a primeira equação pelo coeficiente da incógnita que eliminamos na segunda, e a segunda equação pelo coeficiente da mencionada incógnita na primeira.

#### Exemplo 20

Considere o sistema do exemplo anterior

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (I) \\ 2x - y + 3z = 0 & (II) \\ -x + y - 5z = 2 & (III) \end{cases}$$

Resolva-o aplicando o método da adição ordenada ou redução.

#### Resolução

Multiplicando a 1ª equação por 2 e adicionando à 2ª equação, temos:

$$\begin{array}{r} -2x \quad -2y \quad -2z = -2 \\ 2x \quad -y \quad +3z = 0 \\ \hline -3y \quad +z = -2 \end{array}$$

Adicionando ordenadamente a 1ª equação à 3ª equação, temos:

$$\begin{array}{r} +x \quad +y \quad +z = 1 \\ -x \quad +y \quad -5z = 2 \\ \hline 2y \quad -4z = 3 \end{array}$$

Consideremos agora o sistema resultante e vamos através da adição ordenada eliminar uma das variáveis.

$$\begin{cases} -3y + z = -2 \\ 2y - 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \text{C.A.} \\ -12y + 4z = -8 \\ +2y - 4z = 3 \\ \hline -10y = -5 \\ \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{array}$$

Substituindo o valor de  $y$  obtido, vem

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Trata-se de um sistema possível e determinado, cuja solução é  $S = \left\{ \left( 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$ .

No processo de resolução pelo método de Redução ou Adição Ordenada, o sistema é visto como registo algébrico de adição de um conjunto de equações com variáveis simétricas, onde se eliminam incógnitas e, conseqüentemente, se determinam as variáveis.

### Exemplo 21

Resolva os sistemas e classifique-os:

a)

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 2(2 + 3y) - 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(5, 1)\}$$

*Sistema possível determinado*

b)

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 2(2 + 3y) - 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(2 + 3y, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

*Sistema possível indeterminado*

c)

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 2(2 + 3y) - 6y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 0y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 0 = 1 \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

*Sistema impossível*

## 5.4. Sistemas e equações matriciais

Consideremos o sistema de  $m$  equações lineares e  $n$  incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema pode-se escrever de forma matricial:

$$AX=B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

**Matriz dos coeficientes**  
 ou  
**Matriz do sistema**

**Matriz das incógnitas**

**Matriz dos termos independentes**

A matriz  $\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$  é denominada **Matriz Completa** ou **Matriz**

**Ampliada** do sistema, que se abrevia por  $[A \mid B]$ .

### Exemplo 22

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x - y + 2z = -3 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Este pode ser escrito sob a forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

com,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja,  $A \times X = C$ .

As seguintes operações, quando efectuadas sobre um sistema de equações lineares, transformam-no num sistema equivalente, ou seja, não alteram o seu conjunto solução:

**(Op1)** Trocar a ordem de duas equações;

**(Op2)** Multiplicar ambos os lados da equação por uma constante não nula;

**(Op3)** Adicionar a uma equação, outra multiplicada por uma constante.

Efectuar cada uma destas operações sobre um sistema de equações lineares é equivalente a efectuar a correspondente operação elementar sobre as linhas da matriz ampliada do sistema.

## 5.5. Operações elementares

**Operações elementares** sobre linhas de uma matriz são operações que transformam a matriz dada numa matriz equivalente (o sistema correspondente é equivalente ao sistema inicial).

Operações Elementares	
Sistemas	Matrizes
Troca da ordem das equações	Troca de linhas
Multiplicação de uma equação por um número real não nulo	Multiplicação de uma linha por um número real não nulo
Substituição de uma equação pela sua soma com outra multiplicada por uma constante não nula.	Substituição de uma linha pela sua soma com outra multiplicada por uma constante não nula.

Tabela 12 – Operações elementares sobre linhas de uma matriz

### Exemplo 23

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

Resolva-o, transformando a matriz dos coeficientes na matriz identidade, utilizando operações elementares para o efeito.

### Resolução

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} &\rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = \tilde{l}_2 - 2l_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = -\frac{1}{2}l_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_1 = \tilde{l}_1 - 3l_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Trata-se de um sistema possível e determinado, cuja solução é  $S = \left\{ \left( \frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$ .

## 5.6. Resolução de um sistema pelo método de Gauss-Jordan

Tal como já foi dito, podemos usar matrizes para resolver sistemas realizando sobre as linhas da matriz completa as mesmas operações que se usam nos sistemas de equações. A única operação que é possível realizar sobre colunas, é a troca (à exceção da dos termos independentes) pois corresponde a uma troca de incógnitas.

O **método de Gauss-Jordan** usa as operações sobre linhas para reduzir a matriz dos coeficientes a uma matriz que contenha uma matriz identidade da maior ordem possível, ou seja, começamos por escrever a matriz completa

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

e usando operações elementares transformamos esta matriz numa matriz do tipo

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & \dots & * & b'_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b'_{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Se

- $b'_{p+1} \neq 0 \Rightarrow$  Sistema Impossível
- $b'_{p+1} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \bullet p = n \Rightarrow \text{Sistema Possível Determinado} \\ \bullet p < n \Rightarrow \text{Sistema Possível Indeterminado (grau de indeterminação} = n - p) \end{array} \right.$

### Exemplo 24

Resolva e classifique os sistemas seguintes, usando o método de Gauss Jordan.

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

#### Resolução

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 = l_2 - l_1 \\ L_3 = l_3 - 2l_1}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = l_3 - l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 = \frac{1}{2}l_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 = l_2 + 2l_3 \\ L_4 = l_1 - l_3}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = \frac{1}{3}l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 = l_1 + l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Sistema possível determinado,  $S = \{(2, -1, -2)\}$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ 2y + 4x = 8 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

#### Resolução

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2y + 4x = 8 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 = l_2 - 2l_1 \\ L_3 = l_3 - l_1}]{\sim} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 0y = -3 \end{cases} \rightarrow \text{equação impossível}$$

$S = \emptyset$  Sistema impossível.

$$c) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

### Resolução

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{L_1 = 3L_1 + L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{3}L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = -\frac{1}{3}L_2} \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left( -\frac{1}{3}z, \frac{4}{3}z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Sistema Possível e Indeterminado (grau de indeterminação = 1)

Com o objectivo de ilustrar o método de Gauss-Jordan, fazendo simultaneamente uma comparação com o método “tradicional” de resolução de sistemas, iremos de seguida utilizar o exemplo presente em LOPES<sup>22</sup>

<p>Para encontrar <math>x</math>, <math>y</math> e <math>z</math> é necessário resolver o seguinte sistema:</p> $\begin{cases} 10x + 30y + 20z = 150 \\ 20x + 50y + 30z = 240 \\ 30x + 20y + 40z = 230 \end{cases} \quad (\text{I})$	<p>A matriz aumentada do sistema (I) é</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 10 & 30 & 20 & 150 \\ 20 & 50 & 30 & 240 \\ 30 & 20 & 40 & 230 \end{array} \right) \quad (\text{I})$
<p>1º passo – Multiplique a primeira equação por 1/10:</p> $\begin{cases} x + 3y + 2z = 15 \\ 20x + 50y + 30z = 240 \\ 30x + 20y + 40z = 230 \end{cases} \quad (\text{II})$	<p>1º passo – Multiplique a primeira linha da matriz (I) por 1/10:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 3 & 2 & 15 \\ 20 & 50 & 30 & 240 \\ 30 & 20 & 40 & 230 \end{array} \right) \quad (\text{II})$

<sup>22</sup> LOPES, J. M. *Conceitos básicos de probabilidade com resolução de problemas*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, nº 59, p. 41-5, 2006.

<p>2º passo – Substitua a segunda equação de (II) por essa mesma equação adicionada à primeira equação de (II) multiplicada por (-20):</p> $\begin{cases} x + 3y + 2z = 15 \\ 0x - 10y - 10z = -60 \\ 30x + 20y + 40z = 230 \end{cases} \quad \text{(III)}$	<p>2º passo – Substitua a segunda linha de (II) por essa mesma linha adicionada à primeira linha de (II) multiplicada por (-20) para obter:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & -10 & -10 & -60 \\ 30 & 20 & 40 & 230 \end{array} \right) \quad \text{(III)}$
<p>3º passo – Substitua a terceira equação de (III) por essa mesma equação adicionada à primeira equação de (III) multiplicada por (-30):</p> $\begin{cases} x + 3y + 2z = 15 \\ -10x + 0y - 10z = -60 \\ 0x - 70y - 20z = 220 \end{cases} \quad \text{(IV)}$	<p>3º passo – Substitua a terceira linha de (III) por essa mesma linha adicionada à primeira linha de (III) multiplicada por (-30) para obter:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & -10 & -10 & -60 \\ 0 & -70 & -20 & -220 \end{array} \right) \quad \text{(IV)}$
<p>4º passo – Multiplique a segunda equação de (IV) por <math>-1/10</math>, de modo que o coeficiente de <math>p_2</math> se torne 1:</p> $\begin{cases} x + 3y + 2z = 15 \\ 0x + y + z = 6 \\ 0x - 70y - 20z = 220 \end{cases} \quad \text{(V)}$	<p>4º passo – Multiplique a segunda linha de (IV) por <math>-1/10</math>:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -70 & -20 & -220 \end{array} \right) \quad \text{(V)}$
<p>5º passo – Substitua a primeira equação de (V) por essa mesma equação adicionada à segunda equação de (V) multiplicada por (-3):</p> $\begin{cases} x + 0y - z = -3 \\ 0x + y + z = 6 \\ 0x - 70y - 20z = 220 \end{cases} \quad \text{(VI)}$	<p>5º passo – Substitua a primeira linha da matriz (V) por essa mesma linha adicionada à segunda linha de (V) multiplicada por (-3) para obter:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -70 & -20 & -220 \end{array} \right) \quad \text{(VI)}$

<p>6º passo – Substitua a terceira equação de (VI) por essa mesma equação adicionada à segunda equação de (VI) multiplicada por 70 para ter:</p> $\begin{cases} x + 0y - z = -3 \\ 0x + y + z = 6 \\ 0x + 0y + 50z = 200 \end{cases} \quad (\text{VII})$	<p>6º passo – Substitua a terceira linha da matriz (VI) por essa mesma linha adicionada à segunda linha de (VI) multiplicada por 70 para obter:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 50 & 200 \end{array} \right) \quad (\text{VII})$
<p>7º passo – Multiplique a terceira equação de (VII) por 1/50:</p> $\begin{cases} x + 0y - z = -3 \\ 0x + y + z = 6 \\ 0x + 0y + z = 4 \end{cases} \quad (\text{VIII})$	<p>7º passo – Multiplique a terceira linha de (VII) por 1/50 para obter:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad (\text{VIII})$
<p>8º passo – Substitua a primeira equação de (VIII) por essa mesma equação adicionada à terceira equação de (VIII) para ter:</p> $\begin{cases} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 6 \\ 0x + 0y + z = 4 \end{cases} \quad (\text{IX})$	<p>8º passo – Substitua a primeira linha de (VIII) por essa mesma linha adicionada à terceira linha de (VIII):</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad (\text{IX})$
<p>9º passo – Substitua a segunda equação de (IX) por essa mesma equação adicionada à terceira equação de (IX) multiplicada por (-1) para obter finalmente</p> $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \quad (\text{X})$	<p>9º passo – Finalmente, substitua a segunda linha de (IX) por essa mesma linha adicionada à terceira linha de (IX) multiplicada por (-1) para obter:</p> $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad (\text{X})$

<p>Se substituir os valores <math>x = 1, y = 2, z = 4</math>, obtidos em (X), notará que as equações de (I) são todas satisfeitas. Assim, esta é a única solução do sistema (I), e, nesse caso, o conjunto solução do sistema (I) é <math>S = \{(1, 2, 4)\}</math>.</p> <p>É importante observar que os sistemas obtidos em cada passo possuem as mesmas soluções dos sistemas anteriores, isto é, são equivalentes.</p>	<p>A partir da matriz (X) obtemos a solução do sistema</p> $x = 1$ $y = 2$ $z = 4$
--	--

Tabela 13 - Método Gauss-Jordan

Tal como foi visto, o método de Gauss-Jordan baseia-se em operações elementares entre matrizes. Sendo assim, não é necessário introduzir conceitos como os de determinante ou a inversa de uma matriz. Esta característica faz com que se defenda, neste trabalho, a resolução de sistemas através do uso de matrizes, considerando-a adequada a alunos ao nível do Ensino Secundário.

Este quadro pode auxiliar os alunos a compreenderem, de modo mais profundo, os processos envolvidos em cada método.

### 5.7. Cálculo da inversa de uma matriz pelo método de Gauss-Jordan

Seja  $A$  uma matriz invertível, de ordem  $n$ , e designemos a sua inversa por  $X$ .

Pretende-se então encontrar a matriz  $X$ , de ordem  $n$ , tal que  $AX = I_n$ , isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A determinação da inversa da matriz  $A$  pode então fazer-se pela resolução de  $n$  sistemas de equações lineares, todos com a mesma matriz dos coeficientes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como a inversa de uma matriz é única, cada um dos sistemas anteriores é possível e determinado, a forma condensada da matriz  $A$  é  $I_n$ .

Usando o método de Gauss-Jordan é possível resolver os  $n$  sistemas em simultâneo, condensando a matriz aumentada ou completa:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

Quando se chega, no lado esquerdo à forma condensada de  $A$ , que é  $I_n$ , do lado direito temos em cada coluna a solução do sistema correspondente, ou seja, temos a matriz  $A^{-1}$ .

## RESUMINDO

Para encontrar a inversa de uma matriz  $A$  usando o método de Gauss-Jordan (condensação):

- escreve-se a matriz  $A$  e a matriz identidade  $I_n$  ao lado  $[A \mid I_n]$
- aplicam-se (unicamente) operações elementares sobre linhas à matriz  $[A \mid I_n]$  até se obter  $[I_n \mid A^{-1}]$

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{Método de Gauss-Jordan}} [I_n \mid A^{-1}]$$

### Exemplo 25

Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Determine, caso exista, a sua inversa.

### Resolução

$$[A \mid I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2=l_2-l_1 \\ L_3=l_3-l_1}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{l_2 \leftrightarrow l_3}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2=-l_2}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2=l_2-l_3 \\ L_1=l_1-l_3}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5.8. Interpretação geométrica

O Método Gráfico de resolução de Sistemas, de duas equações a duas incógnitas e três equações a três incógnitas, actua como um método para a sua resolução, ou seja, um modo de comprovar a resolução algébrica ou analítica.

A resolução Gráfica acompanhada da Algébrica, oferece uma maior compreensão dum problema, atendendo a que se dispõe de duas vias diferentes para a resolução do problema.

No caso de sistemas de duas equações e duas incógnitas, poderemos obter situações distintas:

- Rectas secantes;
- Rectas paralelas (coincidentes ou estritamente paralelas).

### Exemplo 26

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Resolva o sistema e interprete geometricamente a solução encontrada.

### Resolução

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 = l_2 - 2l_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 = l_1 - l_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$$

Ou seja,  $(x, y) = (-4, 5)$  é a solução do sistema.

Donde se conclui que o sistema é possível determinado, isto é, as rectas intersectam-se no ponto  $(-4, 5)$ .

b) Aplicando a Resolução Gráfica

$$f(x) = (7-2x)/3$$

$$f(x) = 1-x$$

Figura 4 – Exemplo de um sistema de equações lineares nas incógnitas  $x$  e  $y$ , possível e determinado

Através desta representação gráfica podemos observar que o sistema é possível e determinado tendo como única solução o ponto  $(-4,5)$ .

**Exemplo 27**

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

Resolva o sistema e interprete geometricamente a solução encontrada.

**Resolução**

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

donde

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2=L_2-2L_1} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Donde se conclui que o sistema é possível indeterminado, ou seja, as rectas são coincidentes.

**b) Aplicando a Resolução Gráfica**

A sua representação gráfica é:

$$f(x) = g(x) = 1 - 2x$$

Figura 5 – Exemplo de um sistema de equações lineares nas incógnitas  $x$  e  $y$ , possível e indeterminado

Através desta representação gráfica podemos observar que o sistema tem uma infinidade de soluções, correspondentes à recta com a equação  $y = 1 - 2x$ , classificado como possível e indeterminado.

### Exemplo 28

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ -x + y = -5 \end{cases}$$

Resolva o sistema e interprete geometricamente a solução encontrada.

#### Resolução

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{array} \right)_{L_2=L_2+L_1} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - y = -3 \\ 0x + 0y = -8 \end{cases}$$

O sistema é impossível, ou seja, as rectas são estritamente paralelas.

b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

$$y = x + 3$$

$$y = x - 5$$

Figura 6 – Exemplo de um sistema de equações lineares nas incógnitas  $x$  e  $y$ , impossível.

Através desta representação gráfica podemos observar que as duas rectas que compõem o sistema são paralelas, o que significa que nunca se intersectam. O sistema é por isso classificado como impossível.

Deste modo resolver um sistema de duas equações e duas incógnitas pode ser visto do ponto de vista gráfico como o estudo da posição relativa de duas rectas no plano.

No caso de sistemas de três equações e três incógnitas, poderemos obter situações distintas:

- Planos concorrentes;
- Planos paralelos.

