INTRODUÇÃO

A História da Matemática tem assumido grande importância nos últimos tempos, seja enquanto fonte de pesquisas científicas, seja como método de abordagem ou auxílio aos trabalhos com os conteúdos matemáticos em sala de aula, sendo merecedora de muitas discussões e até de eventos científicos.

Parece consensual a necessidade de que os professores conheçam a história das disciplinas que ministram, e isso é especialmente verdade para a Matemática, em especial.

Sinto esta necessidade quando estou a leccionar os conteúdos Matemáticos, e senti particular interesse no tema deste estudo.

É sabido que tradicionalmente, o processo de descoberta nem sequer faz parte da apresentação de um conceito matemático. Ou a história da descoberta de um conceito, ou pelo menos a forma como esse conceito evoluiu não é muito comum em Matemática. O estudo bastante conciso é até normalmente considerado brilhante e isso é um facto herdado dos Gregos.

Outro aspecto que parece consensual é que nem todos os professores na sua formação académica, tiveram a oportunidade de ter a disciplina de História da Matemática.

Contudo, é absolutamente necessário que o professor tenha uma boa preparação para fazer uma abordagem histórico-crítica e reflexiva sobre os conteúdos e temas que trata nas suas aulas.

No ensino secundário os alunos devem ampliar e aprofundar os seus conhecimentos sobre geometria, álgebra e análise, em princípio numa perspectiva transversal, onde a descoberta e o estudo dos problemas se deve basear em conceitos cuja evolução deve ser apresentada numa perspectiva sócio-histórica, nunca apresentando somente o resultado formal mais recente.

O professor ao mostrar a Matemática como uma criação humana e as necessidades e preocupações de diferentes culturas e ao estabelecer comparações entre os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente, tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis sobre o conhecimento matemático. E, além disso, os conceitos abordados através da sua história, constituem fontes de informação cultural, sociológica e antropológica, servindo de instrumento de resgate da própria identidade cultural dos grupos.

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão a ser construídas pelos alunos, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objectos de conhecimento

Por isto tudo e pela lacuna e curiosidade que senti, pensei escrever este pequeno estudo com o objectivo de servir como um exemplo para o professor que pretenda estudar a evolução de um dado conceito matemático neste caso o conceito de **limite**.

Neste estudo, utilizei a pesquisa em História da Matemática e percebi que o recurso à História pode ter um papel decisivo na organização do conteúdo matemático que se quer ensinar, estruturando-o com base no modo de raciocínio próprio de um conhecimento que se quer construir.

Tendo colocado os Paradoxos de Zenão de Eleia como plataforma de partida, seguindo o caminho dos grandes pensadores matemáticos como Leibniz, Newton, Bolzano, Cauchy e Weierstrass, a plataforma de chegada teria de ser a Análise não-Convencional de Robinson, da qual só me atrevi a levantar o "escudo" que a cobre.

Surpreendentemente os Paradoxos de Zenão continuam, ou mal compreendidos, ou necessitando de novos conceitos, o que permite pensar que cerca de dois mil anos pode ser um "pequeno" lapso de tempo no estudo da evolução do pensamento do Homem, da qual a evolução da Matemática é uma parte.

1.NO LIMIAR DO CONHECIMENTO E DA COMPREENSÃO

Parece não haver dúvidas que a nossa civilização, dita ocidental, começou com a Civilização Grega, embora tenha havido uma proto-civilização iniciada talvez 6000 anos antes de Cristo nas margens dos rios Tigre e Eufrates, com os Sumérios e posteriormente os Caldeus.

Mas parece que efectivamente foram os Gregos os primeiros a pensar: PORQUÊ? ou como diz S.Taylor [6], a ciência somente desponta num estado relativamente avançado de civilização que permita "a todos viver e a alguns pensar".

E foi o que parece ter sucedido nas colónias gregas da Ásia Menor por volta do Século VI a. C. , ao formular perguntas tais como:

1. Qual é a estrutura do Universo?
2. Como surgiu o Universo?
3. Como se movem os astros e porquê?
4. Existirá um princípio único ao qual se possa reduzir toda a diversidade, pluralidade de formas e propriedades dos seres animados e inanimados?

As primeiras respostas (e como diríamos hoje conjecturas) à última questão parece terem sido dadas pelos filósofos gregos de Mileto, cidade colónia da Ásia Menor e foram afirmativas, diferindo somente no elemento único ao qual tudo se poderia reduzir.

Para Thales de Mileto (624-548 a.C.) esse elemento único deveria ser a água.

Para Anaximandro de Mileto (611-545 a.C.) o elemento único deveria ser uma substância infinita e indeterminada e as causas materiais constituem-se a partir de determinações parciais desse elemento básico: o indeterminado.

Já para Anaxímenes de Mileto, contemporâneo de Thales e de Anaximandro, o elemento primordial não é indeterminado nem sequer é único, mas sim um conjunto de quatro elementos: terra, água, ar e fogo.

Mas Heraclito de Éfeso (Éfeso era também uma colónia grega da Ásia Menor) que nasceu em 530 a.C., não acreditava que a realidade estivesse baseada numa substância primordial, mas sim na transformação que tudo sofre por acção por exemplo do fogo. É um modo dinâmico de ver a realidade que leva a uma conclusão interessante:"não se pode descer duas vezes as águas do mesmo rio, porque novas águas correm sobre nós". Daqui resulta que é impossível num dado instante atingir a permanência, a estabilidade, seja do que for: tudo flui, tudo devém a todo o momento.

Repare-se como há cerca de 25 séculos se pensava no infinito (embora esse infinito não fosse o actual infinito Matemático, antes um muito grande mal identificado) e numa certa impossibilidade do carácter estático dos seres animados ou inanimados.

Surge então com a Escola Pitagórica (580 a 504 a. C.) uma ideia grandiosa:"todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem os números".

É a ordenação Matemática do Universo.

Mas desta ideia brilhante resultou uma outra bem mais bem grave e difícil de verificar:"todas as coisas são números".

Na tentativa de justificar esta última conjectura, os Gregos afirmam que a matéria é constituída por corpúsculos muito pequenos, as mónadas e então os corpos são constituídos por um arranjo em certa quantidade dessas mónadas exactamente como os números se formam a partir de uma unidade.

Simplesmente extraordinário. E se formos religiosos como Pitágoras e os seus discípulos ou colegas parecem ter sido, tendo inventado os números (ou tendo "revelado" os números), atendendo ao que os números iriam representar, somente poderiam ser divinos e daí a religião Pitagórica que afinal está na origem das Matemáticas.

Como diz Edward Nelson (1), porque não falar em Irmandade Pitagórica, surgida exactamente entre as vidas de Moisés e Jesus? Naquele tempo a existência de uma Irmandade era coisa rara (hoje verdadeiramente também), mas nesse aspecto Pitágoras foi o precursor de Jesus e dos seus apóstolos, embora com ideias completamente diferentes (Jesus somente escreveu uma vez na areia, e não se sabe o quê, segundo os Evangelhos; Pitágoras deve ter escrito e operado com os números toda a sua vida).

Estas brilhantes concepções foram imediatamente seguidas por críticos que parece terem começado com Parménides, nascido em Eleia, uma colónia grega do sul de Itália, cerca de 520 a. C.. Da sua obra, o "Poema" destaca-se logo a sua preocupação fundamental:

Qual a natureza íntima do que se observa, do que existe?

Parménides distinguia a verdade, que para ele era o que dependia somente da razão, da opinião, que por sua vez era o que resultava da observação. Estava assim lançado o debate que está na base de todo o conhecimento científico até à actualidade: as relações entre o pensamento e a experiência, entre a teoria e a prática, entre o idealismo e o materialismo.

Parménides considera que a existência tem unidade, homogeneidade, imobilidade, continuidade e eternidade e criticando fortemente Heraclito afirma:

"Como é possível que aquilo que é possa vir a ser? Se foi, não é, e assim o nascimento não existe tal como não existe a destruição."

Sabemos hoje que Heraclito foi o vencedor e Parménides representa a conjectura derrotada, mas e só para verificar a justeza destas ideias vamos analisar os argumentos de Zenão de Eleia (cerca de 490-cerca de 430 a.C.), o mais conhecido discípulo de Parménides, que justifica as suas ideias com o que hoje chamamos os Paradoxos de Zenão.

2. ZENÃO E OS SEUS PARADOXOS

Tudo começou na Escola de Eleia onde Zenão (Zenon – nome grego) foi discípulo. A Escola foi fundada na cidade de Eleia, hoje Vélia, Itália, por Parménides dizem uns e por Xenófanes dizem outros. Eleia era uma cidade portuária, com vários templos e com muralhas de grande extensão, situada a sudoeste de Itália.

Parménides nasceu em Eleia cerca de 515-510a.C., filósofo, poeta e o fundador da Escola Eleática."O principio fundamental dos Eleáticos era a unidade e a permanência do ser, ponto de vista que contrastava profundamente com as ideias pitagóricas de multiplicidade"[4]. Houve três teorias de Parménides que ficaram famosas: " ***o ser e o não ser***" onde comparava qualidades opostas e ordenava-as, por exemplo, o masculino em oposição ao feminino e cada um apenas com a negação do outro, em que o não ser era uma oposição do ser; "***o vir a ser*** " que segundo Parménides era quando o "***ser e o não ser***" agiam conjuntamente; E "***o ser-absoluto***" que era a unidade eterna.

E assim começou a metafísica, mais tarde uma ciência desenvolvida por Aristóteles.

Zenão concordava com as doutrinas do seu mestre mas utilizou métodos indirectos para as defender, como a redução ao absurdo."… o método usado por Zenão era o método dialéctico, antecipou-se assim a Sócrates no uso do método indirecto da razão que consiste em partir das premissas para terminar reduzindo-as ao absurdo" [4]. Não se sabe muito bem ao certo quando Zenão nasceu e morreu, diz-se que nasceu entre 496-488 a. C. e morreu por volta de 435-425 a.C.. Na sua juventude escreveu ***Epicheiremata*** onde defendeu a diferença entre o ser Uno, contínuo e indivisível (doutrina de Parménides) contra o ser Múltiplo, descontínuo e divisível (doutrina de Heraclito e Pitágoras).

"Em 450 a.C. o pensador Zenão de Eleia propôs uma série de Paradoxos" [10], onde tentou explicar os conceitos de movimento e de tempo, e foi assim que surgiram as primeiras ideias que iriam conduzir ao conceito de **limite**. A palavra Paradoxo vem do grego "Paradoxos", que significa contrário à previsão ou à opinião comum, portanto é uma afirmação que parece ser contraditória, incrível ou absurda, isto é, é tão absurda que jamais poderá ser verdadeira.

Os quatro Paradoxos bem conhecidos são:

- **O Paradoxo da Dicotomia;**
- **O Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga;**
- **O Paradoxo da Seta Voadora;**
- **O Paradoxo das Fileiras em Movimento ou Paradoxo do Estádio**.

Nestes Paradoxos Zenão mostrou que se o conceito de contínuo e de divisão infinita for aplicado ao movimento de qualquer corpo, então o movimento não existe; parecem ilógicos, confusos, mas são simples de explicar e conduzem a problemas matemáticos. Zenão causou uma controvérsia tal com os seus Paradoxos que acabou por dar origem a algumas importantes ciências matemáticas da actualidade.

No primeiro Paradoxo chamado a **Dicotomia**, Zenão discute o movimento de um objecto que se move entre dois pontos fixos. Isto é, é impossível atravessar um estádio e chegar à meta, porque antes disso tem de alcançar-se o ponto intermédio da distância a percorrer; e antes desse ponto tem de se atingir o ponto que está no meio desse; e assim "infinitamente".

Imagine-se um móvel que está no ponto A e quer atingir o ponto B. Este movimento é impossível, pois antes de atingir o ponto B, o móvel tem que atingir o meio do caminho entre A e B, isto é um ponto C. Mas para atingir C, terá que primeiro atingir o meio do caminho entre A e C, isto é, um ponto D, e assim, “infinitamente”.

Analisando o problema, Zenão concluiu que desta maneira o atleta nunca chegaria à meta. Portanto o movimento era impossível.

O argumento de Zenão está bem formulado embora com um pressuposto errado: o de que é impossível transpor uma infinidade de parcelas de espaço num tempo finito. A soma de um número infinito de parcelas positivas pode ser um número finito, o contrário do que se pensava na Escola Eleática.

No segundo Paradoxo **Aquiles e a Tartaruga**, Aquiles, o herói grego, e a Tartaruga decidiram apostar numa corrida. Como se sabe que Aquiles é mais rápido que a Tartaruga, esta tem a vantagem de começar uns metros à frente de Aquiles.

Segundo Zenão, Aquiles nunca pode alcançar a Tartaruga porque na altura em que atinge o ponto donde a Tartaruga partiu, ela já teria percorrido uma nova distância portanto deslocou-se para outro ponto; na altura em que Aquiles alcança esse segundo ponto, ela já percorreu outra distância deslocando-se de novo para outro ponto e assim “infinitamente”.

Assim sendo, numa corrida, o perseguido nunca seria apanhado pelo perseguidor mesmo que este fosse mais rápido.

Estes dois Paradoxos visam a desacreditação do movimento “ contínuo “, ilustram a impossibilidade da existência de uma matéria infinitamente divisível. “ Tanto o Paradoxo da **Dicotomia** como o de **Aquiles** sustentam que o movimento é impossível sabendo da hipótese da subdivisão indefinida do espaço e do tempo…” [4].

No terceiro Paradoxo **A Seta Voadora**, "…Zenão afirma que um objecto movendo-se no ar ocupa sempre um lugar igual a si mesmo, e o que ocupa um lugar igual a si mesmo não pode estar em movimento, portanto a seta está em repouso em todos os sítios durante o seu voo, logo o seu movimento não é mais do que uma ilusão" [4].

O objectivo deste Paradoxo é provar que a seta em voo está em repouso só sendo válido se se admitir que o tempo é composto de momentos. Este Paradoxo trata o "espaço e o tempo como algo composto de mínimos indivisíveis" [4], levanta discussões sobre a natureza do movimento e do conceito de velocidade instantânea. Hoje admite-se que o movimento de um corpo não se caracteriza pela mudança de lugar mas sim pela sua velocidade.

O quarto Paradoxo **As Fileiras em Movimento** ou **Estádio** pode ser formulado da seguinte maneira: há 3 fileiras em movimento constituídas por 4 elementos, a fileira um (A_1, A_2, A_3 e A_4), a fileira dois (B_1, B_2, B_3 e B_4) e a fileira três (C_1, C_2, C_3 e C_4). A primeira fileira está em repouso, a segunda fileira vai-se mover para a direita e a terceira fileira para a esquerda. Os elementos das fileiras em movimento passam por metade da primeira fileira antes de começarem a passar uma pela outra, por exemplo B_1 passa por metade da fileira que está em repouso enquanto que passa por toda a terceira fileira, e o mesmo acontece para os elementos da terceira fileira e por consequência, gastou apenas metade do tempo dispendido pelo primeiro B_1, uma vez que cada um dos dois leva o mesmo tempo a passar por cada elemento das fileiras.

" Zenão supôs que os objectos eram elementos indivisíveis do espaço e então moviam-se, para as novas posições numa unidade de tempo indivisível" [10].

Zenão com estes quatro Paradoxos queria provar que o movimento não existe, que este tal como as mudanças e as transformações físicas eram ilusões provocadas pelos nossos sentidos. Não nos podemos esquecer que Zenão era um eleata, todas estas questões eram tratadas, na altura, mais filosoficamente do que matematicamente.

Zenão era sobretudo filósofo e lógico, mas os seus Paradoxos contribuíram para o desenvolvimento do rigor lógico e matemático e foram considerados insolúveis até ao desenvolvimento dos conceitos de continuidade e infinito. Ele foi o primeiro grande questionador na história da Matemática, os seus Paradoxos espantaram matemáticos durante séculos e a tentativa de resolvê-los conduziu a numerosas descobertas**.**

Como consequência destes Paradoxos os Gregos desenvolveram o que se chamou de *Horror ao Infinito*.

Para os matemáticos gregos, que não tinham uma real concepção de convergência em particular para o infinito, estes raciocínios eram incompreensíveis. Aristóteles considerou-os e resolveu pô-los de parte, ficando ao "abandono" por quase 2500 anos. Hoje, com o desenvolvimento da Matemática, nomeadamente no estudo de somas infinitas e de conjuntos infinitos, estes Paradoxos podem ser explicados de um modo razoavelmente satisfatório. Mas ainda agora, o debate continua sobre a validade dos Paradoxos e as suas racionalizações.

Por exemplo, parece-nos natural dizer que Aquiles chegará à meta sempre primeiro que a Tartaruga, portanto a conclusão de Zenão é absurda, pois não corresponde à realidade, e que por isso o Paradoxo deva ser rejeitado. Mas, não adianta constatar o absurdo, é preciso apontar a falha no raciocínio de Zenão em cada um dos seus Paradoxos, como é típico do raciocínio matemático.

Vamos então tentar analisar cada um dos Paradoxos de Zenão:

2.1.Paradoxo da Dicotomia

O que este Paradoxo diz é que não há movimento porque aquilo que se move tem de chegar a meio do seu percurso antes de chegar ao fim. Que aquilo que se move de um lado para o outro tem de primeiro chegar a meio do seu percurso, nada tem de extraordinário ou paradoxal, a conclusão de que isso implica, que o movimento é impossível, é que é estranha.

A explicação para esta conclusão baseia-se no seguinte raciocínio: antes de percorrer todo o percurso tem de percorrer metade do percurso; percorrido metade do percurso, antes de percorrer a outra metade, tem de percorrer metade dessa metade (um quarto do percurso inicial); percorridos três quartos do percurso, ainda tem de percorrer o restante quarto do percurso, mas antes disso, tem de percorrer metade desse quarto do percurso (um oitavo do percurso inicial); e assim sucessivamente, terá de percorrer um conjunto infinito de intervalos.

Com um raciocínio semelhante concluir-se-ia que o movimento jamais se iniciaria: antes de percorrer todo o percurso tem de se percorrer metade do percurso; antes de percorrer metade, tem de se percorrer metade da metade, um quarto do percurso; antes disso teria de percorrer metade da metade da metade, um oitavo do percurso; e assim sucessivamente. Existiria um conjunto infinito de intervalos que tinham de ser percorridos, um número infinito de pontos por onde um corpo teria que passar em tempo finito, para que o movimento sequer se iniciasse. Consequentemente o movimento seria impossível, pois não seria possível tocar um número infinito de pontos em tempo finito. Assim sendo, numa pista de corrida ou num estádio, seria sempre impossível chegar à meta, daí que haja quem dê esse nome ao Paradoxo, se bem que o mais comum seja dicotomia devido à constante divisão por dois.

Este Paradoxo punha em causa aqueles que defendiam que qualquer espaço seria infinitamente divisível, pois apresentava um raciocínio que a partir desse argumento prova a impossibilidade do movimento (que tanto quanto nos apercebemos é possível!). Pode-se considerar que o erro neste Paradoxo é o de confundir uma distância infinita com uma distância finita infinitamente divisível, como é o caso, pois entre dois pontos não temos uma distância infinita mas uma distância que poderíamos dividir infinitamente.

A resposta para este problema não passa pelo simples argumento de que para dizer que de facto juntando todas as metades obter-se-ia a totalidade do percurso, pois poder-se-ia reformular o enunciado (mantendo as ideias subjacentes) substituindo as metades por terços: antes de percorrer todo o projecto tem-se de percorrer um terço do trajecto; mas antes de percorrer um terço, tem-se de percorrer um terço do terço, um nono; e assim sucessivamente mas o que não implicaria que não se completasse o trajecto.

No entanto, o princípio que está subjacente a este cálculo, dá resposta ao Paradoxo: somados um número infinito de números, pode-se obter um número finito. O raciocínio de Zenão não está errado, simplesmente faz uso de um pressuposto errado, que é o de que seria impossível transpor parcelas infinitas de espaço num tempo finito. Jamais se poderia em tempo finito contactar com um número infinito de coisas, só que isso não inviabiliza que se contacte com coisas infinitas no que diz respeito à divisibilidade porque, neste sentido, o próprio tempo é também infinitamente divisível. Existem infinitos pontos no espaço percorrido, mas também são infinitos os momentos do tempo utilizado para percorrê-lo.

