Costa, Manuel

UM ESTUDO DE CÁLCULO TENSORIAL APOIADO NA TRADUÇÃO DA "ESTRUTURA DO ESPAÇO-TEMPO" DE ERWIN SCHRÖDINGER

Universidade Portucalense - Infante D. Henrique

Porto, 2006

Costa, Manuel

UM ESTUDO DE CÁLCULO TENSORIAL APOIADO NA TRADUÇÃO DA "ESTRUTURA DO ESPAÇO-TEMPO" DE ERWIN SCHRÖDINGER

TESE E DISSERTAÇÃO SUBMETIDA COMO ELEMENTO PARCIAL
PARA O CUMPRIMENTO DOS
REQUISITOS NA OBTENÇÃO DO GRAU DE

MESTRE EM MATEMÁTICA/EDUCAÇÃO

sob a orientação de
Professor Dr. Antóno Pascoal

Universidade Portucalense - Infante D. Henrique

Porto, Dezembro de 2006

.

APROVAÇÃO

Nome:	Manuel José Peres Campos Costa
Grau:	Mestre em Matemática/Educação
Título da Tese:	Um Estudo do Calculo Tensorial Apoiado na Tradução da “ Estrutura do Espaço-tempo ” de Erwin Schrödinger
Título da Dissertação:	Estrutura do Espaço-tempo

Mesa de Exame :

Presidente:

Professor do Departamento de Matemática

Supervisor Senior
Professor do Departamento de Matemática da

Professor do Departamento de Matemática da

Data da Defesa/Aprovação:

RESUMO

Nesta tese analisa-se um livro clássico da física moderna, "Estrutura do Espaço-Tempo" de Erwin Schrödinger (Viena, 1887-Viena, 1961). O autor, conhecido pela sua contribuição para a Mecânica Quântica, interpreta neste livro a Relatividade Geral de Albert Einstein formulada em 1915.

Nesta "tradução" - a partir da versão espanhola de Jesus Unturbe Sanchiz - procurou-se estudar todos os passos e acrescentou-se algumas notas e anexos que facilitem a sua compreensão. O assunto em análise é por si só ainda hoje motivo para ser considerado "o sonho último dos físicos": conseguir-se unificar, seja *numa única formulação*, as quatro interacções[1]: fraca, forte, electromagnética e gravitacional. Se para as três primeiras, parece já haver boas pistas, para a união de todas não há ainda uma teoria quântica da gravitação. É por isso um tema de investigação actual. Para a resolução desta questão em termos de física experimental, parece que as energias necessárias seriam de tal ordem que só o big-bang ou os buracos negros poderiam servir de laboratório[2]; não é senão lá que se poderão confrontar a gravitação e as teorias quânticas do momento. Muitas teorias sobre a estrutura do espaço-tempo actuais se fundamentam sobretudo no cálculo tensorial.

É, pois, na matemática e na geometria, que o autor apresenta a sua visão de forma simples desde as noções elementares de cálculo tensorial até à obtenção das equações de campo de Einstein.

---

[1] À semelhança do que Maxwell fez com as equações do campo E e H, ou até o que Newton fez com *f=mdp/dt* permitindo estabelecer a equivalência entre a aceleração inercial e a gravítica.
[2] A radiação fóssil não nos dá esse laboratório, por ser de baixa energia em resultado da expansão e concomitante arrefecimento do universo.

A todos os meus professores e amigos.

Ao Professor Doutor António Pascoal por tudo quanto fez, aconselhando-me com os seus livros e incentivando-me com as verdades, as interrogações e a honestidade científica conveniente nos actos de ensinar, aprender e investigar.

A todos os meus colegas de mestrado pela simpatia, incentivos e colaboração.

A todos muito obrigado.

ÍNDICE

APROVAÇÃO III

RESUMO V

DEDICATÓRIA VII

AGRADECIMENTOS IX

ÍNDICE XI

INTRODUÇÃO XIII

A ESTRUTURA DO ESPAÇO-TEMPO 1

EXCERTO DO PRÓLOGO (*ORIGINAL*) 3

INTRODUÇÃO (*ORIGINAL*) 5

PARTE I A VARIEDADE DESCONEXA 11

I Invariância; Vectores e Tensores 13
II Integrais, Densidades, Derivadas 31

PARTE II A VARIEDADE AFIMMENTE CONEXA 53

III Derivadas Invariantes 55
IV Algumas relações entre as derivadas ordinárias e as invariantes 67
V A Noção de Transporte Paralelo 77
VI O Tensor de Curvatura 83
VII As Geodésicas de uma Transformação Afim 97
VIII A Hipótese Geométrica Geral Sobre a Gravitação 103

PARTE III A VARIEDADE METRICAMENTE CONEXA 113

IX Afinidades Métricas 115
X O Significado da Métrica Segundo a Teoria Especial da Relatividade 133

CONCLUSÃO 151

APÊNDICE 1 153

APÊNDICE 2 157

BIBLIOGRAFIA 161

ANEXOS 163

INTRODUÇÃO

A tradução de um trabalho científico, não é fácil. A tradução de um «livrito», conforme o seu autor, Erwin Schrödinger, lhe chamou,

«Os dez anos que então passei em Dublin (1946-1956) foram de grande valor para mim, em parte pela aparição de uma série de pequenos livritos em Inglês publicados pela Cambridge University Press e também pelo trabalho acerca da teoria geral da gravitação «assimétrica», que por certo parece desiludir.»[1]

como o não é a *Estrutura do Espaço-Tempo,* é um ato de coragem, se a ele estiverem associadas duas regras de conduta: máximo rigor e maior honestidade. Foi o que procurei fazer.

José Manuel Sánchez Ron assina neste livro um Prólogo de 17 páginas com um carácter mais biográfico. Se por motivos de dimensão evitei traduzi-lo, o teor da sua última secção, sendo um bom mapa dos assuntos tratados, incluí-o nesta investigação.

No que se refere à Introdução, que só no final do livro dei conta pertencer a Schrödinger, procurei interpretar o seu texto e resumi-lo. Fica pois o leitor avisado.

Este é um livro excelente para um estudante de matemática ou de engenharia que se interesse pela física e que queira sem grande esforço juntar as noções matemáticas elementares que dão suporte à teoria da relatividade: O cálculo tensorial, a «transformação afim», a derivação invariante e a covariante, o transporte paralelo, a integrabilidade e o tensor de curvatura, as geodésicas, a relatividade geral e as equações de campo, a métrica de Riemann, os príncipios variacionais e as leis de conservação. Com estas noções chega-se no capítulo XII a duas generalizações da relatividade geral, a de Einstein-Straus e a teoria puramente afim.

Acrescentam-se, aqui ou ali, alguns comentários e anexos referentes a erros ou a matéria que não se compreenda ou que, no original estejam pouco claros e se tornem incompreensíveis.

Fizeram-se duas alterações significativas relativas: à colocação dos índices nas coordenadas por ser hoje mais vulgar o seu uso; à indicação de outro sistema de referência. Assim, nesta “tradução”, todos os índices nas coordenadas e nas suas diferenciais são superíndices. A barra ou a barra dobrada por cima das coordenadas (em vez de uma plica ou duas plicas) para indicar novos referenciais. À plica, duas plicas etc. sobre as coordenadas fica consagrado a identificação de um, dois etc. pontos próximos.

---

[1] Autobigrafia de Erwin Schrödinger: «Mi Vida», pp. 156-157 in José Manuel Sánchez Ron, prólogo, pp. 27-28, do livro em análise.

Finalmente e para que sirva de motivação a outros - talvez mais físicos ou engenheiros que matemáticos -, espantem-se com a proximidade que estes assuntos têm com os hábitos e as noções que se usam descuidadamente na engenharia (e na física elementar também) sem a percepção clara dos fundamentos matemáticos que lhe dão suporte!

A ESTRUTURA DO ESPAÇO-TEMPO

EXCERTO DO PRÓLOGO (*original*)

(…)

Estrutura do Espaço-tempo

(…) Trata-se de um texto breve, mas de uma clareza, concisão e elegância admiráveis, ainda que não se recorra nele a abordagens intrínsecas (sem referência directa a sistemas de coordenadas), mais poderosos matematicamente e também mais recentes. A primeira parte do livro ocupa o que poderemos chamar «teoria clássica do cálculo tensorial»: definição do que é um tensor e estudo das suas propriedades mais básicas; introdução da ideia de «transformação afim»; derivação covariante; transporte paralelo; integrabilidade e tensor de curvatura; geodésicas. Com esta base no capítulo VIII introduz-se a relatividade geral, incluindo, por conseguinte, as equações do campo, ainda que sem formular as equações num espaço métrico riemanniano.

Nos capítulos iniciais Schrödinger não introduz a noção de distância, estando toda a descrição geométrica baseada unicamente na transformação. Mas uma vez conhecidas as equações de campo einsteinianas, recorre-se à distância (métrica) riemanniana, deduzindo-se a relação entre transformação e métrica. Depois de abordar o caso da relatividade especial, encontramo-nos num capítulo (o XI) no qual se estudam os princípios variacionais e as leis de conservação, de uma forma geral, primeiro, e logo aplicando os resultados da relatividade geral.

Só no último capítulo se ocupou Schrödinger das generalizações da relatividade geral, tema ao qual tantos esforços aos quais havia dedicado as suas investigações (de facto, como vimos[1], encontrava-se a trabalhar sobre o tema). Considerações gerais à parte, só duas teorias, a de Einstein e Straus e a teoria puramente afim, foram tratadas por Schrödinger neste capítulo final. O estilo conciso que havia imposto ao resto do livro tornava impossível qualquer outro procedimento. Talvez desta maneira se percam algumas das ideias físicas que com tanto esforço havia desenvolvido Schrödinger, mas em seu lugar deixou-nos uma admirável reconstrução da essência da estrutura geométrica do espaço-tempo relativista.

in prólogo de José Manuel Sánchez Ron

[1] José Manuel Sánchez Ron refere-se á primeira parte do seu prólogo, a biográfica.