### Exemplo 29

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -3 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1-L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2=-\frac{L_2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4=L_2+L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3-2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado, o que significa que os planos têm um ponto comum, intersectam-se no ponto de coordenadas  $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

### b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

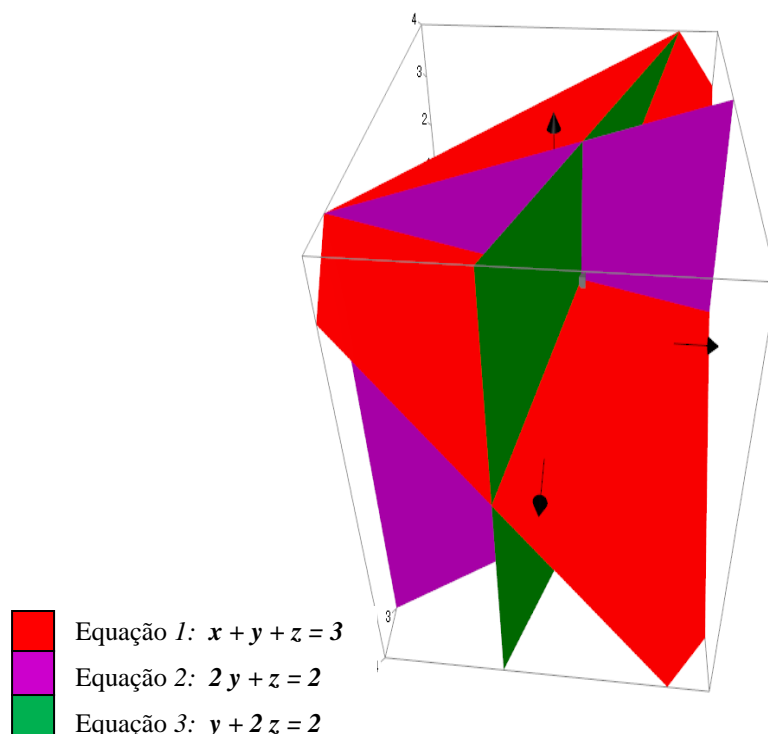


Figura 7 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e determinado.

Através desta representação gráfica podemos observar que os três planos se intersectam num único ponto.

### Exemplo 30

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3=L_3-L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

O sistema é possível e indeterminado, o que significa que os planos intersectam-se numa recta.

b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

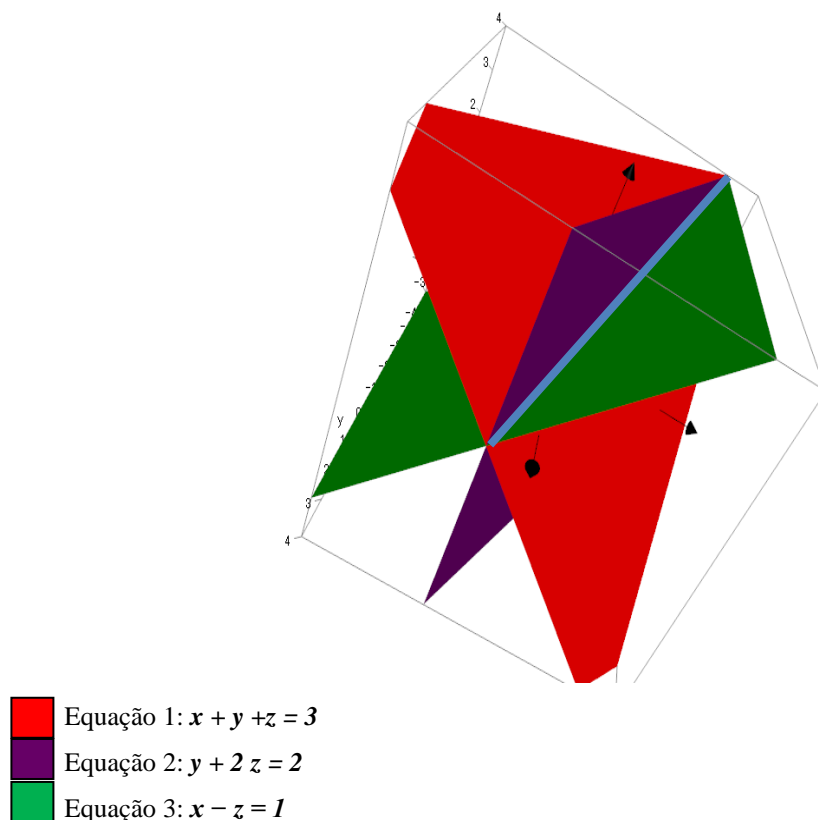


Figura 8 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e indeterminado.

Através desta representação gráfica podemos observar que o sistema tem uma infinidade de soluções, correspondentes à recta representada a azul, sendo classificado como possível e indeterminado.

Existem outras formas de um sistema de três equações e três incógnitas ser possível indeterminado, tais como nos seguintes casos:

### Exemplo 31

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 = -2L_1 + L_2} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

O sistema é possível e indeterminado (grau de indeterminação 1), o que significa que dois planos são paralelos (coincidentes) e intersectam o terceiro plano.

b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

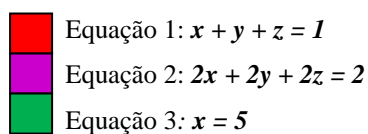
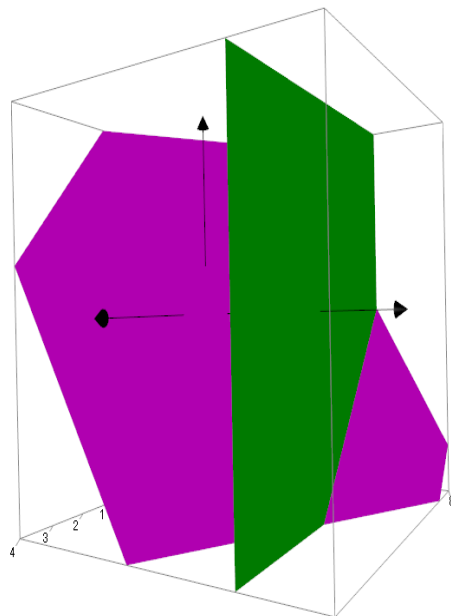


Figura 9 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e indeterminado.

Neste caso a solução é uma infinidade de pontos pertencentes à recta correspondente à intersecção dos planos que não são paralelos.

### Exemplo 32

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

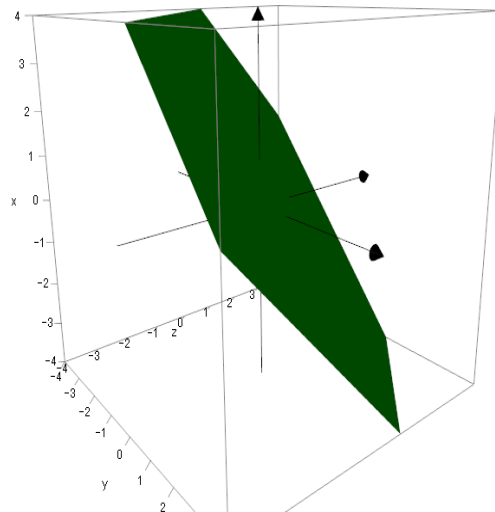
Donde,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)_{L_2=l_2-2l_1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)_{L_3=l_3-3l_1} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

O sistema é possível e indeterminado (grau de indeterminação 2), o que significa que dois planos são coincidentes.

b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:



- Equação 1:  $x + y + z = 1$
- Equação 2:  $2x + 2y + 2z = 2$
- Equação 3:  $3x + 3y + 3z = 3$

Figura 10 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, possível e indeterminado.

Os planos são todos coincidentes, a solução é a infinidade de pontos que pertence ao plano.

### Exemplo 33

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = -10 \\ 2x + y + z = -20 \\ y + z = -40 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 1 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & -40 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 1 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & -40 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2=L_2-2L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -40 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{array} \right)$$

O sistema é impossível, o que significa que os planos não se intersectam.

## b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

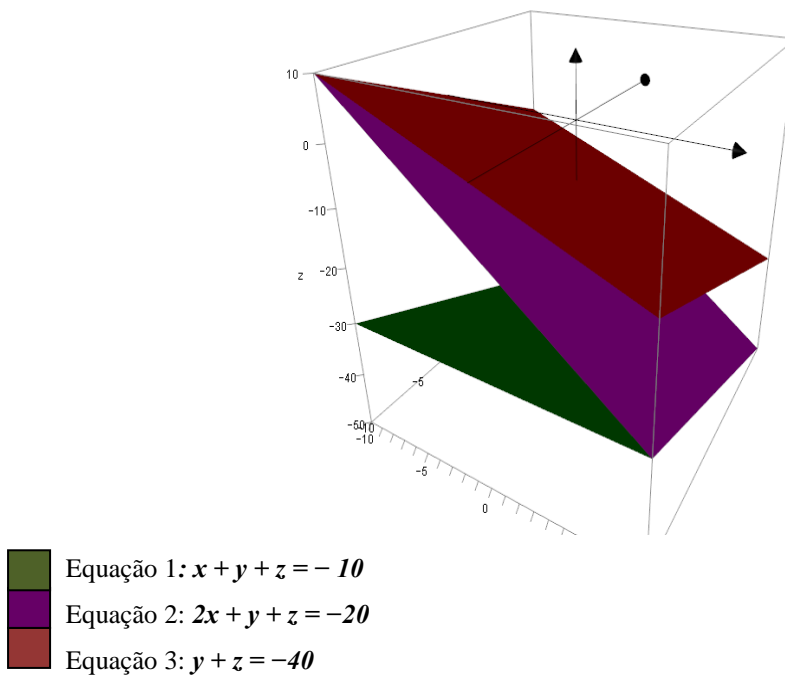


Figura 11 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.

Através desta representação podemos observar que o sistema é impossível, pois não existe nenhum ponto que pertença simultaneamente aos três planos.

Existem outras formas de um sistema de três equações e três incógnitas ser impossível, vejamos alguns exemplos de seguida.

### Exemplo 34

Considere o sistema

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 = l_2 - l_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 = l_3 - l_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

O sistema é impossível, o que significa que os planos não se intersectam.

b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

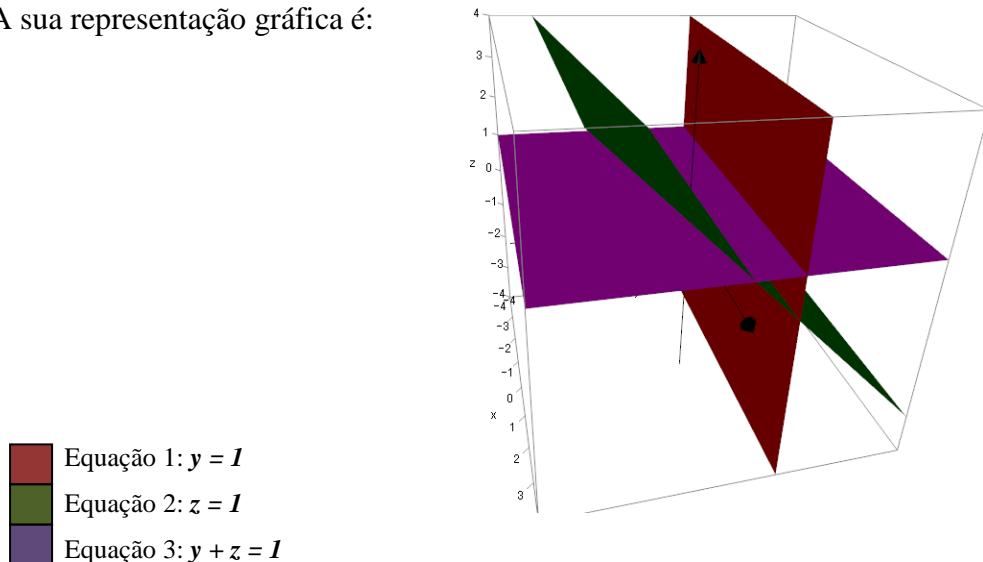


Figura 12 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.

Através desta representação podemos observar que o sistema é impossível, pois não existe nenhum ponto que pertença simultaneamente aos três planos, no entanto intersectam-se dois a dois.

### Exemplo 35

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = -4 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2=L_2-2L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3=L_3-3L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array} \right)$$

O sistema é impossível, o que significa que os planos não se intersectam, os três planos são estritamente paralelos.

b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

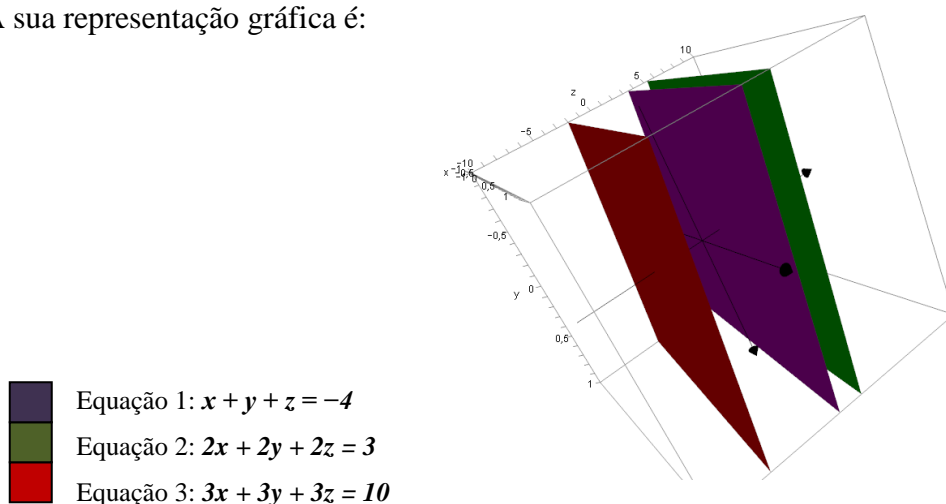


Figura 13 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.

Através desta representação podemos observar que o sistema é impossível, pois não existe nenhum ponto que pertença simultaneamente aos três planos, os planos são estritamente paralelos.

### Exemplo 36

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

a) Aplicando o Método de Gauss-Jordan

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

Donde,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2=L_2-2L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3=L_3-3L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

O sistema é impossível, o que significa que os planos não se intersectam, dois planos são coincidentes e paralelos ao terceiro plano.

b) Aplicando a Resolução Gráfica

A sua representação gráfica é:

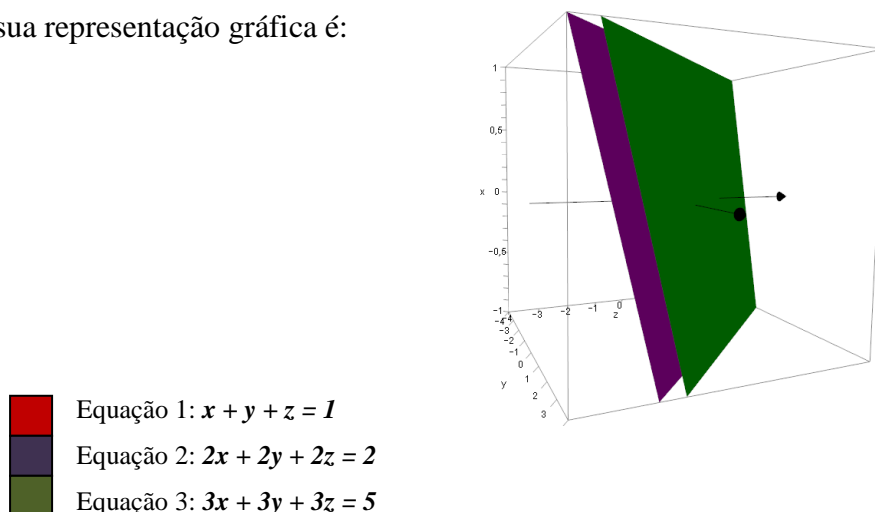


Figura 14 – Exemplo de um sistema de três equações a três incógnitas, impossível.

Através desta representação podemos observar que o sistema é impossível, pois não existe nenhum ponto que pertença simultaneamente aos três planos, dois planos são coincidentes e paralelos ao terceiro plano.

## 6. Algumas aplicações de Matrizes

Diversos ramos da Matemática e áreas da Ciência, utilizam matrizes para resolver um grande número de problemas. Embora aparentemente, não estejam relacionados entre si, partilham as mesmas notações matriciais e as operações com matrizes. De seguida apresentamos algumas dessas aplicações.

### 6.1. Aplicação à Geografia

#### Exemplo 37

Adaptado do livro de Esla Kaufman Fainguelernt e Franca Cohen Gottlieb (2004, pág. 60)

Consideremos o mapa duma ilha em que há seis cidades, assinaladas com os números 1 (capital) 2, 3, 4, 5 e 6 e, ligando estas cidades (ou não), há estradas asfaltadas ou não.

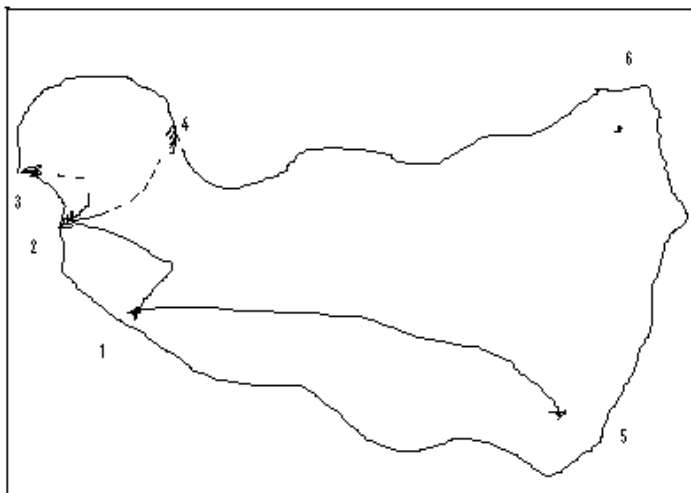


Figura 15 -Ligações entre cidades por estradas asfaltadas

As estradas asfaltadas são assinaladas por linhas contínuas e as não asfaltadas por linhas tracejadas.

Essas estradas possuem comprimentos e estes podem ser indicados por meio de uma tabela. Por exemplo:

	1	2	3	4	5
1	0	4	7	7	10
2	4	0	3	6	14
3	7	3	0	9	17
4	7	6	9	0	17
5	10	14	17	17	0

Tabela 14 – Ligações entre cidades por estradas asfaltadas

Observe que esta tabela pode ser representada sob a forma de matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 7 & 10 \\ 4 & 0 & 3 & 6 & 14 \\ 7 & 3 & 0 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 9 & 0 & 17 \\ 10 & 14 & 17 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz indicam, cada um, o comprimento da estrada que liga a cidade da esquerda com a de cima. Por exemplo:

- Da cidade 1 à cidade 2 a estrada mede 4 km.
- Da cidade 2 à cidade 3 a estrada mede 3 km.