Zenão baseia este Paradoxo no princípio de que se algo é divisível então seria infinitamente divisível. Poder-se-ia contrariar estes Paradoxos postulando uma teoria atomista segundo a qual toda a matéria seria composta por um grande número de pequenos e indivisíveis elementos. Contudo, outros Paradoxos de Zenão causam problemas precisamente por ele considerar a existência de tais elementos indivisíveis.

Uma maneira de “analisar” o Paradoxo é:

O Paradoxo da dicotomia ataca a infinita divisibilidade do segmento de recta. Com efeito, antes de um objecto em movimento percorrer uma dada distância (considera-se por exemplo 1 metro) tem primeiro de percorrer metade do trajecto, seguidamente um quarto (metade da metade que falta) e assim sucessivamente, num número infinito de subdivisões.

Um atleta que deseje realizar uma corrida do ponto A ao ponto B deve efectuar um número infinito de contactos com a pista num tempo limitado, o que é impossível, pois tal significa ultrapassar uma quantidade infinita num tempo finito. Ou seja, o atleta nunca conseguirá chegar a B!

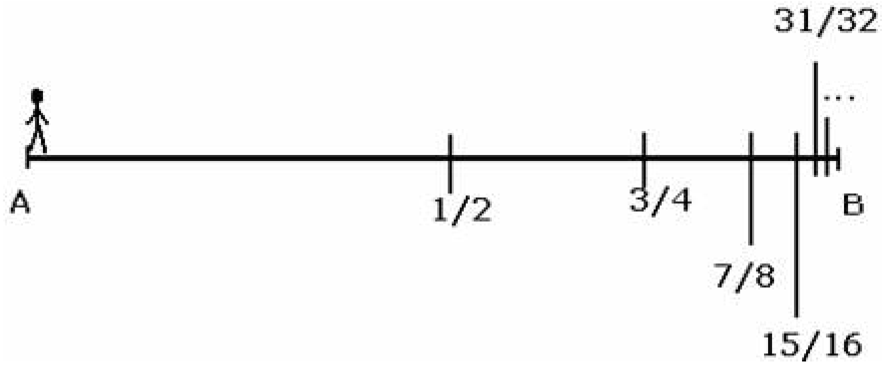


Fig. 1

Seja (u_n) a sucessão das metades percorridas. A distância percorrida (S_n) será a soma dos *n* primeiros termos sucessão (u_n):

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{n=1}^{n} u_n$$

Ora, o “erro” dos Gregos estava em admitir que a soma de infinitas parcelas positivas seria o infinito. Mas vai-se ver que não!

Os primeiros termos da sucessão (u_n), sucessão das metades a percorrer pelo atleta, são:

$u_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad u_2 = \frac{1}{4}$ $\qquad u_3 = \frac{1}{8}$ $\qquad u_4 = \frac{1}{16}$ $\qquad ...$

e assim facilmente se percebe que a expressão em n da sucessão é:

$$u_n = \frac{1}{2^n}$$

Esta sucessão é chamada «progressão geométrica» e os seus termos são construídos multiplicando o termo anterior por uma dada constante r. Note-se que à medida que n cresce (u_n) tende para zero e, por isso, se diz que (u_n) é um infinitésimo.

Como se pode então calcular a soma dos n termos de (u_n):

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} \quad ?$$

Considerem-se as duas igualdades seguintes:

$$S_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + ... + u_1 r^{n-2} + u_1 r^{n-1}$$
$$-S_n r = -u_1 r - u_1 r^2 - u_1 r^3 - ... - u_1 r^{n-1} - u_1 r^n$$

Somando as duas equações vem:

$$S_n - S_n r = u_1 - u_1 r^n \Leftrightarrow S_n (1-r) = u_1 (1-r^n) \Leftrightarrow S_n = u_n \frac{1-r^n}{1-r}$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{n} u_n = u_n \frac{1-r^n}{1-r}$$

dá-nos a soma de um número finito de termos da sucessão. Como se quer calcular a soma de todos os termos da sucessão faz-se n tender para infinito:

$n \to +\infty$

n tende para infinito! A maravilhosa facilidade com que hoje dizemos, de uma forma que parece tão simples, que uma variável, neste caso representada por n, se vai "aproximando" dessa entidade que causava horror aos Gregos : o infinito. E será que nós hoje compreendemos bem essa noção?

Mais ainda, quando n tende para infinito, dizemos que estamos a calcular um limite? Mas o que significa isso? É uma barreira intransponível? É o valor máximo que é possível atingir? E será possível atingir esse valor? E se o atingirmos o que estará por lá?

Talvez fossem todas estas preocupações e pensamentos que demoraram a ser devidamente analisados e investigados em termos matemáticos, e no entanto escreve-se hoje com todo o "descaramento" e sem explicar porquê:

A soma dos infinitos termos da sucessão é dada pela seguinte série numérica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(u_n \frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

em que $\lim$ representa o tal limite. E continua-se o cálculo:

Mas, se $|r| \langle 1$ então $r^n \to 0$

Donde,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{u_1}{1-r}$$

Assim, vê-se que

$$u_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad u_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Logo, $r = \frac{1}{2}$.

Parece evidente que a soma (S) de todos os termos de (u_n) seja 1. Com efeito:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

O resultado da soma é, como não podia deixar de ser, exactamente o valor da distância a percorrer pelo nosso glorioso atleta!

A resolução deste Paradoxo leva a uma ideia algo inquietante: ao contrário do que se pensava na escola de Zenão, a soma de um número infinito de parcelas positivas pode ser um número finito!

Ou seja, é frequente muitas das intuições humanas estarem completamente erradas. Aliás aquilo que é costume designar por "bom senso" poderia levar-nos a concluir, por exemplo: o Sol anda à volta da Terra. Com efeito todos os dias o vemos aparecer, seguir uma determinada trajectória e mais tarde desaparecer. E o "bom senso" parece mostrar que, estando nós em repouso, é concerteza o Sol que se desloca…

E poderíamos apresentar muitos outros exemplos em que o "bom senso"nos "mostra" o que hoje sabemos ser falso.

E são as estruturas matemáticas, que, quando criadas e formalizadas, não só vêm resolver e dar luz a grandes mistérios, como também ajudam a abrir as nossas mentes e compreender situações que de outro modo seriam incompreensíveis. Claro que na Grécia Antiga ainda não se conhecia o conceito de limite e este só foi formalmente descoberto vinte e quatro séculos mais tarde com Cauchy (1789-1857). Mas porque razão foi preciso esperar tanto tempo?

2.2.Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga

O que este Paradoxo diz é que numa corrida em que o mais lento começa com vantagem, enquanto o mais lento estiver a correr nunca será ultrapassado pelo mais veloz, pois aquele que persegue tem primeiro de chegar ao ponto de onde a fuga do mais lento começou, pelo que o mais lento tem necessariamente de já estar alguma distância à frente. Ou seja, antes de apanhar o mais lento, o mais veloz terá sempre de alcançar o ponto onde o mais lento estava anteriormente.

Na transmissão tradicional deste Paradoxo temos uma corrida entre Aquiles, o herói grego da *Ilíada* de Homero, forte e corajoso como nenhum, simbolizando a velocidade, e opostamente a tartaruga, símbolo da lentidão.

A conclusão parece ser um pouco estranha, mas é o resultado do seguinte raciocínio: a tartaruga (o mais lento) começa a corrida com uma determinada vantagem sobre Aquiles (o mais veloz); quando Aquiles chega ao ponto de onde começou a tartaruga, esta já lá não está e apesar de não ter andado tanto como Aquiles, já está num segundo ponto mais à frente; prosseguindo a corrida, quando Aquiles chega a esse segundo ponto, já a tartaruga estará mais à frente num terceiro ponto; quando Aquiles chegar a esse terceiro ponto, já a tartaruga estará mais à frente num quarto ponto; e assim sucessivamente. Logo, apesar de Aquiles estar cada vez mais próximo da tartaruga nunca chega a alcançá-la, pois sempre que chega ao ponto onde estava a tartaruga num momento atrás, já ela está mais à frente. Portanto, desde que não pare, a tartaruga irá sempre à frente e ganhará a corrida, pois Aquiles poderia correr infinitamente que não a apanharia!!

A lógica deste Paradoxo é semelhante à do Paradoxo da dicotomia, com a diferença de em vez de se ter um corpo em movimento, agora tem-se dois corpos em movimento com velocidades diferentes. Como seria de esperar, é possível Aquiles ultrapassar a tartaruga, no entanto, o raciocínio apresentado é correcto, com excepção da conclusão.

Zenão, com este Paradoxo e o da dicotomia, pretendia desacreditar os defensores da "continuidade" de um movimento, ou seja, aqueles que defendiam a infinita divisibilidade do espaço. Neste Paradoxo, tal como no Paradoxo da dicotomia, faz-se confusão entre uma distância infinita e uma distância infinitamente divisível, pois podemos considerar que Aquiles tem de percorrer um número infinito de intervalos que são aqueles que a tartaruga tem de vantagem sobre ele sempre que chega ao ponto onde ela estava antes de iniciar esse intervalo: o intervalo inicial entre Aquiles e a tartaruga; o intervalo que a tartaruga percorreu enquanto Aquiles chegou onde ela estava no início; o intervalo que Aquiles percorreu até onde a tartaruga avançou enquanto ele chegou ao ponto inicial da tartaruga; e assim sucessivamente.

Vejamos um exemplo prático: suponhamos que Aquiles parte com um avanço de 1000 metros e que se move 10 vezes mais depressa que a tartaruga; quando Aquiles acaba de percorrer 1000 metros, já a tartaruga percorreu 100 metros (reduziu-se a distância em 900 metros, sendo agora de 100); Aquiles percorre estes 100 metros, mas durante este tempo, a tartaruga percorre 10 metros (reduziu-se a distância para 10 metros); Aquiles percorre estes 10 metros, mas durante este tempo, a tartaruga percorreu um metro (reduziu-se a distância para 1 metro); Aquiles percorre este metro, mas entretanto já a tartaruga avançou 0,1 metros (reduz-se a distância para 0,1 metro); e assim sucessivamente. Quererá isto dizer que de facto Aquiles não apanha a tartaruga? Não, mais uma vez o raciocínio subjacente a este Paradoxo pressupunha que somando uma infinidade de números se conseguiria o infinito, mas isso não é verdade. Temos que, continuando com este raciocínio, Aquiles nunca faria mais de 1112 metros e a tartaruga não faria mais de 112 metros, o que nos remete para a problemática do Paradoxo da dicotomia.

Para vermos quando é que Aquiles ultrapassaria a tartaruga, temos de introduzir a variável tempo. Consideremos que Aquiles se moveria a uma velocidade constante de 10 metros por segundo e que portanto a tartaruga se moveria 1 metro segundo. Observemos as diferenças:

Tempo (segundos)	Distância (metros)
0	1000
100	100
110	10
111	1
111,1	0,1
111,11	0,01

E generalizando:

Tempo (segundos)	Distância (metros)
$100+10+1+0,1+...+10^{3-n} = S_n$	10^{3-n}

O erro deste Paradoxo está em pensar que com este raciocínio o tempo se estenderia para o infinito, mas isso não é verdade, pois $\lim_{ln\to\infty} S_n = 111$ e isto enquanto a distância tende para zero.

Se preferirmos não recorrer ao cálculo da soma, poderíamos dividir ambos os lados por 10 e subtrair à expressão original.

Logo, seguindo este raciocínio, apenas se aproximaria do segundo 111, até ao qual, de facto, Aquiles não apanha a tartaruga, já o que se passa depois é outra história: após 112 segundos já Aquiles terá ultrapassado a tartaruga e afastar-se-á dela cada vez mais. Para evitar este cálculo de limites, poder-se-ia simplesmente pensar onde estariam Aquiles e a tartaruga após 112 segundos: Aquiles teria percorrido 1120 metros e a tartaruga teria percorrido 112 metros (que somados à vantagem de 1000, daria 1112 metros) portanto Aquiles já ultrapassou a tartaruga e a menos que haja algum problema com o seu famoso calcanhar, nada o impedirá de ganhar a corrida.

Tal como no Paradoxo da dicotomia, a problemática deste Paradoxo, centra-se na soma infinita de números, ou seja, nem sempre uma soma infinita de números resulta em infinito. É totalmente compreensível a confusão que Paradoxos como este causaram, se tivermos em conta que só muitos séculos mais tarde se desenvolveriam os conceitos de continuidade, limites de sucessões e somas infinitas. O modo como numa corrida se pode percorrer uma infinidade de pontos em tempo finito (apesar de infinitamente divisível) só seria explicado muito séculos depois com a evolução da Matemática.

2.3. Paradoxo da Seta Voadora

Este Paradoxo diz que se um objecto está em repouso quando está num espaço igual a si próprio (quando se encontra num local de dimensões iguais a si próprio), então uma seta em voo está parada, pois um corpo em movimento, ocupa exactamente um espaço igual às suas dimensões, em cada instante. Assim sendo, o movimento é impossível, pois um objecto está sempre estacionário, em repouso.

Este Paradoxo pressupõe que o tempo seja feito de momentos, sendo estes a sua mais pequena medida e indivisíveis. Uma seta tem sempre de estar em movimento ou em repouso, mas para haver movimento, ela teria de estar numa posição no princípio de um momento e noutra posição no fim de um momento, mas ela ocupa sempre um espaço que é igual às suas próprias dimensões, logo isso não é possível pois implicaria que o momento fosse divisível. Portanto, resta apenas a hipótese de a seta estar imóvel, em repouso.

Os Paradoxos da Dicotomia e de Aquiles atacavam a hipótese de uma linha ser infinitamente divisível (tentavam atingir um absurdo partindo desse princípio), este Paradoxo e o Paradoxo do Estádio, atacam a hipótese de uma linha ser composta por um número finito de indivisíveis. Sem pressupor a existência de momentos, unidade mínima e indivisível de tempo, o raciocínio não teria lógica. Este Paradoxo constitui portanto um obstáculo aos defensores de uma concepção atomista do tempo e do espaço, pois este Paradoxo poderia ser facilmente contornado se se considerasse o espaço como sendo infinitamente divisível, mas os atomistas defendem precisamente o contrário.

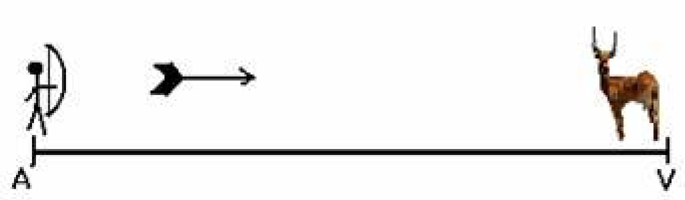


Fig. 2

Ao mesmo tempo que Zenão ataca os adeptos do segmento de recta como «divisão até ao infinito» também ataca, de igual modo, os adeptos do conjunto de pontos indivisíveis com o famoso Paradoxo da seta. O Paradoxo da seta diz-nos o seguinte: lançada de um arco, uma seta fica imóvel em cada instante, visto que, caso contrário, ocuparia várias posições num só instante, o que é impossível. Ora, o tempo é feito de instantes. Logo, a seta permanecerá sempre imóvel, contrariamente ao que se observa!

Consideremos a figura 2, para percorrer a distância do arco ao veado (distância AV), a seta deverá ocupar todas as posições intermédias. No entanto, vejamos se ao ocupar uma dada posição num dado instante é correcto afirmar que a seta está parada.

Pensando do seguinte modo: o movimento de um corpo num dado instante não se caracteriza pela mudança de lugar (o que parece evidente pelo facto da mudança de lugar ser impossível num só instante) mas sim por estar animado de velocidade [instantânea].

A noção de velocidade como habitualmente se define pela razão entre o espaço percorrido e o tempo decorrido nesse percurso (velocidade média), é então alargada a uma nova conceptualização (desconhecida por Zenão) visto que, ao nível do instante, não se pode falar em alteração de posições nem tão pouco em espaço percorrido.

Diga-se que o arco dista 40 metros do veado e que a flecha leva dois segundos a atingir o veado. Utiliza-se também uma expressão que nos dê a posição (x) da seta no instante t: $x = 30t + 5t^2$

Em que posição estará a seta ao fim de *1s*? Não parece ser um cálculo muito complicado, basta substituir t por *1s*;

$$x_c = 30\times 1 + 5\times 1^2 = 35m\,.$$

No instante t=1s a seta estará a 35 metros do veado. Diz-se que este é o ponto fixo C.

Qual será a velocidade média no percurso do ponto C ao ponto D atingido ao fim de 1,5s?

Bom, tem de se calcular a posição de D relativamente à nossa origem (o arco):

$$x_d = 30 \times 1{,}5 + 5 \times 1{,}5^2 = 56{,}25m$$

A velocidade média será, então:

$$v_{\underset{c \to d}{media}} = \frac{x_d - x_c}{t_d - t_c} = \frac{56{,}25 - 35}{1{,}5 - 1} = 42{,}5\, m/s$$

Considera-se agora dois outros instantes que se vão aproximando, um por excesso (*t sup*) , outro por defeito *(t inf*) , de *1s* mas sem nunca chegar a atingir esse valor:

As sucessivas velocidades médias entre o instante considerado e *t=1s*, são:

t inf (s)	*Vmédia (m/s)*
0,5	37,5
0,6	38
0,7	38,5
0,8	39
0,9	39,5
0,99	39,95
0,999	39,995
0,9999	39,9995
0,99999	39,99995
0,999999	39,999995

t sup (s)	*Vmédia (m/s)*
1,5	42,5
1,4	42
1,3	41,5
1,2	41
1,1	40,5
1,01	40,05
1,0001	40,0005
1,00001	40,00005
1,000001	40,000005
1,00000001	40,0000005

Assim, é possível inferir o valor da velocidade instantânea: 20 m/s!

Mas isto não passa de uma suposição. Não se tem ainda nada que permita dizer: «Não Sr. Zenão, mesmo no instante a seta não está parada!»

Calcula-se então o limite da seguinte razão (chamada a razão incremental) quando $t \to 1$:

$$\lim_{t \to 1} \frac{5t^2 + 30t - 25}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)(5t+35)}{t-1} = \lim_{t \to 1}(5t+35) = 5 + 35 = 40$$

O valor deste limite é, nem mais nem menos, o valor da velocidade no instante *t=1s*.

Também é possível visualizar um gráfico da posição em função do tempo, sendo o valor da velocidade no ponto C igual ao declive da tangente à curva nesse ponto.

Surge então a noção de derivada de uma função num ponto, formalizada no sec. XIX por Bolzano (1781-1848) e Cauchy (1789-1857) e cuja história é fascinante.

2.4. Paradoxo do estádio

Este Paradoxo corresponde a afirmar que metade do tempo é igual ao seu dobro! Dito isto assim parece impossível e totalmente ilógico, mas mais uma vez Zenão encontrou um raciocínio para justificar esta conclusão. Neste Paradoxo, temos num estádio três filas de corpos (com igual número de corpos): uma está estacionária no meio e as outras duas movem-se a velocidades iguais e em direcções opostas, partindo uma do princípio e outra do fim do estádio.

Actualmente, sabe-se que se dois corpos passam um pelo outro a velocidades iguais em direcções contrárias então a velocidade a que passam um pelo outro é igual à soma das velocidades dos dois e portanto igual ao dobro da velocidade de um deles (excepto para velocidades relativistas). O paradoxal desta situação, está em considerar que uma fila passaria por outra sempre no mesmo tempo, quer ela estivesse em movimento ou parada. O porquê desta "falha", reside num pressuposto, que também há no Paradoxo da Seta e que se relaciona com o intuito deste Paradoxo, que era atacar os defensores de que uma linha, o espaço ou o tempo, seriam compostos por um número finito de indivisíveis, ou seja, aqueles que defendessem uma concepção atomista do tempo e do espaço. Se considerássemos que existiam unidades mínimas de espaço e de tempo, então um corpo que viaja a velocidade constante deveria passar em cada momento (unidade mínima de tempo) por um número fixo de unidades mínimas de espaço, quer elas estivessem em movimento ou em repouso (segundo a perspectiva de que no movimento cada elemento contactaria com todas as unidades mínimas por onde passaria, que seriam em número finito). Resumindo, o Paradoxo resulta de se considerar que se levaria o mesmo tempo a passar por um corpo independentemente de estar em movimento ou em repouso.