INTRODUÇÃO (*original*)

Na teoria da gravitação de Einstein, a matéria e a sua interacção dinâmica assentam na noção de uma estrutura geométrica intrínseca do espaço-tempo contínuo. Como aspiração e meta desta teoria, este contínuo quadri-dimensional com as suas leis inerentes (puramente geométricas), esta estrutura, deve ser um modelo adequado do "mundo real que nos rodeia no tempo e no espaço", com tudo o que ele contêm, incluindo o seu comportamento total.

Certamente, a concepção que Einstein manifestou em 1915 abarcava desde o início, e nas numerosas tentativas subsequentes, todo o tipo de interacção dinâmica[1]. Que à teoria de 1915 se chame normalmente Teoria da Gravitação deve-se a dois factos. Primeiro, os seus grandes êxitos foram considerados como referidos essencialmente à gravitação, a precessão do periélio de Mercúrio, por certo, e o desvio dos raios de luz de estrelas que passam próximo do sol que não é um fenómeno puramente gravitacional; o campo electromagnético possuindo energia e momento possui também massa. Além disso o desvio para os infravermelhos das riscas espectrais dos objectos estrelares de grande densidade (eg.: as anãs brancas) liga obviamente os fenómenos electromagnéticos e a gravitação.

De qualquer modo, o verdadeiro fundamento da teoria, o princípio da equivalência da aceleração e do campo gravitacional, abandona o conceito místico de força como agente. Toda a aceleração é explicada pela gravidade, a qual, em vez de ser

---

[1] Na altura conheciam-se apenas dois tipos de interacção: a gravítica e a electromagnética.

considerada uma força, reside na geometria do espaço-tempo. Qualquer agente, seja ele qual for, produzindo uma aceleração, fá-lo mediante a sua incorporação ao tensor energia-momento (tensor de matéria) e através do campo gravitacional que com ele está ligado. No caso simples da interacção puramente gravitacional este tensor tem uma forma simples e pode ser considerado como estando localizado em massas pontuais, o que não acontece com uma partícula carregada electricamente (mesmo que em repouso) que se liga a um tensor de matéria desdobrado através do espaço que a rodeia. Por consequência estamos perante a necessidade de leis de campo para o tensor de matéria, leis que gostaríamos de interpretar como restrições geométricas. Com excepção da interacção puramente gravitacional, a teoria de 1915 não dá conta destas leis. Esta falha pode ser camuflada ou suprir-se provisoriamente com a adição de suposições tais como: a partícula mantém-se unida, a sua massa não será negativa, etc. Contudo noutros casos, tais como no electromagnetismo, pede-se um desenvolvimento adicional da estrutura geométrica do espaço tempo, para dar conta das leis de campo do tensor de matéria de um modo natural – sendo esta a segunda razão pela qual a teoria de 1915 é tomada por uma teoria que se refere puramente à gravitação.

Aliás as equações do campo gravitacional têm de ser forçosamente mais complicadas do que as equaões de Maxwell do electromagnetismo. Estas são lineares e devem a sua linearidade ao facto do campo electromagnético não transportar (ele próprio) carga ao contrário dos campos gravitacionais que transportam energia e momento, contribuindo assim para a sua própria fonte. Podemos dizer que as equações do campo gravitacional terão de ser equações de derivadas parciais, não lineares, em que a não linearidaede é, afinal, a consequência do efeito da gravitação sobre si própria.

A estrutura geométrica do modelo espaço-tempo visado na teoria de 1915 incorpora os seguintes dois princípios:

(a) Equivalência de todos os sistemas de coordenadas quadri-dimensionais, obtida por uma transformação ponto a ponto entre quaisquer dois sistemas arbitrariamente escolhidos;

(b) O contínuo tem uma métrica impressa nele: isto é, a forma quadrática das diferenciais das coordenadas,

$$g_{ij} dx_i dx_j \quad \text{(A)}$$

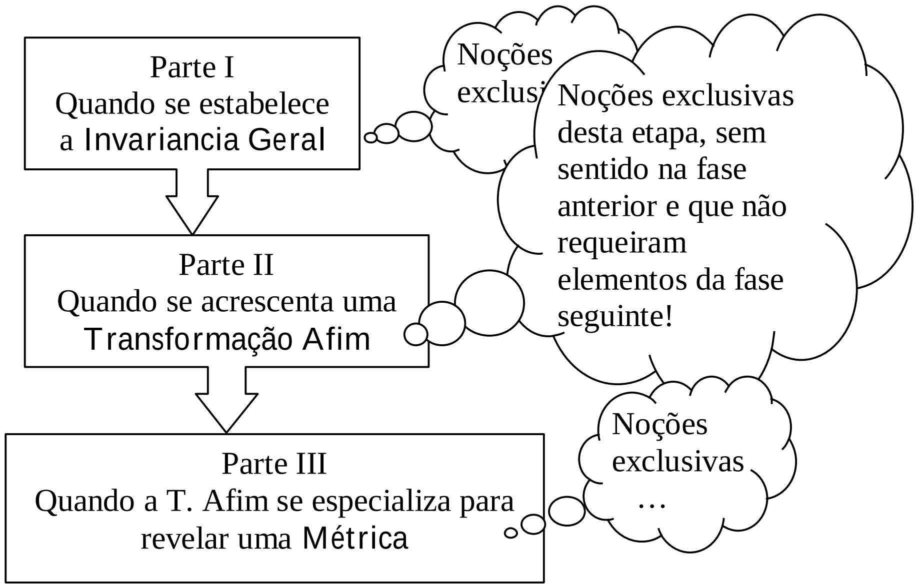
chamada "quadrado do intervalo" entre dois pontos tão próximos quanto se deseje é um invariante e por isso não depende das transformações ocorridas em (A).

O primeiro princípio, o princípio da Invariância Geral, parece muito simples e incontestável e encarna a ideia da Relatividade Geral. As tentativas ocasionais de o generalizar, e aponta-se à física quântica a possibilidade de o vir a ditar, não têm sido frutíferas.

A adopção imediata de uma métrica parece não ser o modo mais simples de a obter, até porque foram feitas outras exposições diferentes da teoria de 1915. Na verdade a diferenciação invariante, o tensor de Riemann-Christoffel, a curvatura, os princípios variacionais não são peculiares do estabelecimento de uma métrica. Chegam naturalmente quando se começa a introduzir uma transformação, exactamente o tipo de transformação, para a qual a ideia de «diferenciação» surge peremptoriamente em favor da invariância geral que se admitiu anteriormente. Esta é a transformação afim. Será então fácil especializá-la de forma que origine uma métrica.

H. Weyl inaugura em 1918 um importante grupo de tentativas de generalização da teoria de 1915 baseando-se neste tipo de transformação.

A geometria do contínuo será investigada então em três partes, nas quais se dará conta das noções próprias que lhe são acessíveis e significativas conforme o esquema adiante elaborado.



Muitas das afirmações e operadores que se seguem, se bem que referidos a um espaço de 4 dimensões, aplicam-se a um qualquer número, *n*, de dimensões. Destacar-se-á todo o facto que se restrinja a um espaço quadri-dimensional.

A partir daqui Schrödinger inicia o seu trabalho de uma forma inteligente, tentando ligar as estruturas físicas que pretende explicar com as estruturas matemáticas que poderão ajudar a compreendê-las.

Pode-se dizer que Albert Einstein, sobretudo no seu trabalho de 1915, não poderia seguir neste caminho, pois o Cálculo Tensorial nasceu com Ricci e Levi-Civita em 1901, e provavelmente Einstein pura e simplesmente deveria desconhecê-lo. Aliás a evolução intelectual de Einstein, que sempre tinha tido uma aversão à matemática (e mesmo em relação à física), havia sido marcadamente intuitiva e sem qualquer preocupação com o senso comum, contudo mais se suportou nas suas «Gedanken Experiments» do que nas experiências sempre dependentes das condições em que se realizam. Essa sua salutar rebeldia levava-o a pensar nas razões pelas quais o movimento uniforme deveria ser preferido a movimentos arbitrários e a considerar que a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, que as experiências fundamentais de Roland Von Eötvös em1889 pareciam demonstrar (a menos de 10^{-5}), confirmando resultados já obtidos por Galileu, Huyghens, Bessel e Newton, teria um resultado essencial: o Princípio da Equivalência, segundo o qual «em qualquer ponto do espaço-tempo, num campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um *sistema de coordenadas localmente inercial*, tal que, no interior de uma região suficientemente pequena em torno do referido ponto, as leis do Universo tomam a mesma forma que teriam se fossem consideradas num sistema de coordenadas cartesianas não acelerado e na ausência de gravitação. (Seria interessante estabelecer um certo tipo de semelhança entre este Princípio e o princípio que constitui a base das geometrias não-Euclidianas).

Mas Schrödinger prefere outro caminho não menos válido: utilizar o cálculo tensorial (que Einstein verificou em 1913 e somente em 1913, ser a estrutura matemática indispensável para conseguir formular as equações da Relatividade, valendo-lhe o auxílio do matemático Marcel Grassman, sem o qual aparentemente Einstein teria sido incapaz de estabelecer a correlação entre a realidade física e a estrutura matemática que a poderia apoiar), e com essa poderosa ferramenta matemática atingir as Leis de Conservação e as possíveis generalizações da teoria de Einstein. Schrödinger (um físico) explica de que forma a matemática dos tensores pode ser entendida em termos físicos, e que tipo de contribuição ela dá para o estabelecimento da estrutura do espaço-tempo. Trata-se de um trabalho que se pode considerar essencialmente matemático, mas em que as noções matemáticas são sempre acompanhadas das correspondentes noções físicas. Não se trata de escrever «A matemática permite dizer…» mas sim «A matemática permite concluir…, pois o significado deste resultado matemático é…».

É talvez este, a nosso ver, o maior mérito deste trabalho: a sua componente matemático-pedagógica num discurso da ciência física que se quer bem fundamentado.