Pelo mapa observa-se que nem todos os pares de cidades possuem uma única estrada que as liga. Assim, 1 e 3 são ligadas por duas estradas.

Esta situação permite-nos levantar algumas questões:

- 1) Explique como se pode ver que 1 e 3 não são ligadas por uma só estrada.
- 2) Por que a cidade 6 não consta da matriz?
- 3) Se ela constasse da matriz, que números (indicadores dos correspondentes das estradas) colocaríamos na linha e na coluna correspondente a esta cidade?
- 4) Como se podem deslocar os habitantes da cidade 6 até às outras cidades?
- 5) A cidade 1 está ligada à cidade 4 por uma estrada directa (a qual não consta no mapa). Qual é o comprimento desta estrada?

- 5.1) Se quisesse fazer esta viagem em duas etapas, com uma estadia no meio, como se faria? Qual seria, neste caso, a distância percorrida?
- 5.2) Qual seria, neste caso, a distância percorrida?

### Resolução

- 1) Há um troço asfaltado de 1 a 2 e outro não asfaltado de 2 a 3.
- 2) Porque ela é isolada, não há estrada alguma que liga esta cidade a outra qualquer.
- 3) Uma linha e uma coluna compostas de zeros.
- 4) Tinham que utilizar barcos, atendendo que as outras cidades estão situadas no litoral, ou então por via aérea
- 5) O comprimento é de 7 Km.
  - 5.1) Teríamos que ir de 1 a 2 e, em seguida de 2 a 4.
  - 5.2) A distância percorrida seria de 10 km.

Esta não é a única matriz que poderíamos considerar dentro do contexto das estradas da nossa ilha. Poderíamos focalizar a qualidade das estradas da ilha, escrevendo uma matriz na qual a estrada asfaltada fosse a indicada por um símbolo  $A$  (de asfalto) e a não asfaltada por outro símbolo  $T$  (de terra).

Poderíamos então colocar mais algumas questões:

- 1) Complete a matriz com  $A$  e  $T$  ( $X$  indica que não há estrada).
- 2) Por que se coloca  $X$  na diagonal principal?
- 3) Outra matriz que pode ser escrita no mesmo contexto das estradas da nossa ilha, e é uma matriz muito conhecida. Chama-se matriz de conexão. Ela nos indica se há uma estrada directa entre as cidades (as linhas e as colunas indicam cidades).

Neste tipo de matriz o algarismo 0 indica não há estrada directa e o algarismo 1 indica que há estrada directa.

Observando o mapa, escreva a matriz de conexão.

- 4) Se chamar ao elemento de encontro da linha  $i$  com a coluna  $j$ ,  $a_{ij}$ , porquê que nestas matrizes,  $a_{ij} = a_{ji}$  ?

## Resolução

1)

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \left( \begin{array}{ccccc} X & A & T & A & A \\ A & X & T & A & A \\ T & T & X & T & T \\ A & A & T & X & A \\ A & A & T & A & X \end{array} \right) \end{array}$$

- 2) Porque não há estrada a fazer ligação com ela própria.  
3) A matriz de conexão será,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4) Porque a estrada que une duas cidades é a mesma seja ela percorrida num sentido ou noutro, logo observa-se que as matrizes encontradas são simétricas em relação à diagonal principal.

## 6.2. Aplicação à Economia

### Exemplo 38

Adaptado do livro de Esla Kaufman Faingulernt e Franca Cohen Gottlieb (2004, pág. 66)

Uma loja de roupas para jovens vende calças de Ganga das marcas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , nos tamanhos 38, 40 e 42. Considere a matriz que representa as vendas numa semana:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

As linhas da matriz representam as marcas ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) e as colunas representam os tamanhos (38, 40 e 42). Por exemplo, da marca  $A$ , foi vendido 1 calça do número 38, 3 calças do número 40 e nenhuma calça do número 42.

### Questões que se puderam colocar:

- 1) De que tipo é a matriz  $V$ ?
- 2) Quantas calças da marca  $B$  foram vendidas nessa semana?
- 3) Naquela semana, quantas calças do tamanho 40 foram vendidos?
- 4) Considere que o preço das calças por marca é:
  - Marca  $A$  – 15 €.
  - Marca  $B$  – 22 €.
  - Marca  $C$  – 17 €.
  - Marca  $D$  – 16 €.

Podemos representar a matriz dos preços por  $P = (15 \ 22 \ 17 \ 16)$ ? Esta matriz é de que tipo?

- 5) Pode-se escrever a matriz  $P \times V$ ? Porquê?
- 6) Determine a matriz  $P \times V$  e diga o que representa cada um dos elementos desta matriz produto.
- 7) O que se deveria fazer para determinar o ganho total da semana com as calças de Ganga?

## Resolução

- 1) É uma matriz de tipo  $4 \times 3$ .
- 2) Nessa semana foram vendidos 18 calças de ganga, ou seja, teremos que somar os três elementos da segunda linha da matriz.
- 3) Foram vendidas  $3+8+4+4=19$ , calças com o número 40, basta adicionar os quatro elementos da segunda coluna da matriz.
- 4) Sim pode ser assim representada. É uma matriz de tipo  $1 \times 4$ .
- 5) Sim, porque o número de colunas da 1ª matriz ( $P$ ) é igual ao número de linhas da 2ª matriz ( $V$ ).

$$6) P \times V = (15 \quad 22 \quad 17 \quad 16) \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (223 \quad 353 \quad 227)$$

223 € Ganhos naquela semana, com as vendas das calças de tamanho 38;

353€ Ganhos com as vendas das calças de tamanho 40;

227€ Ganhos com s vendas das calças de tamanho 42.

- 7) Somar os três elementos da matriz  $P \times V$

### 6.3. Aplicação à Biologia

#### Exemplo 39

Adaptado do livro de Esla Kaufman Fainguelernt e Franca Cohen Gottlieb(2004, pág. 68)

É bem conhecido que poluentes venenosos (DDT, mercúrio, entre outros), têm tendência a acumular-se nas cadeias alimentares. Consideremos um sistema ecológico em particular com as três seguintes ligações numa cadeia:

1- Vegetação servindo de alimento para herbívoros. As diferentes espécies de plantas serão representadas por  $p_1; p_2; p_3; \dots; p_r$ .

2- Animais herbívoros, alimentando-se das plantas descritas em 1.

As diferentes espécies de herbívoros serão representadas por  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_s$ .

3- Animais carnívoros, alimentando-se dos herbívoros descritos em 2. As diferentes espécies de carnívoros serão representadas por  $c_1; c_2; c_3; \dots; c_t$ .

Qual é a quantidade da planta  $p_i$  que é comida pelo carnívoro  $c_j$ , durante uma determinada estação?

#### Resolução

Para respondermos a esta pergunta, começaremos por introduzir a seguinte matriz  $X$  para a transição da ligação 1 para a ligação 2 (na cadeia alimentar que é a ligação entre as plantas e os herbívoros).

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{r1} & X_{r2} & \dots & X_{rs} \end{pmatrix}$$

As colunas representam as espécies de plantas  $p_1; p_2; p_3; \dots; p_r$ . E as linhas representam as espécies de herbívoros  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_s$ .

Assim,  $X_{1l}$  representa a quantidade média da planta  $p_l$  que cada indivíduo da espécie  $a_1$  comeu durante a estação. Generalizando,  $X_{jk}$  é a quantidade média da planta  $p_i$  que cada indivíduo da espécie  $a_k$  comeu.

Também podemos definir uma matriz  $Y$  para a transição da ligação 2 para a 3 (na cadeia alimentar é a ligação entre os herbívoros e os carnívoros):

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1t} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{s1} & Y_{s2} & \dots & Y_{st} \end{pmatrix}$$

As colunas representam as espécies de herbívoros  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_s$  e as linhas representam as espécies de carnívoros  $c_1; c_2; c_3; \dots; c_t$ .

Assim,  $Y_{1l}$  representa o número de animais da espécie  $a_1$ , devorados por todos os indivíduos da espécie  $c_1$  juntos. Generalizando,  $Y_{kj}$  é o número de animais da espécie  $a_k$ , devorados por carnívoros da espécie  $c_j$  durante a estação. Observe que  $Y_{kj}$  é um número de animais enquanto  $X_{ik}$  é a quantidade média da planta comida.

Considere agora os animais da espécie  $c_1$ .

- Alimentando-se da espécie  $a_1$ , eles consomem, indirectamente, a quantidade  $X_{1l} \cdot Y_{11}$  da planta  $p_l$ .
- Alimentando-se da espécie  $a_2$  eles consomem  $X_{12} Y_{21}$  da planta  $p_l$  e assim sucessivamente.

A quantidade média total da planta  $p_l$ , indirectamente consumida por todos os carnívoros da espécie  $c_1$  é portanto:

$$(X_{11} \quad X_{12} \quad \dots \quad X_{1s}) \cdot \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \dots \\ Y_{s1} \end{pmatrix} = (X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} + \dots + X_{1s}Y_{s1})$$

O resultado é o produto da primeira linha da matriz  $X$  pela primeira coluna da matriz  $Y$ . O resultado pode ser rapidamente generalizado. A quantidade da planta  $p_i$  consumida, indirectamente, pelo carnívoro  $c_j$  é o produto da linha  $i$  da matriz  $X$  pela coluna  $j$  de  $Y$ .

## 6.4. Aplicação à Geometria – Transformação no plano

### Exemplo 40

Adaptado do livro de Esla Kaufman Fainguelernt e Franca Cohen Gottlieb (2004, pág. 71)

Consideremos um plano e sobre ele, considere um sistema de eixos cartesianos ortogonais, onde cada eixo representa, geometricamente, o conjunto dos números reais. Portanto, todos os pontos do plano irão constituir uma imagem de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (produto cartesiano dos reais pelos reais). Todo ponto do plano é representado, naquele sistema de eixos cartesianos, por um par ordenado de números reais.

Uma função definida entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ , não necessariamente diferentes, é uma lei que associa a cada elemento de  $A$  um único elemento de  $B$ . Noutras palavras, uma função transforma um conjunto de elementos do primeiro conjunto ( $A$ ) num conjunto de elementos do segundo conjunto ( $B$ ), através duma certa lei.

Imagine-se que os dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , sejam ambos iguais ao conjunto dos pontos do plano, sendo cada ponto representado, num sistema de eixos cartesianos, por um par ordenado de números reais que indicaremos por  $(x, y)$ .

Uma transformação do plano é uma função que estabelece uma correspondência entre pontos do plano, obedecendo a uma certa lei, por exemplo a cada par  $(x, y)$  associa-se o seu transformado pela lei  $(x_1, y_1)$ .

Considere a transformação  $T$  que faz corresponder ao ponto  $(x, y)$  do plano o ponto  $(ax+by, cx+dy)$  do mesmo plano, sendo  $a, b, c, d$  números reais determinados.

Por exemplo,

$$\text{se } a = 1, b = -2, c = -4, d = 3,$$

a transformação  $T$  faz corresponder ao ponto  $(x, y)$  o ponto  $(x-2y, -4x+3y)$ .

Assim, se considerarmos o ponto  $(4,7)$ . A transformação  $T$  faz com que a ele corresponda o ponto  $(4-2 \times 7, -4 \times 4 + 3 \times 7)$ , isto significa que o ponto  $(4,7)$  pela transformação  $T$  é transformado no ponto  $(-10,-5)$ .

Podemos representar a transformação  $T$  acima descrita por

$$\begin{cases} x_I = ax + by \\ y_I = cx + dy \end{cases}$$

e esta transformação linear pode ser representada pela matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

Assim, o sistema acima pode ser representado por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \text{ onde } ax + by = x_I \text{ e } cx + dy = y_I$$

Por exemplo, se pretendermos saber qual a imagem do ponto (4,7) considerando a transformação  $(x - 2y, -4x + 3y)$ , basta substituir estes valores obtendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 - 2 \times 7 \\ -4 \times 4 + 3 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Observe que utilizamos o produto de matrizes.

Ao representar a situação no plano cartesiano, e indicarmos P o ponto de coordenadas (4,7) e P' o de coordenadas (-10, -5), obtemos o gráfico a seguir.



Figura 16 - Representação da imagem de um dado obtida uma transformação

### Exemplo 41

Consideremos o quadrado da figura seguinte determinado pelos vértices, que são as coordenadas dos pontos  $A(1,1)$ ,  $B(1,-1)$ ,  $C(-1,-1)$ ,  $D(-1,1)$ .



Figura 17- representação de quatro pontos (quadriláteros)

Vamos aplicar aos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , nesta ordem, algumas transformações lineares no plano.

Transformação que faz corresponder a cada ponto  $(x, y)$  do plano o ponto  $(y, x)$  Do mesmo plano. Para obter-se esta transformação, precisa-se da seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Assim, podemos obter as transformações dos pontos considerados:

$$A(1,1) \rightarrow A'(1,1)$$

$$B(1,-1) \rightarrow B'(-1,1)$$

$$C(-1,-1) \rightarrow C'(-1,-1)$$

$$D(-1,1) \rightarrow D'(1,-1)$$

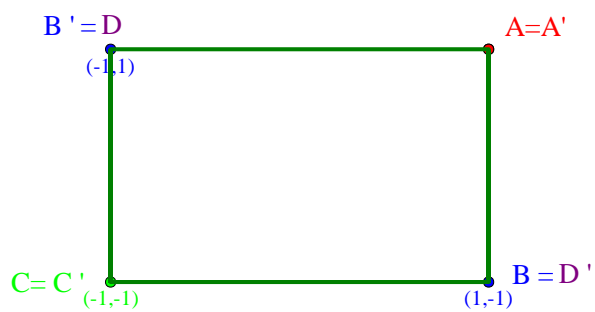


Figura 18 representação de pontos e suas transformações

Ou seja,



Figura 19 representação de pontos e suas transformações

## 6.5. Aplicação à teoria dos Grafos

A **Teoria dos Grafos** é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objectos de um determinado conjunto.

De um modo informal, designamos por grafo um diagrama, representado graficamente no plano através de pontos e linhas com extremos nesses pontos. A localização dos pontos e as propriedades geométricas das linhas não é relevante na representação gráfica. Por exemplo, num mapa esquemático de uma rede de metro, as posições relativas das estações e as formas das linhas que as unem são ignoradas, o que realmente tem interesse são as ligações existentes.

Um grafo é um terno  $(V, A, \varphi)$ , definido por um conjunto  $V$  (finito e não vazio), cujos elementos se designam por vértices, um conjunto  $A$  (finito e não vazio), cujos elementos se designam arestas, e uma função de incidência  $\varphi$  que faz corresponder a cada aresta  $a \in A$  um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos).

Uma aresta  $a$  para a qual exista  $v \in V$  tal que  $\varphi(a) = \{v\}$  chama-se um lacete.

Quando,  $\forall u, v \in V$  temos mais do que um elemento em  $\varphi^{-1}(\{u, v\})$  chamamos arestas múltiplas a esses elementos. Um grafo que não tenha lacetes nem arestas múltiplas diz-se um grafo simples.

Sejam  $a, b \in A$  e  $u, v \in V$ .

- $u$  e  $v$  dizem-se vértices adjacentes quando existe  $c \in A$  tal que  $\varphi(c) = \{u, v\}$
- $a$  e  $b$  dizem-se arestas adjacentes quando existe  $w \in V$  tal que  $w \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$ .
- O vértice  $v$  e a aresta  $a$  dizem-se incidentes quando  $v \in \varphi(a)$ .

O grau de um vértice  $v \in V$  define-se como sendo  $2i+j$ , onde  $i$  é o número de lacetes incidentes com  $v$  e  $j$  é o número de arestas, que não sejam lacetes, incidentes com  $v$ .

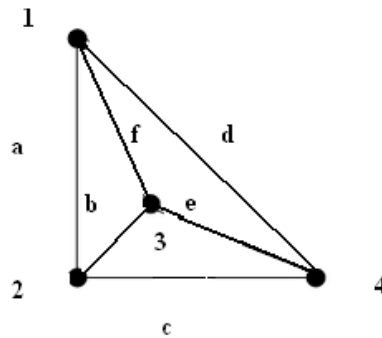


Figura 20 - Exemplo de um Grafo<sup>23</sup>

Grafo com 4 vértices e 6 arestas.

Utilizar grafos é de grande utilidade na representação de problemas da vida real. Podem ser cidades, e uma rede de estradas. Redes de computadores. Até mesmo os movimentos de um cavalo num tabuleiro de xadrez podem ser representado através de um grafo. Na prática:

- As linhas de metro das grandes cidades utilizam grafos de modo a minimizarem o tempo das ligações;
- A distribuição de correio, minimizando percursos de forma a otimizar as deslocações, tanto para um único carteiro como para uma equipa (o mesmo se aplica a empresas de distribuição);
- Os sistemas de patrulha da PSP permitem estudos de optimização recorrendo a grafos;

Após a sua representação, o que podemos descobrir? Por exemplo:

- O caminho mais curto entre duas cidades num mapa;
- Dadas as coordenadas de n cidades, que estradas construir de modo que o número de quilómetros de estrada seja mínimo mas fiquem todas conectadas;
- Dado um mapa de uma casa (em que paredes e chão são representados com caracteres diferentes) saber qual a divisão com maior área;

As possibilidades são grandes, e a utilização de grafos contribui para facilitar a resolução destes problemas.