2.5. As explicações de Cantor (1845-1918):

Sabe-se que *o comprimento de um segmento nada tem a ver com o número de pontos que contém*; na realidade, dois segmentos quaisquer têm rigorosamente o mesmo número de pontos, independentemente do seu comprimento.

Esta conclusão não é só logicamente sólida como nos permite resolver questões sobre a natureza do espaço, do tempo e do movimento que nos vêm desde Zenão de Eleia. Com efeito, a nossa intuição sobre o espaço e o tempo sugere que qualquer comprimento e qualquer intervalo de tempo, por pequenos que sejam, podem sempre ser subdivididos e, efectivamente, uma construção geométrica permite sempre bissectar qualquer segmento. Por outro lado, qualquer segmento é formado por pontos, que não têm comprimento e que se encontram relacionados entre si como os números reais; logo, entre quaisquer dois pontos de uma recta há uma infinidade de pontos intermédios, tal como entre dois reais quaisquer há uma infinidade de reais.

Consideremos novamente o Paradoxo Eleático de Aquiles e a Tartaruga, mas agora tal como reformulado por Bertrand Russell (1872-1970) (uma outra versão, mais antiga e menos básica, do Paradoxo, baseada na decomposição dos segmentos numa infinidade de segmentos sucessivamente decrescentes, cada um metade do interior, tinha já sido resolvida mediante a teoria dos limites das séries tratada por Cauchy (1789-1857); a formulação de Russell é, porém, mais básica, no sentido de que não envolve argumentos métricos): Aquiles e a Tartaruga correm para uma meta, tendo a Tartaruga uma vantagem no ponto de partida; acordou-se que a corrida termina quando Aquiles ultrapassar a Tartaruga (o que, dada a diferença finita de velocidades e a finitude da vantagem da Tartaruga, é um acontecimento inevitável); nestas condições, visto que ambos correm exactamente o mesmo número de instantes (e que, a cada instante corresponde um e um só ponto de cada uma das trajectórias), ambos percorrem exactamente o mesmo número de pontos; por outro lado, se Aquiles ultrapassa a Tartaruga, terá percorrido um maior número de pontos, visto que percorreu um segmento maior; assim, Aquiles não pode nunca ultrapassar a Tartaruga.

Parte deste argumento é sólido: desde o início ao fim da corrida, Aquiles e a Tartaruga percorreram exactamente o mesmo número de pontos visto, que gastaram nisso exactamente o mesmo número de instantes; há, portanto, uma correspondência biunívoca entre o conjunto infinito dos pontos percorridos pelos dois.

Porém, a afirmação de que Aquiles, tendo que percorrer um segmento maior, tem que percorrer mais pontos é falaciosa porque, como acabámos de ver, o comprimento não é uma medida do número de pontos.

Na sua luta contra a divisibilidade infinita do espaço e do tempo, da qual Leucipo, Demócrito (cerca de 470- 370 a.C.) e Lucrécio deduziram o atomismo. Zenão propôs outros Paradoxos que confundiram os seus adversários e que só podem ser respondidos em termos das modernas concepções matemáticas da teoria dos conjuntos infinitos.

A Teoria dos Conjuntos infinitos proporciona uma solução surpreendente para o problema do Paradoxo da Seta: Zenão tinha razão, o movimento é uma sucessão de repousos, é apenas uma correspondência entre posições e instantes, cada um formando um conjunto infinito; em cada instante do intervalo em que um objecto está "em movimento", o objecto ocupa uma posição definida e está, portanto, em repouso.

Hoje, graças à metáfora do cinema, é-nos fácil explicar a situação: um filme cinematográfico é uma mera sucessão finita de instantâneos dos quais o olho extrai a ilusão do movimento; no caso do movimento propriamente dito, da infinidade contínua de instantâneos (postulada pela concepção corrente do espaço-tempo como variedade contínua) é ainda mais fácil à mente extrair a ilusão do conceito do movimento.

Esta breve análise das consequências da Teoria Cantoriana dos conjuntos infinitos mostra bem a sua capacidade de resolver definitiva e satisfatoriamente problemas que tinham atravessado séculos sem solução.

Mas voltamos aos extraordinários pensamentos de Zenão:

- Que as dificuldades levantadas pelo fenómeno da incomensurabilidade só podem ser resolvidas depois de um cuidadoso estudo dos problemas do *infinito* e do *movimento*. A estrutura da recta, da qual depende a incomensurabilidade aparece, nos seus argumentos, ligada a esses dois problemas;
- Que, em qualquer hipótese, a recta não pode ser pensada como uma simples justaposição de pontos, mónadas ou não; há nela qualquer coisa que ultrapassa uma simples colecção de pontos; essa qualquer coisa – a sua continuidade – necessita de um estudo aprofundado, ligado com o aspecto numérico, quantitativo, da medida.

Todos estes problemas continuaram a ser intensamente debatidos mas, ao lado deles, surgiram outros cujo interesse imediato os ultrapassou, ou deformou o seu caminho de resolução.

"A controvérsia em relação a estes Paradoxos durou durante toda a História. Estas ideias contidas nas declarações de Zenão e as tentativas de Aristóteles (384-322 a.C.) para as refutar foram extremamente produtivas ao forçar os matemáticos a pensar cuidadosamente sobre o assunto introduzindo seu medo os conceitos do infinito ou do infinitamente pequeno".[10] Assim sendo, o pensamento de Aristóteles alimentou as especulações medievais acerca do infinito e do contínuo.

A intensa actividade política e militar em que nessa altura a Grécia está mergulhada, traz a cidade de Atenas à primeira plana da vida da península. Ela torna-se a grande metrópole da arte, da filosofia e da ciência gregas, que passam a constituir a corte brilhante dum personagem oculto e perigoso – o imperialismo ateniense. Surge um conjunto de preocupações, dizendo respeito mais directamente ao *homem*, o qual tende a tornar-se o *centro do mundo*. Contra o que é habitualmente afirmado, temos que concluir que o *clima* de Atenas foi *mortal* para o desenvolvimento da ciência clássica, por a vida de Atenas estar dominada por um pensamento político de expansão e absorção. Esse pensamento manifestava-se nas várias tentativas de Atenas tentar “comandar” as outras cidades de estado. Quando se diz que Atenas era uma democracia, não podemos esquecer esta ideia de “imperialismo” que estava presente nos seus governantes.

Daqui resulta que nenhum dos problemas postos pelas críticas de Zenão foram resolvidos na antiguidade.

Conclui-se pela incapacidade numérica para resolver o problema das incomensurabilidades; portanto, pela degradação do número em relação à Geometria. Consequência: abandonou-se o que a escola pitagórica afirmara de positivo – a crença numa ordenação matemática do Cosmos – e retomou-se, a breve trecho, em termos cada vez menos nobres, o lado negativo das suas concepções.

Alem disso com a exclusão do conceito quantitativo de infinito dos raciocínios matemáticos – a Matemática grega toma uma feição cada vez mais finitista: invade-a o *horror ao infinito.*

Por outro lado, ao abandonar as concepções dinâmicas, sempre que tal fosse possível – a Matemática grega é invadida pelo *horror do movimento.*

3. ARISTOTELES

Os Paradoxos de Zenão são conhecidos através dos textos de Aristóteles que os enunciou e os tentou refutar com argumentos filosóficos.

Aristóteles nasceu em 384 a.C. na Macedónia, mais propriamente em Estagira, com cerca de 17 anos partiu para Atenas e formou-se na ***Academia*** de Platão.Com a morte de Platão saiu de Atenas e formou uma academia (Espeusipo) em Assos. Mais tarde voltou para Atenas onde fundou o ***Liceu*** e tornou-se preceptor de Alexandre. Morreu em 322 a. C. " Aristóteles era principalmente um filósofo e um biólogo, mas ao mesmo tempo estava profundamente ao corrente das actividades dos matemáticos da época."[4]

"Aristóteles também dedicou muita atenção aos Paradoxos de Zenão, mas tentou refutá-las com argumentos do senso comum" [4] e assim a sua refutação não é uma crítica do ponto de vista da Matemática. Aristóteles defendia que " ***o todo precede as partes***" e é assim que ele utiliza os Paradoxos de Zenão para defender a sua ideia. Sobre os Paradoxos da **Dicotomia** e de **Aquiles** ele defende que em primeiro lugar o atleta percorre o todo, e é por percorrer o todo que ele percorre as partes, e não ao contrário, como Zenão parecia indicar. Rejeita os Paradoxos do **Estádio** e da **Seta** ao defender que se possa potencialmente dividir o contínuo de maneira ilimitada, pois existe sempre um **limite** para a divisão.

Os Paradoxos de Zenão são um problema para matemáticos. Se os seus raciocínios fossem válidos, eles conduziriam à negação do movimento, o que leva Aristóteles a escrever "KINÉSIS" (que significa transformação) e se houver transformação então há movimento.

3.1. A definição Aristotélica de Kinésis

Num dos seus livros (11), Aristóteles disse-nos que a mudança (que ainda está para acontecer) envolve um sujeito (que persiste ao longo da mudança) e um par de contrários (os *termini* da mudança). Poderíamos então pensar que isto constitui uma definição de mudança, uma vez que parece providenciar condições necessárias e suficientes. No caso de mudança de local (movimento), seria algo como:

> $\boldsymbol{x}$ move-se se e só se $\boldsymbol{x}$ está em $\boldsymbol{p_1}$ a $\boldsymbol{t_1}$ e se $\boldsymbol{x}$ está em $\boldsymbol{p_2}$ a $\boldsymbol{t_2}$ (em que $\boldsymbol{p_1 \neq p_2}$ e $\boldsymbol{t_1 \neq t_2}$).

Isto constitui a hoje chamada teoria "at-at" do movimento: mover é estar **em** um sítio numa altura e **em** outro sítio noutra altura. Nesta teoria, o movimento resume-se a estar em sítios diferentes em diferentes alturas (e a mudança em geral é apenas estar em estados diferentes e incompatíveis em diferentes alturas).

Mas embora Aristóteles pense que isto nos fornece as condições necessárias e suficientes para a mudança, ele não acha que isto nos diz o que a mudança **é**. Isto torna-se óbvio quando Aristóteles apresenta uma definição da mudança (Kinésis) bastante diferente desta. E porquê?

Aristóteles não nos diz. Mas, presumindo, o problema com a teoria "at-at" é que ela deixa de parte o aspecto crucial da mudança – nomeadamente, que se trata de um **processo** ou **passagem** de um estado para o outro, ou de um sítio para outro. Isto é, ele conceptualiza a mudança como um fenómeno **contínuo** e não **discreto**.

O que é que tudo isto quer dizer? Vamos considerar o que a teoria "at-at" nos diz sobre um objecto, $\boldsymbol{x}$, que se move de $\boldsymbol{p_1}$ para $\boldsymbol{p_2}$, começando a sua viagem em t_1 e acabando-a em t_2. Diz-nos onde o objecto está no início da mudança e no fim – mas não diz nada sobre a sua localização durante o intervalo entre t_1 e t_2. De acordo com a teoria "at-at" o objecto até pode não estar localizado em lado nenhum no intervalo temporal – pode até ter deixado de existir. Portanto, desde que esteja em p_1 a t_1 e em p_2 a t_2, x sofreu uma mudança de local – moveu-se.

Mas nós exigimos mais ao movimento do que isto. Para mover-se de p_1 para p_2, x tem de ocupar, sucessivamente, os espaços de uma qualquer linha que liga p_1 a p_2. Isto é, é necessário mais do que estar em primeiro lugar num sítio e depois noutro – o corpo em movimento tem de **ir de** um sítio ao outro.

O que isto significa é que as nossas bases filosóficas são mais vastas do que o que a teoria "at-at" requer. Nós temos mais do que apenas um sujeito da mudança e um par de contrários; nos temos também uma entidade, uma Kinésis, um processo, que é um tipo de ser. E a questão de Aristóteles é: que tipo de ser é este? Qual é a natureza da Kinésis?

A definição de Aristóteles:

"A Mudança (movimento) é a actualidade do que F é potencialmente, *qua*[1] potencialidade."

Esta definição tem atraído muitas críticas ao longo do tempo devido à sua obscuridade.

Porque Aristóteles e outros gregos não conseguirem demonstrar os Paradoxos e não acreditarem no infinito, eles acharam que era necessário

[1] *Qua* significa enquanto.

disciplinar o raciocínio e assim inventaram a Lógica e fizeram do infinito um tabu." A discussão Aristotélica sobre o infinito na Aritmética e na Geometria, exerceu uma profunda influência em muitos escritos posteriores sobre os fundamentos da Matemática, mas teríamos que comparar a afirmação de Boyer de que matemáticos " não necessitam nem usam o infinito, com o ponto de vista dos nossos dias, em que o infinito é o paraíso da Matemática." [4] Aristóteles diferenciava duas espécies de infinito – o actual e o potencial e negava a existência do primeiro. E, assim sendo, " Aristóteles pode ser considerado como um importante promotor do desenvolvimento da Matemática." [4]

4.ARQUIMEDES

Arquimedes (287- 212 a.C.) foi um Matemático e inventor grego, nascido na cidade-estado grega de Siracusa, localizada na ilha da Sicília, filho de um astrónomo. Pode-se dizer que foi o maior matemático e cientista da Antiguidade. Criou um método para calcular π (razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro, com aproximação tão grande quanto se queira). "Conta-se que, durante os anos de 214 a 212 a. C. quando os romanos atacaram Siracusa, Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para manter o inimigo afastado, catapultas para lançar pedras , cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os barcos romanos, e artifícios para os incendiar, etc.."[4]

Há indícios muito fortes de que na sua juventude, Arquimedes tenha estudado com os sucessores de Euclides (cerca de 325-270 a.C.), em Alexandria porque estava familiarizado com a Matemática desenvolvida lá, conhecendo pessoalmente os matemáticos daquela região."… muitos dos seus trabalhos eram endereçados aos estudantes de Alexandria, incluindo ao chefe dos bibliotecários, Eratóstenes ." [10]

Arquimedes foi capaz de aplicar o ***Método da Exaustão***, que é uma forma primitiva de integração, para obter uma vasta gama de resultados importantes, problemas do cálculo de áreas e volumes, problemas que serão retomados mais tarde pelos matemáticos renascentistas, alguns dos quais chegaram até aos nossos dias. O ***Método da Exaustão***, embora servisse perfeitamente as necessidades de ordem prática, pois permitia encontrar valores aproximados das grandezas incomensuráveis, deixava em aberto o problema de natureza dessas mesmas grandezas. Problema esse que só foi completamente resolvido no século XIX.

Por exemplo para provas rigorosas das fórmulas de determinadas áreas e volumes, Arquimedes encontrou diversas somas (séries infinitas) que contêm um número infinito de termos, mas ele nunca aceitou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Na ausência do conceito de **limite**, utilizou outro tipo de argumentos chamados de ***redução ao absurdo duplo***, que incorporam alguns detalhes técnicos do que agora denominamos de **limites**.

Arquimedes fez assim o primeiro uso significativo de **limite** de uma sequência infinita de números, ideia esta que foi desenvolvida nos métodos de cálculo, pois esta noção pressupõe a aceitação do infinito que os Gregos, incluindo Arquimedes, excluíram. De qualquer maneira o seu trabalho foi concerteza muito importante para as ideias de **limite** e de infinito desenvolvidas mais tarde, sendo os trabalhos de Arquimedes a principal fonte de inspiração para a Geometria do século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

De forma inédita Arquimedes apresenta os conceitos de **limite** e Cálculo Diferencial e Integral cerca de 19 séculos antes de Newton (1642-1727) por isso se diz que foi precursor do Cálculo. Faltava a Arquimedes a noção de passagem ao **limite**, pois ele partilhava com os gregos o chamado *Horror ao Infinito*.

Não esqueçamos que:

" … a mentalidade grega encerrou-se numa atitude *finitista* …"[6]

Estes traços – degradação do número, *horror do infinito, horror do movimento* – constituem a trincheira cómoda da hibernação, formam o biombo prudente que o filósofo grego coloca entre si e a realidade.

Posteriormente à grande crise, a mentalidade grega encerrou-se numa atitude *finitista* de que encontramos uma das manifestações mais acentuadas na cosmogonia que ficou geralmente aceite – um mundo finito, geocêntrico, formado por uma sucessão de esferas centradas na Terra, esferas nas quais todos os astros se deslocavam em movimentos circulares.

Kepler (1571-1630), estabelecendo em 1609 a sua primeira lei – *as órbitas planetárias são elipses das quais o Sol ocupa um dos focos* – deu a primeira machadada na *supremacia do círculo* que assim se viu demitido da situação proeminente de lugar do *movimento natural*. Uma das consequências imediatas desse facto foi que se pôs naturalmente ao espírito dos pensadores esta pergunta - qual é a força responsável para que os planetas se movam em órbitas elípticas? Assim se instalou no primeiro plano das preocupações dos pensadores este problema da causa física do movimento.

É preciso dizer que o movimento é um dado e não uma coisa a explicar, um fenómeno que se trata de estudar nas suas manifestações observadas, fisicamente e não metafisicamente. A natureza do fenómeno é tal que " quando vamos querer fixar a posição de um móvel, em determinado instante, num ponto da sua trajectória, já ele aí se não encontra – entre dois instantes, por mais aproximados que sejam um do outro, o móvel percorreu um segmento, com uma infinidade de pontos"; "a cada instante, o móvel está e não está em determinado ponto".

Isto quer dizer que não poderemos obter resultados, em qualquer instante ou ponto, se o tomarmos em si, isolado dos outros pontos; que o que se passa num instante e num ponto só pode ser entendido integrado na sua interdependência com o que se passa em instantes e pontos que o precedem e seguem. Mas este preceder e seguir tem aqui o carácter subtil de que não há ponto que preceda ou siga imediatamente outro – entre os dois, por mais próximos, há uma infinidade de pontos, logo há uma infinidade de possibilidades que contam na interdependência. De modo que não poderemos certamente obter resultados no estudo do fenómeno com a ajuda simples de números a marcar posições de precedência ou sequência entre instantes ou pontos – esses números, por menor que seja a sua diferença deixam-nos sempre fugir uma infinidade de possibilidades da interdependência – aquelas que correspondem ao segmento que eles encerram. E a condição primeira do êxito é precisamente que isso não aconteça.

Este êxito deve ser de natureza a permitir que se dê conta da infinidade de estados possíveis entre dois estados quaisquer; de natureza a permitir-nos trabalhar, não só com estados determinados, mas com a infinidade das possibilidades entre dois estados.

Não pode, por consequência, ser um número, mas há-de poder representar qualquer dos números dum conjunto numérico conveniente – o novo instrumento matemático parece ser portanto uma variável.

E assim surge, forjado no âmago da grande dificuldade, o conceito de **limite**.

Todas as vezes que, no estudo dum fenómeno de qualquer natureza – físico, biológico, económico, geométrico - para a determinação quantitativa dum seu estado nos apareça como indispensável o considerar a interdependência desse estado com os estados vizinhos, essa determinação far-se-á por meio de um **limite** – **limite** que é a resultante da infinidade de possibilidades dos estados vizinhos.

Surge assim uma operação nova – a operação de passagem ao limite; um dos aspectos essenciais desta operação reside precisamente no facto de ela, construir um resultado à custa duma infinidade de possibilidades, no facto, portanto, de ela tomar o infinito como um elemento activo de construção.