PARTE I

A VARIEDADE DESCONEXA

I Invariância; Vectores e Tensores

Concebemos um contínuo quadri-dimensional cujas pontos se individualizam por um arranjo de quatro variáveis reais[1],

$$\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \tag{I.0.1}$$

Contudo esta primeira designação não tem qualquer prerrogativa sobre qualquer outra,

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= \bar{x}^1\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\
\bar{x}^2 &= \bar{x}^2\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\
\bar{x}^3 &= \bar{x}^3\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\
\bar{x}^4 &= \bar{x}^4\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)
\end{aligned} \tag{I.0.2}$$

em que os $\bar{x}^i$ são quatro funções continuas e diferenciáveis das variáveis x^k, que assegurem uma correspondência biunívoca entre pontos o que exige que o determinante funcional não se anule em qualquer ponto[2].

Contudo se se faz uma transformação, ela deve ser enunciada e as funções devem ser indicadas.

---

[1] O autor usou subíndices e não superíndices. Esta ópção será retomada mais adiante pelo autor.
[2] N.A.: Isto é necessário para que fique assegurada a correspondência biunívoca entre os dois conjuntos de variáveis. Não obstante, são conhecidas com frequência excepções, como por exemplo na transição das coordenadas cartesianas a polares.

Como diz Riemann no seu magnífico trabalho «Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen», o estabelecimento dos conceitos de grandeza somente são possíveis onde exista um conceito geral que permita utilizar diferentes modos de determinação. Sendo ou não possível passar de um modo para outro, de uma maneira contínua, eles formam uma variedade «Manigfaltigkeit» contínua ou discreta. Cada um dos modos de determinação costuma chamar-se um ponto no caso de uma variedade contínua e um elemento no caso de uma variedade discreta.

Os conceitos cujos modos de determinação formam uma variedade discreta são tão frequentes que, sendo dados quaisquer objectos, encontra-se sempre (pelo menos em linguagens altas) um conceito que as abrange. Contrariamente, as ocasiões que podem dar origem a conceitos de uma variedade contínua, são tão raras na vida usual, que os lugares dos objectos sensíveis e as cores são talvez os únicos conceitos simples cujos modos de deteminação constituem uma variedade de várias dimensões. É somente em matemáticas superiores que se tornam mais frequentes as ocasiões para a formação e desenvolvimento destes conceitos.

Procurem-se então entidades matemáticas, números ou conjuntos de números aos quais se possa incorporar um significado na dita variedade.

Tanto os valores numéricos das coordenadas como a soma dos seus quadrados como qualquer outra função delas mudarão com a transformação. Contudo pretende-se conferir alguma individualidade a cada ponto, que seja inclusivamente respeitada pela transformação, alguma propriedade invariante, uma vez que de outra forma não haveria qualquer vantagem em tão cuidada designação do ponto para que pudesse ser encontrado em qualquer outro sistema de referência. A lista de variáveis seria uma lista de sujeitos (gramaticais) sem predicados. Imagine-se uma lista de direcções sem a menor intenção de se saber porquê ou que pontos incidem nelas.

No caso mais simples, far-se-á uma correspondência biunívoca entre um ponto e um número que não mudará com a transformação. Chamaremos um invariante ou escalar (pensemos por exemplo na temperatura de um ponto num determinado instante) por não mudar perante a transformação. E diremos que sobre determinada região se estabelece um campo escalar se a cada ponto da região for atribuído um número, referido a uma mesma propriedade, também ele invariante perante a transformação, isto é, um campo escalar será dado por uma função das coordenadas,

$$\phi\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \qquad \text{(I.0.3)}$$

que após a transformação para o sistema de coordenadas com barra se escreverá,

$$\phi\left[x^1\left(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4\right), x^2\left(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4\right), x^3\left(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4\right), x^4\left(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4\right)\right]$$

(I.0.4)

Esta nova função das coordenadas com barra é completamente diferente da que a função ϕ de x^k o era. Estritamente falando deveríamos indicá-la usando uma outra letra, ψ de $\bar{x}^k$, contudo, tendo em mente o principio da invariância da transformação e dado que estas funções se referem a um campo particular em qualquer sistema de referência, os físicos usam muitas vezes a mesma letra (e aplicam-lhe uma plica[3]). Por outro lado como normalmente se podem inferir os argumentos escrever-se-á ϕ ou

$$\phi\left(x^k\right) \qquad \text{(I.0.5)}$$

em vez de (I.0.3) e do mesmo modo, $\bar{\phi}$ ou

[3] Infelizmente, o autor usa uma plica para um segundo sistema de referência, duas plicas para um terceiro etc… Na tradução usaremos uma barra, duas barras etc…e para outros pontos, então sim, uma plica, duas plicas…
No entanto também poderemos omitir a barra, conforme o autor o faz, se daí não surgirem imprecisões.

$$\bar{\phi}\left(\bar{x}^k\right) \qquad \text{(I.0.6)}$$

para a função campo expressa no sistema de coordenadas com barra.

Dados dois pontos num sistema de referência, P, com coordenadas x^k, e P', com coordenadas x'^k, a diferença

$$\phi\left(x^k\right)-\phi\left(x'^k\right) \qquad \text{(I.0.7)}$$

também é invariante na transformação e tomando o segundo ponto tão próximo quanto se deseje, será igualmente invariante a diferencial total, ou seja,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^k = \text{Invariante} \qquad \text{(I.0.8)}$$

(Em todos os termos em que um mesmo índice apareça repetido subentende-se uma soma de 1 a 4)[4].

Numa transformação de coordenadas[5] sendo verdade que,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^k} = \frac{\partial\phi}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \qquad \text{(I.0.9)}$$

e que,

$$dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}dx^m \qquad \text{(I.0.10)}$$

obtemos por multiplicação dos membros.

---

[4] Mesmo que esse índice apareça na mesma variável. Tome-se um exemplo: A^i_k num espaço de quatro dimensões tem 16 componentes; mas A^i_i não é mais que o $\sum_{i=1}^{N} A^i_i$ ou seja $A^1_1+A^2_2+A^3_3+A^4_4$.

[5] Aqui optamos por manter a convenção inicial da plica como indicadora de um novo sistema de referência. Nesta e na equação que se segue já se observa a covariância e a contravariancia como se verá posteriormente.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^k}dx'^k = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}}_{A}dx^m = \frac{\partial\phi}{\partial x^m}dx^m \qquad \text{(I.0.11)}$$

Esta dedução (que prova a afirmação (I.0.8)) obtém-se somando-se os termos sobre o índice k, já que a parte A de (I.0.11) é a derivada de uma coordenada relativamente a outra, sendo 0 ou 1 conforme o índice i é igual ou diferente de m.[6]

A disposição formada pelas quatro quantidades $\partial\phi/\partial x^k$ é, em si mesma, uma entidade matemática com um significado definido, sempre que se submeta à regra de transformação (I.0.9), da mesma forma que o escalar ϕ estava sujeito não a ser transformado, mas simplesmente a ser «substituído» (*umgerechnet,* do alemão). O sentido de $\partial\phi/\partial x^k$ em (I.0.9) é que, independentemente do sistema de referência, permite determinar a partir da soma de produtos indicada em (I.0.8) o acréscimo de ϕ para um ponto vizinho, tomando naturalmente os acréscimos das coordenadas no dito sistema de referência. A entidade descrita por estas quatro derivadas parciais a que chamamos gradiente de ϕ é o primeiro exemplo de uma propriedade referida a um determinado ponto e que não sendo dada por um só número, como o é um escalar, o é por uma disposição de números, quatro neste caso. Este é um protótipo de um vector *covariante*[7]. Mais concretamente é um campo vectorial covariante.

A concepção geral de um vector covariante é uma disposição de quatro quantidades[8] que por definição deve transformar-se (tal como em (I.0.9)), assim:

---

[6] Mais à frente se retomará as derivadas parciais das coordenadas em relação a si mesmas, matriz com o nome de símbolo de Kronecker, onde se introduzirá uma notação, $\delta^{i}{}_{m}$,e um significado mais amplo. É visualmente idêntica à matriz identidade, isto é, toma o valor 1 na diagonal principal (i=m) e 0 nos outros casos ($i \neq m$).

[7] O facto de o índice ser colocado em cima nas coordenadas x, não deve indicar contravariância.

[8] Melhor seria dizer funções em vez de quantidades.

$$\bar{A}_k = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} A_l \tag{I.0.12}$$

A natureza da entidade pode ser tal (como no caso do gradiente) que possua um quádruplo ordenado de números incorporados em cada ponto, variando de um ponto para um outro, ou seja, voltamos á noção de campo vectorial. Ou pelo contrário, o vector, particular, poderia referir-se a um ponto. Contudo em todo o caso, cada vector deve referir-se a um ponto definido, de outra forma a prescrição (I.0.12) careceria de sentido, não saberíamos que coeficientes usar nela. (O que se acabou de dizer se referirá pela mesma forma e mesmas razões a todos os vectores e tensores que logo introduziremos.)

Assim irão surgir os campos tensoriais, de certo modo como uma generalização dos campos vectoriais, de tal modo que a cada tensor fique associado um dado ponto e não um qualquer ponto ou grupo de pontos.

O modo pelo qual se transformam as diferenciais das coordenadas, de acordo com (I.0.10), é em certa medida equivalente de (I.0.9)[9]. Definimos *vector contravariante* como uma disposição de quatro quantidades B^k a qual se transforma do mesmo modo que dx^k:

$$\bar{B}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} B^m \tag{I.0.13}$$

Por convenção geral a escrita dos indicadores como subíndices ou superíndices serve para distinguir o comportamento covariante do contravariante respectivamente. Os próprios dx^k são assim um vector contravariante (infinitesimal), de facto um seu

---

[9] Enquanto ali, em (I.0.10), os coeficientes eram as derivadas parciais das novas (segundas) coordenadas relativamente às antigas, agora passa-se o inverso, isto é os coeficientes para mudança de referencial são as derivadas parciais das coordenadas do primeiro referencial, expressas em termos das coordenadas do novo referencial, relativamente às coordenadas deste último (novo sistema de referência).

protótipo. Em relação à nossa convenção alguns escrevem x^k em lugar de escreverem x_k[10]. Não creio que isto contribua para a consistência da simbologia, já que:

(1) Os próprios x_k não são de modo algum um vector[11];

(2) Os símbolos $\partial/\partial x_k$ podem em muitos aspectos considerar-se uma entidade covariante simbólica[12].