---

Imagem retirada de:

<sup>23</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dos\\_grafos](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos)

A seguir, apresentamos dois exemplos de representações de grafos. Graficamente, um grafo pode ser representado da seguinte forma:

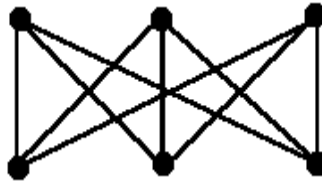


Figura 21- Exemplo de um Grafo com 6 vértices e 9 arestas<sup>24</sup>

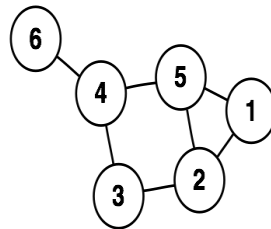


Figura 22- Exemplo de um Grafo com 6 vértices e 7 arestas<sup>25</sup>

Diz-se que o estudo dos grafos iniciou-se com Euler ao interpretar e dar solução ao problema das pontes de Königsberg, quando o sintetizou através de pontos e linhas e enunciou o primeiro teorema desta subdivisão da Matemática, hoje chamada de Topologia.

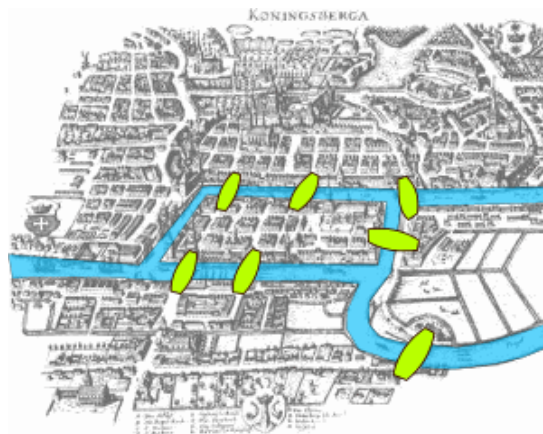


Figura 23-Mapa das pontes de Königsberg<sup>26</sup>

---

Imagens retiradas de:

<sup>24</sup> <http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html>

<sup>25</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dos\\_grafos](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos)

<sup>26</sup> <http://threesixty360.wordpress.com/2008/04/23/konigsberg-or-how-i-much-i-love-google-maps/>

O diagrama que se segue é isomorfo ao mapa da cidade. Apesar de diferente do mapa original, ele preserva as principais características, que são o número de partes de terra (os vértices do grafo) e o número de pontes (as arestas do grafo).

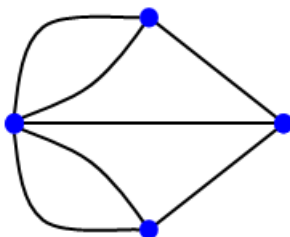


Figura 24 – Grafo das Pontes de Königsberg<sup>27</sup>

Investiguemos o problema das pontes de Euler:

Na cidade de Königsberg, na Prússia, existem sete pontes que ligam duas ilhas e as margens do rio Pregel entre si (quatro regiões de terra e sete pontes). Consta que a população ao passear pelas pontes da cidade tentava fazer um percurso que passasse por todas as pontes, mas uma única vez. Euler generalizou o problema através de um grafo e verificou a impossibilidade da pretensão dos habitantes.

Note que a ilha B e as margens C e D possuem conexões em número ímpar (grau ímpar), enquanto A possui vias em número par (grau par). Euler demonstrou que só se torna possível a passagem pelas pontes (arestas) e o retorno ao ponto de partida se todas as ilhas e margens (vértices) estiverem vinculadas por um número par de arestas. Abaixo apresentamos possíveis soluções para o problema das pontes.

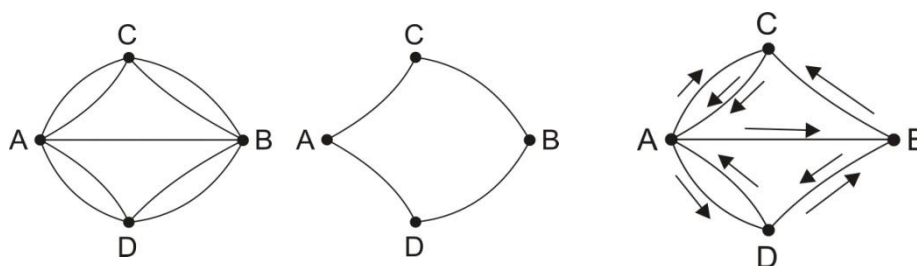


Figura 25 – Conexões entre Vértices<sup>28</sup>

Imagens retiradas de:

<sup>27</sup> [www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/.../MC04145369408T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../MC04145369408T.doc)

## Matriz de Adjacência

Uma **matriz de adjacência** é uma das formas de se representar um grafo.

Seja  $G$  um grafo simples de  $n$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . A matriz de adjacência é uma matriz  $n \times n$ , onde o valor de cada elemento  $e_{jk}$  da matriz é determinado da seguinte maneira:

$e_{jk} = 1$ , se os vértices  $v_j$  e  $v_k$  são ligados por uma aresta

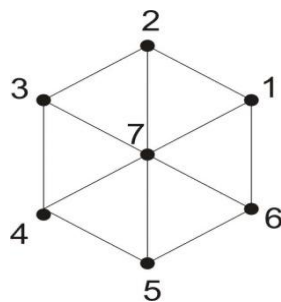
$e_{jk} = 0$ , caso contrário

Vejamos de seguida, alguns exemplos de representação matricial de grafos.

### Exemplo 42

As matrizes oferecem uma boa representação dos grafos e possibilitam a introdução computacional para auxiliar na resolução de problemas da teoria dos grafos.

Neste exemplo, podemos observar



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 26 – Grafo e sua representação matricial<sup>29</sup>

---

Retirado de:

<sup>29</sup> [http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/MC04145369408T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/MC04145369408T.doc)

### Exemplo 43

Considere um conjunto de cinco pessoas em que,

$P1, P2$  e  $P3$  se conhecem;

$P1, P3$  e  $P4$  se conhecem;

$P4$  e  $P5$  se conhecem.

Começemos por traduzir este enunciado num grafo e em seguida façamos a sua representação matricial.

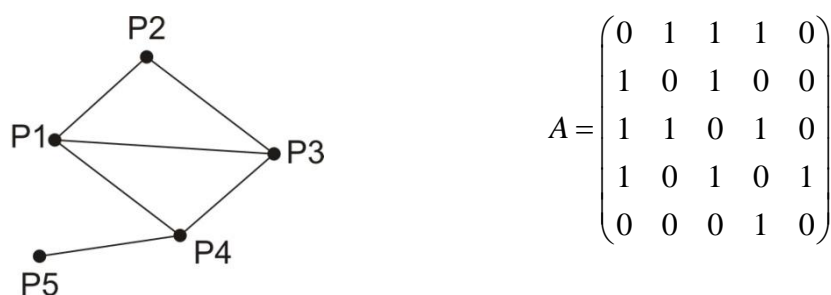


Figura 27 – Grafo e sua representação matricial<sup>30</sup>

### Exemplo 44

Considere um torneio de futebol com as equipas  $T1, T2, T3, T4, T5, T6$  e  $T7$ , sabendo que:

$T_1$  venceu  $T_2$  e  $T_5$  e perdeu com  $T_3$

$T_2$  venceu  $T_5$  e perdeu com  $T_1$  e  $T_3$ ;

$T_3$  venceu  $T_1$  e  $T_2$  e perdeu com  $T_4$ ;

$T_4$  venceu  $T_3$  e perdeu com  $T_4$ ;

$T_5$  perdeu com  $T_1$  e  $T_2$ ;

$T_6$  não jogou com ninguém;

$T_7$  venceu  $T_4$ .

Para representar a situação enunciada através de um grafo precisamos introduzir uma orientação do vértice  $P_i$  para  $P_j$  ( $P_i \rightarrow P_j$ ). Podemos ainda representar a situação através da matriz de adjacência  $T$ .

<sup>30</sup> [www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/.../MC04145369408T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../MC04145369408T.doc)

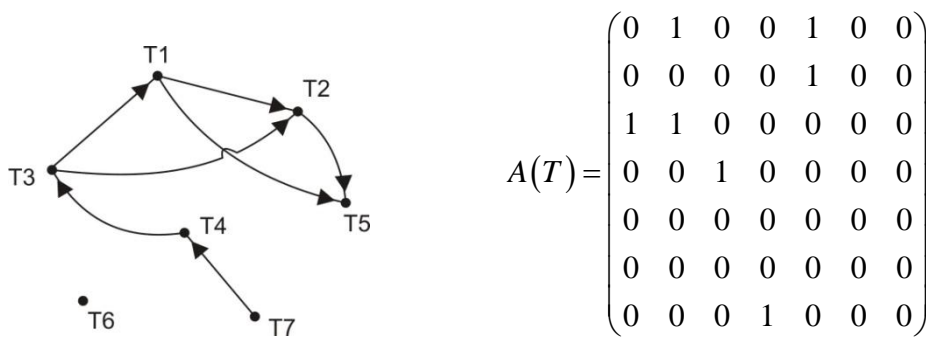


Figura 28 – Grafo que traduz os resultados do torneio e a sua representação matricial<sup>31</sup>

Concluindo, a Teoria dos Grafos é uma nova área do conhecimento matemático, que vem conquistando espaço nas mais diversas difusões da Matemática Aplicada e das Ciências Sociais.

### Exemplo 45

Considere o seguinte problema<sup>32</sup>

O fluxo médio de veículos nos cruzamentos das ruas de sentido único no horário de ponta no centro de uma cidade é dado como mostra a seguinte figura:

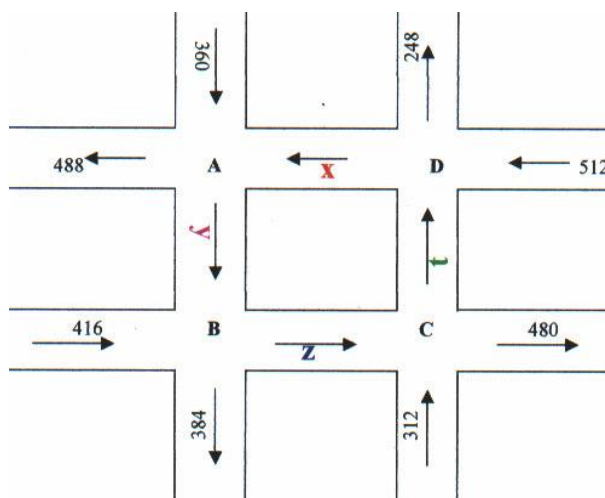


Figura 29 – Esquema de tráfego de uma cidade

Sabendo que a média de carros que circula por hora nos cruzamentos *C* e *D* é de 160. Qual é a média do número de veículos por hora que entram e saem nos restantes cruzamentos ?

<sup>31</sup> [www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/.../MC04145369408T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../MC04145369408T.doc)

<sup>32</sup> <http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf>

## Resolução

Tendo em vista que, em cada cruzamento o número de veículos que entra tem que ser igual ao de veículos que sai, levando em consideração as setas indicadas pela figura.

Como mostra a figura no cruzamento A, o número de veículos que entra é  $x + 360$  e o número de veículos que sai é  $y + 488$ , logo:

$$x + 360 = y + 488 \text{ (cruzamento A)}$$

$$y + 416 = z + 384 \text{ (cruzamento B)}$$

$$z + 312 = t + 480 \text{ (cruzamento C)}$$

$$t + 512 = x + 248 \text{ (cruzamento D)}$$

Este sistema pode ser escrito sob a forma matricial, do seguinte modo:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -264 \end{array} \right)$$

Através de operações elementares aplicadas à matriz, obtemos:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -136 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -168 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 128 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Após a matriz escalonada, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y = 128 \\ y - z = -32 \\ z - t = 168 \end{cases}$$

O sistema é possível e, como tem uma variável livre, existem muitas soluções possíveis. Por isso devemos conhecer o número de veículos entre dois cruzamentos. Como sabemos que a média de carros que circula por hora nos cruzamentos C e D é de 160

carros, então sabemos o valor de  $t$ , podendo assim, resolver para  $x$ ,  $y$ ,  $z$  em termos de  $t$ , obtendo:

$$z - t = 168$$

$$z - 160 = 168$$

$$z = 168 + 160$$

$$z = 328$$

logo, temos 328 carros entre o cruzamento B e C.

$$y - z = -32$$

$$y - 328 = -32$$

$$y = -32 + 328$$

$$y = 296$$

assim, temos 296 carros entre o cruzamento A e B.

$$x - y = 128$$

$$x - 296 = 128$$

$$x = 424, \text{ carros entre o cruzamento D e A.}$$

Através desta aplicação podemos observar o número de veículos entre cada cruzamento.

Visivelmente podemos observar que durante o dia há vários níveis de fluxos de veículos em determinados pontos da cidade. Assim, podemos fazer um trabalho pedagógico e educacional dos motoristas para que neste período de ponta eles não cometam excessos, e assim, reforçando os actos de cidadania.

As autoridades de trânsito podem determinar que naqueles pontos e horários próximos às escolas, hospitais, asilos, creches entre outros, seja proibida a utilização de buzinas. Fazendo com que reduza os níveis de poluição e poluição sonora nestes pontos.

Através desta situação podemos trabalhar em sala de aula com as outras áreas do conhecimento. Ocorrendo assim a interdisciplinaridade na Escola de Educação Básica e Secundária.

## 6.6. Aplicação à Criptografia. Como escrever e decifrar chaves

A criptografia, para além de ser usada em assuntos militares, também é importante nos negócios já que possibilita às grandes empresas protegerem-se do roubo de informação por parte da concorrência.

Permite de uma forma simples escrever e decifrar chaves.

Consideremos o seguinte quadro:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	à	á	â
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
ã	ç	é	ê	í	ó	ô	õ	ú	ü	A	B	C	D	E
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
U	V	W	X	Y	Z	À	Á	Â	Ã	Ç	É	Ê		Ó
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
Õ	Ö	Ú	Ü	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
;	<	=	>	?	!	“	#	\$	%	&	‘	©	(	)
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
*	+	,	-	_	.	/	[	]	/	€	≠	^	@	
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117		

Tabela 15- Quadro de números atribuídos a caracteres

Começa-se por transformar uma mensagem numa matriz, ou seja, faz-se uma partição da mensagem em partes de dois ou três, por exemplo, e em que cada parte vai ser convertida numa matriz coluna e usando a tabela de conversão de caracteres e números.

### Exemplo 46

Considere a mensagem “exame de matemática” que corresponde à sequência de números:

4 24 1 13 5 104 4 5 104 13 1 20 5 13 28 20 9 3 1

Qualquer matriz cujos elementos são números inteiros positivos e cuja inversa existe pode ser usada como uma matriz de codificação.

Consideremos, por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para codificar a mensagem anterior, começa-se por dividir os números da sequência em grupos de 2, começando pelo lado esquerdo e usam-se esses grupos como colunas de uma matriz  $B$  com 2 linhas.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 4 & 104 & 1 & 5 & 28 & 9 & 1 \\ 24 & 13 & 104 & 5 & 13 & 20 & 13 & 20 & 3 & 104 \end{pmatrix}$$

Quando necessário acrescenta-se um espaço no final da mensagem de modo a completar a matriz.

Em seguida efectua-se o produto de  $A$  por  $B$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 4 & 104 & 1 & 5 & 28 & 9 & 1 \\ 24 & 13 & 104 & 5 & 13 & 20 & 13 & 20 & 3 & 104 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 53 & 28 & 213 & 14 & 130 & 41 & 31 & 41 & 15 & 209 \\ 111 & 55 & 431 & 32 & 364 & 83 & 67 & 83 & 39 & 419 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Então a mensagem codificada é

53 111 28 55 213 413 14 32 ...

Esta mensagem pode ser decodificada usando a matriz de decodificação,  $A^{-1}$ .

### Exemplo 47

Descodifique a mensagem dada por:

29 56 47 14 50 41 17 33 18 41 70 56 21 49 48

que foi codificada usando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

E o seguinte código

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z		
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	

Tabela 16 - Quadro de números atribuídos a caracteres

### Resolução

Para descodificar esta mensagem é necessário calcular a inversa da matriz  $A$ .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em seguida, constrói-se uma matriz  $C$ , com 3 linhas, que contém a mensagem codificada.

$$C = \begin{pmatrix} 29 & 14 & 17 & 41 & 21 \\ 56 & 50 & 33 & 70 & 49 \\ 47 & 41 & 18 & 56 & 48 \end{pmatrix}$$

Para determinar a matriz  $B$  que contém a mensagem codificada, calcula-se o produto da inversa de  $A$  por  $C$ .

$$A^{-1} \times C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 29 & 14 & 17 & 41 & 21 \\ 56 & 50 & 33 & 70 & 49 \\ 47 & 41 & 18 & 56 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 2 & 27 & 20 \\ 9 & 9 & 15 & 14 & 1 \\ 18 & 27 & 1 & 15 & 27 \end{pmatrix}$$

Donde se obtém a sequência de números:

20 9 18 5 9 27 2 15 1 27 14 15 20 1 27

à qual corresponde a mensagem

t i r e i - b o a - n o t a -

## 6.7. Aplicação à Economia: Análise Input-Output

A análise input-output é utilizada, entre outros aspectos, para o estudo das relações intersectoriais de uma economia, a nível nacional ou regional, e desta com o exterior.

A partir dos quadros input-output, são possíveis múltiplas aplicações relacionadas com incentivos e investimentos, avaliação de projectos, elaboração de modelos de programação, estudos de comércio externo, entre outros.

De um modelo fechado, onde os sectores são simultaneamente produtores e consumidores e não existem variáveis exógenas, Leontief (prémio Nobel da Economia, 1973) introduziu a componente da procura final (consumo privado-ou das famílias, consumo público, formação de capital fixo, exportações,...) articulada com os sectores económicos mas determinada por factores exógenos.

Numa economia moderna em que a produção de um bem obriga ao input de muitos outros bens, como bens intermédios, no processo de produção, a procura total  $x_i$  para o produto  $i$  será dada pela soma de todas as procuras intermédias do produto mais a procura final  $p_i$  do proveniente dos consumidores finais.