Vejamos como esta via nova, aberta pelo conceito de **limite**, permite resolver dificuldades antigas. Que faz Zenão no seu argumento Aquiles e a Tartaruga? Constrói duas sucessões de posições sucessivas de A a T:

$$\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots}$$
$$\boldsymbol{T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots}$$

e, contemplando-as em atitude estática, finitista, nota que a distância $\overline{\boldsymbol{A_n T_n}}$ nunca é nula e diz – não compreendo como $\boldsymbol{A}$ pode alcançar $\boldsymbol{T}$!

O matemático moderno de posse da operação de passagem ao **limite**, raciocina desta maneira: no estudo do fenómeno em questão, o estado particular – encontro dos dois móveis, - se se der, só pode ser compreendido em interdependência com os estados vizinhos. Determinemos portanto o resultado dessa interdependência: se chamar $\boldsymbol{d}$ à distância $\overline{\boldsymbol{A_1 T_1}}$ (avanço inicial de $\boldsymbol{T}$ sobre $\boldsymbol{A}$) as distâncias dos dois móveis nessas posições sucessivas são

$$\boldsymbol{d, \frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \ldots, \frac{d}{2^n}, \ldots}$$

e, como **limite** desta sucessão numerável, temos $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{d}{2^n} = 0}$ - anulamento da distância no **limite**.

Assim, Zenão, contemplando estaticamente as suas duas sucessões, infinitas de possibilidades, não pode fazer mais do que verificar o desacordo entre a realidade e o esquema racional que queria arruinar – a concepção pitagórica do Universo – mas sem ser capaz de integrar o movimento no seu próprio esquema – a concepção eleática, dominada pelo conceito da continuidade na imobilidade.

O matemático moderno, adoptando em relação ao conceito de infinito uma atitude dinâmica, tomando-o audazmente como elemento de construção, obtém o resultado que a experiência confirma, e constrói o instrumento matemático que permitirá integrar o movimento no mundo da continuidade – o instrumento próprio para o estudo matemático do devir! – e que constituirá uma das principais alavancas do renascer daquele grandioso ideal – uma vez surgido e logo arruinado – da ordenação matemática do Cosmos. Encarado deste ponto de vista, o método dos **limites** constitui uma das mais belas histórias da inteligência humana.

Este é o resultado de uma longa evolução, entre tentativas, dúvidas, vitórias e discussões.

Em termos históricos não é conhecido o objectivo inicial e efectivo de Zenão, pois tudo que chegou até nós resulta do testemunho de Aristóteles (384-322 a.C.), quase dois séculos depois de Zenão. Mas talvez possamos entender que a sua argumentação tinha uma finalidade:

O movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares. Não se pode estudar o movimento e tentar compreendê-lo usando métodos estáticos: esta tentativa constituiu logo à nascença, um Paradoxo.

Como diz Leonardo da Vinci [6] "Olha para a chama e considera a sua beleza; fecha os olhos e torna a olhar: o que vês não estava lá e o que lá estava já o não encontras".

4.1.Método de Exaustão

Tudo começou quando Eudoxo (408-355 a.C.), aluno de Platão, depois de ter estudado o conceito de proporção dos Pitagóricos, que associavam a razão entre dois segmentos de recta à razão entre números inteiros e que não podia ser aplicada no caso das grandezas incomensuráveis, propôs uma outra definição de proporção, de carácter mais geral, permitindo que os quatro termos da proporção fossem todos grandezas geométricas, evitando por completo qualquer extensão à ideia pitagórica de número.

Desse modo, Eudoxo constrói um instrumento útil que podia ser manuseado sem haver misturas entre números e grandezas geométricas, isto é, sem ferir o modo de pensar grego.

Assim, Eudoxo desenvolve o seu ***Método da Exaustão*** (nome dado por Grégorie de Saint-Vincent (1584-1667)), que se baseia num princípio que acabaria por ficar conhecido como Postulado de Arquimedes, embora Arquimedes o atribua a Eudoxo. O enunciado deste postulado diz que, dadas duas grandezas diferentes (ambas não nulas),

se da maior subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, e do que restou subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, repetindo esse processo continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor grandeza dada.(este postulado irá ser mais tarde usado por Hilbert para tornar inviável o conceito de infinitésimo actual, à maneira de Leibniz)

O mais fantástico desta definição é que exclui o infinitesimo de todas as demonstrações geométricas dos Gregos. Além disso, permite raciocinar sem ultrapassar a compreensão intuitiva clara, pois Eudoxo não propõe ir até ao infinito para de facto atingir o limite, mas apenas afirma que se pode chegar a uma grandeza tão pequena quanto qualquer outra dada.

A diferença entre o ***Método de Exaustão*** e o **limite** do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no facto de os Gregos não realizarem essa passagem ao infinito, pois não tinham noção de um continuum aritmético. Mas o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do actual

limite quanto no ***Método da Exaustão*** geométrico. Pode-se dizer que a noção de **limite** foi vislumbrada pelos Gregos, como se pode deduzir através deste pequeno texto de Aristóteles (384-322 a. C.):

Minha teoria não tira nada às considerações dos matemáticos, ao suprimir o infinito que existiria segundo o acréscimo infinito, que não se poderia recorrer: pois os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram.

Na linguagem dos **limites** não se faz uso de noções intuitivas de grandezas matemáticas, nem de tentativas de imagens sensoriais que ilustrem o que se está a passar em cada passo como no ***Método da Exaustão***. Os **limites** simplesmente lidam com símbolos pré-definidos, sem se preocupar com qualquer visualização mental, mas apenas com as possibilidades fornecidas pelas definições adoptadas. Essa expressão formalizada da noção de **limite** data do século XIX, mas as ideias já estavam no mundo grego.

O Cálculo Diferencial e Integral surgiu no século XVII devido, em parte, à tentativa de simplificar os métodos gregos, como o ***Método da Exaustão***. Para avaliar até que ponto chegaram os gregos, basta verificar que Arquimedes realizou o cálculo da área sob a parábola antecipando-se, assim, em mais de dezassete séculos aos resultados do Cálculo Integral. Na sua obra ***O Método*** ele explica como o fez.

O Método encontra-se na forma de uma carta endereçada a Eratóstenes (276-194 a.C.) e é importante devido às informações que fornece sobre *o* ***método*** que Arquimedes usava para descobrir muitos dos seus teoremas. Arquimedes usava-o de maneira experimental para descobrir resultados que ele então tratava de colocar em termos rigorosos mediante o ***Método de Exaustão*** (que ele não designava deste modo).

A base do método de Arquimedes está em considerar que superfícies são constituídas por rectas. Não sabemos se considerava que haveria infinitos segmentos de rectas compondo a área de uma figura. Parece que os considerava como indivisíveis, pois chegava a muitos resultados pelo método da balança, usando o princípio de nivelamento como quem estivesse pesando mecanicamente uma colecção de lâminas finas ou de fitas de algum material pesado.

A determinação de áreas de figuras planas fazia-se, na matemática grega, por comparação com áreas conhecidas, como por exemplo a área do quadrado. *Quadratura* era o nome que se dava a essa determinação. Medir uma figura geométrica, para os geómetras gregos, não era encontrar um número, mas sim uma figura conhecida com o mesmo comprimento, área ou volume da primeira. Nessa perspectiva, calcular a medida de uma área era um falso problema. O que interessava aos Gregos, no quadro das suas matemáticas, era determinar a relação entre duas áreas. A quadratura do círculo usando régua e compasso insere-se nessa preocupação. Este problema ficou famoso porque a sua solução, que não existe, obcecou não só os Gregos como também matemáticos de todos os tempos, profissionais e amadores.

Arquimedes, em vez de procurar fazer a quadratura do círculo por construção com régua e compasso, tentou medir a sua área e encontrou uma solução aproximada. O método por ele usado permite encontrar aproximações sucessivas de uma dada área, por comparação com áreas conhecidas.

Na *Quadratura da parábola*, Arquimedes calcula a área do segmento parabólico. Ele inscreve sucessivos triângulos no segmento de parábola, calcula a área desses triângulos e vai obtendo valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos. Assim demonstra que a área do segmento de parábola é igual a 4/3 da área do triângulo com a mesma base e com a mesma altura do segmento. No entanto Arquimedes não prolonga as somas até ao infinito. Ele deduz o seu valor demonstrando que não pode ser nem maior, nem menor que esses 4/3.

Para calcular a área do círculo, Arquimedes considera polígonos inscritos de número de lados 6, 12,...96. Faz o mesmo com polígonos circunscritos e consegue assim mostrar que a área do círculo está entre dois valores determinados, ou seja, é menor que a dos polígonos circunscritos e maior que a dos polígonos inscritos.

Podemos assim dizer que o ***Método da exaustão*** é o fundamento de um dos processos essenciais do Cálculo Infinitesimal. No entanto, enquanto que no cálculo se soma um número infinito de parcelas (no caso do círculo teríamos um polígono com um número infinito de lados), Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir a soma de uma série infinita irá ser necessário desenvolver o conceito de número real que os Gregos não possuíam. Não é pois correcto falar do método de Arquimedes como dum processo geométrico de passagem ao **limite**. A noção de **limite** pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluído da Matemática grega, mesmo em Arquimedes. Mas no entanto o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das ideias de **limite** e de infinito. De facto, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do séc. XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Bento de Jesus Caraça [6] diz*:"… tendência para fugir de tudo aquilo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas; em particular, do conceito de infinito, não porque se banisse da Filosofia tal conceito mas porque se renunciou a abordar um estudo quantitativo dele e se passou a eliminá-lo sistematicamente dos raciocínios matemáticos; da Matemática grega veio-nos um método de raciocínio – o* **Método de Exaustão** *- que não tem outro objectivo."*

Enquanto que na época medieval a Aritmética e a Álgebra despertam algum interesse já o mesmo não acontece com outras questões trabalhadas pelos Árabes e anteriormente pelos Gregos. Uma delas é precisamente o ***Método da Exaustão*** e a sua aplicação ao cálculo das áreas. O Ocidente medieval ignora quase totalmente esses trabalhos de Arquimedes, assim como o dos Árabes no mesmo domínio que, pode dizer-se, marcam o nascimento do Cálculo Infinitesimal.

Durante o Renascimento o ***Método da Exaustão*** foi um precursor dos métodos infinitesimais desenvolvidos sob o impulso da necessidade de resolução dos problemas do movimento, da Mecânica Celeste e do cálculo de áreas e volumes. O que faltou aos Gregos, para além de um formalismo adequado, foi como já dissemos o serem capazes de conceber o "prolongamento ao infinito" do processo de exaustão, como foi feito no Renascimento. Mas podemos dizer que a origem do Cálculo Infinitesimal, elaborado desde o Renascimento até aos nossos dias, está nas concepções intuitivas que os Gregos tinham da noção de contínuo, de infinito Matemático e de **limite**.

Em 1586 o engenheiro flamengo Simon Stevin (1546-1620) utiliza o método de Arquimedes para determinar os centros de gravidade de figuras planas. Mas enquanto que Arquimedes considerava sempre um número finito de termos, Stevin toma um número infinito, no sentido de Aristóteles, ou seja, o de infinito potencial[2].

Para Aristóteles o infinito potencial, não apresenta nenhuma realidade física, é apenas uma construção do espírito necessária à resolução de certos problemas. O infinito potencial era admitido apenas no caso de grandezas contínuas infinitamente pequenas e de números infinitamente grandes.

---

[2] Infinito potencial – podemos sempre imaginar números maiores do que um número dado: é aquele conceito que usamos quando queremos indicar um processo que pode continuar infinitamente.

Infinito actual – é aquele que pode ser concebido como uma entidade "completa", "acabada": todos os seus elementos podem ser pensados num acto único, não é um processo é ele próprio um número.

Mais tarde, Bolzano (1781-1841) defendeu o infinito actual. Ele apoiou-se na ideia de que os paradoxos, que desde Zenão atravessaram os séculos, não resistem a uma análise consequente. Ele pretendia situar o verdadeiro infinito no campo da Matemática e foi o primeiro a tentar construir um conceito puramente matemático e um cálculo do infinito actual. Para Bolzano não era necessário enumerar todos os elementos de um conjunto para conceber a sua existência. Bastava caracterizar o conjunto pelas suas propriedades. Do ponto de vista de cálculo, bastava considerar que o infinito era maior do que qualquer grandeza dada, para que se tornasse operativo. Bolzano não refutava o axioma de Arquimedes nem o pressuposto de que o todo é maior que as partes, apenas considerava que as regras eram diferentes para os conjuntos infinitos. No entanto, Bolzano não foi capaz de definir uma aritmética do infinito, como fez Cantor, mais tarde.

Segundo Cantor (1845-1918) o infinito potencial é uma quantidade finita variável e aproximando-se à medida que se fazem aproximações, todas elas finitas, enquanto que o infinito actual é uma quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas.

O infinito é um limite que nunca se atinge, de um número infinito de números. Isto é, os números 1, 2, 3, 4, 5, ... podem continuar indefinidamente, mas nunca atingirão o último, no infinito. Visto desta maneira, cada número da sequência é apenas um passo de um processo infinito. No entanto, o limite nunca atingido pode ser visto como um número em si mesmo, um número transfinito. Este número transfinito é infinitamente actualizado, é o limite para o qual se tende mas que nunca se atinge, é aquilo que Cantor considera a quantidade, fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas.

Kepler (1571-1630) utiliza também o ***Método da Exaustão***, considerando somas infinitas que calcula à custa de métodos intuitivos. Muitos outros matemáticos do Renascimento calculam áreas e volumes utilizando processos semelhantes ao ***Método da Exaustão***, decompondo as suas figuras em infinitesimais ou em indivisíveis, como também eram chamados. Entre os mais famosos encontram-se Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675) e Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) que deu ao método de Eudoxo o nome de "***Método da Exaustão***".

Para Cavalieri uma linha é um conjunto infinito de pontos, uma superfície um conjunto infinito de linhas e um volume um conjunto infinito de planos. No entanto, para calcular uma área, em vez de somar esse número infinito de linhas, ele compara a superfície com outra que tenha o mesmo número de linhas.

Gregoire de Saint Vincent preenche exaustivamente uma linha curva, não de pontos mas de segmentos de recta e refere explicitamente a soma de um número infinito de grandezas. Estas considerações vão originar o Cálculo Integral, em que se decompõe uma figura num número infinito de elementos e se soma efectivamente esse número infinito.

Para podermos perceber bem o ***Método da Exaustão*** tenta-se dar uma demonstração através do **Axioma de Eudoxo (Propriedade Arquimediana):**

Axioma de Eudoxo: *Sejam* α *e* β *dois quaisquer números positivos. Então existe um número inteiro positivo* n *tal que* $n\beta > \alpha$.

O Axioma de Eudoxo é utilizado na demonstração do seguinte Teorema:

Teorema (*Princípio de Eudoxo ou* ***Método da Exaustão***) *Sejam* M_0, $M_1, M_2, M_3,\ M_4, \ldots$ *números positivos tais que* $M_1 < \frac{1}{2}M_0$, $M_2 < \frac{1}{2}M_1$,

$M_3 < \frac{1}{2} M_2$ *, e assim por diante. Seja* $\varepsilon > 0$. *Então existe um número inteiro positivo* N *tal que* $M_N < \varepsilon$.

Demonstração. Em virtude do Axioma de Eudoxo existe um número inteiro positivo N tal que $(N+1)\varepsilon > M_0$.

Vamos mostrar que $M_N < \varepsilon$. Temos

$$2N\varepsilon = N\varepsilon + N\varepsilon \geq N\varepsilon + \varepsilon = (N+1)\varepsilon > M_0$$

Então $\quad 2N\varepsilon > M_0 \quad$ e $\quad N\varepsilon > \frac{1}{2} M_0 > M_1$.

Se $N = 1$ temos $M_1 < \varepsilon$ e acabamos.

Suponhamos $N \geq 2$. Como $N\varepsilon > M_1$ temos

$$\begin{aligned} &2(N-1)\varepsilon = 2N\varepsilon - 2\varepsilon = \\ &= N\varepsilon + N\varepsilon - 2\varepsilon = \\ &= N\varepsilon + (N-2)\varepsilon > N\varepsilon > M_1 \end{aligned}.$$

Logo
$$\begin{aligned} &2(N-1)\varepsilon > M_1 \Leftrightarrow \\ &(N-1)\varepsilon > \frac{1}{2} M_1 > M_2 \end{aligned}$$

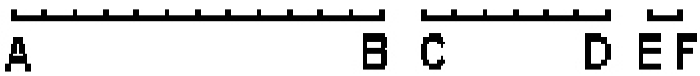
Se $N = 2$ acabamos. Continuamos o raciocínio supondo $N \geq 3$, e assim por diante, até chegar a $(N-(N-1))\varepsilon > M_N$, ou $\varepsilon > M_N$.

O ***Método da Exaustão*** permite uma justificação para o facto de que o lado de um quadrado e a sua diagonal são grandezas incomensuráveis.

Dado um segmento $[AB]$ indicaremos por $\overline{AB}$ o seu comprimento.

Dois segmentos dizem-se *comensuráveis* se são múltiplos de um segmento comum. Em outros termos, sejam $[AB]$ e $[\boldsymbol{CD}]$ dois segmentos. Se existir um segmento $[\boldsymbol{EF}]$ e se existirem inteiros positivos $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ tais que $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{m}\overline{\boldsymbol{EF}}$ e $\overline{\boldsymbol{CD}} = \boldsymbol{n}\overline{\boldsymbol{EF}}$, então $[\boldsymbol{AB}]$ e $[\boldsymbol{CD}]$ são múltiplos do segmento comum $[\boldsymbol{EF}]$, e assim dizem-se comensuráveis.

Na figura seguinte temos um exemplo de segmentos comensuráveis. Temos $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{12}\overline{\boldsymbol{EF}}$ e $\overline{\boldsymbol{CD}} = \boldsymbol{6}\overline{\boldsymbol{EF}}$.



Dois segmentos dizem-se *incomensuráveis* se não forem comensuráveis.

O conceito de comensurabilidade é correspondente ao de número racional na nomenclatura da Matemática Contemporânea e ao rácio de Eudoxo. A razão entre os comprimentos de dois segmentos comensuráveis é um número racional. Por outro lado, a razão entre os comprimentos de dois segmentos incomensuráveis é um número irracional, e o conceito de incomensurabilidade é correspondente ao de número irracional.

Por exemplo:

Teorema *Num quadrado, o lado e a diagonal são segmentos incomensuráveis.*

Demonstração: Consideramos um quadrado $[\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1}]$(ver figura 4), e sejam $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{d_1}$ respectivamente o seu lado e a sua diagonal. Observamos a seguinte construção. Marcamos em $[\boldsymbol{B_1D_1}]$ o ponto $\boldsymbol{A_2}$ tal que $\overline{\boldsymbol{B_1A_2}} = \overline{\boldsymbol{A_1B_1}}$ e tomamos o segmento $[\boldsymbol{A_2B_2}]$ perpendicular a $[\boldsymbol{B_1D_1}]$ com

B_2 pertencente a $[A_1D_1]$. O $\Delta[A_2B_2D_1]$é necessariamente isósceles, com $\overline{A_2D_1} = \overline{A_2B_2}$. Construímos então o quadrado $[A_2B_2C_2D_2]$. Sejam a_2 e $d_2$respectivamente o lado e a diagonal do novo quadrado.

Notemos que $\qquad d_1 = \overline{B_1D_1} = \overline{B_1A_2} + \overline{A_2D_1} = a_1 + a_2$

e $\qquad a_1 = \overline{A_1D_1} = \overline{A_1B_2} + \overline{B_2D_1} = \overline{A_1B_2} + d_2$

Os triângulos rectângulos $\Delta[A_1B_2B_1]$ e $\Delta[A_2B_2B_1]$ são geometricamente iguais, pois têm a hipotenusa em comum e $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1A_2}$. Logo $\overline{A_1B_2} = \overline{A_2B_2} = a_2$.