O melhor é recordar que em todos estes casos a posição do *índice* na *diferencial total* (seja no numerador ou no denominador) ficará, como estava[13].

De (I.0.12) e (I.0.13) segue-se imediatamente[14],

$$\bar{A}_k \bar{B}^k = A_k B^k = \text{Invariante} \qquad \text{(I.0.14)}$$

A isto chamamos produto escalar ou interno de vectores. Quando é nulo, alguns chamam pseudo-ortogonais aos dois vectores.

Qual a razão porque Schrödinger chama pseudo-ortogonais a dois vectores cujo produto escalar é nulo?

Num espaço vectorial Euclidiano V o produto interno pode ser usado para definir as magnitudes dos vectores e o ângulo entre eles. Interessa-nos então, no estudo destes espaços, considerar as transformações lineares que são compatíveis com as propriedades dos vectores. Chamamos transformações ortogonais a essas transformações lineares. Ou seja, uma transformação linear A sobre V é ortogonal se

---

[10] Foi a nossa opção desde o ínicio.
[11] Poderiam ser consideradas as componentes de um vector!
[12] Refere-se provavelmente à expressão de derivação da função composta. Não se entende, porque não sempre!?
[13] Aqui julgo que o autor quer dizer que a posição do índice na diferencial total e na coordenada deve ser a mesma, independentemente de estar no numerador ou no denominador.
[14] A demonstração consiste em se efectuar a substituição $\bar{A}_k \bar{B}^k$ por $\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} A_j \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} B^i$ …e notando que só sobram os termos em que $i = j$.

não alterar o produto interno, isto é, o produto interno fica invariante sobre essa transformação.

Com esta definição, os vectores de Schrödinger A e B tais que

$$A_k B^k = \text{Invariante}$$

são ortogonais, a não ser que pertençam a espaços vectoriais diferentes (digamos o espaço V e o seu dual) e então serão pseudo-ortogonais.

Dados vários, s, vectores num mesmo ponto, uns covariantes outros contravariantes, a disposição[15] de 4^s quantidades

$$A^k B^l C^m \ldots G_p H_q \ldots \qquad \text{(I.0.15)}$$

cumpre uma lei de transformação linear que se pode deduzir facilmente a partir de (I.0.12) e de (I.0.13) mas que não necessitamos de escrevê-la explicitamente. À disposição de 4^s quantidades que cumprem esta lei de transformação chamamos tensor de ordem s e indica-se pelo símbolo

$$T^{klm\ldots}_{pq\ldots} \qquad \text{(I.0.16)}$$

onde, naturalmente, o número de superíndices e o de subíndices devem dar-se separadamente, caracterizando completamente a natureza da entidade T. O produto (I.0.15) é um caso especial de tensor, mas não é o tensor mais geral deste tipo, já que apenas depende de $4s$ símbolos independentes e para s 1

$$4s < 4^s \qquad \text{(I.0.17)}$$

[15] Disposição, no sentido literal, não estaria bem, pois não interessa o lugar em que possa estar a componente $A^1B^1C^1 \ldots G_1H_4$. talvez se compreenda melhor se dissermos que isoladamente $A^lB^KC^m \ldots G^p \ldots$ é o mesmo que $A^kB^lC^m \ldots G_p \ldots$ uma vez que não interessa a letra que se use, mas não podemos escrever que um seja igual ao outro, pois $A^lB^KC^m \ldots G^p \ldots$ $A^kB^lC^m \ldots G_p \ldots$de um modo geral. O autor explicará melhor à frente. A este propósito foi feito o Anexo 1, pág.151

A ordem dos superíndices na notação (I.0.16) é relevante. Com efeito,

$$T^{lkm\ldots}_{pq\ldots} = A^l B^k C^m \ldots \; G_p H_q \ldots \tag{I.0.18}$$

que é diferente de (I.0.15).

Não é o mesmo tensor, mas é um tensor do mesmo tipo. É importante notar que tem exactamente a mesma regra de transformação. Como exemplo tomemos um tensor contravariante de ordem 3, T^{rst} e a forma como se transforma,

$$\bar{T}^{klm} = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_r} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_s} \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_t} T^{rst} \tag{I.0.19}$$

Troquemos k e l e ao mesmo tempo a notação dos índices somatórios e mudos r e s,

$$\bar{T}^{lkm} = \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_s} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_r} \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_t} T^{srt} \tag{I.0.20}$$

O coeficiente não mudou[16], mas na disposição de T os dois primeiros índices mudaram. Digamos que a componente T^{123} é a componente (213), etc., de outro tensor. O mesmo seria válido para qualquer permutação de dois índices, conquanto se realize a mesma permutação em todas as componentes.

O mesmo se passaria com permutações sobre os subíndices. Mas, por agora, não há uma ordem relevante entre os subíndices e os superíndices.

Os dois tipos de vectores são claramente casos especiais de tensores, a saber, tensores de ordem um. Um escalar poderia chamar-se um tensor de ordem zero.

A partir das regras de transformação se vê que multiplicando as componentes de dois tensores quaisquer em todas as combinações

---

[16] Afinal trata-se de produtos de *três números* ou derivadas de três funções, para cada uma das 64 parcelas (s,r,t 4^3) dos 64 membros esquerdos das 64 equações (l,k,m 4^3). A explicação vem à frente com mais detalhe.

$$T^{klm\ldots}_{pq\ldots} \; S^{abc\ldots}_{rst\ldots} \tag{I.0.21}$$

se obtém um tensor a que chamamos produto externo ou produto directo dos tensores.

Se em (I.0.16) se executa uma soma sobre um índice superior e um inferior, como, por exemplo,

$$T^{klm\ldots}_{kq\ldots} \tag{I.0.22}$$

é fácil mostrar a partir da regra de transformação (a qual temos indicado, mas não escrito) que este é um tensor de ordem duas unidades menor que o tensor original. Poder-se-ia indicá-lo mediante o símbolo,

$$S^{lm\ldots}_{q\ldots} \tag{I.0.23}$$

Este processo de formação de um tensor de menor ordem a partir de um tensor dado, que tenha pelo menos um índice de cada tipo, chama-se contracção (*Verjünung*, em alemão) ou saturação. Observe-se que (I.0.16) admite várias contracções. Por exemplo, o tensor

$$T^{klm\ldots}_{pk\ldots} \tag{I.0.24}$$

é claramente distinto de (I.0.22), apesar de serem do mesmo tipo geral, isto é, são da mesma ordem e têm o mesmo número de superíndices e subíndices.

Os tensores podem ser somados subtraídos ou em geral combinados linearmente com coeficientes constantes ou invariantes (escalares), se e só se forem do mesmo tipo e se referirem exactamente ao mesmo ponto do contínuo. Por «podem ser» queremos dizer que o resultado terá sempre uma fórmula de transformação simples neste e apenas neste caso, isto é, serem do mesmo tipo e referidos ao mesmo ponto.

O número mais importante na matemática é o zero. O símbolo actual, bem como a palavra zero, procede dos árabes. (é etimologicamente a mesma que as palavras *chipher* inglesa, *chiffre* francesa, *Ziffer* alemã, *cifra* espanhola embora estas tenham adquirido significados diferentes). Mas a noção é antiga, surgiu nas matemáticas babilónicas pouco depois do ano 1000 A.C.[17] e pode ter procedido da Índia. Permitam-me que me alongue um pouco sobre este conceito. Muitíssimas das nossas proposições e afirmações matemáticas tomam a forma de uma ou mais equações. O essencial de uma equação é sempre este: Que um certo número é zero[18]. O zero é o único número com uma espécie de carta régia. Tal como é proibido dividir apenas por zero, em muitos parlamentos pode-se discutir qualquer tema conquanto se exclua o Rei. Temos que estar atentos; sempre que se efectue uma divisão o divisor não deve ter «sangue real», não pode ser. Outra consequência é que mediante a «multiplicação» o sangue real não pode obter-se de outra forma que não seja a partir de sangue real. Um produto não pode anular-se a menos que um dos factores seja nulo. Não é acidental que a maioria das vezes uma demonstração decorra assim:

$$AB = 0 \wedge B \neq 0 \Rightarrow A = 0 \qquad \text{(I.0.25)}$$

Analogamente, o tensor mais importante de qualquer tipo é o tensor zero desse tipo, isto é, aquele cujas componentes são todas nulas. É um *tensor numericamente invariante* já que as fórmulas de transformação são lineares e homogéneas. Esta é a razão pela qual os tensores jogam o importantíssimo papel que jogam. Pois tem a consequência de que uma equação do seguinte tipo entre dois tensores S e T

$$S^{klK}_{pqK} = T^{klK}_{pqK} \qquad \text{(I.0.26)}$$

---

[17] N.A.: V. Gordon Childe, *Man Makes Himself* (Londres: Watts y Co., 1936) pp 222 e 225

[18] Hoje, em vez de número, diríamos expressão designatória.

é independente do sistema de referência (o que significa que

$$S^{kl\ldots}_{pq\ldots} - T^{kl\ldots}_{pq\ldots} \qquad \text{(I.0.27)}$$

é o tensor zero); desde que, naturalmente, S e T sejam do mesmo tipo e se refiram ao mesmo ponto. Se assim não fosse, isto não se cumpriria e a equação (I.0.26) nem faria sentido, de forma que nunca será contemplada esta classe de coisas.

Talvez seja este o momento de mencionar uma convenção, que sempre se faz tacitamente, ainda que mereça ser mencionada de forma explícita, tal como a «convenção dos somatórios», da qual é uma sua equivalente. Segundo esta um índice que apareça duas vezes no mesmo produto exprime um somatório de 1 a 4. Ora bem um índice que apareça apenas uma vez, mas naturalmente, uma vez em cada membro de uma equação, implica que a equação se cumpre para qualquer valor de 1 a 4 do dito índice. Pela primeira convenção condensamos muitos termos de uma equação, pela segunda condensamos muitas equações[19] numa equação. Por exemplo se se escreve

$$S^{klm}_{m} = R^{kl} \qquad \text{(I.0.28)}$$

isto representa em geral 16 equações, cada uma das quais tem 4 termos no membro esquerdo.