Sendo  $a_{ij}$  o coeficiente técnico que expressa o valor do input  $i$  requerido para produzir uma unidade do produto  $j$ , a procura total para o produto  $i$  pode ser expressa na forma

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + p_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Isto é,

$$X = AX + P,$$

Onde

$X$  – é a matriz dos outputs (ou quantidade produzida);

$P$  – é a matriz da procura final;

$A$  – é a matriz input-output (ou matriz de consumo) cujos elementos  $a_{ij}$  são chamados coeficientes input-output.

Para determinar os outputs totais basta resolver a equação  $X = AX + P$  em ordem a  $X$ , isto é,

$$X = (I - A)^{-1} . P , \text{ à matriz } I-A \text{ dá-se o nome de matriz de Leontieff.}$$

## 7. Utilização de recursos tecnológicos

Estando numa época em que se dá extrema importância às novas tecnologias, não podemos deixar de referir alguns recursos que poderão ser úteis como apoio às aulas.

Segundo DOMÍNGUEZ<sup>33</sup>, a utilização deste tipo de material de apoio nas aulas de matemática é interessante por vários motivos, entre outros:

- É útil em actividades de ampliação de conhecimentos, tais como situações mais complicadas e que requerem a utilização de métodos aproximados;
- Os alunos podem usá-los de maneira autónoma como ferramenta de correcção ou de comprovação dos exercícios feitos;
- Ao simplificar os cálculos, permite dedicar mais tempo a trabalhar aspectos interpretativos.

Não podemos aqui deixar de referir, tal como foi mencionado em COLOMBO<sup>34</sup>, que um problema é definido como qualquer tarefa ou actividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correcta, ou seja, um verdadeiro problema é uma situação nova, inusitada para o individuo, o que imprime a necessidade de inventar, criar, conjecturar, elaborar estratégias e produzir significados.

Resolver um problema implica encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados. Compreende-se assim, conforme defende Colombo<sup>35</sup>, que propor problemas aos alunos é propor situações que os estimulem a pensar, em vez de criar situações que exijam apenas a aplicação directa de fórmulas sem compreensão.

---

<sup>33</sup> DOMINGUEZ, E. D. (2007), *La calculadora gráfica como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas: resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática **12**, pág 157-170.

<sup>34</sup> COLOMBO, V. C. (2006), *Registos de representação semiótica e resolução de problemas no ensino de matrizes e sistemas lineares*, Synergismus scyentifica UTFPR, Pato Branco **01 (1,2,3,4)**, 1-778. URL: <http://pessoal.pb.cefetpr.br/eventocientifico/revista/artigos/0604007.pdf> (em Dezembro de 2008)

<sup>35</sup> COLOMBO, V. C. (2006), *Registos de representação semiótica e resolução de problemas no ensino de matrizes e sistemas lineares*, Synergismus scyentifica UTFPR, Pato Branco **01 (1,2,3,4)**, 1-778. URL: <http://pessoal.pb.cefetpr.br/eventocientifico/revista/artigos/0604007.pdf> (em Dezembro de 2008)

## 7.1. Aplicação das Calculadoras Gráficas

Testes Internacionais e Nacionais (PISA, CANGURU, OLIMPÍADAS, etc) aplicados às escolas portuguesas, indicam um baixo desempenho dos alunos na área de Matemática.

Frequentemente, a Matemática tem sido apontada como a disciplina que contribui significativamente para a elevação das taxas de retenção.

Segundo estes testes dão-nos a conhecer que é essencial haver um aumento na qualidade do ensino da Matemática no Ensino Secundário. Deve-se procurar um modelo que faça com que os alunos recuperem a auto-estima e confiança para abordar e resolver problemas.

Deve-se reforçar na formação de professores planos nas áreas das calculadoras e das TIC, visto que no exame de Matemática 12º Ano, existe uma forte aplicação das calculadoras gráficas.

É importante que os alunos possam experimentar e explorar ideias matemáticas, a efectuar cálculos e a realçar habilidades e consequentemente recuperar a satisfação e gosto pelo domínio das matemáticas e sua auto-estima.

Na construção do conhecimento a calculadora funciona como uma ferramenta essencial para ensinar, aprender e fazer matemática. Este instrumento permite que o indivíduo esteja apto para tomar decisões, fazer reflexões, servir-se da razão e por fim a resolução de problemas.

Neste sentido, calculadora e as ferramentas informáticas são dispositivos usados na vida quotidiana, e por isso, o trabalho desta unidade didáctica em ambiente de aula, deve reflectir a realidade.

O apoio das máquinas de calcular gráficas deve ser organizado através de problemas e exercícios propostos na sala de aula. Os alunos devem fazer uma aprendizagem dos conteúdos didácticos com a ajuda da máquina de calcular gráfica e por conseguinte, atingir os conhecimentos propostos no currículo das diferentes unidades didácticas.

O currículo das matemáticas deve contemplar a utilização desta ferramenta.

### Exemplo 48

Considere a seguinte actividade envolvendo Sistemas de Equações.

Um estado compra 758 000 barris de petróleo a três vendedores distintos que vão vender a 30, 28, e 25 € o barril, respectivamente. A factura total ascende a 17 milhões de euros. O primeiro vendedor recebe 24% do total do petróleo comprado. Qual a quantidade certa comprada a cada vendedor?

### Resolução

É lógico que ao se ensinar com lápis e papel os métodos de Substituição, Adição, Gráfico, Gauss-Jordan, entre outros, deve-se em consonância utilizar as máquinas calculadoras desde as científicas até as gráficas. Com elas pode-se cobrir outros objectivos importantes, tais como:

- Passar um problema escrito na linguagem corrente para linguagem algébrica;
- Interpretar geometricamente um sistema de duas ou três incógnitas;
- Estimular a capacidade de investigação;
- Interpretar e analisar criticamente os resultados obtidos na resolução dum sistema de equações, expressando correctamente a solução.

Estrutura-se o problema

compra 758 000 barris de petróleo a três vendedores distintos

$$x + y + z = 758000$$

Venda de cada barril a 30, 28, e 25 € cada e o custo total 17000000€

$$30x + 28y + 25z = 17000000$$

$$24\% \text{ do total do petróleo comprado} \text{ — } 0.24 \times 758000 = 181920$$

Vai-se escrever sob a forma de sistema de três equações a três incógnitas.

$$\begin{cases} x + y + z = 758000 \\ 30x + 28y + 25z = 17000000 \\ x = 181920 \end{cases}$$

Utilizando a calculadora Casio fx-9860G Slim, temos:

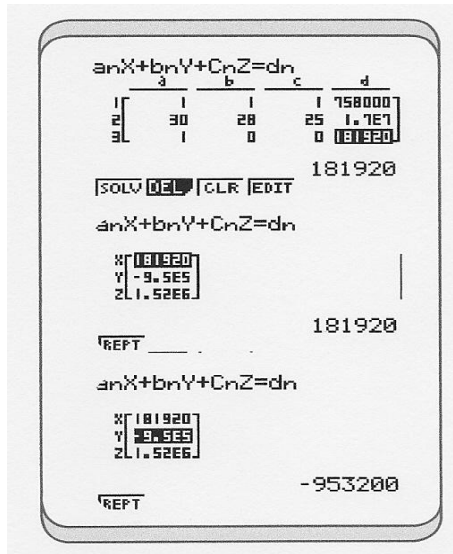


Figura 30- Resolução com a Calculadora<sup>36</sup>

Temos a seguinte solução

$$\begin{cases} x = 181920 \\ y = -953200 \\ z = 1529280 \end{cases}$$

Conclui-se que o Estado comprou ao vendedor x e y, e não comprando 953200 barris ao vendedor y.

A calculadora não faz tudo, mas ajuda a eliminar a parte laboriosa dos cálculos numéricos e permitir que haja mais tempo para se dedicar, explorar e interpretar a matemática.

#### Exemplo 49

Na resolução de sistemas de equações deve se ter em conta que, a representação gráfica juntamente com a algébrica consolida a aprendizagem do conceito em causa.

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} -x+1 = y \\ -2x+y = -5 \end{cases}$$

Resolvendo em ordem a y ambas as equações, vem:

---

Retirado de:

<sup>36</sup> [http://www.aulamatematica.com/Revistas/pdf\\_revistas/22\\_7/22\\_7\\_24.pdf](http://www.aulamatematica.com/Revistas/pdf_revistas/22_7/22_7_24.pdf)

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

e cuja representação e resolução gráfica é a seguinte:

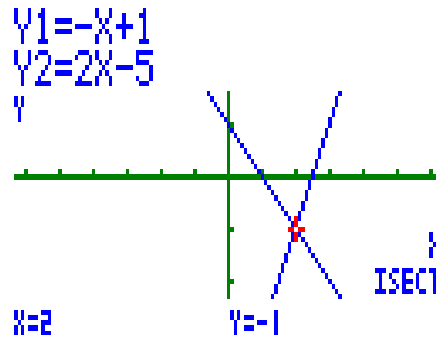


Figura 31- Resolução gráfica

Obtendo assim de uma forma simples a solução do sistema.

### Exemplo 50 (Actividade sobre matrizes)

Uma escola tem que fazer uma encomenda de canetas, livros, folhas para fotocopiadora e acetatos. Estão ao dispor três casas comerciais: Casa João das Canetas, Casa das Gráficas e o Grafismo Real. São pedidos preços por unidade da quantidade necessária e, por isso, os preços são os seguintes:

Casa João das Canetas faz cada caneta a 2.35 €, 5.56 € por cada livro, 4.69 € para uma resma de folhas e 15.75 € por uma caixa de acetatos;

A Casa das Gráficas, 2.95 €, 4.50 €, 5 € e 18 € respectivamente;

O Grafismo Real, 2.25 €, 4.70 €, 4€ e 13 €, respectivamente.

Se o pedido de encomenda é de 120 canetas, 100 livros, 250 resmas de folhas e 25 caixas de acetatos:

- Elabore uma matriz que traduza estes dados;
- Indique o elemento  $a_{13}$  de cada matriz e faça uma interpretação;
- Calcula matricialmente qual será o custo total que apresenta cada casa comercial à escola;
- Se se tiver de pagar 6% de IVA, calcula matricialmente qual será o custo total que estabelece cada casa comercial;
- Critica os resultados e sugere qual será a casa comercial mais indicada.

## Resolução

Estrutura-se o problema

a)

$$\text{Matriz de preços } A = \begin{bmatrix} 2.35 & 5.56 & 4.69 & 15.75 \\ 2.95 & 4.5 & 5 & 18 \\ 3.25 & 4.7 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz de encomendas } B = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \\ 250 \\ 25 \end{bmatrix}$$

b) Na matriz dos preços  $A$ ,  $a_{13} = 13$

O grafismo real faz o preço de 13€ pela caixa de acetatos.

c) O custo total será o produto da matriz dos preços pela matriz de encomendas.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2.35 & 5.56 & 4.69 & 15.75 \\ 2.95 & 4.5 & 5 & 18 \\ 3.25 & 4.7 & 4 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \\ 250 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2404,2 \\ 2504 \\ 2185 \end{bmatrix}$$

d) O IVA de 6% corresponde ao produto do valor 1.06 pela matriz produto, ou seja,

$$106 \div 100 \times \begin{bmatrix} 2404,2 \\ 2504 \\ 2185 \end{bmatrix} =$$

$$1.06 \times \begin{bmatrix} 2404,2 \\ 2504 \\ 2185 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2548,5 \\ 2654,2 \\ 2316,1 \end{bmatrix}$$

Podemos concluir que a casa Grafismo Real tem o preço de 2316,1, sendo este o mais baixo.

Utilizando a calculadora Casio fx-9860G Slim, temos:

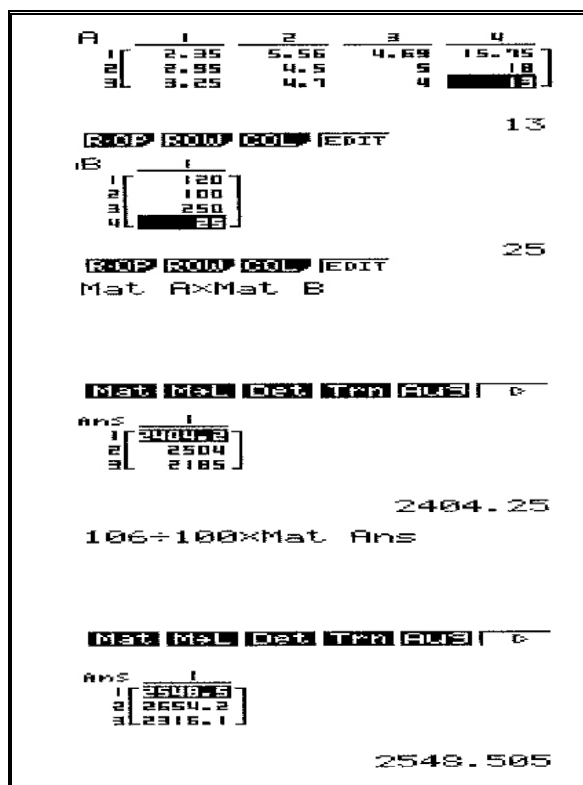


Figura 32 – Resolução com calculadora<sup>37</sup>

No Ensino Secundário há o objectivo de perder pouco tempo com cálculos aritméticos repetitivos e, por isso, deve-se fazer uma gestão do tempo empregue na resolução de problemas.

Há todo interesse de estimular todo o tipo de actividades que fortalece o pensamento crítico, a criatividade, o poder de decidir no momento certo, estimulando desta forma o “ensinar para compreender”.

Os exames nacionais do ensino secundário permitem o uso de calculadoras gráficas. A lista dos modelos permitidos é dada pela Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, e envolve três marcas comerciais (DGIDC: calculadoras): Texas Instruments, Sharp, Lexibook e Casio. De seguida faz-se um pequeno resumo das capacidades destas calculadoras gráficas no que diz respeito ao seu nível gráfico, algébrico e matricial.

Retirado de:

<sup>37</sup> [http://www.aulamatematica.com/Revistas/pdf\\_revistas/22\\_7/22\\_7\\_24.pdf](http://www.aulamatematica.com/Revistas/pdf_revistas/22_7/22_7_24.pdf) (em Dezembro de 2010).

	<b>Texas Instruments</b> (modelo TI 86)	<b>Sharp</b> (modelo EL 9900)	<b>Lexibook</b> (modelo GC500)	<b>Casio</b> (modelo FX – 9860 G)
<b>Nível gráfico</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desenha e compara funções;</li> <li>• Desenha e compara conjuntos de dados;</li> <li>• Avalia os gráficos através da geração de tabelas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite a resolução de equações tanto de forma numérica como de forma gráfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui funções gráficas como: Zoom, Plot line, Scroll, Trace, etc.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Função G-solve que permite, a partir de um gráfico, o cálculo de: Zeros, Pontos de intersecção, integrais, etc.</li> <li>• Possibilidade de divisão do ecrã de forma a mostrar: 2 gráficos ou gráfico e tabela.</li> </ul>
<b>Nível algébrico</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui ferramentas interactivas de resolução de equações, resolução de sistemas de equações, localização polinomial do zero, etc.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui DAL (Direct Algebraic Logic);</li> <li>• Resolve equações de forma algébrica, pelo método de Newton e de forma gráfica.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui ferramentas matemáticas como: funções trigonométricas, conversão de coordenadas rectangulares / polares, etc.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possibilidade de resolução de equações lineares;</li> <li>• Possibilidade de resolução de sistemas de equações lineares.</li> </ul>
<b>Nível matricial</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui um editor de matrizes que permite resolver uma grande variedade de problemas de álgebra linear;</li> <li>• Calcula valores próprios, vectores próprios, determinantes, etc.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possui comandos de programação semelhantes aos da linguagem BASIC que permitem utilizar matrizes;</li> <li>• Calcula determinantes, transpostas, inversas, operações elementares entre colunas, etc.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não é mencionada a possibilidade de cálculo matricial.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Possibilidade do cálculo de determinantes e inversas de matrizes</li> </ul>

Tabela 17 - Comparação entre calculadoras gráficas.

Da observação da tabela anterior, desaconselha-se a escolha de calculadoras gráficas da Lexibook, sendo dado ao aluno a opção entre uma das restantes três marcas.

## 7.2. Folha de Cálculo Excel

### Álgebra Linear com Excel

No ano de 1986, a organização directiva do Nacional Council of teachers of mathematics cuja sigla é NCTM, (Conselho Nacional de professores de Matemáticas) criou a “Commission on Standards for School Mathematics” com o objectivo de ajudar a melhorar a qualidade e o ensino-aprendizagem da Matemática.

A NCTM defende que um dos temas mais importantes é “**As matrizes e suas aplicações**”.

O Excel é um produto Microsoft, a sua licença de uso faz parte do pacote Office e é uma Ferramenta que funciona com o sistema operacional Windows. O propósito desta ferramenta é de gerar Folhas de Cálculo, gerar gráficos e funções.

As Folhas de Cálculo podem ser usadas para introduzir e trabalhar conteúdos de Matemática, Estatística, Contabilidade, Economia entre outras.

O tema matrizes, num programa futuro do ensino secundário, poderia ser leccionado, com a ajuda da Folha de Cálculo Excel como via para consolidar estes conteúdos e aplicar uma ferramenta para resolver os problemas propostos.