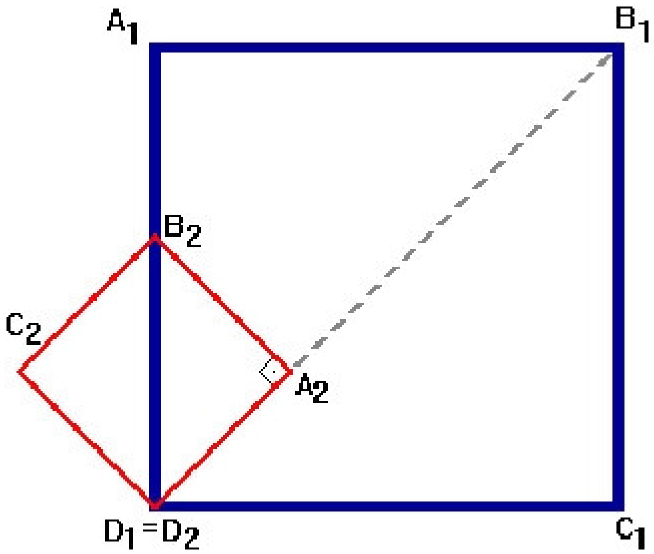


Fig. 4

Assim $a_1 = a_2 + d_2$, e portanto

$$a_2 = d_1 - a_1 \qquad \wedge \qquad \begin{aligned} d_2 &= a_1 - a_2 = \\ &= a_1 - (d_1 - a_1) = \\ &= 2a_1 - d_1 \end{aligned}$$

De $a_1 = a_2 + d_2$ temos $a_1 > a_2 + a_2 = 2a_2$, donde $a_2 < \frac{1}{2}a_1$.

A construção acima pode ser repetida com o quadrado $[A_2B_2C_2D_2]$, e encontramos um terceiro quadrado $[A_3B_3C_3D_3]$, com lado a_3 e d_3 de diagonal, sendo

$$\begin{cases} a_3 = d_2 - a_2 \\ d_3 = 2a_2 - d_2 \\ a_3 < \dfrac{1}{2}a_2 \end{cases}$$

Seguindo esta ideia, encontramos um quarto quadrado, um quinto, etc., obtendo assim uma sequência $a_1, a_2, a_3 a_4, \ldots$ tal que $a_{i+1} < \frac{1}{2}a_i$.

Suponhamos, agora, que a_1 e d_1 sejam comensuráveis. Então existe um número positivo ε e existem números naturais m e n tais que $a_1 = m\varepsilon$ e $d_1 = n\varepsilon$. Usando as identidades acima temos $a_2 = n\varepsilon - m\varepsilon = (n-m)\varepsilon$ e $d_2 = 2m\varepsilon - n\varepsilon = (2m-n)\varepsilon$. Assim sendo, a_2 e d_2 também são múltiplos de ε. E assim por diante, cada a_i é múltiplo de ε. Em particular $a_i > \varepsilon$ para todo o i.

Aplicamos agora o ***Método da Exaustão***, segundo o qual existe um número inteiro positivo i tal que $a_i < \varepsilon$. Isto é uma contradição, e concluímos que a_1 e d_1 são incomensuráveis.

Depois de Arquimedes, a Matemática grega tem um fim. Já na vida de Arquimedes a Grécia tinha deixado de ser o centro cultural do mundo; este tinha-se transferido para Alexandria sobretudo devido às conquistas de Alexandre. Depois na Guerra Santa os árabes invadem Alexandria, ocupam e destroem a cidade e todas as obras dos Gregos. Daí por diante a Matemática entra num estado latente, a Álgebra e a Aritmética vão evoluindo mas muito lentamente.

Durante a Idade Média muitos filósofos, teólogos e matemáticos discutiram e modificaram os trabalhos de Aristóteles (384-322 a.C.), que era o principal autor estudado.

O infinito, o infinitésimo, a continuidade eram problemas discutidos por filósofos, não em termos de pensamento matemático mas sim em termos de pensamento filosófico, que mais tarde se tornaram concepções integrantes da Matemática.

As discussões sobre a incomensurabilidade não eram orientadas no sentido da construção de conceitos matemáticos, mas sim na questão metafísica da existência dos indivisíveis e em torno da distinção de Aristóteles entre infinito actual e potencial, herança dos Paradoxos de Zenão.

Uma curiosidade dessa altura era que o infinito no Ocidente era tido como um atributo de Deus e representava a distância que separava o divino do humano.

5.RENASCIMENTO (séculos XIV; XV e XVI)

Durante o Renascimento os Matemáticos da época: Pierre Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Johan Hudde (1628-1704), Joahnnes Kepler (1571-1630), John Wallis (1616-1703), entre outros, estudaram a geometria das curvas, o que fez desenvolver o conceito de derivada, de integral e de cálculo dos máximos e mínimos sobre uma curva, a normal e a tangente a uma curva, pontos de inflexão de uma curva (com a correspondente necessidade da segunda derivada); desenvolveram o estudo das superfícies e de sólidos; calcularam áreas e volumes utilizando processos semelhantes ao **Método da Exaustão**, decompondo as figuras em infinitesimais.

Mas nenhum deles percebeu a necessidade da ideia de **limite**, assim cada um encontrou uma maneira inteligente para conseguir os próprios resultados, que estavam correctos, embora sem o rigor possibilitado pelo **limite**.

Os resultados estavam quase todos correctos, mas cada um deles dependia de uma argumentação não algébrica, recorrendo à intuição geométrica ou filosófica, questionável em algum ponto crítico. A necessidade para os **limites** era justa, mas não reconhecida.

6.NEWTON

Isaac Newton nasceu em 1642 em Woolsthorpe, Lincolnshire, no interior de Inglaterra, formou-se na Universidade de Cambridge em 1665 e a partir daí desenvolveu uma vida rica de descobertas científicas que mudaram para sempre a História da Ciência, principalmente na Matemática, Física, Óptica e Astronomia.

Em 1665 desenvolveu o **Teorema do Binómio** que proporcionou uma nova e eficaz maneira de calcular logaritmos com exactidão e trabalhar com números de muitas casas decimais.

Pelo fim de 1664 Newton (1642-1727) parece ter atingido as fronteiras do conhecimento matemático, as suas primeiras descobertas resultaram de saber exprimir funções em termos de séries infinitas – a mesma coisa que Saint-Vincent (1584-1667) estava a fazer na Itália na mesma época, embora dificilmente Newton pudesse saber disso. Newton também começou a pensar, em 1665, na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades continuamente, variáveis ou fluentes – tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas. Assim Newton juntou esses dois problemas – das séries infinitas e das taxas de variação – como "meu método".

Newton tinha muita habilidade com as mãos e construía os seus próprios instrumentos.

Tornou-se professor de matemática em Cambridge (1669) e entrou para a Royal Society (1672). A sua principal obra foi a publicação *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (conhecida por *Principia*) em três volumes, na qual enunciou a Lei da Gravitação Universal, generalizando e ampliando as constatações de Kepler (1571-1630), e resumiu as suas descobertas, principalmente o Cálculo. Essa obra trata essencialmente de Física, Astronomia e Mecânica (leis dos movimentos, movimentos de corpos em meios resistentes, vibrações isotérmicas, velocidade do som, densidade do ar, queda dos corpos na atmosfera, pressão atmosférica, etc.) e é hoje considerada uma das maiores obras científicas de todos os tempos.

Fez as suas primeiras descobertas sobre gravitação universal e escreveu sobre séries infinitas e o que chamou de **Teoria das Fluxões** (1665), que se tornaria o actual Cálculo Diferencial e Integral, é posteriormente motivo da disputa com Leibniz (1646-1716) pela prioridade de sua descoberta

Na **Teoria das Fluxões**, Newton (1642-1727) adoptou uma visão cinemática das grandezas geométricas, a que chamou de ***fluentes*** e as velocidades a elas referidas, chamadas de ***fluxões***. Newton demonstra, baseado na **Teoria das Fluxões** e de cálculos avançados, por ele desenvolvidos, que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância, colocando um fim às dúvidas acerca da segunda Lei de Kepler.

A **Teoria das Fluxões***,* foi baseada na ideia crucial de que a derivação de uma função era meramente o procedimento inverso da integração. Tomando a diferenciação como operação básica, Newton criou métodos analíticos simples, que unificaram diversas técnicas anteriormente desenvolvidas para resolver problemas aparentemente não relacionados, como achar áreas, tangentes, comprimentos de curvas e máximos e mínimos de funções.

Segundo Boyer, em 1676 Newton escreveu *De quadratura curvarum* e tentou evitar tanto quantidades infinitamente pequenas quanto quantidades que flúem, substituindo-as por "primeiras e últimas razões". Ele achava a " primeira razão de aumentos nascentes" ou a " última razão de incrementos evanescentes": suponhamos que se procure a razão das variações de $\boldsymbol{x}$ e de

$\boldsymbol{xn}$, seja $\boldsymbol{o}$ o incremento de $\boldsymbol{x}$ e $(x+o)^n - x^n$ o correspondente incremento de $\boldsymbol{xn}$. Então a razão dos incrementos será $\mathbf{1}:\left[nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \ldots\right]$

Para achar a primeira e última razão faz-se desaparecer $\boldsymbol{o}$, obtendo a razão $\mathbf{1}:\left(nx^{n-1}\right)$. Aqui Newton realmente aproxima-se do conceito de **limite**, sendo a objecção principal o uso da palavra “desaparecer”.

Em quase todos os seus trabalhos que agora são considerados como Cálculo, Newton também não reconheceu o papel fundamental do **limite**. Para séries infinitas raciocinou da mesma maneira que para polinómios. Neste e na maioria dos outros trabalhos Newton negligenciou o **limite.** Por outro lado, nos seus *Principia*, Newton foi o primeiro a reconhecer que o **limite** deve ser o ponto de partida para problemas de tangência, quadratura, entre outros, e até tentou dar uma formulação precisa do conceito de **limite**. A genialidade de Newton foi ter descoberto o papel fundamental que o **limite** tinha que desempenhar no desenvolvimento lógico do Cálculo. E, apesar da sua linguagem arcaica, o início da definição moderna de **limite** estava presente nas suas afirmações.

Quando Newton publicou o livro *Principia*, um livro dificílimo, que poucos tinham condições de entender, Newton torna-se admirado rapidamente pelos matemáticos e filósofos mais importantes da Inglaterra. No continente europeu, os seus méritos vão sendo divulgados mais lentamente, sobretudo por influência do seu contemporâneo continental Leibniz (1646-1716).

Nesta sua obra magistral – Princípios Matemáticos da Filosofia Natural – uma das maiores que a inteligência do Homem produziu em todos os tempos, Newton apresenta as bases do que chama o *Método das primeiras e ultimas razões* e que não é outro senão o *Método dos **limites***.

Newton enunciou:

Lema I: ” *As quantidades, e as razões de quantidades, que tendem constantemente a tornar-se iguais num tempo finito, e cuja diferença, antes desse tempo, se torna menor que qualquer diferença dada, serão enfim iguais*”.[3]

Isto, é claro, é uma tentativa de definir o **limite** de uma função.

Este método nasceu já num ambiente de larga controvérsia a respeito de um método anterior – o dos *Indivisíveis*.

Em 1695, para grande desgosto de Newton (1642-1727), Wallis comunica-lhe que na Holanda o Cálculo é considerado descoberta de Leibniz e isto acarretou inúmeros factos desagradáveis mas provou-se que Newton foi o precursor. Morreu em 1727.

6.1. Método das fluxões

O Método das Fluxões criado por Isaac Newton foi uma das sistematizações das idéias correntes na época, sobre a constituição do Cálculo Diferencial e Integral, tal como conhecemos hoje.

Nos seus estudos estendeu e unificou vários processos de cálculo e com isso conseguiu uma grande façanha frente aos seus colegas que vinham durante muito tempo criando algumas formas de pensar e olhar para o cálculo. Entretanto, como ele próprio dizia: *“se consegui chegar tão longe, foi porque estava em ombros de gigantes”*[4], temos uma visão de que todos os estudiosos daquela época tiveram o seu merecimento na constituição do cálculo e que Newton foi um desses.

Ele relacionou o Cálculo com as noções de movimento na constituição do Método das Fluxões. Tinha os seguintes problemas nos quais desenvolveu a sua teoria. Iremos exemplificar estes problemas com a linguagem que temos hoje.

1. Se $s = f(t)$ é uma função, na qual t é o tempo e s é a distancia, qual é a velocidade?

Podemos notar neste problema que ele tinha a função e queria saber a velocidade, ou seja, a derivada.

2. Se $g(t) = \frac{ds}{dt} = v$ é uma função, na qual t é o tempo, s é a distância e v é a velocidade, qual é o valor de s ?

Podemos notar que aqui ele tinha a variação do espaço em função do tempo, e queria achar o espaço, ou seja, a integral.

Para Newton resolver estes problemas criou uma linguagem na qual definiu como já vimos fluentes e fluxões.

- x, y são fluentes: variáveis que aumentam ou diminuem em função do tempo;
- $\dot{x}$, $\dot{y}$ são fluxões: velocidades destas quantidades;

Usando as definições de Newton temos o seguinte problema:

Qual a relação entre as fluxões (velocidades/derivadas) das quantidades, quando temos uma relação entre seus fluentes (variáveis que aumentam ou diminuem em função do tempo conhecida)?

Dada uma função iremos demonstrar esta relação, chegando ao conceito conhecido hoje como derivada. O Método das Fluxões foi elaborado em 1671 numa época em que a Universidade esteve fechada pelo medo da infecção da peste que atingia a Inglaterra, tendo Newton abandonado Cambridge, e sem aulas ficou mais livre para as suas investigações.

Definindo algumas variáveis:

$o \rightarrow$ momento, infinitamente pequeno;

x, $y \rightarrow$ fluentes;

$\dot{x}$, $\dot{y} \rightarrow$ fluxões;

1. x é expresso pelo produto de sua velocidade ($\dot{x}$) por uma quantidade o infinitamente pequena (o): $x = \dot{x}o$
2. A relação abaixo, entre x e y, é válida em todos os instantes, logo temos que:

$$f(x,y) = 0 \qquad \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$$

pois o é infinitamente pequeno.

Iremos substituir os momentos das quantidades dos fluentes na equação abaixo:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y - \dot{y}o)^3 = 0$$

$$\left(x^3 + 2x^2\dot{x}o + x(\dot{x}o)^2 + x^2\dot{x}o + 2x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3\right) - \left(ax^2 + a2x\dot{x}o + a(\dot{x}o)^2\right) +$$

$$+\left(axy + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}\dot{y}o^2\right) - \left(y^3 + 2y^2\dot{y}o + y(\dot{y}o)^2 + y^2\dot{y}o + 2y(\dot{y}o)^2 + (\dot{y}o)^3\right) = 0$$

Eliminando os termos que são iguais a zero, temos:

$$-2y^2\dot{y}o - y(\dot{y}o)^2 - y^2\dot{y}o - 2y(\dot{y}o)^2 - (\dot{y}o)^3 = 0$$

Dividindo todos os termos por o, temos:

$$3\dot{x}x^2 + 3(\dot{x})^2 ox + (\dot{x})^3 o^2 - 2ax\dot{x} - a(\dot{x})^2 o + ax\dot{y} + ay\dot{x} + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3(\dot{y})^2 oy - (\dot{y})^3 o^2 = 0$$

Supondo que "o" (momento) é infinitamente pequeno, a fim de expressar os momentos das quantidades, os termos que contêm "o" como factor podem ser desprezados. Logo temos:

$$3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3\dot{y}y^2 = 0$$

$$\dot{x}\left(3x^2 - 2ax + ay\right) + \dot{y}\left(ax - 3y^2\right) = 0$$

$$\dot{x}\left(3x^2 - 2ax + ay\right) = -\dot{y}\left(ax - 3y^2\right)$$

$$\dot{x}\left(3x^2 - 2ax + ay\right) = \dot{y}\left(3y^2 - ax\right)$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Numa linguagem actual $\dot{y} = 3x^2 - 2ax + ay$ é a derivada da função em relação a y e $\dot{x} = 3y^2 - ax$ é a derivada da função em relação a x.

Com isso Newton chegou a uma relação entre os fluentes e as fluxões, ou seja, a derivação.

Percebemos que Newton estudou a sua função com duas variáveis. Hoje estudamos na recta primeiramente ou seja, uma variável e depois no espaço com duas variáveis, o contrário do que Newton fez.

Segundo Baron [3] as grandes contribuições de Newton para a constituição do cálculo foram:

1. o estabelecimento de uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser resolvidos;
2. o estabelecimento de que a integração e a diferenciação eram operações inversas considerando a ordenada móvel proporcional ao momento de fluxão de uma área;
3. o uso de uma linguagem algébrica e de técnicas analíticas frente à Geometria;

Newton, juntamente com Leibniz, é considerado o “inventor” do Cálculo, pois com estas três grandes contribuições enunciadas acima, se diferenciaram amplamente dos estudos de outros matemáticos como Cavalieri (1598-1647), Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1603-1677), Pierre Fermat (1601-1665) , Pascal entre outros (Baron, [3]).

As ideias de Newton foram desenvolvidas no século XVII, e outros grandes matemáticos no século XVIII e XIX trouxeram outras sistematizações para o conceito de Integração e Diferenciação. Assim podemos listar algumas diferenças entre o Cálculo de Newton e o Cálculo Moderno.

Segundo Baron [3] estas diferenças são:

1. Newton utilizava variáveis, e essas quantidades variáveis eram ligadas as curvas. O Cálculo moderno utiliza funções, aplicações de um conjunto (de números reais) em outro;

2. Ele considerava diferenciação a associação de uma variável finita a uma variável. No Cálculo moderno a operação de diferenciação associa à função a sua derivada;

3. Existiam problemas de Lógica no Cálculo de Newton sobre os seus conceitos fundamentais: fluxão (definida por razões últimas) e diferencial (como diferença infinitamente pequena). No Cálculo moderno

essas dificuldades lógicas são superadas pelo uso do conceito bem definido de **limite**.

Vimos que Newton nem tinha ainda a definição sistematizada de **limite** e as suas ideias eram elaboradas frente às variações entre variáveis. Os seus problemas eram relativos a relações de movimentos. Ou seja, a Matemática é vista por ele como uma forma de conhecimento de que o próprio investigador se apropria para resolver as suas dúvidas.

Necessitamos desmistificar a imagem da Matemática como uma Ciência, infalível, exacta e inatingível que muitas pessoas têm e construir uma "nova", na qual seja vista como uma das formas de conhecimento que o Homem constituiu.

Tendo um olhar histórico para o conhecimento matemático podemo-nos apropriar dos seus significados para usá-lo de forma crítica e reflexiva na nossa vida. Pouco importa sabermos resolver um integral triplo ou demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo se mal entendemos o seu conceito e no que e como utilizá-lo para resolver problemas e criar novas relações. Temos que procurar a compreensão e o entendimento entre a constituição e difusão dos conhecimentos.

Devemos estudar as diferentes formas de significações e constituições de conhecimentos ao longo da História da Humanidade, sempre tendo em vista o *conhecimento-emancipação,* possibilitando a procura de toda a Humanidade viver num mundo mais justo e solidário.

Essa é a eterna busca de um Educador Matemático.

7.LEIBNIZ

Nasceu em 1646 na Alemanha e morreu em 1716. Foi um Filósofo, Cientista, Matemático, Diplomata e Bibliotecário alemão. A ele é creditada a criação do termo "função", que usou para descrever uma quantidade relacionada a uma curva; como, por exemplo, a inclinação de uma curva ou um ponto qualquer de uma curva

Em Londres, compareceu a encontros da Royal Society, em que exibiu a sua máquina de calcular, sendo eleito membro estrangeiro da Sociedade. Desenvolveu algumas fórmulas elementares do Cálculo e descobriu em 1676 o Teorema Fundamental do Cálculo, que só foi publicado em 1677, onze anos depois da descoberta não publicada de Newton (1642-1727). No período entre 1677 e 1704, o Cálculo Leibniziano foi desenvolvido como instrumento de real força e fácil aplicabilidade no continente, enquanto na Inglaterra, devido à relutância de Newton em divulgar as suas descobertas matemáticas, o Cálculo continuava uma curiosidade relativamente não procurada.