Há uma aplicação importante da invariância das equações tensoriais em relação com a simetria dos tensores. Se para um tensor S uma das duas equações seguintes

$$S^{kl\ldots}_{pq\ldots} = \pm S^{lk\ldots}_{pq\ldots} \qquad \text{(I.0.29)}$$

se cumpre num sistema de referência particular , também o fará em qualquer outro. Então chamamos a S simétrico ou antisimétrico, respectivamente, referido ao primeiro

[19] Um sistema de equações.

par de superíndices. O mesmo pode ocorrer para o par p e q, mas não para o par, por exemplo, k e p. (poderia haver simetria num sistema de referencia particular, mas sem qualquer interesse, seria um facto casual.) mais tarde passaremos a conhecer propriedades da simetria mais complicadas. Como corolário notemos que um tensor geral pode sempre decompor-se numa soma de dois tensores, um simétrico e outro antisimétrico, a respeito de um certo par de índices do mesmo carácter. Existem teoremas similares para formas de simetria mais complicadas.

Um tensor pode ser simétrico (ou antisimétrico) em relação a todos os pares de índices. O tensor zero é simétrico e antisimétrico. É interessante reparar que se um tensor de ordem s, só contravariante ou só covariante, é simétrico em relação a s-1 pares de índices (pares que contenham pelo menos s-1 índices) será:

(a) simétrico em relação a todos os pares (${}^{s}C_2$) de índices, se se souber que a respeito do índice não usado existe simetria (em relação a qualquer outro índice);

(b) zero se se souber que a respeito do índice não usado (e qualquer outro índice) existe alguma antisimetria.

Tomemos, como ilustração, estes dois exemplos (a) e (b), em que (1) e (2) figuram por baixo das igualdades indicando as propriedades usadas,

$$(a)\begin{cases} A_{ijk} = A_{jik} & (1) \\ A_{ijk} = A_{kji} & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(b)\begin{cases} A_{ijk} = A_{jik} & (1) \\ A_{ijk} = -A_{kji} & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

Por (a) observamos «*transitividade na escolha dos índices da propiedade de simetria*»; no exemplo mostrado ocorre simetria relativamente às posições dos índices j

e k (no tensor original). Enquanto por (b) as <u>componentes</u> para as quais se verificam as duas propriedades 1 e 2 serão todos nulas, e dada a definição de simetria (antisimetria), teremos mesmo que dizer que A é o tensor zero se for de ordem 3.

Dado um tensor com t índices contravariantes e r índices covariantes considerem-se t vectores covariantes e r vectores contravariantes e formemos o produto contraído

$$S^{kl\ldots}_{pq\ldots} A_k B_l \ldots F^p G^q \ldots \tag{I.0.30}$$

então a partir das regras de multiplicação externa e interna, este produto (que é precisamente um número, tendo acabado com todos os índices mediante a contracção) é um invariante.

É interessante e útil saber-se que a recíproca também é verdadeira: Se nada se sabe sobre uma disposição $S^{\ldots}_{\ldots}$ a não ser que o produto (I.0.30) é um invariante para qualquer conjunto de vectores A…G…, então as $S^{\ldots}_{\ldots}$ são as componentes de um tensor definido pelos seus índices. Este teorema recíproco também poderia servir como alternativa para a definição de tensor; mas o importante é que isto é usado com frequência para estabelecer o carácter tensorial de uma disposição de números, sobre a qual nada esteja fixado previamente.

Para provar este teorema inverso vejamos uma transformação qualquer, chamemos $\bar{S}^{\ldots}_{\ldots}$ às componentes ${}^{\ldots}_{\ldots}$ (particulares) do transformado como se fora um tensor, e $\bar{S}^{\ldots}_{\ldots}$ a qualquer conjunto de números que compartilham com os $\bar{S}^{\ldots}_{\ldots}$ a propriedade de fazer invariante a expressão (I.0.30)[20], nesta transformação, para todo o conjunto de vectores não nulos $A \ldots G \ldots$. Subtraindo as duas equações que exprimem que $\bar{S}^{\ldots}_{\ldots}$ e $\bar{\bar{S}}^{\ldots}_{\ldots}$ tornam invariantes a (I.0.30), obtêm-se,

$$\left(\bar{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots} - \bar{\bar{S}}^{kl\ldots}_{pq\ldots}\right) A_k B_l \ldots F^p G^q \ldots = 0 \qquad \text{(I.0.31)}$$

Como as componentes dos vectores eram arbitrárias, o mesmo se passará para as componentes com barra, já que as fórmulas de transformação (I.0.12) e (I.0.13) têm determinantes não nulos. Por conseguinte, podem escolher-se vectores de tal forma que só a componente k-ésima de $\vec{A}$, a l-ésima de $\vec{B}$, a q-ésima de $\vec{G}$ sejam diferentes de zero. Então o produto (I.0.31)[21] só será nulo se

$$\bar{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots} - \bar{\bar{S}}^{kl\ldots}_{pq\ldots} = 0 \qquad \text{(I.0.32)}$$

e isto quer dizer, que estes dois números particulares das disposições $\bar{S}$ e $\bar{\bar{S}}$ são iguais. Obviamente mediante a escolha diferente dos vectores, pode demonstrar-se o mesmo para qualquer par de transformados para além de $\bar{S}$ e $\bar{\bar{S}}$, de forma que aqui se conclui a prova da nossa afirmação[22].

O seguinte exemplo ilustra alguns corolários simples do nosso teorema. Se sabemos que

$$S^{kl} A_l = \text{vector contravariante} \qquad \text{(I.0.33)}$$

então S^{kl} é um tensor contravariante de ordem 2. É natural. Porque se o produto (I.0.33)

[20] O mesmo invariante, condição sem a qual esta prova não estaria bem (posto que nada se disse relativamente à existência de mais do que um invariante no mesmo ponto) e o segundo membro da equação (I.0.31), que se segue, não seria zero.
[21] Ou melhor, a soma dos produtos. E porque, convém repetir a ideia: os vectores sendo arbitrários, podem-se escolher tantos quantos os necessários.
[22] A prova está em verificar-se a unicidade da disposição $\bar{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots}$ quando este se obteve como se fosse um tensor.

é um vector contravariante para qualquer escolha do vector A, então o produto

$$S^{kl} A_k B_l = \text{ invariante} \tag{I.0.34}$$

para qualquer escolha dos vectores A e B.

Como se pode ver pela prova efectuada, é vital que a invariância esteja garantida para vectores *arbitrários*. Não obstante, pode afrouxar-se esta exigência se se sabe algo mais acerca da disposição de S. Por exemplo, se apenas se consegue garantir que

$$S^{kl} A_k A_l = \text{invariante} \tag{I.0.35}$$

para qualquer escolha do vector A, mas se se sabe que adicionalmente em qualquer sistema de referência

$$S^{kl} = S^{lk} \tag{I.0.36}$$

(há simetria), a propriedade tensorial de S pode provar-se seguindo os passos acima efectuados. Sem a simetria apenas se poderia demonstrar que

$$S^{kl} + S^{lk} \tag{I.0.37}$$

é um tensor[23].

Como exemplo do método geral demonstremos a propriedade tensorial do tensor misto unitário (símbolo de Krönecker), que é em si mesmo uma entidade importante. Representemos a disposição de 16 números,

$$\delta_k^i = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq k \\ 1 \text{ se } i = k \end{cases} \tag{I.0.38}$$

Então, para qualquer par de vectores num ponto do contínuo

---

[23] Ver demonstração no Anexo 2 pág.157.

$$\delta^i_k A_i B^k = A_k B_k = \text{invariante} \tag{I.0.39}$$

de acordo com (I.0.14). Portanto, (I.0.38) é um tensor misto e está escrito correctamente com um superíndice e um subíndice. Esta é uma das (escassíssimas) entidades tensoriais *numericamente* invariantes, quer dizer, que inclusivamente as suas componentes são as mesmas em todos os sistemas de referência. Pode-se sentir tentado a considerá-lo um tensor simétrico. Sem obstáculo, isto não seria apropriado. Porque a simetria relativamente a dois índices de carácter distinto em geral não se conserva numa transformação. Que isto assim seja é um caso excepcional.

Notemos, de passagem, que até a mais trivial afirmação de que

$$\delta^i_k B_i = B_k \tag{I.0.40}$$

é um vector para qualquer B_i, bastaria para se inferir a propriedade tensorial de δ^i_k.

Neste início de seu trabalho, Schrödinger limita-se a indicar as noções básicas da álgebra temsorial, mas já é claro o seu estilo físico. É raro o matemático que se preocupa em esclarecer que os tensores devem ser considerados num ponto do contínuo e, tal como vai ser referido a seguir, relações algébricas entre tensores referidos a diferentes pontos não têm quqlaquer significado, embora ele tenha tentado um conceito de transformação entre tensores referidos a diferentes pontos. Fica-se com a ideia de que Schrödinger tenha tentado em (1945) o que Einstein não conseguiu em 1944 conforme a nota do autor na página seguinte, mas basta esta nota para ficarmos certos (se é que ainda nos restavam dúvidas) da honestidade intelectual de Schrödinger.

II Integrais, Densidades, Derivadas

II.1 Integrais, Densidades

À matéria do capítulo anterior chamamos álgebra tensorial. Caracteriza-se pelo facto de que apenas considera relações entre invariantes, vectores, ou tensores referidos ao mesmo ponto do contínuo. Pelo ponto de vista aqui tomado[1], as relações algébricas entre vectores e tensores referidos a diferentes pontos carecem de sentido.