#### Exemplo 51 (Soma de duas matrizes)

Suponhamos que se pretende somar as matrizes seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & -82 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -78 & 4 \\ -6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -45 \end{pmatrix}$$

#### Resolução

Na folha de cálculo Excel, deve-se começar por introduzir as componentes de ambas matrizes e na matriz soma, definimos a soma das primeiras componentes ou células das matrizes anteriores:



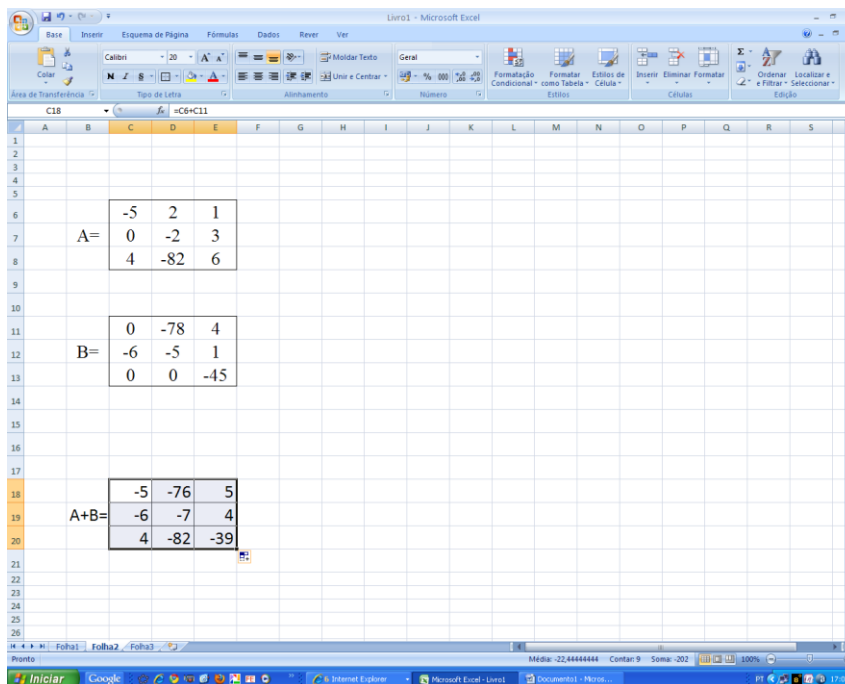


Figura 35 - Exemplo de adição de matrizes utilizando a folha de cálculo Excel.

A grande ajuda de usar o Excel para este tipo de cálculos é que se alterarmos qualquer elemento da Matriz  $A$  ou  $B$ , a matriz  $C = A + B$  será actualizada de forma automática.

### Exemplo 52 (Produto de um escalar por uma matriz)

Vamos supor que se pretende determinar o produto do escalar  $b = -3$  pela matriz  $A$  anterior. Em primeiro lugar, introduz-se numa folha de cálculo a matriz e o escalar e a seguir define-se a primeira célula da nova matriz como o produto entre o escalar e célula associada da matriz  $A$ . Notar que usamos o símbolo  $\$$  para fixar a posição do escalar:

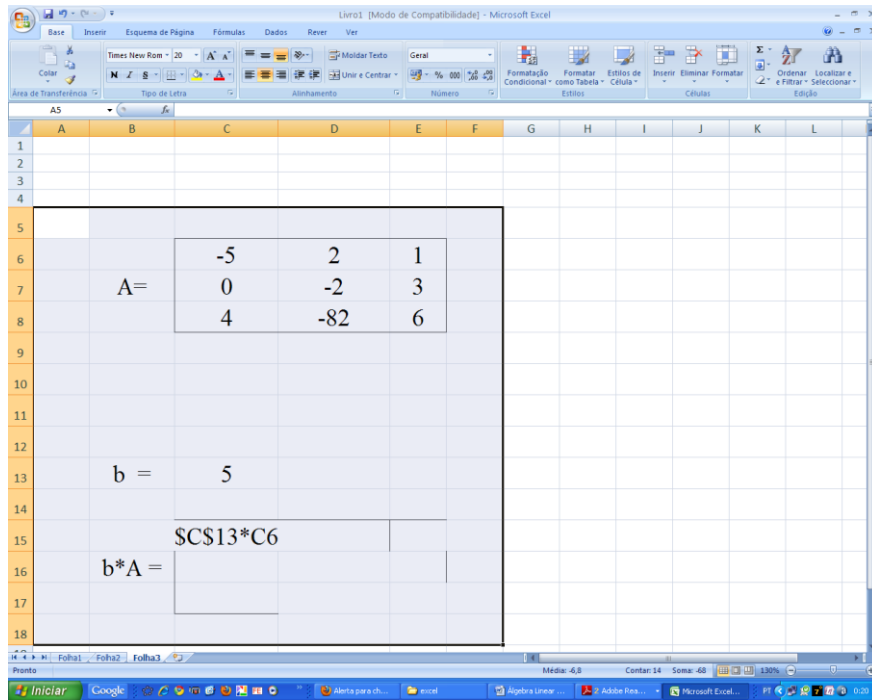


Figura 36 - Exemplo de multiplicação de um escalar por uma matriz utilizando a folha de cálculo Excel

Depois de aceitar a fórmula, basta repetir o processo anterior de “deslocar” a cruz para a direita e para baixo para obter a matriz desejada:

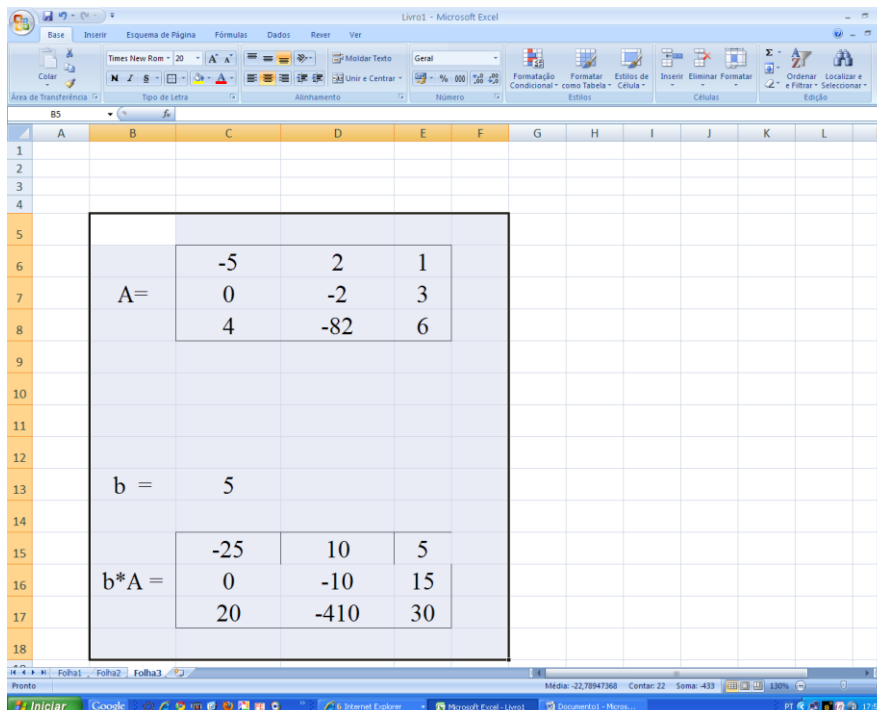


Figura 37 - Exemplo de multiplicação de um escalar por uma matriz utilizando o Excel.

De novo, se o valor de qualquer elemento da matriz A fosse alterado ou se alterássemos o valor do escalar, a matriz  $C = b * A$  ficaria actualizada de forma automática.

### Exemplo 53 (Produto de duas Matrizes)

Suponhamos que se pretende calcular o produto entre as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & -82 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -6 & -2 \\ 8 & 75 \end{pmatrix}$$

utilizando a folha de cálculo Excel.

### Resolução

Introduz-se ambas as Matrizes no Excel (recordar que para multiplicar duas matrizes, o número de colunas da primeira tem que ser igual ao número de linhas da segunda):

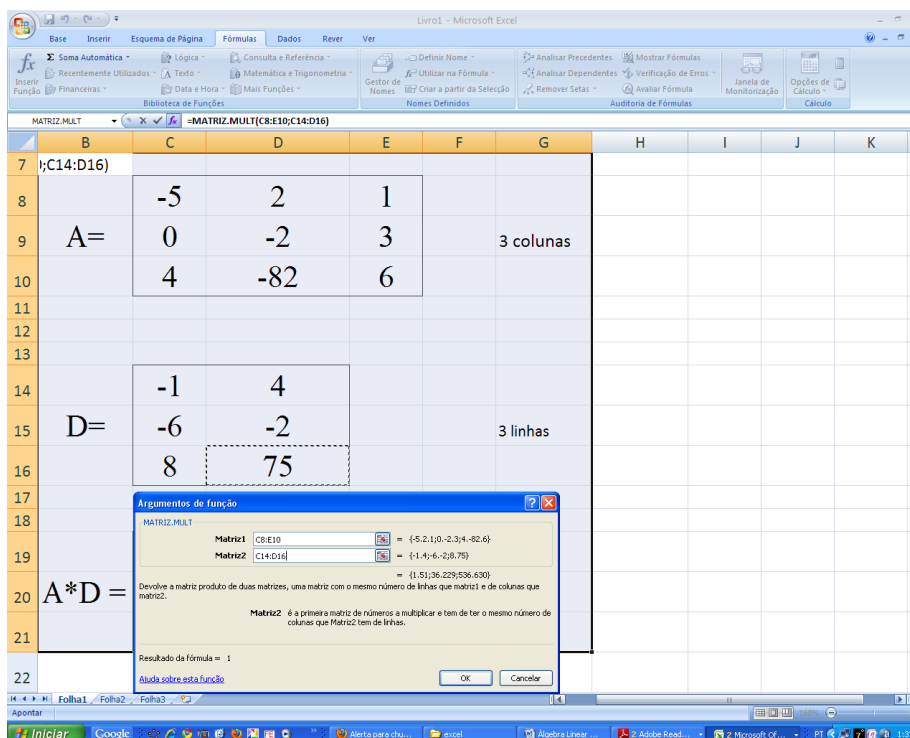


Figura 38 - Exemplo de multiplicação de matrizes configurando o Excel.

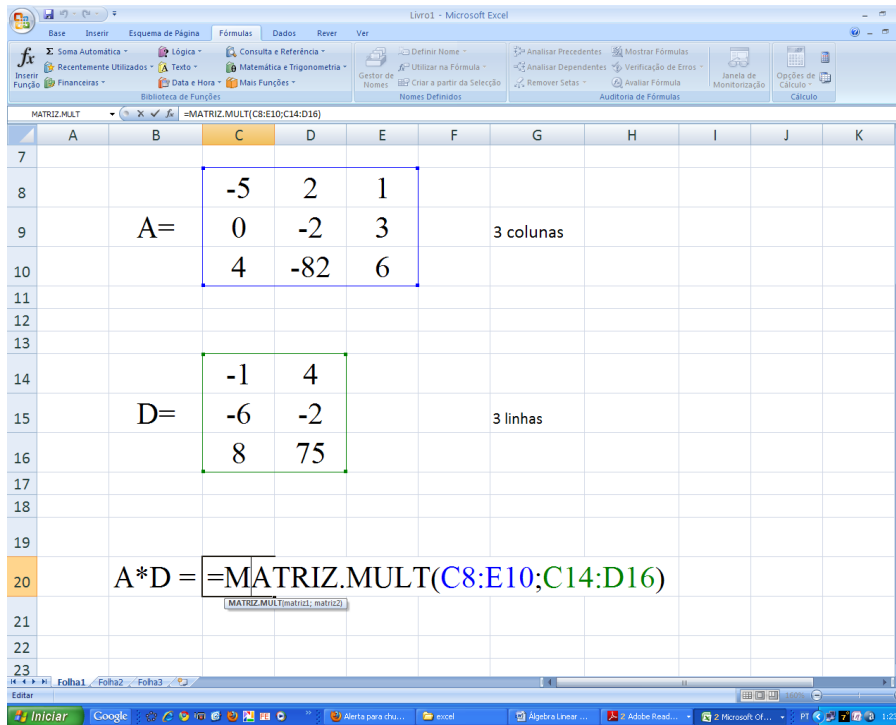


Figura 39 - Exemplo de multiplicação de matrizes utilizando os procedimentos

Deve-se premir conjuntamente as teclas **Control + shift + Enter** para aceitar o menu anterior. Assim, obteremos a seguinte matriz:

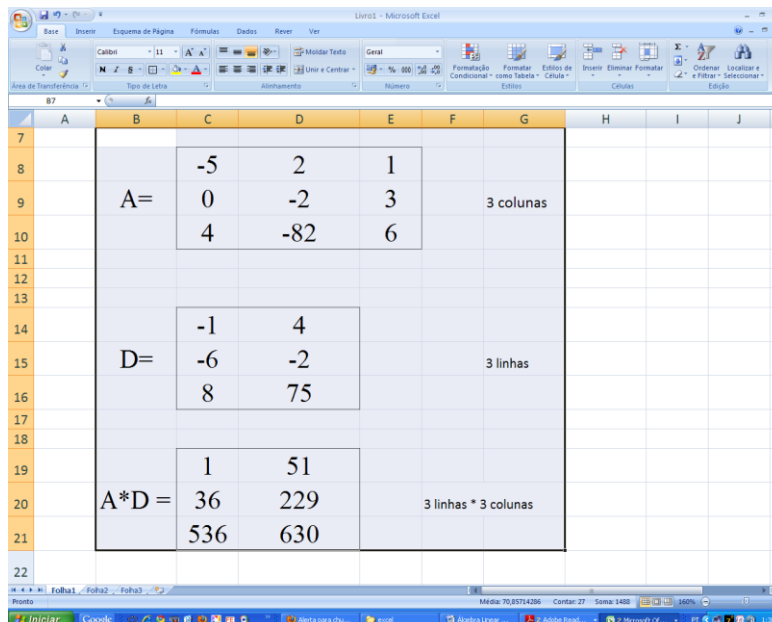


Figura 40 - Exemplo de multiplicação de matrizes utilizando o Excel.

Estes são alguns dos exemplos onde se pode aplicar a folha de cálculo Excel. Poderíamos ainda calcular a matriz transposta de uma matriz dada ou a inversa, entre outras.

### Exemplo 54

Para a fabricação de um Autocarro, uma indústria na sua linha de montagem precisa de canos de escape e Travões para seus três modelos de Autocarros, com a seguinte especificação:

Componentes/Modelo	A	B	C
Cano de escape	2	3	4
Travões	4	6	8

Tabela 18- Distribuição de componentes para autocarros

Para os dois primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela seguinte:

Modelo/Meses	Janeiro	Fevereiro
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Tabela 19- produção nos dois primeiros meses

Nessas condições, quantos canos de escape e quantos travões são necessários em cada um dos meses para que a fábrica atinja a produção planeada?

### Resolução

Utilizando a folha de cálculo Excel

1. Insira as tabelas dadas no exercício na folha de Cálculo do Excel, Figura 1;
2. Na mesma Folha, insira uma tabela para os valores da solução do problema;
3. Nessa tabela seleccione as células em que serão inseridos os valores da solução do Problema;
4. Escolha a função `MATRIZ.MULT`;
5. Em Matriz 1 seleccione os valores da primeira tabela e pressione Enter;
6. Em Matriz 2 seleccione os valores da segunda tabela e pressione Enter;
7. Pressione `Ctrl+Shift+Enter` para mostrar a matriz de multiplicação.

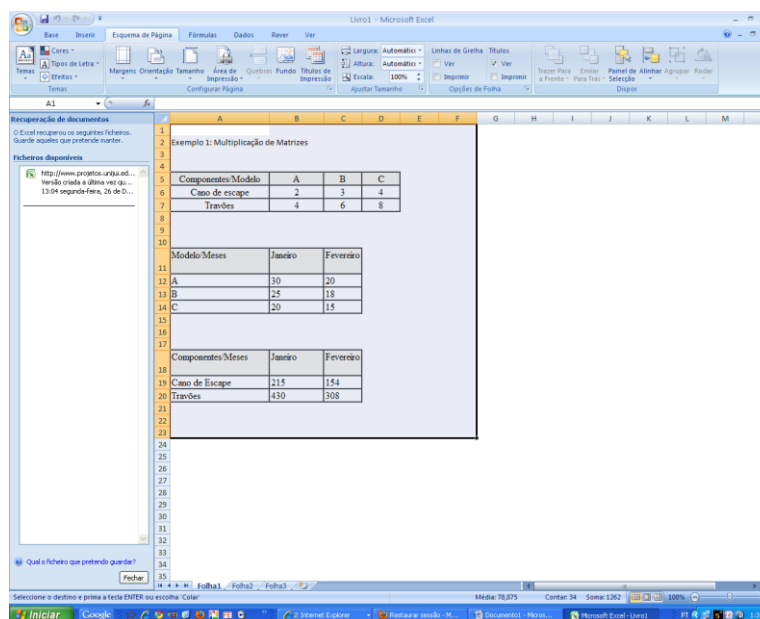


Figura 41 - Exemplo de multiplicação de matrizes utilizando o Excel.

Conclusão: São necessários 215 Canos de Escape e 430 Travões para Janeiro como também 154 Canos de Escape e 308 Travões para Fevereiro.

### 7.3. Software gráfico

Para esta secção foram escolhidas cinco ferramentas que, pelo seu grau de aplicabilidade e usabilidade, podem ser úteis no ensino da resolução de sistemas através de matrizes. Passar-se-á de seguida a descrever cada uma destas ferramentas.

O **Graph**<sup>38</sup> é uma ferramenta não paga utilizada para desenhar gráficos matemáticos num sistema de coordenadas. É assim um programa muito útil e acessível para desenhar gráficos ou funções. A interface gráfica facilita a visualização de funções e a sua cópia para outras ferramentas. É ainda possível efectuar alguns cálculos matemáticos sobre as funções.

Na Figura seguinte está representada a intersecção da função  $50\ln(x)/x^2$  com a sua tangente em  $x=4$ .

<sup>38</sup> Disponível em <http://www.padowan.dk/graph/> (em Dezembro de 2008).