Em 1684, quando Leibniz publicou o seu Cálculo e não mencionou os trabalhos de Newton, gerou-se uma disputa muito grande entre os dois matemáticos. Embora o método de ambos tivesse notações diferentes, eles resolveram os mesmos problemas. Para Newton, Leibniz tinha conhecimento do seu método, e deveria tê-lo citado no seu trabalho. Na primavera de 1711, Leibniz envia uma carta à Royal Society reivindicando a prioridade na invenção do cálculo. Havia alguns matemáticos que acreditavam que Leibniz tinha inventado o Cálculo, e outros que achavam o contrário: Leibniz teria sabido do método de Newton ainda na década de 1670, quando conversaram ou quando alguns matemáticos mostraram o manuscrito de Newton a outros matemáticos. Além disso, havia cartas trocadas com várias pessoas durante aquela década, nas quais Newton falava da sua **Teoria das Fluxões**.

Actualmente, através da análise de documentos que ambos deixaram, considera-se que Newton inventou a **Teoria das Fluxões** em 1665 e 1666. Leibniz desenvolveu independentemente o Cálculo Diferencial e Integral cerca de 10 anos depois, antes de saber da **Teoria das Fluxões**. No entanto, a disputa pública requeria um parecer da Royal Society e é difícil não admitir que ele se tenha valido da condição de presidente para obter a prioridade para si.

Existirá uma diferença entre os estudos de Newton e Leibniz? É esta a pergunta que nos surge agora.

8.NEWTON E LEIBNIZ

Newton e Leibniz chegaram ao Cálculo por caminhos diferentes, Newton utilizando conceitos mais ligados ao movimento e à continuidade e Leibniz com uma visão mais estática e discreta. Não é só diferente a linguagem com que ambos expressam as ideias fundamentais do Cálculo, mas também em termos de concepção pode-se verificar uma diferença entre os seus trabalhos. Tanto Newton como Leibniz podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da reciprocidade entre o Diferencial e o Integral, que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo. Mas a maneira de ver o Cálculo era distinta.

Newton e os seus seguidores basearam o seu estudo nas grandezas infinitesimais e **limites**, e por sua vez Leibniz e os seus seguidores basearam o desenvolvimento da teoria sobre os diferenciais infinitamente pequenos.

Podemos dizer que, em termos de tendência, ou estilo, Newton teria chegado ao Cálculo pela via do contínuo, e Leibniz, pela via do discreto. Ambas as maneiras de abordar o problema foram úteis porque como ainda não estava estabelecida a noção de **limite**, estas ideias surgiram no sentido de definir melhor o que eram os números reais e a ideia do **limite**.

Newton fez pouca referência aos infinitésimos chegando mesmo a sentir-se incomodado em interpretar as suas proposições em termos de grandezas infinitesimais, preferindo usar velocidades. Enquanto que Leibniz achava necessário os infinitésimos, e estudava-os através do diferencial.

Leibniz realizou a maior parte do seu trabalho isoladamente, mas há desacordo se ele "pediu emprestadas", ou não, algumas ideias de Newton. O que é certo é que ambos contribuíram imenso para o estudo da Matemática. O termo de Leibniz "Cálculo" perdurou, ao contrário do termo de Newton “fluxões”. Também as notações e símbolos de Leibniz são utilizadas ainda hoje, tais como dx e dy para diferenciação e $\int$ para integração, situação que não se verifica com as notações e símbolos de Newton.

Newton adoptou uma notação peculiar para representar este Cálculo, chamada "notação de Newton", que foi logo adoptada na Inglaterra, enquanto que a "notação de Leibniz" foi adoptada no Continente. Leibniz interpreta uma sucessão de números como uma sucessão de valores de uma função[3] e a diferença entre dois números como a diferença entre dois valores vizinhos de uma função usando a notação bem actual

$$\int dy = y.$$

Esta noção elegante e cómoda permitiu-lhe elaborar um método formal para calcular as somas dos seus infinitésimos.

Na primeira publicação de Leibniz sobre o seu cálculo diferencial “Nova methodres pró maimis et minimis…”(1684) o problema das tangentes leva Leibniz ao quociente $\frac{dy}{dx}$, em que dy e dx são grandezas infinitesimais, mas o seu quociente tem um valor finito. Consequentemente atinge a definição de diferencial, baseada na definição leibniziana da tangente, como a recta que une dois pontos infinitamente próximos.

Newton em “Quadratura curvarum”(1704) tenta eliminar toda e qualquer referência a infinitamente pequenos, em primeiro lugar considerando somente as suas relações, posteriormente usando o método das primeiras e últimas razões. O resultado $\frac{1}{nx^{n-1}}$ à que Newton designa por

[3] A ideia de função apareceu na Astronomia com Nicolau de Oresme (1325-1382), quando tenta representar graficamente a variação da latitude de um planeta em função da sua longitude.

"última razão das variáveis evanescentes " e que não é nada mais do que a razão das suas fluxões.

Para explicar a sua "última razão" ("grosso modo" o limite) Newton recorre a uma analogia com a Mecânica, considerando a velocidade de um móvel, atingido o que hoje se escreveria

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

A passagem seguinte dos "Princípios" esclarece esta aproximação entre o método de Newton e a actual concepção da derivada: "Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement les rapports de quantités ultimes, mais les **limites** vers lesquels les rapports de quantités, décroissant sans **limite**, s'en approchent toujours e vers lesquelles ils peuvent s'en approcher aussi près que toute différence donné, mais dont ils ne peuvent jamais les dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminués indéfiniment ".

Nascia assim o cálculo infinitesimal no último terço do séc. XVII, quer através do "método das fluxões" de Newton, quer pelas concepções do "cálculo diferencial" de Leibniz.

As fortes controvérsias entre Newton e Leibniz, relacionados com a prioridade da descoberta, levaram ao aparecimento de duas escolas:

A *escola inglesa* (Berkley, MacLaurin, Taylor, Simpson) tenta clarificar as noções básicas, pois, tal como dizia George Berkley, bispo de Cloyne, no seu "O analista, ou um discurso dirigido a um matemático infiel" a diferencial dx era nula ou não nula conforme as conveniências, o que deixou os matemáticos sem resposta até ao séc. XIX, quando Weierstrass (1815-1897), partindo do trabalho pioneiro de Bolzano (1781-1848) estabeleceu uma fundamentação completa e rigorosa para o cálculo infinitesimal, com base na definição actual de limite, como vamos ver mais à frente.

A *escola continental* representada fundamentalmente por Euler (1707-1783), tenta ligar o cálculo diferencial à ideia de função (que aliás Euler considerava somente como uma expressão analítica), o que era manifestamente agradável aos cálculos por vezes estranhos de Euler, mas que favorecia o seu tipo de tratamento formalista e com desenvolvimento em longa escala de algoritmos.

9.SEGUIDORES DE NEWTON

9.1.D'ALEMBERT

Jean le Rond d'Alembert nasceu em Paris a 16 de novembro de 1717 e morreu em Paris a 29 de Outubro de 1783. Foi um Filósofo, Matemático e Físico francês que participou na edição da Encyclopédie, a primeira enciclopédia publicada na Europa.

As suas pesquisas em Física relacionaram-se com a Mecânica Racional; princípio fundamental da dinâmica; problema dos três corpos; cordas vibrantes e hidrodinâmica.

Em Matemática estudou as equações com derivadas parciais; equações diferenciais ordinárias; definiu a noção de **limite**; inventou um critério de convergência das séries; demonstrou o teorema fundamental da Álgebra que afirma ter toda equação algébrica, pelo menos, uma raiz real ou imaginária (teorema de D'Alembert-Gauss).

D'Alembert (1717-1783) foi o primeiro a dar uma completa solução para o extraordinário problema da precessão dos equinócios. O seu mais importante trabalho, puramente matemático, foi sobre equações de derivadas parciais, particularmente em conexão com movimentos vibratórios.

D'Alembert achava que a "verdadeira metafísica" do Cálculo se encontrava na ideia de **limite**. No artigo sobre o "diferencial" que ele escreveu para a *Encyclopédie*, d'Alembert afirmou que "a diferenciação de equações consiste simplesmente em achar os **limites** da razão de diferenças finitas de duas variáveis na equação". Opondo-se aos pontos de vista de Leibniz e Euler, d'Alembert insistia que " uma quantidade é alguma coisa ou é nada: se é alguma coisa, não desapareceu ainda; se é nada, ela literalmente desapareceu. A suposição de que há um estado intermédio entre esses dois é uma quimera".

Esse ponto de vista excluiria a vaga noção de diferenciais como grandezas infinitamente pequenas, e d'Alembert mantinha que a notação diferencial é apenas uma maneira conveniente de falar que depende para sua justificação da linguagem de **limites**. O seu artigo na *Encyclopédie* sobre o diferencial referia-se à *De quadratura curvarum* de Newton, mas d'Alembert interpretava a frase de Newton " primeira e última razão" como um **limite** em vez de uma primeira ou última razão de duas quantidades que estão apenas a surgir. No artigo sobre "**Limite**" que ele escreveu para a *Encyclopédie* ele chamou quantidade ao **limite** de uma segunda quantidade (variável) se a segunda se pode aproximar da primeira mais perto que uma quantidade dada (sem coincidir com ela). A imprecisão nessa definição foi removida nas obras de matemáticos do século XIX.

Euler (1707-1783) pensava numa quantidade infinitamente grande como o recíproco de uma quantidade infinitamente pequena; mas d'Alembert, tendo posto fora da lei o infinitésimo, definiu o infinitamente grande em termos de **limites**. Uma linha, por exemplo, diz-se ser infinita em relação a outra se a sua razão é maior que qualquer número dado. Prosseguiu definindo quantidades infinitamente grandes de ordem superior de modo semelhante ao usado hoje ao falar de ordens de infinito em relação a funções. D'Alembert negava a existência do infinito actual, pois pensava em grandezas geométricas e não na teoria dos conjuntos proposta um século depois. A formulação de d'Alembert do conceito de **limite** não tinha a fraseologia clara que seria necessária para torná-la aceitável aos seus contemporâneos. Por isso os autores de textos do Continente no fim do século XVIII, em geral continuaram a usar a linguagem e concepções de Leibniz e Euler, de preferência às de d'Alembert .

9.2. CAUCHY

Nasceu a 1789 em Paris, logo desde cedo notou-se que tinha muito talento para a Matemática, contactou na sua juventude com Laplace (1749-1827) e com Lagrange (1736-1813). Enquanto jovem recebeu vários prémios em diversas competições, formou-se em Engenharia Civil e foi Professor e Investigador em Matemática.

Nesta época, as ideias sobre **limites** eram confusas, e Cauchy (1789-1857) estava a procurar uma exposição clara, rigorosa e correcta do Cálculo para apresentar aos seus alunos, e assim encontrou erros cometidos nos estudos de Lagrange. Nos seus livros e nas suas aulas Cauchy usou o princípio de **limite** como a base para introduções precisas à continuidade e convergência, à derivada, ao integral e aos outros conceitos do Cálculo, com uma definição moderna de **limite**. No entanto o estudo de Cauchy não foi muito rigoroso na aplicação da sua definição de **limite** a funções contínuas e à convergência de certas séries infinitas, tendo mesmo efectuado demonstrações incorrectas.

Foi um dos fundadores da teoria dos grupos finitos. Na Análise Infinitesimal, criou a noção moderna de continuidade para as funções de variável real ou complexa. Mostrou a importância da convergência das séries inteiras, com as quais o seu nome está ligado. Fez definições precisas das noções de **limite** e integral definida, transformando-as em notável instrumento para o estudo das funções complexas. A sua abordagem da teoria das equações diferenciais foi inteiramente nova, demonstrando a existência de unicidade das soluções, quando definidas as condições de fronteira. Exerceu grande influência sobre a física de então, ao ser o primeiro a formular as bases matemáticas das propriedades do éter, o fluido hipotético que serviria como meio de propagação da luz e ao estudar a elasticidade.

Inúmeros termos em Matemática levam o nome de Cauchy: o teorema da integral de Cauchy, a teoria de funções complexas, o teorema de existência de Cauchy-Kovalevskaya, as equações de Cauchy-Riemann e as sucessões de Cauchy. Ele parece ter produzido 789 trabalhos em Matemática, um feito realmente extraordinário.

Cauchy rejeitando o procedimento de Lagrange (1736-1813), através do Teorema de Taylor (1685-1731), tornou fundamental o conceito de **limite** de d'Alembert (1717-1783) mas deu-lhe um carácter aritmético mais preciso. Dispensando a Geometria e infinitésimos ou velocidades, deu uma definição de **limite** relativamente clara:

*Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele por tão pouco quanto se queira, este último chama-se o **limite** dos outros todos.*

Quando muitos outros Matemáticos anteriores tinham pensado num infinitésimo como um número fixo muito pequeno, Cauchy definiu-o claramente como uma variável dependente:

*Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando o seu valor numérico diminui indefinidamente de modo a convergir para o **limite** zero.*

No cálculo de Cauchy os conceitos de função e **limite** de função eram fundamentais. Ao definir a derivada de $y = f(x)$ com relação a x ele dava à variável x um acréscimo $\Delta x = i$ e formava a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Ele define o **limite** deste quociente quando i se aproxima de zero como derivada $f'(x)$ de y em relação a x.Relegava o diferencial a papel subsidiário, embora percebesse as suas vantagens operacionais. Se dx é uma quantidade finita, o diferencial dy de $y = f(x)$ é definido simplesmente como $f'(x)dx$. Cauchy deu também uma definição satisfatória de função contínua. A função $f(x)$ é contínua entre **limites** dados se entre esses **limites** um acréscimo infinitamente pequeno i da variável x produz sempre um acréscimo infinitamente pequeno $f(x+i) - f(x)$ da própria função. Lembrando a definição de Cauchy de quantidades infinitamente pequenas em termos de **limites**, a sua definição de continuidade é análoga à que usamos hoje.

Durante o século dezoito a integração tinha sido tratada como a inversa da derivação. A definição de Cauchy de derivada torna claro que a derivada não existirá num ponto em que a função seja descontínua; mas a integral poderá existir. Por isso, Cauchy definiu a integral definida em termos de **limite** de somas de modo que não difere muito do usado em textos elementares de hoje, só que tomou o valor da função sempre na extremidade esquerda do intervalo. Se

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

então o **limite** S desta soma S_n, quando os tamanhos dos intervalos $x_i - x_{i-1}$, decrescem indefinidamente, é a integral definida da função $f(x)$ no intervalo $x = x_0$ até $x = X$. É do conceito de Cauchy de integral como **limite** de soma em vez da antiderivação que provieram as muitas frutíferas generalizações da integral.

9.3. BOLZANO

A História da Matemática está repleta de casos de simultaneidade e quase simultaneidade de descobertas. A obra de Cauchy é outro exemplo, pois ideias semelhantes foram desenvolvidas mais ou menos ao mesmo tempo por Bernhard Bolzano (1781 – 1848); a semelhança entre suas aritmetizações do cálculo e as suas definições de **limite**, derivada, continuidade e convergência será apenas uma coincidência?

Do Paradoxo de Galileu (1564-1642) sobre a correspondência um-a-um entre inteiros e quadrados perfeitos, Bolzano prosseguiu mostrando que tais correspondências entre elementos de um conjunto infinito e um seu subconjunto próprio são comuns. Isto é, existem exactamente tantos números num segmento de comprimento de uma polegada quanto num de comprimento de 2 polegadas. Bolzano parece ter percebido até, por volta de 1840, que a infinidade de números reais é de tipo diferente da dos inteiros, sendo não enumerável. Tanto Gauss (1777-1855) como Cauchy parecem ter tido uma espécie de *horror infiniti*, insistindo em que não poderia existir um infinito total na matemática. Os seus trabalhos sobre "ordens de infinito" na realidade estavam muito distantes dos conceitos de Bolzano, pois dizer como Cauchy disse essencialmente que uma função infinita g é infinita de ordem n com relação a x se $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x^n} = k \neq 0$ é muito diferente de fazer uma afirmação sobre correspondência entre conjuntos.

Embora muitas teorias tenham sido estudadas por Bolzano (1781-1848), d'Alembert (1717-1783), Gauss e outros é o nome de Cauchy (1789-1857) que aparece hoje ligado a elas. Por exemplo em relação às séries infinitas apesar de esforços da parte de Gauss e Abel (1802-1829), foi em grande parte através de Cauchy que a consciência matemática foi despertada no que se refere à necessidade de ter em atenção a convergência. Tendo definido que uma série é convergente se, para valores crescentes de n a soma

S_n dos n primeiros termos tende para um **limite** S , a soma da série, Cauchy provou que uma condição necessária e suficiente para que uma série infinita convirja é que, para um dado valor de p , o tamanho da diferença entre S_n e S_{n+p} tenda para zero quando n cresce indefinidamente. Esta condição para "convergência dentro de si" tornou-se conhecida como critério de Cauchy, mas parece que Bolzano já a conhecia (e talvez Euler (1707-1783) ainda antes).

Também devido a Cauchy, mas mais conhecido sob a forma dada pelos matemáticos franceses Briot e Bouquet em 1854, é o método de majorantes, que Cauchy intitulou "*calcul des limites*".

9.4.WEIERSTRASS

Karl Weierstrass (nasceu a 1815 e morreu a 1897 em Berlim) foi um Matemático alemão, Professor na Universidade de Berlim. O seu trabalho forneceu as bases da teoria das Funções Analíticas. Weierstrass foi um pioneiro da moderna Análise Matemática.

No seu trabalho para dar à Análise Matemática um fundamento lógico, Weierstrass desenvolveu as definições modernas de **limite** e de continuidade.

Weierstrass tentou separar o Cálculo da Geometria, baseando-se apenas no conceito de número. Para isso foi necessário definir número irracional independentemente de **limite**. Chegou à conclusão da existência de um **limite** de uma sucessão convergente e definiu número irracional como sucessão ordenada de um conjunto de racionais, contribuindo não só para a definição de número real mas também para um melhor conceito de **limite**, que é em essência o que temos hoje.

Para corrigir o erro lógico de Cauchy, Weierstrass (1815-1897) decidiu a sucessão como o número ou **limite**. A concepção de Weierstrass é demasiado subtil para ser apresentada aqui, mas em forma consideravelmente simplificada podemos dizer que o número $\frac{1}{3}$ não é **limite** da série $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots+\frac{3}{10^n}+\ldots$; ele é a sucessão associada a essa série.

9.4.1.Definição de limite segundo Weierstrass

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a, podendo não estar definida no ponto a. Seja b um número real. Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é b , se e só se, para todo o $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um número $\delta > 0$ tal que, para todo o x do domínio de f, se x é tal que $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x)-b| < \varepsilon$. Simbolicamente

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} : \forall_{x \in Df} \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

A definição de Weierstrass que afasta os infinitésimos dos métodos da Análise na definição de **limite** de uma sucessão, continuidade, continuidade uniforme, derivada, etc., seguindo o axioma arquemidiano: qualquer número é arquimediano logo não há infinitésimos. Aliás Weierstrass fica neste aspecto muito perto do método de exaustão. Usando argumentos logicamente impecáveis (por vezes com um certo pedantismo, como Davis e Hersh referem na “Experiência Matemática”), esquece que o uso de infinitésimos nos poderá dar a resposta correcta e não demonstra interesse por um tipo de raciocínio que conduz a soluções correctas, embora não justifique alguns conceitos que emprega.

É certo que houve matemáticos que somente por razões místicas preferiram os infinitésimos, como por exemplo Nicolau de Cusa (1401-1464), aliás cardeal da Igreja, Kepler o eterno místico, e também Pascal que usa os infinitésimos como mistérios que deveriam ser admirados e não estudados (estranha posição de um cientista).