Um campo vectorial tem um significado: cada vector do campo está associado (diz respeito) a cada ponto do espaço, modificando-se continuamente as componentes do vector (de um modo geral; – conceptualmente existem campos constantes como por exemplo: o campo eléctrico entre dois planos condutores carregados diferentemente e infinitos; ou o fluxo de água numa secção de tubo de diâmetro infinito) quando se muda de ponto para ponto. Da mesma forma um tensor num dado ponto não é em geral um tensor em algum outro ponto, isto é, estão também associados a um ponto e mudam de ponto para ponto. Um campo tensorial é um conjunto de tensores definidos ou conhecidos em cada ponto de um espaço. Obviamente que poderão ser considerados campos tensoriais de ordens diferentes tal como existem tensores de ordens diferentes.

---

[1] N.A. - Só muito recentemente se fez uma tentativa de conceber uma transformação que implica relações entre tensores em diferentes pontos. Veja-se A. Einstein e V. Bargman, *Ann Math.* XLV, págs. 1 e 15, 1944. Veja-se também E. Schrodinger e F. Mautner, *Proc. R. Irish Acad.* L, 143 e 223, 1945. Estas tentativas não se incluem na presente exposição.

Não obstante, recorde-se que baseámos a noção de tensores na dos vectores, e esta última na noção de gradiente, e dificilmente existe uma alternativa simples e natural para este procedimento[2]. Ora bem, ao formarmos o gradiente tínhamos realmente que comparar os valores de um invariante em pontos diferentes, e ao mesmo tempo dávamos o primeiro passo na introdução da análise do nosso contínuo. Daqui em diante teremos que o ampliar. A análise implicará derivadas e integrais. Teremos que estudá-los do ponto de vista da invariância geral. Mas isto não significa procurar apenas invariantes, mas também entidades com carácter tensorial, porque, como fizemos ver, uma equação entre eles (ou por outras palavras um sistema de equações que dizem que um tensor se a nula) se conserva na transformação[3]. Começámos com integrais espaço-temporais. Isto leva a uma certa extensão da noção de tensores, isto é, às densidades tensoriais.

Destacámos que não merece a pena somar (ou, em geral, formar combinações lineares de) tensores ou vectores referidos a pontos distintos. Não teria um significado simples. Por exemplo uma equação que afirme que um vector A num ponto P é igual a um vector B num ponto Q, mesmo que se obtivesse um sistema de referência, não teria qualquer interesse porque seria desfeita por uma transformação. Ou, de novo, seja A^k um campo vectorial contravariante e consideremos os quatro integrais

$$\iiiint A^k dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \qquad \text{(II.1.1)}$$

tomados sobre uma região do espaço-tempo e por suposição exactamente sobre a região correspondente em qualquer outro sistema de referencia. Estas integrais daqui em diante se abreviarão assim:

---

[2] Se a noção de gradiente é baseada na noção de invariante ou escalar, efectivamente em termos físicos, é esta a alternativa mais simples que conduz à noção de tensor.

[3] Ver (I.0.32)

$$\int A^k dx^4 \tag{II.1.2}$$

Ora bem estas integrais não são nem invariantes nem componentes de um vector contravariante; estão desprovidas de interesse e sentido.

Mas se A fosse um invariante (escalar) e formássemos do mesmo modo

$$\int A dx^4 \tag{II.1.3}$$

(sempre sobre um domínio fixado de modo invariante), o integral seria invariante? Obviamente que não. Ainda que não haja objecção em se adicionar algebricamente invariantes que se refiram a pontos diferentes, apesar de sabermos que na transformação,

$$\int A dx^4 = \int A \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} \right| dx'^4 \tag{II.1.4}$$

de modo que

$$\int A dx^4 \neq \int A dx'^4 \tag{II.1.5}$$

em geral[4]. Para que a equação,

$$\int A dx^4 = \int A' dx'^4 \tag{II.1.6}$$

se cumpra, quer dizer, para que a integral seja um invariante, a «lei de transformação» para A não tem que ser,

$$A' = A \tag{II.1.7}$$

mas sim,

---

[4] N.A.: Para tornar invariante a integral, ter-se-iam que restringir as transformaçãoes permitidas mediante a condição de que o seu determinante funcional fosse 1. Isto não seria conveniente.

$$\bar{A} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right| A \tag{II.1.8}$$

isto é, haveria que assumir como um factor o jacobiano[5] que aparece na integral transformada como consequência da transformação do «produto das diferenciais».

A uma quantidade que se comporta desta maneira, damos-lhe o nome de densidade escalar. Converteu-se num costume denotar uma densidade por uma letra gótica[6]. Será conveniente estender a noção de densidade a entidades de mais componentes[7] que mantêm a mesma relação com os tensores que a densidade escalar com um escalar, a saber, precisamente ter as suas fórmulas de transformação multiplicadas por um factor, o jacobiano; sempre este, independentemente dos outros índices[8]. Para que este ponto fique completamente claro escrevamos por extenso a fórmula de transformação para uma densidade tensorial geral,

$$A^{kl\ldots}_{pq\ldots} \tag{II.1.9}$$

Seja

$$\bar{A}^{kl\ldots}_{pq\ldots} = \left|\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right| \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^n} \ldots \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^q} \ldots A^{mn\ldots}_{rt\ldots} \tag{II.1.10}$$

Obviamente, as densidades compartilham com os tensores ordinários a propriedade de que eles (isto é, todas as suas componentes) se anulam em todos os

---

[5] O autor usou o termo determinante funcional, pois na altura não estava em uso o termo jacobiano. Aqui as barras verticais representam um determinante e não um módulo! Representá-lo-emos deste modo. Por outro lado note-se que um determinante é um somatório de 4! produtos e não 4x4 produtos (num espaço de dimensão 4).

[6] Não é verdade, actualmente!

[7] N.A.:Não se infira, por favor, que a integral da componente de uma densidade tensorial (distinta de uma densidade escalar) tenha um significado! *Não o tem*!

[8] A nota do autor a este parágrafo (nota 7) é claramente uma expressão do carácter fisico de Schrödinger. O matemático raras vezes se preocupa com o significado físico (no sentido da sua aplicação) do conceito que definiu. Afinal é a abstracção que separa o investigador físico do matemático.

sistemas de referência, quando o fazem num deles, já que esta propriedade vital reside somente no carácter homogéneo da transformação. Por conseguinte são igualmente úteis; as equações entre elas referidas ao mesmo ponto são independentes do sistema de referência, mantêm-se na transformação.

Para obter uma densidade escalar ou tensorial, não é necessário tirá-la da manga; estas entidades podem ser construídas a partir dos tensores que introduzimos previamente.

Representemos um tensor antisimétrico covariante de ordem quatro

$$T_{klmn} \tag{II.1.11}$$

Por antisimétrico queremos dizer que uma mudança de quaisquer dois dos seus índices produzirá apenas uma simples troca de sinal das componentes. Se ao valor numérico de T_{1234} atribuir-mos a letra gótica T (por quê T gótico se verá de seguida), qualquer outra componente será, por consequência, $\pm$ T, consoante a permutação dos índices $klmn$ é par (+) ou ímpar (-)[9], enquanto que as demais componentes (aquelas que têm pelo menos dois subíndices iguais) se devem anular, naturalmente[10].

Agora escrevamos então a fórmula de transformação para a componente T_{1234}

---

[9] Chama-se permutação a qualquer arranjo dos índices $1,2,\ldots,n$ (ex.: $k_1,k_2,\ldots,k_n$). Diz-se que dois elementos k_i e k_j fazem uma permanência ou uma inversão consoante estejam ou não pela mesma ordem em que se encontram em 1,2,...,n. Designa-se por   o somatório das somas do número de inversões que cada elemento k_i faz com os elementos seguintes (somatório, estendido aos n-1elementos de qualquer permutação - ex: para 4.1.3.2 fica   =3+0+1=4 é par!). A permutação $k_1,k_2,\ldots,k_n$ diz-se par ou ímpar consoante   seja par ou ímpar.
Chama-se transposição à troca da posição de dois índices.
Demonstra-se que toda a permutação se pode obter de qualquer outra por um número de transposições limitado, que será par se ambas as permutações forem da mesma paridade e ímpar em caso contrário.
Uma forma de se verificar se uma permutação, relativamente a uma segunda permutação, é par ou ímpar consiste em verificar-se se é par ou ímpar o resultado da contagem do número de transposições para se passar de uma permutação a outra, qualquer que seja o número e a ordem porque são efectuadas estas tranposições.

[10] Por exemplo a componente aa12 deve ser simétrica de aa21. Por outro lado efectuando 4 trocas de índice em aa12 obteríamos a1a2 (com a 1ª troca), 1aa2 (com a 2ªtroca), 2aa1 (3ª), aa21 (4º). Ou seja aa12 e aa21 devem ser nulas. Pelo que não é possível distinguir as permutações pares das ímpares.

$$\bar{T}_{1234} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^3}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^4} T_{klmn} \tag{II.1.12}$$

Considerando os valores de T_{klmn} , isto fica

$$\bar{T}_{1234} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right| T_{1234} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right| \mathrm{T} \tag{II.1.13}$$

Ou se usarmos a notação consistente $\bar{\mathrm{T}}$ para $\bar{T}_{1234}$ temos[11],

$$\bar{\mathrm{T}} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right| \mathrm{T} \tag{II.1.14}$$

Assim uma maneira de ver o nosso tensor covariante de ordem quatro é considerá-lo como uma entidade com uma só componente, posto que não como um escalar, mas como uma densidade escalar.

Pode dar-se a volta ao teorema. Seja A um escalar. Representemos uma entidade E^{klmn} (veremos de seguida a razão de termos escolhido uma letra gótica[12]) definida num qualquer sistema de coordenadas sendo cada componente $\pm A$, segundo o sinal da permutação ($klmn$), ou então zero, se os quatro superíndices não são todos diferentes. Uma forma estranha, mas certa, de exprimir que A é um invariante ($\bar{A} = A$) é então

$$\bar{\mathrm{E}}^{klmn} = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right| \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^u}\mathrm{E}^{rstu} \; . \tag{II.1.15}$$

---

[11] Convém lembrar, relativamente à notação usada, que o jacobiano é constituido por 4! (i.e. 24) parcelas e não 4x4 (16) parcelas conforme a notação poderia sugerir.