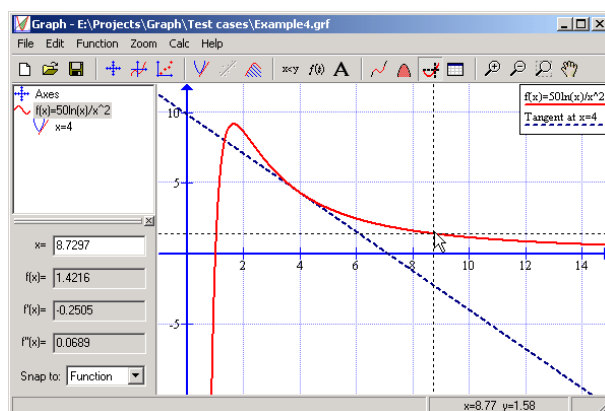


Figura 42 – Intersecção da função  $50\ln(x)/x^2$  com a sua tangente em  $x=4$  através da ferramenta *Graph*.

Disponível em Português, **Autograph 3.2**<sup>39</sup> é um inovador software de matemática, intuitivo, com uma abordagem visual interactiva e dinâmica, podendo ser utilizado em qualquer computador com sistema operativo Windows2000 (SP3), XP e Vista ou MAC. Ideal para funcionar com os quadros interactivos.

Este software é dirigido a vários níveis de ensino, começando no básico, passando pelo secundário e inclusive universitário, funcionando em dois modos alternativos: padrão ou avançado, consoante se pretenda uma abordagem mais básica ou mais elaborada. Uma vez que se trata de um programa que permite a manipulação de dados dinamicamente, torna-se uma ferramenta que possibilita a aquisição de noções matemáticas, físicas e não só, de modo mais efectivo, apelativo e eficiente para os alunos. O software funciona a vários níveis, possibilitando a construção de gráficos a uma dimensão tais como histogramas, gráficos cumulativos ou de frequência, ou ainda gráficos a duas dimensões tais como gráficos de dispersão.

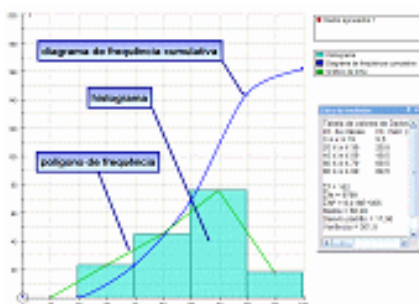


Figura 43 – Histograma através do *AutoGraph*.

<sup>39</sup> Informação disponível em [http://www.tetri.pt/prow.php?prow=000ctg\\_pshowcategall&cat=76](http://www.tetri.pt/prow.php?prow=000ctg_pshowcategall&cat=76) (em Dezembro de 2008).

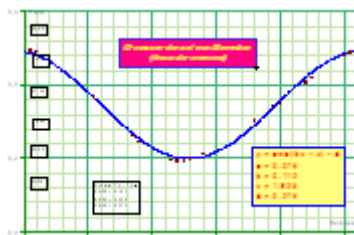


Figura 44 – Movimento parabólico através do AutoGraph.

Com este software inovador podemos introduzir a, ou as expressões, que desejarmos e verificar a sua evolução e interacção ao ritmo desejado devido à útil ferramenta traçado lento, sejam a duas ou três dimensões. Se as expressões possuírem constantes, ser-lhe-á possível variar essas constantes e criar famílias, assim como ampliar a zona de um gráfico que desejar.

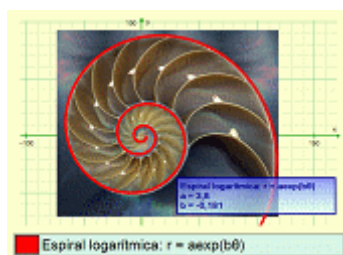


Figura 45 – Espiral logarítmica através do AutoGraph.

Poderá ainda ter total controlo acerca do formato ou aparência dos objectos ou gráficos que criar, através da simples manipulação desses objectos ou da alteração dos eixos na representação gráfica.

Pontos podem ser adicionados directamente através do click do rato ou através da introdução das coordenadas desejadas, podendo ser facilmente manipulados através do arrasto do rato ou serem ligados de forma a produzirem curvas ou outros objectos tais como linhas verticais ou horizontais, tangentes ou normais, segmentos de recta, gradientes, vectores ou objectos a duas ou três dimensões.

O software permite inclusive a escrita de equações de planos, obtendo-se de imediato a visualização dos mesmos num referencial tridimensional que pode sofrer rotação, permitindo uma melhor visualização do problema e conseqüentemente um incremento na comunicação e compreensão por parte dos alunos em sala de aula.

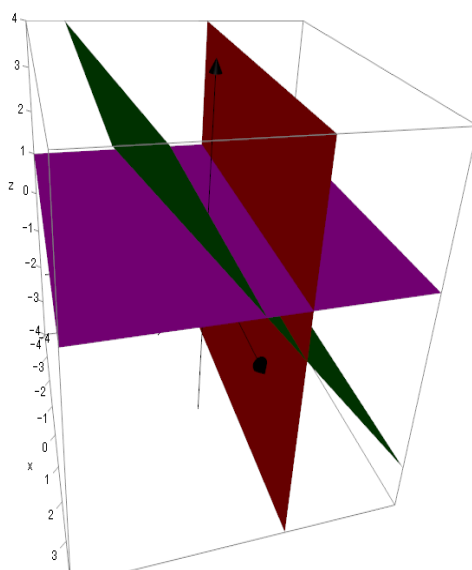


Figura 46 Intersecção de planos no espaço através AutoGraph.

Com o **Autograph**, podemos também criar objectos que posteriormente poderão sofrer rotações, translações, ampliações ou reduções.

O **Autograph** possibilita ainda a ligação entre recursos como a Internet, o Excel, Word e o próprio programa. Torna-se por exemplo possível importar dados da Internet ou do Excel, ou introduzi-los directamente no **Autograph** onde posteriormente podemos gerar tabelas ou gráficos e finalmente exportá-los para o Word.

O **GeoGebra**<sup>40</sup> é uma ferramenta de matemática dinâmica para utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Por um lado, é um sistema de geometria interactivo. É possível fazer construções com pontos, vectores, segmentos, linhas, secções cónicas e, também, funções. Por outro lado, pode-se digitar directamente equações e coordenadas. Sendo assim, esta ferramenta é capaz de lidar com variáveis para números, vectores e pontos, calcular derivadas e integrais de funções e possui ainda comandos para o cálculo de raízes e extremos.

Na figura está representada a intersecção da função  $h(x) = x^2 - 4$  com a recta de equação  $y = 3x$  utilizando *GeoGebra*<sup>41</sup>

<sup>40</sup> informação disponível em <http://www.geogebra.org/cms/index.php?lang=pt> em Dezembro de 2008).

<sup>41</sup> Fonte (<http://www.ensinolivre.pt/?q=node/15> em Maio de 2009).

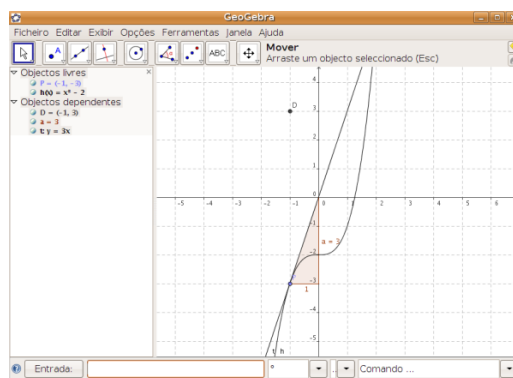


Figura 47 – Intersecção de uma função com a sua tangente *GeoGebra*.

O **Cabri-Géomètre**<sup>42</sup> é um software que permite construir todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Uma vez construídas, as figuras podem ser movimentadas conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Esta possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a todos os casos, constituindo-se numa ferramenta rica de validação experimental de factos geométricos.

Na Figura seguinte está representada a intersecção de um plano, um paralelepípedo e uma esfera através desta útil ferramenta proposta por Cotret<sup>43</sup>

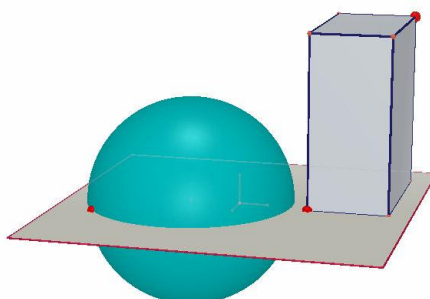


Figura 48 – Intersecção de um plano, um paralelepípedo e uma esfera através da ferramenta *Cabri-Géomètre*.

O **Calques 3D**<sup>44</sup> é um software de geometria dinâmica espacial gratuito. As suas construções são dinâmicas e interactivas, o que faz do programa um excelente laboratório de aprendizagem da geometria espacial. O aluno pode testar as suas hipóteses através de exemplos e contra-exemplos. Uma vez feita a construção, pontos, rectas, planos, cilindros e esferas podem ser deslocados no ecrã, mantendo-se as

<sup>42</sup> Informação disponível em <http://www.cabri.com.br/oquee.php> em Dezembro de 2009).

<sup>43</sup> Cotret, P. R. d. C. (2006), *Manual do utilizador Cabri 3D v2*. URL: <http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv212/user-manual-por.pdf> em Dezembro de 2008

<sup>44</sup> (informação disponível em: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/calques3d/> em Dezembro de 2008).

relações geométricas previamente estabelecidas, permitindo assim que o aluno se concentre na associação existente entre os objectos. Uma mesma cena pode ser visualizada de ângulos diferentes, permitindo assim que o utilizador tenha uma melhor percepção tridimensional

Na Figura seguinte está representada a intersecção de um cubo com um plano, feita com o *Calques 3D* proposta por Alves<sup>45</sup>

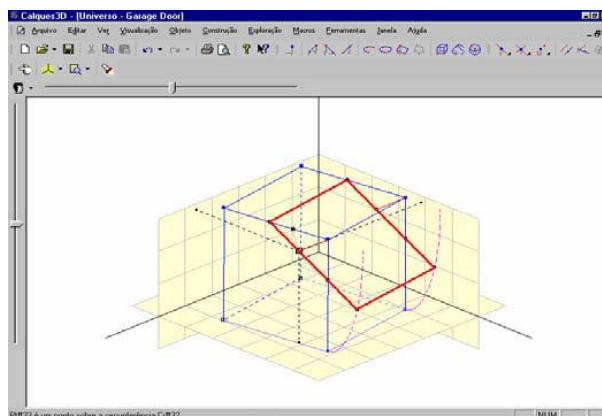


Figura 49 – Intersecção de um cubo com um plano através da ferramenta *Calques 3D*.

**O Winplot**, este é um dos melhores softwares livres, é um software gráfico dinâmico capaz de representar diversos tipos de gráficos, sendo que com o Winplot é possível representar qualquer equação, desde pontos, funções, paramétricas, geometria analítica, assim como o desenvolvimento de cálculo, integral, limites e derivadas, além é claro da representação de gráficos em 2D e 3D. Também pode ser considerado um ambiente de jogo, quando se tem acesso o menu "adivinhar". Um software gráfico ideal para todos os níveis educacionais.

### O Winplot e a construção de gráficos

O Winplot, basicamente, é um programa feito para fazer gráficos de funções de uma ou duas variáveis, utilizando o Windows (Winplot). Ele é classificado como *freeware*, ou seja, ele é um software gratuito e que apresenta, além da gratuidade, muitas outras vantagens: é de fácil uso, pequeno (não é preciso um computador de última geração para rodá-lo, além de ser possível transportá-lo em uma mera disquete), pode ser usado no Windows 95/98/ME/2K/XP, além de possuir outra grande vantagem:

<sup>45</sup> Alves, George de Souza C. L. (2005), *Um estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio espacial no ensino médio através da utilização do software Calques 3D*, XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2815-2823.

tem uma versão em português. O Winplot é actualizado constantemente, pode ser copiado da Internet gratuitamente e sem a preocupação com direitos autorais. Ele pode ser conseguido directamente de sua página oficial, que é a seguinte: <http://math.exeter.edu/rparris>. Depois de se fazer o *download* do arquivo do Winplot, basta executá-lo para que o Winplot se instale.

Consideremos o sistema de funções  $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ f(x) = 2x \end{cases}$  e a sua resolução gráfica utilizando o

software winplot:

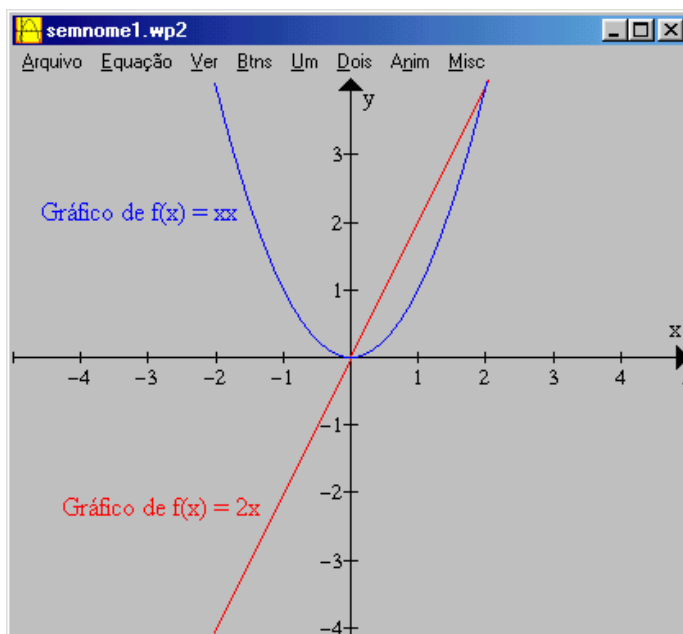


Figura 50 – Resolução gráfica através do software Winplot.

A tabela seguinte apresenta um pequeno resumo das características mais importantes para a possível utilização destas ferramentas numa sala de aula.

	<b>AutoGraph</b>	<b>Geogebra</b>	<b>Cabri- Géomètre</b>	<b>Calques 3D</b>	<b>Winplot</b>	<b>Graph</b>
<b>Gratuito</b>	Não	Sim	Não	Sim	sim	Sim
<b>Cálculos matemáticos sobre as funções</b>	Sim	Sim	Não é mencionado	Não é mencionado	sim	Sim
<b>3D</b>	Sim	Não é mencionado	Sim	Sim	sim	Não

Tabela 20 – Resumo das características mais significativas das ferramentas estudadas

A interpretação da tabela leva a intuir que o **Autograph**, **Winplot** e a seguir **Calques 3D** são ferramentas mais adequadas para a resolução gráfica de sistemas de equações. É no entanto necessário um estudo mais aprofundado de cada uma destas ferramentas. Seria ainda interessante fazer um estudo de usabilidade com uma amostra significativa de alunos do ensino secundário.

## 8. Conclusão e Trabalho Futuro

Esperamos com este trabalho ter contribuído para mostrar a importância do tema matrizes e suas aplicações a nível do ensino secundário.

Pensamos que o conceito de matriz, que à primeira vista pode parecer um conceito abstracto, torna-se natural quando se percebe o seu significado quer geométrico quer algébrico.

A Teoria das Matrizes é ainda um óptimo exemplo de como uma teoria científica vai adquirindo importância e tendo aplicações que transcendem o objectivo inicial com que foi criada.

A resolução dos sistemas de equações lineares com duas/três equações e duas/três incógnitas com a aplicação de matrizes complementadas com a geometria são uma mais-valia no ensino de sistemas lineares de equações, no ensino secundário. Pode-se assim enriquecer o ensino da Matemática, evitando uma visão compartimentada, muitas vezes presente entre os vários temas abordados.

Em relação à abordagem do tema, o professor deve fazer com que o aluno possa reflectir mais sobre os conceitos matemáticos aprendidos. Nesse caso, GRANDE<sup>46</sup> sugere que o aluno que escreva a respeito da própria Matemática, citando teoremas, propriedades, elaborando contra-exemplos para validar uma afirmação, constituindo uma actividade ainda pouco explorada pelos professores.

A importância da utilização dos materiais de apoio acima listados, prende-se com a motivação e o desenvolvimento da autonomia do aluno. É fundamental que o aluno se torne um sujeito pensante, crítico, que, ao se deparar com novas situações ou problemas, saiba utilizar os vários conhecimentos e informações que possui para escolher um caminho adequado à solução.

Pode-se ainda trabalhar em sala de aula com as outras áreas do conhecimento, ocorrendo assim a interdisciplinaridade na Escola conforme exprime PANCIERA<sup>47</sup> e demonstrando a importância da Matemática com a integração de situações reais na sala

---

<sup>46</sup> GRANDE, B. L. B. (2005), *Alguns resultados da análise dos livros didáticos de álgebra linear quanto aos registos de representação semiótica e as noções de independência linear*. URL: <http://www.fae.ufmg.br/ebiapem/completos/10-04.pdf> (em Dezembro de 2008)

<sup>47</sup> PANCIERA, M. V. F. (2006), *Modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares*. URL: <http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf> (em Dezembro de 2008)

de aula como meio para aceder ao mundo matemático e para compreender e intervir no meio social.

Abordar situações reais com o desenvolvimento do conteúdo de sistemas lineares e matrizes nas aulas de Matemática possibilita segundo PANCIERA<sup>48</sup> um conhecimento Matemático mais significativo, pois com o levantamento de dados para o desenvolvimento da aplicação, viabiliza-se um maior interesse, entusiasmo e motivação pelas aulas permitindo observar que a Matemática está presente no quotidiano.

Conclui-se que esta metodologia, além de servir como motivação para introduzir novas ideias, propicia também a compreensão e interpretação de um problema real onde o aluno está inserido e faz parte deste processo como cidadão (Pancieria 2006).

É importante que haja mais empenho por parte das entidades competentes no sentido de mostrar que o ensino das matrizes e aplicações é acessível e fácil, afastando assim a noção de que se trata de uma matéria complexa.

No que diz respeito a trabalho futuro, gostaríamos de analisar se a utilização do método de eliminação de Gauss-Jordan recorrendo a matrizes, facilita ou não, a aprendizagem da resolução de sistemas de equações lineares, comparativamente com outros métodos de resolução, no ensino secundário. Prevê-se, por isso, a existência de trabalho a efectuar como complemento a esta tese. Assim sendo, esta dissertação de mestrado poderia vir a ter influência quer no que diz respeito à alteração do conteúdo programático da disciplina de Matemática do 11º Ano de Escolaridade, quer ainda no método actual de ensino de resolução de sistemas de equações lineares.