Conhecedor dos problemas de Newton e Leibniz, que tentaram sempre evitar os infinitésimos, depois das críticas iradas do bispo Berkeley (1683-1753), analista brilhante e critico devastador do método infinitesimal. Berkeley afirmou não compreender qual a razão pela qual os matemáticos (neste caso Halley (1656-1742), Newton e Leibniz) chegaram a conclusões em que certos termos eram desprezados por serem “muito pequenos”. Para ele essas conclusões eram simplesmente aproximações e nunca poderiam ser os resultados correctos. E se os matemáticos acreditavam nisso, não percebia a razão pela qual esses mesmos matemáticos, que usavam esses processos, afirmavam que as doutrinas do Cristianismo eram inconcebíveis.

É certo que Leibniz nunca afirmou que os infinitésimos “realmente” existiam, tendo somente dito que se podia raciocinar como se eles existissem e também posteriormente, e para evitar contradições nos Fundamentos da Matemática, os matemáticos do séc. XVIII seguiram o exemplo dos Gregos tornando os infinitésimos “ilegais”.

Mas Weierstrass para determinar a velocidade instantânea coloca de lado qualquer tentativa de calcular a velocidade como um cociente, definindo-os como um **limite** que é aproximado por razões de acréscimos finitos.

A argumentação de Weierstrass tem sucesso pois remove qualquer referência a números que não sejam finitos. Também evita fazer $\Delta t = 0$ no cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, removendo assim os argumentos lógicos tremendamente pertinentes do bispo Berkeley. Mas para isso há um preço que Weierstrass obriga a pagar a velocidade instantânea com noção intuitiva, clara e fisicamente mensurável fica sujeito à sua nova e subtil definição de **limite**.

A reconstrução da Análise com base no conceito de **limite** de Weierstrass, acaba por transformar a Análise numa surpreendente Aritmética de Números Reais. Surge novamente o problema tratado cerca de dois mil anos antes pelos Gregos (ou melhor, abandonado): o problema dos irracionais.

9.4.2.A construção dos Números Reais

A reformulação da Análise baseada nos trabalhos de Bolzano, Cauchy e finalmente Weierstrass, acaba por empreender a construção da Análise sobre a Aritmética, ou seja, sobre o número. Ora na segunda metade do séc. XIX ainda não era conhecida uma teoria dos números reais: era o problema dos irracionais.

Como refere Edward Nelson em "Confession of na Apostate Mathematician", foi Eudoxo (408-355 a.C.) quem eliminou o dualismo entre número e grandeza. A sua ideia foi: em lugar de dizer qual é a razão de duas grandezas, basta definir a noção de duas dessas (possivelmente não existente) razões como sendo iguais, o que ele fez por meio de uma quantificação sobre todos os números Pitagóricos (quantificação aliás bastante subtil). Embora tudo isto faça parte dos "Elementos" de Euclides, nem Galileu se apercebeu ou compreendeu a ideia que poderia ser a base de construção do sistema dos números reais, pois um real não é um rácio.

Até que R. Dedekind (1831-1916), ao leccionar cálculo diferencial e integral, encontram fundamentos, puramente aritméticos e no entanto rigorosos, para a Análise Infinitesimal. Considerando o conjunto Q dos números racionais a sua abordagem constitui um retorno às noções eudoxianas que tratavam o problema dos rácios usando o conceito de grandeza (contínuo) e o conceito de número (discreto). Dedekind escreve (1876): "Admito como base a Aritmética dos números racionais, suposta bem fundamentada e nenhuma outra; mostro que, sem misturar coisas estranhas, se pode constatar no domínio dos números racionais num fenómeno que pode ser usado para completar esse domínio com uma criação única de números irracionais".

O fenómeno de que fala Dedekind é o Corte e prova que a todo o corte corresponde um número e um só, racional ou irracional. Definindo uma relação de ordem entre os cortes, verificam-se propriedades que fazem dos racionais e dos irracionais um corpo totalmente ordenado que é o conjunto dos números reais IR. Mais, Dedekind mostra que o domínio dos números reais não é extensível repetindo a operação de corte, isto é, a partir de Q, usando a operação de corte, somente se encontra IR.

A crise dos irracionais, que se mantinha desde os Gregos, parece ter ficado assim completamente resolvido ao fim de cerca de dois mil anos. Por outro lado ficam assegurados os fundamentos da Análise à Weierstrass em termos autónomos e sem recurso à Geometria.

Surgem as axiomáticas dos números reais e aparece qualquer coisa de novo dentro da Lógica Matemática: a Lógica Simbólica. Verifica-se em seguida que essa Lógica fornece uma fundação conceptual para a Teoria da Computação, sendo o elo de ligação entre Lógica e Computação a

Linguagem Formal. Estavam as portas abertas para um tipo diferente de Análise.

Outros matemáticos construíram os reais seguindo caminhos diferentes (Cantor e Hilbert).

E ficava um resultado à primeira vista excelente: *O contínuo (no nosso caso* $\mathbb{R}$*) pode ser construído a partir do discreto aritmético.*

10.SEGUIDORES DE LEIBNIZ

10.1.ROBINSON

Abraham Robinson nasceu em 1918 nasceu na Alemanha e morreu em 1974 nos E.U.A.. Era um matemático alemão que ficou conhecido pelo desenvolvimento da Análise Não-Convencional, um sistema matemático rigoroso no qual o infinito e o infinitésimo foram incorporados na Matemática.

Robinson estava fortemente interessado na História e nos Fundamentos da Matemática, e começou a estudar os trabalhos de Leibniz onde tomou conhecimento da afirmação de Leibniz de que se poderiam raciocinar em termos da existência de infinitésimos sem qualquer incorrecção.

Leibniz pensava nos infinitésimos como sendo números infinitamente pequenos (positivos e negativos) que ainda tinham as mesmas "propriedades" dos números ordinários da Matemática. Mas ao mesmo tempo Leibniz pensava que essa sua ideia era anticontraditória: como poderiam os infinitésimos ser positivos e simultaneamente mais pequenos do que qualquer outro número positivo?

Em 1966, Robinson com a publicação do seu livro ``Non-standard Analysis" recupera a noção de infinitésimo informalmente introduzida nos trabalhos de Newton e Leibniz e, com o auxílio dos métodos da Lógica Moderna e da Teoria de Modelos, cria os fundamentos do que hoje é conhecida por Análise Não-Convencional.

Com a Análise Não-Convencional demonstrou que o conjunto dos números reais pode ser considerado um subconjunto de um conjunto maior de números que contém infinitésimos e também operações aritméticas definidas apropriadamente. Assim é criado um corpo (o conjunto dos números *hiper-reais*) mais amplo que o conjunto dos números reais, que contém identidades cujo valor absoluto é mais pequeno que qualquer elemento positivo dos números reais – *os infinitésimos*. Além dos infinitésimos também contém números *infinitos.*

E para os fins que tinha em vista recorreu à Lógica Matemática efectuando os seus estudos com base nos modernos teoremas da Lógica, nas enormes transformações que as Axiomáticas sofreram e sobretudo nas actuais linguagens formais.

11.ANÁLISE NÃO-CONVENCIONAL

Os conceitos de "infinito" e "infinitésimo" em matemática remontam a mais de dois mil anos. Até ao aparecimento da Análise Não-Convencional, no século XX, no entanto, os raciocínios baseados nesses conceitos foram quase sempre fonte de controvérsia. Este facto levou a que os "números" infinitesimais tivessem uma existência quase sempre polémica, embora o seu uso nunca tenha sido deixado de constituir uma ferramenta útil na prática, por exemplo, por físicos e engenheiros.

No tempo dos Gregos, os infinitésimos já tinham uma conceptualização. No tratado "O Método" (que já referimos), que se manteve desconhecido até o início do século XX, Arquimedes afirmava que também usava infinitésimos nos seus trabalhos, não para demonstrar resultados, mas sim para descobri-los. Já na Europa do século XVII, os números infinitesimais foram utilizados como ferramenta porém sem uma fundamentação. Foi com Newton e Leibniz como vimos que o Cálculo conheceu a sua primeira formulação geral, e foram feitas as primeiras aplicações desta nova técnica tanto à Matemática como a outras Ciências, particularmente à Física e à Astronomia. Leibniz defendia, para o estudo do cálculo, a adopção de um sistema numérico mais amplo que os números reais, que incluísse números "ideais" infinitos (infinitamente grandes e infinitamente pequenos) e infinitesimais e no qual continuassem a verificar-se as leis usuais dos números ordinários. Portanto Leibniz está na origem da Análise Não-Convencional, não só porque defendia o uso de números infinitos e infinitesimais para o desenvolvimento do Cálculo, mas também pelo facto de que, sendo um precursor da Lógica Matemática, está na origem do instrumento matemático que viria a servir para justificar plenamente a legitimidade daquele tipo de quantidades: a Teoria dos Modelos de Tarski. Esta teoria que analisa as relações existentes entre uma estrutura matemática concreta e a sua teoria, no sentido formal do termo, constitui um desenvolvimento no século XX da Lógica Matemática que se revelou crucial para a fundamentação da noção de infinitésimo.

A utilização de números infinitos e infinitesimais persistiu durante todo o século XVIII e parte do seguinte. Euler (1707-1783), Johann Bernoulli (1667-1748), Lagrange (1736-1813), D'Alembert (1717-1783), Bolzano (1781-1848) e Cauchy (1789-1857), por exemplo, não só obtiveram excelentes resultados usando números infinitos e infinitesimais, como ainda se empenharam, sem contudo conseguir, em dar uma fundamentação lógica destes números. Já no século XIX, com a evolução do rigor da Análise, e uma boa definição de limite dada por Cauchy e Weierstrass (1815-1897), estes elementos estranhos ao conjunto *IR* foram banidos de forma geral da matemática, embora a referência a infinitésimos tenha persistido até os dias de hoje em textos de outras disciplinas científicas que fazem grande uso do Cálculo, como é o caso da Física.

Robinson (1918-1974) iniciou a construção da chamada Análise Não-Convencional em 1961 com o artigo do mesmo nome, onde pela primeira vez, demonstrou que o conjunto dos números reais pode ser considerado um subconjunto de um conjunto maior de números que contém infinitésimos e também operações aritméticas apropriadamente definidas, as quais satisfazem todas as regras aritméticas obedecidas pelos números reais padrão. Posteriormente, no já célebre livro também de título Análise Não-Convencional, publicado em 1966 na colecção "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics" da editora North-Holland Publishing Company, Abraham Robinson mostrou como se pode aplicar, com vantagem, os métodos da Análise Não-Convencional a muitas áreas distintas da Matemática. Contudo, foi o estudo e desenvolvimento do Cálculo Elementar aquela que maior interesse gerou na comunidade científica, embora possa não ser a aplicação mais significativa e de consequências mais fecundas, pois, pelo facto de envolver infinitésimos, permite estudar fenómenos físicos discretos como movimentos brownianos e outros processos estocásticos.

Para o grande lógico Kurt Gödel (1906-1978), "existem boas razões para acreditar que a Análise Não-Convencional, de uma maneira ou de outra, será a Análise do futuro".

A Análise Não-Convencional tem-se revelado uma técnica importante numa grande quantidade de áreas da Matemática tanto pura quanto aplicada.

Assim surgem com o conjunto dos números hiper-reais, poderosas propriedades e princípios de raciocínio que incluem a aproximação e o princípio da transferência, a relação entre a medida de Lebesgue em *IR* e uma medida de contagem não standard chamada de medida de Loeb e os infinitésimos e o conjunto dos hiper-finitos são novos objectos de interesse matemático.

Da mesma forma que construímos o conjunto dos números reais a partir dos racionais (na visão ortodoxa, os números reais são criados a partir dos números racionais por uma construção limite, na qual juntamos pontos representando certas classes de equivalência de sucessões de Cauchy), utilizando sucessões de Cauchy, é possível construir o conjunto dos números hiper-reais a partir dos reais, neste caso, levando em conta o comportamento **assintótico** das sucessões.

Esta análise fornece uma visão ampliada do ambiente matemático, além de representar outro estágio na consideração de novos sistemas numéricos, o que é um “salto” significativo na história da Matemática.

11.1.Números Hiper-reais Finitos

A fundamentação da Análise Não-Convencional é de alguma forma subtil: ela possibilita-nos escrever definições de maneira muito natural e intuitiva. Por exemplo:

Para todo x real (convencional ou não), diz-se que :

• x é finito se, e somente se, existe um inteiro natural maior que $|x|$;

• x é infinito se, e somente se, $|x|$ é maior que qualquer inteiro natural;

• x é infinitesimal se, e somente se, seu valor absoluto é menor que $\frac{1}{n}$ para todo o inteiro natural n;

• x é infinitamente próximo de y se, e somente se, $x - y$ é infinitesimal.

Ao contrário dos inteiros, os números hiper-reais finitos não são necessariamente números reais convencionais, mas estão infinitamente próximos de um único número real convencional.

Grande parte da Análise dita Clássica pode ser formulada e deduzida de um modo mais simples com recurso a estas entidades não convencionais.

Poderemos dizer que a consideração de números não convencionais não é mais do que uma generalização do conceito de número, na qual ficam incluídos os números infinitamente pequenos e os infinitamente grandes.

Poderá dizer-se que esta generalização é correcta?

Em qualquer generalização do conceito de número é preciso atender em primeiro lugar à realidade (seja o que for que se entenda por realidade) e em segundo lugar ao princípio de Hankel: o novo conceito de número não deve complicar as operações já conhecidas e trabalhadas ao longo dos anos. No que respeita à realidade, teremos de atender à chamada realidade física.

A Física utiliza largamente as Matemáticas, mas é antes de mais " a ciência de aproximação": as leis que ela enuncia nunca regem senão um só domínio de fenómenos naturais, domínio esse que é delimitado pela precisão das medidas e da escala de grandeza.

Por razões históricas, os matemáticos rejeitaram qualquer consideração de escala de grandeza entre os números e colocaram-nos todos num pé de igualdade, o que de certa forma constitui uma decisão arbitrária. Assim, eles recusaram a questão todavia pertinente: como distinguir os números “pequenos” que podem ser negligenciados e aqueles que devem ser tidos em consideração? Isto leva a uma contradição permanente entre a Física e a Matemática.

Numa tentativa de fornecer uma solução para essa contradição, Abraham Robinson, em 1960, estabeleceu o que hoje chamamos de Análise Não-Convencional. Graças a ela, o manuseamento das quantidades ditas “ infinitamente pequenos”, torna-se operatória para aqueles que trabalham sobre problemas “empíricos”.

As Matemáticas que em geral são apreendidas no liceu e na universidade têm um grande defeito: elas excluem completamente qualquer consideração da escala de grandeza; por exemplo, para elas, não há nenhuma diferença qualitativa entre os números tais como $1, \frac{1}{100}, 10^{-100}, 10^{-1000}$. Esta lacuna provém de que estas Matemáticas, ou mais precisamente o Cálculo Infinitesimal que eles induzem, é todo ele fundado no conceito de **limite**. Antes de trabalhar em termos de **limite**, os Matemáticos recorriam aos infinitamente pequenos e aos infinitamente grandes (l’Hospital, Leibniz,…); é o fracasso de todas as tentativas de teorização destes infinitamente pequenos que levou D’ Alembert e Lagrange, e depois Weierstrass e Dedekind, a rejeitá-los em prol do conceito moderno de limite, considerado assim como “remédio” para este mal que era a falta de rigor. A incapacidade de distinguir ordens de grandeza diferentes é um efeito secundário deste remédio. Não devemos negligenciá-lo. De facto, as matemáticas têm na nossa cultura um campo de aplicação muito vasto; o Físico ou o Engenheiro praticam-nas tanto como o Matemático. Mas, nas ciências da natureza, a consideração de ordens de grandeza diferentes e comparáveis é, sem dúvida, a mais incontornável, quer para o Físico, quer para o Engenheiro e o remédio parece ser pior que o mal.

11.2. Um deplorável divórcio

E é assim que há mais de um século, e de maneira ainda mais flagrante há já 40 anos, o divórcio é consumado: dum lado, os matemáticos puros que perseguem os seus próprios problemas e de outro físicos que ignorando D'Alembert e sobretudo Weierstrass e Dedekind, continuam a praticar o cálculo dos infinitamente pequenos "troçando" do rigor matemático, aos seus olhos puramente ideológico. Este divórcio é hoje bem aceite como uma fatalidade que se faz por esquecer. Parece que há uns anos, numa certa escola, físicos tinham confiado a um matemático o ensino da Análise Matemática no domínio da Física. Ficaram desolados quando se aperceberam que os primeiros meses deste ensinamento tinham apenas servido para chegar à fórmula de Stokes (que eles demonstravam com os seus infinitamente pequenos em cinco minutos), enquanto os estudantes ignoravam ainda os métodos matemáticos mais indispensáveis à Física. Podem acreditar que esses físicos nunca mais devem ter repetido o convite. Assim, desde essa altura os ensinamentos das matemáticas para físicos são assegurados por físicos. Quanto à frustração daí resultante, exorcizámo-la por uma profusão de discursos oficiais exaltando a pluridisciplinaridade e a abertura.

Torna-se inevitável, quando contemplamos esta situação, considerá-la estranha e paradoxal. Antes de mais, devido ao facto da prática dos Matemáticos se ter largamente expandido, os matemáticos propriamente ditos (puros!) são minoritários e por conseguinte também os seus critérios de rigor. De modo que a esmagadora maioria dos praticantes aplicam uma Matemática concreta, onde o essencial do Cálculo consiste em saber negligenciar judiciosamente as grandezas que podemos considerar como pequenas, enquanto uma minoria ligada a dogmas duvidosos, constrói teorias de uma sofisticação por vezes extrema e que só serve para justificar, segundo os seus próprios critérios, os resultados precedentes. O cálculo dos infinitamente pequenos funciona muito bem apesar da sua reputação de não rigor. Este último paradoxo lembra outro, totalmente semelhante: o Cálculo simbólico do Engenheiro Heaviside, um Método de resolução das Equações Diferenciais-lineares, que era "absurdo" (para os matemáticos) mas perfeitamente operacional. A Teoria das Distribuições, inventada pelo matemático Laurent Schwartz (1915-2002) permite explicar e alargar o funcionamento, mas chegou bem mais tarde; é por isso que Laurent Schwartz escreveu sobre este assunto: " Como explicar o sucesso destes métodos? Quando uma tal situação contraditória acontece, é bem provável que resulte dela uma nova Teoria Matemática que justifique, numa forma modificada, a linguagem dos físicos." Assim, a clarividência de Laurent Shwartz confirma-se uma vez mais; porque se o cálculo empírico dos infinitamente pequenos, universalmente praticado, sempre teve sucesso, podemo-lo justificar por uma nova teoria matemática. Esta teoria, parece ser a Análise Não-Convencional, criada por Abraham Robinson.

O destino desta teoria reproduz um esquema clássico bem conhecido dos historiadores da ciência: após um período de vinte anos onde ela não foi senão motivo de sarcasmos (pelo menos em França), bruscamente, e mais recentemente, tornou-se o tema da moda nos matemáticos (nomeadamente em França, em virtude duma correlação que não surpreenderá ninguém). Podemos observar aí um método "misterioso" com "poderes ocultos" que a imaginação torna ilimitados. O seu próprio nome, cuja etimologia é prosaica, tem conotações quase mágicas: Não-Convencional, o que evoca o estranho, o anormal, o fora do comum. Várias vezes ao expor métodos e aplicações desta teoria, encontra-se um auditor um pouco decepcionado ao descobrir até que ponto isto tudo é racional e por isso imensamente limitado. Há assim qualquer coisa que agradará ao romântico: a Análise Não-Convencional é uma descoberta que põe em questão um certo número de ideias todas elas relativas à natureza do conhecimento matemático; ela é a erupção de uma realidade (veremos mais abaixo qual é) num pequeno mundo que tudo fez para a afugentar. Do ponto de vista do historiador das ciências, o seu destino é característico destas descobertas a que nós chamamos revoluções científicas, porque elas tocam os fundamentos do saber estabelecido, por oposição às descobertas esperadas (por vezes há já alguns séculos); que responde às perguntas colocadas pelo dito saber sem deixar de fora a problemática.