[12] Na tradução usada, pensamos haver um erro pois em vez de um E na tradução é usado um T para depois na fórmula ocorrer como um E. Para além disso, na fórmula de transformação que se apresenta como sendo a de uma densidade contravariante, os índices são colocados de modo covariante o que indica novo erro. Ou seja onde está agora E^{rstu} estava erradamente E_{rstu}.

Efectivamente, os primeiros somatórios prescritos proporcionam um determinante funcional que, precisamente, cancelam[13] o que se segue e ficamos com

$$\bar{E}^{klmn} = E^{klmn} \qquad \text{(II.1.16)}$$

Sem dúvida, esta fórmula «estranha mas correcta» diz-nos que E é uma densidade tensorial antisimétrica contravariante de ordem 4. Costuma-se representá-la, no caso particular de A=1, por

$$\varepsilon^{klmn} \qquad \text{(II.1.17)}$$

Esta densidade ε é uma valiosa aquisição, é uma ferramenta utilizada com muita frequência. A propósito, esta é outra entidade *numericamente* invariante conforme aquilo que encontrámos.

Pode-se formar, escrevendo, a partir de (II.1.17) e de um tensor antisimétrico covariante de ordem dois, a seguinte entidade, que é claramente uma densidade escalar

$$\frac{1}{8}\varepsilon^{klmn}\phi_{kl}\phi_{mn} \qquad \text{(II.1.18)}$$

que escrita considerando os valores numéricos dos índices fica[14],

$$\phi_{12}\phi_{34} + \phi_{23}\phi_{14} + \phi_{31}\phi_{24} \qquad \text{(II.1.19)}$$

Também,

---

[13] É extensa a demonstração. Para o efectuar é importante verificar que o Jacobiano (determinante) é um somatório de termos em que cada um é o produto, se desenvolvido na primeira linha, $(-1)^p \partial x^1/\partial\bar{x}^a . \partial x^1/\partial\bar{x}^b . \partial x^1/\partial\bar{x}^c . \partial x^1/\partial\bar{x}^d$ em que os índices $a,b,c.d$ são todos diferentes e p é par ou ímpar consoante a permutação (a,b,c,d) é par ou ímpar. Assim, os produtos das oito derivadas ou dão 0, 1 ou -1.

[14] Pois que das 24 permutações dos índices $klmn$, interessam apenas as combinações de 4 índices tomadas duas a duas, ou seja 3. As permutações repetem-se 8 vezes. Da troca de m com n, duas permutações; da troca de l com k, mais duas por cada m com n; e da troca de mn com kl, mais duas por cada uma das anteriores. E como quer ϕ quer são antisimétricos as trocas de sinais, se as houver, dão-se a par e redundam sempre em sinal mais.

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{klmn}\phi_{kl} = \mathfrak{f}^{mn} \tag{II.1.20}$$

é uma densidade antisimétrica contravariante de ordem dois. Em termos claros e simples: dado um tensor antisimétrico ϕ_{kl} pode-se considerar

$$\begin{array}{lll} \phi_{12} & \text{como a componente} & (34) \\ \phi_{23} & \text{"} & (14) \\ \phi_{34} & \text{"} & (12) \end{array} \tag{II.1.21}$$

de outra entidade, mas esta outra entidade é contravariante e não um simples tensor, mas uma densidade. Apenas estes simples factos, se se considera o grande papel que jogam os tensores antisimétricos de ordem dois, bastariam para mostrar a utilidade de estender-se a noção de densidade a outras entidades, para além das densidades escalares.

O que em (II.1.18) ou (II.1.19) torna uma densidade escalar, faz parte de um teorema mais geral sobre a formação de uma densidade escalar, a partir de qualquer tensor covariante de ordem dois. Seja g_{ik} um tensor assim, de tal modo que, na transformação,

$$\bar{g}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} g_{lm} \tag{II.1.22}$$

o lado direito pode, de momento, considerar-se como um «produto matricial» das matrizes,

$$\partial x^l / \partial \bar{x}^i, \; g_{lm}, \; \partial x^m / \partial \bar{x}^k$$

(por esta ordem!). Assim, a partir de um conhecido teorema sobre o determinante de uma matriz produto (o determinante de um produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinates das matrizes, mas atenção: o produto matricial não é comutativo) e chamando aos determinantes $|\bar{g}_{lm}|$ e $|g_{ik}|$, $\bar{g}$ e g , respectivamente obtém-se:

$$\bar{g} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right|^2 g \Rightarrow \sqrt{\bar{g}} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right| \sqrt{g} \tag{II.1.23}$$

Por palavras: A raiz quadrada do determinante de qualquer tensor covariante de ordem dois é uma densidade escalar. O caso de um tensor simétrico covariante de ordem dois será importante na geometria métrica (a teoria de Einstein de 1915). No caso de um tensor antisimétrico, pode extrair-se a raiz quadrada e chegar-se precisamente a (II.1.18) ou a (II.1.19), como é fácil de verificar directamente[15].

Aproveitemos a ocasião para demonstrar outro facto importante. Chamemos M^{ik} ao menor g_{ik} no determinante g, sem anteciparmos o seu carácter tensorial e seja $g \neq 0$.

Então por um conhecido teorema[16] sobre determinantes

$$g_{mk} M^{lk} = \delta^l_m g \tag{II.1.24}$$

Naturalmente isto cumpre-se em qualquer sistema de referência, e por conseguinte, também relativamente às quantidades com barra, conquanto $\bar{M}^{lk}$ se refira sempre aos menores nesse sistema de referência. Mas já que a partir de (II.1.24) ou, digamos, de

$$g_{mk} \frac{M^{lk}}{g} = \delta^l_m \tag{II.1.25}$$

as quantidades M^{lk}/g estão determinadas univocamente, e dado que (em virtude da propriedade tensorial de δ^l_m) a equação precedente também se cumprirá em qualquer

---

[15] A verificação faz-se extraindo-se a raiz quadrada ao determinante da matriz antisimétrica (ou hemisimétrica). O resultado é $g_{12}g_{34}+g_{23}g_{14}-g_{13}g_{24}$. Mas g_{13} é $-g_{31}$ daí a prova.

[16] Se o índice l for igual a m, estamos perante a definição de determinante. Caso contário, o teorema mostra que é nula a soma algébrica dos produtos dos elementos de uma fila pelos complementos algébricos dos elementos correspondentes de uma outra fila.

sistema de referência para aquelas quantidades que se obtêm a partir de M^{lk}/g mediante sua transformação como um tensor covariante de ordem dois, segue-se que as ditas quantidades formam realmente um tensor[17]. *Os «menores normalizados» de qualquer tensor covariante de ordem dois formam um tensor contravariante de ordem dois.* É fácil provar que nesta afirmação os termos covariante e contravariante podem trocar-se. Tanto mais que, se a partir do tensor,

$$\frac{M^{lk}}{g} = g^{lk} \text{ (digamos)} \tag{II.1.26}$$

formarmos novamente os menores normalizados, então regressamos ao tensor covariante g_{lk}.

Se em lugar de (II.1.26) considerarmos a disposição

$$\frac{M^{lk}}{\sqrt{g}} = \mathfrak{g}^{lk} \text{ (digamos), } (\mathfrak{g} \text{ gótico}) \tag{II.1.27}$$

as componentes formam, naturalmente, uma *densidade* tensorial contravariante de ordem dois.

É importante notar que no caso de um tensor antisimétrico ϕ_{ik} esta densidade tensorial é a mesma que a referida em (II.1.20) por um caminho distinto, como é fácil de demonstrar calculando directamente os menores neste caso.

Havíamos acima mencionado que g é, neste caso, o quadrado da densidade escalar (II.1.19), para a qual agora introduzimos a notação $\mathfrak{I}_2$:

$$\frac{1}{8}\varepsilon^{klmn}\phi_{kl}\phi_{mn} \equiv \phi_{12}\phi_{34} + \phi_{23}\phi_{14} + \phi_{31}\phi_{14} = \mathfrak{I}_2 \tag{II.1.28}$$

---

[17] Ou seja como as quantidades M^{lk}/g são combinações lineares normalizadas das componentes de g_{mk}, também M^{lk}/g se transformará como tensor..

Portanto, aplicando (II.1.25) a este caso, obtemos

$$\mathrm{f}^{lk}\phi_{mk} = \delta_m^l \mathrm{l}_2 \qquad \text{(II.1.29)}$$

De acordo com (II.1.20) isto também pode ser escrito

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{hilk}\phi_{hi}\phi_{mk} = \delta_m^l \mathrm{l}_2 \qquad \text{(II.1.30)}$$

Contraindo relativamente aos índices l e m recupera-se (II.1.28), já que $\delta_m^m = 4$. Mas, naturalmente, (II.1.29) ou (II.1.30) contêm mais que (II.1.28). Em linguagem matricial isto diz-nos que o produto matricial $\mathrm{f}^{lk}\phi_{mk}$ é um múltiplo da matriz unitária, o qual não pode extrair-se directamente da definição (II.1.20).

Como últimos exemplos para construir densidades a partir de tensores, consideremos um tensor antisimétrico covariante de ordem três. À parte o sinal, tem apenas quatro componentes não nulas numericamente diferentes, dependendo do subíndice 1, 2, 3 ou 4 que esteja ausente. Agora, com a ajuda da densidade tensorial *å* formemos a partir de A a densidade vectorial contravariante

$$\frac{1}{6}\varepsilon^{klmn}A_{klm} = \mathrm{A}^n \text{ (digamos)} \qquad \text{(II.1.31)}$$

A correlação é muito simples, pode-se formulá-la assim: um tensor antisimétrico covariante de ordem três pode considerar-se como uma densidade vectorial contravariante, da qual a n-ésima componente é a componente klm do tensor, formando $klmn$ uma permutação par de 1234.