Um dos temas que foi ligeiramente abordado neste trabalho, e que merece um estudo mais aprofundado é a utilização de ferramentas auxiliares como o Excel e calculadoras gráficas, na resolução de sistemas de equações lineares e operações com matrizes.

---

<sup>48</sup> PANCIERA, M. V. F. (2006), *Modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares*. URL: <http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf> (em Dezembro de 2008)

## Bibliografia

ALEKSANDROV A. D., Kolmogorov A.N., Laurentiev M.A. y otros.(1994). *La matemática:su contenido, métodos y significado*, Verson española de Manuel López Rodriguez. Madrid: Alianza Editorial.

ALEXANDER, D. C. (1985). *A matrix application technique for secondary level mathematics. Mathematics Teacher*. Vol. 78, nº 4, pp. 282 - 285.

ALMEIDA, A. (1995). *Trabalho experimental na educação em ciência: epistemologia, representações e prática dos professores*. Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

A. ORTON (1998). *Didáctica de Matemáticas*. 3.ed. Ministerio de Educación y Cultura y Ediciones Morata. Madrid.

BATANERO, C.(2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada. Uninersidad de Granada, ESP.

BEZERRA, M. J., e JOTA, P. J. C. (1994). *Novo Bezerra Matemática, 2º grau, Volume Único*. São Paulo: Editora Scipione.

BOYER, C.B. (1974). *História da matemática*. São Paulo, Edgard Blücher Ltda, 488.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

BRASIL, Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*.Brasília, 1999.

BRASIL. (2006). Secretaria de Educação Básica. *Ciências da natureza, matemática e suas tecnológicas – orientações curriculares para o ensino médio; volume 2*. Brasília: Mec.

BRAUMANN, C. (2002). *Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática*. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N.

FIGUEIREDO & A. F. DIONÍSIO (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 5-24). Lisboa: SPCE. (pp. 5-17)

CACHAPUZ, A. (1995a). *O Ensino das Ciências para a Excelência das Aprendizagens*. In A. D. de Carvalho (org.). *Novas Metodologias em Educação*. Porto: Porto Editora, pp. 349-385.

CARVALHO, A. (org.). (1995). *Novas metodologias em educação*. Porto: Porto Editora

CATTO, Gloria Garrido. (2000). *Registro de representação e o número racional*. São Paulo: PUC.

D'AMBRÓSIO, U.(1990). *Etnomatemática*. São Paulo: Editora Ática.

D'AMBRÓSIO, U. (1997). *Tantos povos, tantas matemáticas*. In: *Revista Educação*. São Paulo. Nº 199, Ano23. Novembro. p.3-5.

D'AMBROSIO, U. (1998). *Literacia e Materacia: objetivos da educação fundamental*. – In: *Revista Pátio*. Ano I, Nº 3. Nov97 / Jan98.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. (1999). *A história da matemática: Questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática*. In: *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Ed. UNESP, p.97 – 115.

DANTE, L.R. (2007). *Matemática, Contexto & Aplicações*. Vol. 2. São Paulo: Ática, 2007.

DIEUDONNÉ, J. A *Formação da Matemática Contemporânea*. Lisboa, Dom Quixote, 1990.

DUVAL, R. (1993). *Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives **5**. IREM deStrasbourg, p.37-65

DUVAL, Raymond. (2003). *Registos de Representações semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática* In: Machado, S.D.A (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registos de Representação Semiótica*. Campinas, SP: Papirus.

FEY, J. (1991). Tecnologia e educação matemática: Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. Em J. P. Ponte (Org.), *O computador na Educação Matemática* (Série Cadernos de Educação Matemática, n.º 2, pp. 45-79). Lisboa: APM.

GLAISTER, P. (1992). *An application of matrix theory*. *Mathematics Teacher*. Vol. 85, nº 3, pp. 220 - 223.

GLIDDEN, P. L. (1990). *From graphs to matrices*. *Mathematics Teacher*. Vol. 83, nº 2, pp. 127 - 130. GONZÁLES, M. V. (1998). *La interpretación natural de matriz matemática, Los Libros de Texto y los Estudiantes de Economía. Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. (pp. 354-360). Venezuela: Universidad Central.

GODINO, J. (2003). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemática como disciplina científica*. Un. Granada: Programa de doctorado “Teoría de la educación Matemática”

GODINO, J. D. & BATANERO, C. (1998). *Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education*. In, A. SIERPINSKA, A. & KILPATRICK, J. (orgs.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

GONZÁLES, M. V. (1998). *La interpretación natural de matriz matemática*, Los Libros de Texto y los Estudiantes de Economía. Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. (pp. 354-360). Venezuela: Universidad Central.

GRANDO, R. C. e FAZZION, M. F.(2002). *Álgebra e Geometria na Resolução de um Problema Clássico em Matemática: o problema dos cubos pintados*. Revista de Educação Matemática –SBEM - SP, n. 6 e 7, p.23 - 6, Catanduva – SP.

HAWKINS, T. W. (1975). *Cauchy and spectral theory of matrices. History Mathematica* 2. pp. 1-29.

HIGUERAS, L.R. (1984) *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

IMENES, Luiz Márcio et al.li. (1989). Coleção Vivendo a Matemática, São Paulo, EditoraScipione.

LABRAÑA et al. (1995). *Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Madrid. Síntesis.

LIMA, E.L.. et. Al.(1998). *A matemática do Ensino Médio* – vol. 3. RJ: SBM.

LOPES, J. M. *Conceitos básicos de probabilidade com resolução de problemas*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, n° 59, p. 41-5, 2006.

LEDER, G. (1991). Is teaching learning ? The Australian Mathematics Teacher. Vol. 47, n° 1, pp. 4 - 7.

MATOS, J. (2006). A penetração da Matemática Moderna na revista Labor, *Union – Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*, n.º 5, p. 91-110, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática. Disponível em: <http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=19#indice>

MENDONÇA, M. C. D. (1993). *Problematização: um caminho a ser percorrida em educação matemática*. Tese de Doutorado, Campinas, SP.

MENDONÇA, MCD. (2000). *Resolução de Problemas Pede (Re) Formulação*. In: ABRANTES, P. *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo*. Lisboa, APM, 2. (p. 15-33).

MORETTI, Mércles Thadeu.(2002). *O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática*. Itajaí: Contrapontos. N.6. p. 23-37. Set/dez

MORAIS, J. (2006). *As relações entre a aprendizagem da leitura e a aprendizagem da matemática* In Crato, N. (coord.), *Desastre no Ensino da Matemática: como recuperar o tempo perdido?*, p. 155-178, Lisboa: Gradiva

NCSM. (1990). National Council of Supervisors of Mathematics. *A matemática essencial para o século XXI*. Educação Matemática. Lisboa, nº 14, pp. 23-35.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and Standards for School Mathematics for school Mathematics*, Virginia: NCTM

ONUCHIC, L. R. *Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas* In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: -UNESP, 1999. cap.12 p.199-220.

ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N.S.G. (2005). *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: *Educação matemática pesquisa em movimento*. São Paulo, Cortez, p.213-231.

POLYA, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*, (2nd ed.).New Jersey:Princeton University Press.

POLYA, George. (1986). *A arte de resolver problemas*. Primeira reimpressão. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de janeiro: Interciências, 179 p.

POLYA, George. (1997). *Sobre a resolução de problemas de matemática na high school*. In:

KRULIK, Stephen & REYS, Robert.(orgs) *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo: Atual.

PONTE, J., Matos, J., Abrantes, P., (1998). *Investigação em educação matemática – implicações curriculares*, Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

PONTE, J. (2003a). *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal*. Disponível em: [www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Rev-SPCE\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf)

PONTE, J. (2003b). O Ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? In Conselho Nacional de Educação (org), *O Ensino da Matemática – Situação e Perspectivas*, p. 21-56, Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

PORFÍRIO, J. (1998). Os currículos de Matemática: como têm evoluído, *Educação e Matemática*, 50, p.32-38, Lisboa: APM

SÁ, M. E. (2003). *Alguns pontos críticos no Ensino da Matemática* In Conselho Nacional de Educação (org), *O Ensino da Matemática – Situação e Perspectivas*, p. 69-87, Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

SANCHES, M.H.F. (2002). *Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes*. Dissertação (Mestrado em educação matemática) UNICAMP, São Paulo.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, (Year Book).

SMOLLE, K.S: e DINIZ, M.I. (2003). *Matemática: Ensino Médio*. Vol 2. São Paulo: Saraiva.

SILVA, Neivaldo Oliveira. (2004). *Ensino de Matemática*. Belém: eduepa.

SMOLLE, k.S. e Diniz, M. I.(2003). *Matemática: Ensino Médio*. Vol.2. São Paulo: Saraiva.

STEINBRUCH, Alfredo (1987). *Álgebra Linear*. São Paulo. McGraw-Hill.

STIELER, E. C. (2007) Uso Da Tecnologia da Informática no Ensino Superior: um Estudo da Aplicação da Planilha Eletrônica *Excel* na Disciplina de Matemática Financeira. Santa Maria: *Dissertação de Mestrado*. UNIFRA-RS.

STRUIK, D.J. (1989). *História concisa da matemática*. Lisboa, Gradiva, 395 p.

TELLES, Rosinalda Aurora de Mello. (2004). *A Aritmética e a álgebra na matemática escolar*. Educação Matemática em Revista, São Paulo: SBEM, ano 11, n. 16, p. 8 -15.

ZEICHNER, K. (1997). *Tendências da pesquisa sobre formação de professores nos Estados Unidos*. Revista Brasileira de Educação, nº9, pp. 77-87.

**Sites visitados:**

[http://www.alexbrasil.eng.br/arquivos/gaal/capitulo4\\_matrizinversaedeterminante.pdf](http://www.alexbrasil.eng.br/arquivos/gaal/capitulo4_matrizinversaedeterminante.pdf)

em Dezembro de 2009

ALVES, George de Souza C. L. (2005), *Um estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio espacial no ensino médio através da utilização do software Calques 3D*, XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2815-2823. URL: [http://www.unisinos.br/\\_diversos/congresso/sbc2005/\\_dados/anais/pdf/arq0262.pdf](http://www.unisinos.br/_diversos/congresso/sbc2005/_dados/anais/pdf/arq0262.pdf) (em Dezembro de 2008)

<http://www.aulamatematica.com/CGrafica.htm> em Janeiro de 2009

[http://www2.brazcubas.br/professores1/arquivos/9\\_migliano/Apostilas/grafos.pdf](http://www2.brazcubas.br/professores1/arquivos/9_migliano/Apostilas/grafos.pdf)

em Dezembro. de 2009

[http://www.cfeci.pt/escolas/SecGafNazare/Planificacoes\\_08\\_09/Planifica.EE%2011%202%BA%20B\\_Matematica.pdf](http://www.cfeci.pt/escolas/SecGafNazare/Planificacoes_08_09/Planifica.EE%2011%202%BA%20B_Matematica.pdf)

COLOMBO, V. C. (2006), *Registos de representação semiótica e resolução de problemas no ensino de matrizes e sistemas lineares*, Synergismus scyentifica UTFPR, Pato Branco **01 (1,2,3,4)**, 1-778. URL:

<http://pessoal.pb.cefetpr.br/eventocientifico/revista/artigos/0604007.pdf> (em Dezembro de 2008)

<http://www.comunicacionypedagogia.com/publi/infocyp/muestra/pdf/santandreu.pdf>

em Janeiro de 2009.

COTRET, P. R. d. C. (2006), *Manual do utilizador Cabri 3D v2*. URL: <http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv212/user-manual-por.pdf> (em Dezembro de 2008)

[http://www.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica\\_A\\_11.pdf](http://www.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_11.pdf)

em Dezembro de 2009.

[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/artigo\\_matrizes\\_ensino\\_medio.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/artigo_matrizes_ensino_medio.pdf) em Dezembro de 2009.

DOMÍNGUEZ, E. D. (2007), *La calculadora gráfica como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas: resolución de sistemas de ecuaciones lineales*, Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* **12**, 157-170. URL: [http://www.fisem.org/descargas/12/Union\\_012\\_015.pdf](http://www.fisem.org/descargas/12/Union_012_015.pdf) (em Dezembro de 2008)

<http://www.educacao.te.pt/images/programas/pdf/programa34.pdf> em Dezembro de 2009

FAIRCHILD, J. (2000), *Use of Two-Dimensional Representations to aid the Transition from Arithmetic to Algebra*, *Teacher Research Grant summary, 4th year 1999-2000*. URL: <http://www.tda.gov.uk/upload/resources/doc/j/jackie-fairchild.doc> (em Dezembro de 2008)

<http://www.famat.ufu.br/revista/revistaabril2005/salaaula/EnsinoClovisRosana.pdf> em Dezembro de 2009

FRANCO, C. L. G. (2005), *(ESEL) - Equivalencia en Sistemas de Ecuaciones Lineales*. URL: <http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/31%20Di%20franco.pdf> (em Dezembro de 2008)

<http://www.gap-system.org/~history/Miscellaneous/Konigsberg.html> em Dezembro de 2009

GRANDE, B. L. B. (2005), *Alguns resultados da análise dos livros didáticos de álgebra linear quanto aos registos de representação semiótica e as noções de independência linear*. URL: <http://www.fae.ufmg.br/ebapem/completos/10-04.pdf> (em Dezembro de 2008)

HERRERO, S. M. (2004), *Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Vol. 7 Issue 1, 49-78. URL: <http://clame.org.mx/relime/200403ader.html> (em Dezembro de 2008)

HOHENWARTER, Y. K. Z. L. (2008), *Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra, TSG 16: Research and development in the teaching and learning of calculus* ICME 11, Monterrey, Mexico 2008. URL:

<http://tsg.icme11.org/document/get/666> (em Dezembro de 2008)

LOPES, M. G. P. (2006), *Sistemas de equações lineares*. URL:

[http://www.colegiovirgendegracia.org/eso/documentos/mate/Algebra\\_Sistemas\\_Ecuaciones\\_Lineales\\_CCSS.pdf](http://www.colegiovirgendegracia.org/eso/documentos/mate/Algebra_Sistemas_Ecuaciones_Lineales_CCSS.pdf) (em Dezembro de 2008)

<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/minmatr.html> em Dezembro de 2009

MENDOZA, F. R. (2000), *Resolviendo las Ecuaciones Lineales con el uso de Modelos, Notas de matemática* Vol. 1, Ne. 201. URL:

[http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/22683/1/numero\\_201.pdf](http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/22683/1/numero_201.pdf) (em Dezembro de 2008)

MORA, Castor David. Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Rev. Ped.* [online]. mayo 2003, vol.24, no.70 [citado 02 Diciembre 2009], p.181-272. Disponible en la World Wide Web:

<[http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&nrm=iso)>. ISSN 0798-9792.

PANCIERA, M. V. F. (2006), *Modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares*. URL:

<http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf> (em Dezembro de 2008)

PANTOJA, L. F. L. (2008), *A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares*, Master's thesis, NPADC/UFPA. URL:

[http://www.ufpa.br/ppgecm/media/Dissertacoes\\_Ligia%20Francoise%20Lemos%20Pantoja.pdf](http://www.ufpa.br/ppgecm/media/Dissertacoes_Ligia%20Francoise%20Lemos%20Pantoja.pdf) (em Dezembro de 2008)

SANTOS, (2006), *Sistemas de Equações Lineares*. URL:

[http://www.colegiovirgendegracia.org/eso/documentos/mate/Algebra\\_Sistemas\\_Ecuaciones\\_Lineales\\_CCSS.pdf](http://www.colegiovirgendegracia.org/eso/documentos/mate/Algebra_Sistemas_Ecuaciones_Lineales_CCSS.pdf) (em Dezembro de 2008)

<http://www.scribd.com/doc/2743834/Matematica-discreta-Grafos> em Dezembro de 2009

SILVA, J. C. e A. A. M. C. M. C. d. F. I. M. C. L. (2002), *Matemática A - Programa do 11º Ano*. URL:

[http://sitio.dgdc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica\\_A\\_11.pdf](http://sitio.dgdc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_11.pdf) (em Dezembro de 2008)

<http://sisifo.fpce.ul.pt/pdfs/%20N%C3%BAmero3.pdf> em Dezembro de 2009.

Ensino de sistemas lineares.

URL:[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/exp\\_nsmat312.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/exp_nsmat312.pdf) (em Dezembro de 2008)

[http://www.tetri.pt/prow.php?prow=000ctg\\_pshowcategall&cat=76](http://www.tetri.pt/prow.php?prow=000ctg_pshowcategall&cat=76) em Dezembro de 2009.

VILLALÓN, Á. F. T. (2008), *Propuesta de actividades con calculadora gráfica para el tratamiento de operaciones matriciales en el aula, Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* **15**, 171-190. URL:

<http://www.fisem.org/descargas/15/Union015017.pdf> (em Dezembro de 2008)

[http://www.aulamatematica.com/Revistas/pdf\\_revistas/22\\_7/22\\_7\\_24.pdf](http://www.aulamatematica.com/Revistas/pdf_revistas/22_7/22_7_24.pdf)

<http://nautilus.fis.uc.pt/cec/teses/josematos/> em Dezembro de 2009

<http://www.scielo.br/pdf/prc/v18n3/a04v18n3.pdf> em Dezembro de 2009

<http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/tetxt1.htm> em Dezembro de 2009

<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/MC58937242400.pdf> em Dezembro de 2009

[www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Posteress%5Cp007.doc](http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Posteress%5Cp007.doc)

[www.rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/.../845](http://www.rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/.../845) em Dezembro de 2009

[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Comunicacao\\_Cientifica/Trabalhos/CC77248422487T.rtf](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC77248422487T.rtf). em Dezembro de 2009

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Jerome\\_Bruner](http://pt.wikipedia.org/wiki/Jerome_Bruner) em Dezembro de 2009