Em Matemática são bem conhecidos os três pontos de vista que a tentam "explicar":

a) O Realismo que desde a Irmandade Pitagórica dá um significado real, objectivo aos objectos matemáticos: é a Matemática Clássica fundada na realidade Pitagórica ou como é mais conhecida, Platónica (Platão (427 a.C.-347 a.C.) que aprendeu com a Irmandade Pitagórica e subscreveu as respectivas ideias).
b) O Intuicionismo de L.E.J.Brower (1886-1966) e que é uma forma de construtivismo: qualquer ser matemático existe se e só se o soubermos construir. É um ponto de vista muito arrogante para uma disciplina com as características que a maior parte dos matemáticos pretendem que tenha.
c) O Formalismo defendido por David Hilbert (1862-1943) que menospreza a relevância da verdade, tal como a entendemos em Semântica, para a Matemática. Se a sintaxe estiver correcta a semântica é irrelevante. E a Matemática funciona, embora não haja qualquer evidência da verdade da religião matemática de Pitágoras.

E é nesta zona que vamos encontrar a Análise Não-Convencional.

11.3. Como definir de maneira rigorosa os "infinitamente pequenos"?

A melhor maneira de compreender o que há de novo é provavelmente perceber porque razão o antigo cálculo dos infinitamente pequenos abortou. Podemos reter as duas principais críticas que acabaram por lhe dar razão. A primeira foi formulada por Berkeley (1683-1753): analisando os raciocínios seguidos por Leibniz e Newton e seus seguidores, ele constatou que se uma grandeza dx é infinitamente pequena, seguramente $2dx, 3dx$ são também infinitamente pequenos; mas $\left(\frac{1}{dx}\right) dx$ já não é. Ora os matemáticos sempre foram incapazes de estabelecer uma regra rigorosa, permitindo decidir para que valores do número n, ndx é infinitamente pequeno. Poderíamos mesmo precisar este argumento da seguinte maneira: para um inteiro n, assaz grande, ndx deixa de ser infinitamente pequeno; se experimentarmos sucessivamente todos os inteiros n de 0 a n, passaremos inevitavelmente por um inteiro n_0, para o qual n_0dx será infinitamente pequeno, mas não $(n_0 + 1)dx = n_0dx + dx$, e assim teríamos dois números infinitamente pequenos cuja soma já não é, o que destrói toda a possibilidade de encontrar uma regra coerente. A segunda crítica é filosófica e emana de racionalistas, como d'Alembert e Lagrange: os infinitamente pequenos, segundo a definição dos seus partidários, são " mais pequenos que todas as grandezas observáveis ainda que não nulos". Eles são por isso, eles próprios, por natureza, inobserváveis, ou seja, que não se podem observar; enfim, grandezas metafísicas. Leibniz, metafísico estava felicíssimo; mas imaginem o ar dos enciclopedistas.

O Cálculo dos infinitamente pequenos criado por Abraham Robinson parece responder de maneira incontestável a todas estas objecções: para o compreender uma pequena reflexão sobre a natureza dos números é entretanto necessária. Nem toda a gente tem a mesma ideia sobre esta questão. Para a maioria dos praticantes do Cálculo Numérico, um número, é uma fila de alguns algarismos com vírgula. Para os matemáticos puros da escola formalista, é uma coisa (se assim podemos dizer) tão abstracta que não pode ser posta aqui em questão. Mas, na prática, para o matemático, um número só é inteiramente definido pela caracterização infinita de todos os seus decimais. Contudo, exactamente como acontece no ecrã das nossas calculadoras, uma sucessão infinita de decimais não pode ser escrita; só podemos assim especificar um número se lhe dermos uma lei que governe a formação de decimais sucessivos, uma lei que por seu lado possa ser descrita. Essa lei chama-se um algoritmo, e pode sempre traduzir-se sob a forma de um programa de computador.

Os números que medimos nas ciências experimentais nunca são definidos para além da incerteza ligada à medida, e os instrumentos mais minuciosos da nossa época não permitem ultrapassar, digamos, um determinado algarismo; se o conseguirmos atingir deve ser considerado uma verdadeira proeza. Por outro lado, quando um número é definido abstractamente por um algoritmo de cálculo, só a potência dos computadores limita o número de decimais; calculamos assim mais de um milhão de decimais para π.

Tal como para os números, podemos definir funções por um algoritmo; este deve dar seguimento às operações a efectuar para, conhecendo os n primeiros números da escrita decimal dum número x , deduzir os n primeiros decimais do valor x através da função. O célebre desenvolvimento em série da função exponencial,

$Exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ é um exemplo dum tal algoritmo.

11.4. Números acessíveis por um algoritmo

A Análise Matemática é a ciência que tem por objecto de estudo números e funções independentemente dos algoritmos que os definem (não esquecendo que algoritmos diferentes podem dar o mesmo número ou a mesma função). Podemos também adicionar, multiplicar ou dividir números ou funções dadas por um algoritmo: basta para isso desenvolver conjuntamente os dois algoritmos dados, juntando simplesmente em cada etapa, a soma, o produto ou o quociente a efectuar, o que constitui um novo algoritmo.

É assim possível, em particular, para cada número positivo x definido por um algoritmo, definir o número $\frac{x}{2}$ por um algoritmo diferente (juntando apenas uma instrução). Os antigos viam nesta propriedade dos números um argumento contra a existência dos infinitamente pequenos, porque se considerarmos metade de um número qualquer, depois metade desta metade e assim sucessivamente, obtínhamos uma sequência de números cada vez mais pequenos de tal maneira que só o número zero é o mais pequeno de todos estes. Não havia lugar para números não nulos e contudo mais pequenos que todas estas metades. Neste raciocínio, os antigos punham estes números (ou todos os algoritmos) sob o mesmo pé de igualdade, e esqueciam-se que os algoritmos não são sempre simples. De facto, no meio de todos estes algoritmos possíveis, concebemos que, se alguns, se enunciam facilmente, outros são tão complexos que seria necessário centenas ou mesmo milhões de anos só para os executar; e se pensarmos bem, concluímos que, no fundo, os algoritmos que nós somos capazes de descrever (já não falo em executar) são casos particulares extremamente raros e privilegiados.

Somos assim levados a estabelecer uma discussão qualitativa entre os números ou funções consoante eles podem ser descritos por algoritmos humanamente acessíveis ou ao contrário unicamente por algoritmos tão complicados que nenhum homem ou nenhuma máquina criada pelo homem saberia descrever, nem tão pouco executar. Chamaremos convencionais aos números ou funções de primeira espécie, e não-convencionais aos de segunda espécie. Assim, parece que todos os números ou funções, digamos clássicos são por definição convencionais; já que os não-convencionais são-nos por natureza inacessíveis. Pode então, existir um número inteiro tão grande que seremos para sempre incapazes de definir com precisão (tal descrição seria em principio possível, mas poderia levar milhares de anos). Voltemos novamente à sequência dos números obtidos tirando de cada vez metade do precedente; quando acrescentamos ao algoritmo inicial a instrução $\frac{1}{2}$, não se juntando nada à sua complexidade; nem quando lhe acrescentamos a instrução "multiplicar dez vezes, ou cem vezes seguidas por $\frac{1}{2}$ e repetir indefinidamente" que é tão fácil de enunciar mas que já diz respeito à palavra infinito conduzindo ao resultado zero. Porém, acrescentamos muito à sua complexidade se lhe juntarmos a instrução "multiplicar w por $\frac{1}{2}$", onde w é não-convencional, porque ela tem obrigatoriamente que conter um sob-programa para o cálculo de w; e assim o resultado final do algoritmo já não seria zero que obtemos recorrendo ao "infinito", mas um número infinitamente pequeno e não nulo, por isso não-convencional.

11.5. Distinguir factos, teorias…e fantasmas

Uma das objecções que alguns matemáticos profissionais não se esquecerão de levantar poderá ser a seguinte: a "Análise Não-Convencional", é apenas uma metáfora cómoda, excelente para a vulgarização, mas cientificamente inexacta. Além disso parece querer menosprezar o conceito de **limite**, o que não é verdade, como já foi dito. Esta interpretação é incorrecta, porque, o que há de efectivamente real, cientifico e por isso rigoroso são estas observações incontestáveis: os números e as funções são entidades que definimos por um algoritmo de cálculo, e estes algoritmos podem ter todos os graus de complexidade possíveis, e só os mais simples nos são acessíveis.

Outros dirão quanto às diferentes teorias matemáticas conhecidas sob o nome de "Análise Não-Convencional" que são apenas teorias, que dão conta de factos precedentes com mais ou menos felicidade, veiculando um certo número de pressupostos filosóficos do tipo especulativo (que tem por efeito torná-las áridas independentemente da sua eficácia operacional). Esta objecção é só o reflexo de uma forma de espírito assaz típico nos matemáticos: tomar a teoria por realidade, e a realidade por um "fantasma" como diz Jacques Harthong num artigo publicado em 1983 na revista "La Recherche" (nº148, Outubro de 1983).

11.6. Carácter relativo da noção do contínuo

Esta maneira de conceber os infinitamente pequenos ou os infinitamente grandes é perfeitamente lógica e rigorosa, mas exige evidentemente que renunciemos a erigir os conceitos matemáticos tais como "o contínuo" em absoluto, e que se admita ao contrário a relatividade. Observamos também que esta relatividade está ligada à noção de grau de complexidade dum algoritmo, uma noção ela própria relativa.

O que chamamos de lei da física, é uma lei matemática simples regendo um domínio extenso de factos: é por isso que nós consideramos a gravitação e o electromagnetismo como fenómenos privilegiados, por excelência, da física. As leis da física são por natureza leis cuja expressão matemática apenas invoca funções convencionais e que não descrevem as coisas mas o que elas parecem ser.

A Análise Não-Convencional é o nome que se deu à teoria que descreve as relações entre as funções (ou os números) convencionais e as funções (ou os números) não-convencionais. Esta teoria explica como podemos calcular a "sombra" ou HALO de uma função não-convencional de que conhecemos certas propriedades, sendo claro que por definição não a podemos calcular explicitamente. Efectivamente o conceito essencial de Análise Não-Convencional é o de HALO de um real convencional x, que é o conjunto de todos os reais não-convencionais infinitamente vizinhos de x. É de salientar que o interesse de uma tal teoria seria bem menor se pudéssemos também aplicá-la, mas com menos exactidão, quando, no lugar das funções não-convencionais, consideramos funções um pouco mais complexas que as mais correntes, se bem que sempre acessíveis; ou então, se não aplicássemos o que ela prevê para os números infinitamente grandes. Quando nos pomos a praticar uma tal extensão da Análise Não-Convencional, não tardamos a descobrir que ela enriquece consideravelmente a potência dos métodos matemáticos que os físicos empregavam até agora: todas as regras empíricas sobre a comparação das diferentes ordens de grandeza encontram o seu lugar na teoria, e esta traz novos conceitos tais como o HALO, com regras rigorosas e operacionais para delas se servirem.

Podemos considerar o físico que estuda o comportamento dum fenómeno cujo comportamento microscópico é demasiado complexo para ele como observador limitado, que só pode alcançar o HALO das coisas. O comportamento microscópico será descrito por funções não-convencionais que não poderão ser especificadas, mas cujas propriedades abstractas poderemos conhecer, e que poderemos aplicar. As regras do cálculo da "sombra" darão naturalmente as leis do comportamento macroscópico. Esta forma de raciocínio é o fundamento da Física Teórica que encontra assim a Matemática que lhe faltava.

A adequação que observamos entre a Análise não-Convencional e o cálculo empírico dos infinitamente pequenos só é provavelmente o reflexo de uma ligação profunda e pouco conhecida entre a nossa percepção do mundo físico e a maneira como nós podemos conceber os números abstractos. Lembrando que a nossa percepção do mundo matemático está limitada pela condição humana tal como a nossa percepção do mundo físico, a descoberta de Robinson deverá contribuir para aproximar duas ciências que têm de trabalhar em conjunto para tornar o Universo inteligível.

12. E AGORA?

É obvio que no cálculo de uma quantidade convencional, como por exemplo, um **limite**, podemos menosprezar infinitésimos face a números finitos convencionais e essa prática continua a ser indispensável para o Cálculo.

Só que agora, com a criação dos Hiper-reais, e o estudo da Análise Não-Convencional, poderemos seguir um caminho novo e diferente, mas o anterior continua a ser um caminho válido e mesmo indispensável, pelo menos no estado actual da Análise.

E para aqueles que dizem ser a Análise Não-Convencional um tipo de Análise destinada a colocar de lado o conceito de **limite** e nada mais, somente se poderá responder: ISSO NÃO É VERDADE. Será a Análise do futuro, como diz Godel?

Como podemos continuar a ser matemáticos clássicos, se tivermos perdido a fé na semântica da Matemática? Afinal se não acreditamos nos Espaços de Hilbert, nos Processos Estocásticos, mesmo nos próprios números, não poderemos na mesma "fazer" Matemática?

A resposta é um sim muito forte. Lentamente a Matemática está a tornar-se não representativa em termos de realidade, sendo essa evolução rápida em Informática.

É certo que a visão semântica da Matemática, ou seja, a descoberta de propriedades no mundo Pitagórico/Platónico serviu a Matemática muito bem e durante muito tempo. Atingiu-se o tempo de mudar, rejeitando a visão semântica e efectuando uma concentração total no que é real na Matemática: a notação.

A criação da Análise Não-Convencional por Robinson foi uma revolucionária ”simplificação” e extensão da prática matemática, mas os matemáticos e a respectiva Irmandade (hoje dita Comunidade Matemática) continuam muito lentos e sem crença nas novas ideias que afinal se centram em conflito com a religião Pitagórica/Platónica.

Depois de tudo o que foi escrito pergunta-se: E afinal os paradoxos de Zenão são ou não Paradoxos?

Nesta “guerra” de tentar explicar os Paradoxos de Zenão chegam-nos recentemente dois investigadores que têm ideias diferentes: Efthimios Karakopos e Peter Lynds (e não tem nada a ver com a Análise Não-Convencional).

Efthimios Karakopos tirou o curso de Engenharia Mecânica numa Universidade de New York, é um cientista investigador dos paradoxos de Zenão. Especializou-se em simulação dinâmica dos sistemas.

Peter Lynds nasceu em 1975 é um Neozelandês que ficou conhecido em 2003 com a publicação de um artigo de Física sobre o tempo e os Paradoxos de Zenão. Em 2001 escreveu o artigo ”Zeno’s Paradoxes: A Timely Solution” que causou uma grande controvérsia. A maior parte do trabalho de Lynds é sobre o movimento. Ele defende que não existe um instante de tempo subjacente ao movimento de um objecto, no qual a sua posição possa ser correctamente determinada. Não sendo determinada, nunca é conhecida a posição relativa num dado instante. A ideia de Lynds é também uma tentativa de resolução correcta dos Paradoxos de Zenão: segundo Lynds, os Paradoxos surgem por se ter assumido incorrectamente que um objecto em movimento tem uma determinada posição relativa em qualquer instante de tempo dado; nestas condições atribui uma posição estática ao corpo que fica imobilizado naquele instante e permite a situação impossível dos Paradoxos serem explicados. A maior implicação desta conclusão é que se não houver tal posição relativa, a velocidade, a aceleração, o momento, a massa, a energia e todos os outros valores físicos, também não podem ser determinados em qualquer altura.

Recentemente (2003), Lynds pensou ter encontrado uma solução para os Paradoxos de Zenão, que ele considerou ser uma “solução oportuna” .[9]

No mesmo ano (2003) surge uma critica às reivindicações de uma solução para os Paradoxos de Zenão de Lynds, devida a Harokopos. Essa critica baseia-se numa incorrecta visão lógica do problema que, segundo Harakopos teria levado Lynds a justificar os Paradoxos admitindo que

Continuidade implica Indeterminação

o que Lynds justifica, usando o conceito de não existência de instantes estáticos e precisos de tempo. Mesmo que aceitemos os seus argumentos, não poderemos é aceitar que

Indeterminação implica Continuidade

pois então os dois conceitos seriam equivalentes o que não é de forma alguma admissível[1].

Lynds acaba por concluir que há uma necessária troca, um equilíbrio, de todos os valores físicos, determinados com precisão, numa altura da sua continuidade no tempo. Esta conclusão foi baseada na premissa de que não há um preciso instante estático no tempo, caracterizando um processo contínuo físico dinâmico. Baseado na conclusão exposta anteriormente, foi afirmado a posteriori, que três dos Paradoxos de Zenão tinham sido resolvidos o que é falso, pois baseia-se num raciocínio “não coerente”.

Será que os Paradoxos de Zenão estão definitivamente considerados resolvidos?

Consequentemente surge a questão: o espaço e o tempo são contínuos ou discretos?

Provavelmente, como diz Kurt Godel, vamos ter de esperar pelo desenvolvimento da Análise Não-Convencional para dar algumas respostas possíveis a este tipo de perguntas, sem continuar a responder em linguagem clássica.

CONCLUSÃO

Tendo começado com os Gregos e os seus paradoxos, neste caso de Zenão de Eleia, chegamos a Newton e Leibniz quase sem nada de novo no sentido estritamente teórico. Os seguidores quer de Newton, quer de Leibniz, não conseguiram durante bastante tempo, atingir a noção que se procurava para formalizar as ideias da Análise Matemática, até que Weierstrass resolveu a problema com uma definição de **limite** que permitiu menosprezar críticas como as de Berkeley. Mas os paradoxos de Zenão, embora parecessem não paradoxos com a nova definição de **limite**, mantiveram sempre algo de estranho na sua compreensão. De certa forma a Física e a Matemática dos paradoxos de Zenão não se complementam e permitem explicar o que por vezes parece evidente. Será que a Análise não-Convencional os vai explicar?

Eis como um simples pensador da Grécia antiga colocou enormes problemas ao pensamento humano, de tal forma que não se pode mesmo na actualidade matemática explica sem incorrecções matemáticas e/ou físicas os famosos paradoxos de Zenão.

Mas a operação de passagem ao **limite**, que resultou em parte das tentativas de explicação da Análise Matemática, quer formalmente, quer na prática, foi sem dúvida alguma uma extraordinária concepção do raciocínio matemático e o **limite** constitui um dos conceitos mais brilhantes da evolução da Matemática.

Esperemos agora a evolução da Análise.

BIBLIOGRAFIA

[1]"A critique of recent claims of a solution to Zeno's Paradoxes", Efthimios Harakopos, Setembro, 2003.

[2]A. Dahan-Dalmedico/J.Peiffer, "Une historie des mathematiques", Éditions du Sevil, 1986

[3]Baron, Margaret E., "The origins of the Infinitesimal Calculus", Dover Phoenix Editions, 2003

[4] Boyer, Carl B. , "Historia de la matemática", Alianza Universidad Textos ,1996

[5]Fauvel, John e Gray, Jeremy , "The History of Mathematics", The Open University , 1987.

[6]Caraça, Bento de Jesus, "Conceitos Fundamentais da Matemática",Gradiva ,199.

[7]" História e Educação Matemática", APM, 1996.

[8]" Historical Topics for the Mathematics Classroom", NCTM,1993.

[9]Jacques Harthong, "L'analyse non-standard", La Recherche nº184, volume 4, 1983.

[10] Katz, Victor R. , "A History of Mathematics , Addison-Wesley Educacional Publishers,199.

[11]Kneale, William e Kneale, Martha, " O desenvolvimento da Lógica", Fundação Calouste Gulbenkian, 199.

[12]"Zeno's Paradoxes: a timely solution", Peter Lynds, 2003

REFERÊNCIAS:

(1)http://www.math.princeton.edu/~nelson/papers.html

(2)http://cdsweb.cern.ch/search.py?recid=622019

(3)http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00001197/

(4)www.friesian.com/calculus.htmwww.friesian.com/calculus.htm

(5)http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/easyanalysis2.html

(6)http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/easyanalysis4.html

(7)http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/bounded.html

(8)http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00001313/

(9)http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/FiFi-07-Cap02.pdf

(10)http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/meanvalue.html

(11) http://faculty.washington.edu/smcohen/433/kinesisLecture.pdf