E vice-versa, a partir de um vector covariante B_k pode-se formar uma densidade contravariante antisimétrica de ordem três,

$$\varepsilon^{klmn}B_n = \mathrm{L}^{klm} \qquad \text{(II.1.32)}$$

onde o primeiro membro compreende só um termo, dado que n tem que ser o quarto índice não usado em klm[18].

Claramente, a relação entre os tensores totalmente antisimétricos e as densidades tensoriais é a seguinte. A partir dos seguintes tensores antisimétricos covariantes[19]

$$A,\ A_i,\ A_{ik},\ A_{ikl},\ A_{iklm} \tag{II.1.33}$$

podem deduzir-se as seguintes densidades antisimétricas contravariantes de ordem complementar multiplicando-os pela densidade $\mathring{a}$ e contraindo o produto relativamente aos seus índices originais

$$\mathrm{A}^{iklm}, \mathrm{A}^{klm}, \mathrm{A}^{lm}, \mathrm{A}^{m}, \mathrm{A} \tag{II.1.34}$$

Se se incluírem os factores 1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, por esta ordem, a densidade deduzida tem as mesmas componentes que o tensor, só que numa designação diferente.

Não há um teorema correspondente sobre densidades covariantes e vectores contravariantes, simplesmente porque, na prática não estamos interessados em entidades tensoriais que (não)[20] assumam mais que a primeira potência do determinante funcional da transformação. (Uma entidade tal como, por exemplo, $\varepsilon^{klmn}\mathrm{A}_{lmn}$ assumiria a segunda potência deste determinante.)

Por motivos práticos, pode ser útil recordar as regras seguintes.

---

[18] Melhor seria dizer: dado que a soma sobre o índice n se reduz ao termo cujo valor de n é o índice não usado em klm. Isto devido à natureza desta densidade tensorial.

[19] N.A.: Um invariante pode colocar-se a partir de tensores covariantes ou contravariantes, e os invariantes e os vectores podem colocar-se com tensores antisimétricos, conquanto sejam definidos (como efectivamente pode fazer-se) um tensor covariante/contravariante como aquele que não tem componentes contravariantes/covariantes e a «antisimetria total» mediante: a mudança de sinal por troca de um índice (se o houver) por qualquer outro (se o houver ainda) do mesmo tipo.

[20] No original esta palavra «não» exprime exactamente o contrário do exemplo que se segue, pelo que será um erro e deve ser retirada..

Qualquer justaposição de tensores é novamente um tensor, cuja natureza deve ver-se a partir da disposição dos índices superiores e inferiores, sem considerar os que aparecem repetidos duas vezes em ambas[21] as posições (índices mudos ou de soma). Tenha-se cuidado em não repetir uma letra «acidentalmente», empregando-a mais de duas vezes[22].

Só as entidades do mesmo tipo se podem somar algebricamente ou igualarem-se. Por conseguinte um índice deve aparecer ou em cada termo[23] de uma equação na mesma posição, ou então duas vezes no mesmo termo em posições distintas (soma).

Num termo pode haver, apenas, uma densidade justaposta. Então o termo é uma densidade e todos os restantes termos o devem ser igualmente.

A regra de não se repetir uma letra «acidentalmente» não se refere a índices de soma que sejam usados em termos diferentes. Neste caso, o seu uso repetido não dá lugar a confusão.

Uma afirmação que poderíamos ter efectuado anteriormente acerca de produtos externos e que, em toda a sua simplicidade, é muito importante, é esta: se o produto é puramente um produto externo, isto é, se a justaposição não implica contracção adicional, então só pode anular-se se pelo menos um dos factores for o tensor zero. Por outras palavras, não há «divisores de zero» na álgebra de tensores e de densidades tensoriais[24].

---

[21] Em cima e em baixo.
[22] Num termo obviamente. Porque, se tiverem caracteres diferentes, uma soma não desejada estará ímplicita, e se tiverem o mesmo carácter, não terá qualquer significado porque estará fora da nossa simbologia. Este tema será retomado três parágrafos à frente.
[23] A palavra termo está bem empregue. Pois uma equação tem dois membros cada um com os seus termos. O tensor nulo num membro deve considerar-se como tendo os mesmos índices não repetidos de quaquer termo.
[24] Notar que num produto contraído, o zero pode ser factorizado! Ao fim e ao cabo quere-se, com isto, remover a ideia prefixada (do calculo vectorial) de que se um produto externo é nulo ainda haja a hipótese de os dois vectores serem não nulos por serem colineares.

II.2 Derivadas

Por brevidade, no que se sucede indicaremos, ocasionalmente, a derivada relativamente a x^k mediante um índice inferior k, precedido por uma vírgula.

Salvo no caso de um invariante, a derivada de uma componente tensorial, como, por exemplo[25],

$$A_{k,i} \tag{II.2.1}$$

não tem um significado próprio, dado que surge de uma diferença de tensores referidos a pontos diferentes, a saber, o A_k no ponto x_l do A_k num certo ponto próximo. (Não deve pensar-se que este pequeno deslocamento «não tem importância», pois na derivada procuramos precisamente a mudança em A_k produzida por este pequeno deslocamento.)[26]

Se calcularmos, por exemplo, a partir de

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^k} = \frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\phi}{\partial x^l} \tag{II.2.2}$$

a fórmula de transformação para as segundas derivadas,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\bar{x}^k\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^l\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar{x}^k\partial\bar{x}^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^l} \tag{II.2.3}$$

vemos que estas não só não formam um tensor, como tão-pouco compartilham os seus traços distintivos, o de que o seu anulamento seja um invariante. Por hipótese o mesmo

---

[25] A notação usada significará de futuro que $A_{k,i} = \dfrac{\partial A_k}{\partial x^i}$

[26] O que de facto interessa, é a observação da forma como se transformam as primeiras e segundas derivadas perante uma mudança de referencial.

se cumprirá para qualquer campo vectorial covariante[27]. A partir da sua fórmula de transformação (I.0.12) obtemos por diferenciação

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial A_l}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} A_l \qquad \text{(II.2.4)}$$

que é exactamente o mesmo que (II.2.3), só que para um A_l arbitrário (e não um gradiente, como ali). Voltamos a reparar que $A_{l,m}$ se comporta como um tensor covariante de ordem dois, excepto no que concerne ao termo adicional que contém A_l não diferenciado e as segundas derivadas da transformação. De novo, isto tem o efeito de que a nossa disposição de derivadas não se anularia necessariamente no sistema com barra como consequência do seu anulamento no sistema sem barra.

Obtém-se um estado de coisas muito semelhante, como facilmente poderemos dar-nos conta, para qualquer tensor ou densidade tensorial.

Não obstante, há certas combinações lineares das derivadas das componentes tensoriais, nas quais se cancelam os termos que contém as segundas derivadas das coordenadas juntamente com as componentes não diferenciadas do tensor original. Estas combinações lineares são, então, tensores, sempre que o índice de derivação jogue um papel de índice covariante (subíndice). São fáceis de recordar. Todos eles são antisimétricos. Comecemos com os tensores. O primeiro já se conhece[28].

(1) O gradiente de um invariante: $\phi_{,k}$. Isto é um vector covariante. Se a partir dele formarmos o que se chama (nova definição!) o rotacional

$$\phi_{,k,i} - \phi_{,i,k} = 0 \qquad \text{(II.2.5)}$$

[27] Na tradução está contravariante o que é um erro!

[28] N.A.: Não há nada de errado em tomar-se um escalar entre os tensores antisimétricos! Ver nota de rodapé 19 do cap. II.

obtemos zero.

Isto mostra que os termos adicionais devem cancelar-se nesta diferença, como se pode observar ao inspeccionarmos directamente (II.2.3). Mas também podemos ver que se devem cancelar no rotacional de qualquer vector covariante. Daqui:

(2) O rotacional de um vector covariante A_k:

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^k} \tag{II.2.6}$$

é um tensor antisimétrico covariante de ordem dois[29].

Agora siga o jogo. Se formarmos a partir dele o que se denomina (nova definição) a divergência cíclica:

$$l \neq k \neq i \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^k}\right) + \text{os dois termos cíclicos} = 0 \tag{II.2.7}$$

Portanto, aqui também, devem cancelar-se os termos que contém os tensores de ordem dois não diferenciados. E o mesmo se deve passar para qualquer tensor antisimétrico covariante de ordem dois. Daqui:

(3) A divergência cíclica de um tensor antisimétrico covariante de ordem dois ϕ_{ik}

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi_{li}}{\partial x^k} \tag{II.2.8}$$

é um tensor totalmente antisimétrico covariante de ordem três.

[29] Notando que sob a transformação (II.2.4), $\bar{A}_{k,i} - \bar{A}_{i,k} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}(A_{l,m} - A_{m,l})$.

Ao continuar devemos ter cuidado. Se formássemos a derivada $\partial/\partial x^m$ de este tensor e lhe fosse somada a permutação cíclica, não se anularia. Deve-se introduzir um sinal (-) sempre que a permutação seja ímpar. Daqui que também:

(4) A partir de um tensor de ordem três covariante antisimétrico A_{ikl} a seguinte soma de quatro derivadas[30]

$$\sum (-)^{!} \frac{\partial A_{ikl}}{\partial x^m} \qquad \text{(II.29)}$$

é um tensor antisimétrico de ordem quatro.

Isto é tudo. Não podemos continuar, porque apenas temos quatro índices. (mas poderíamos num espaço com mais dimensões.)

Agora, devido à correspondência entre tensores e densidades, ambos antisimétricos, seguem-se quatro afirmações similares sobre as densidades, chamá-las-ei (1'), (2'), (3') e (4').

(4') A divergência (nova definição!) de uma densidade vectorial contravariante $\mathfrak{A}^k$, a saber, $\partial \mathfrak{A}^k/\partial x^k$ é uma densidade invariante.

(3') A divergência («divergência tensorial», nova definição!) de uma densidade tensorial contravariante de ordem dois antisimétrica $\mathfrak{A}^{kl}$, a saber, $\partial \mathfrak{A}^{kl}/\partial x^l$ é uma densidade vectorial contravariante.

(2') A divergência tensorial (nova definição! Ainda que se utilize a mesma palavra) de uma densidade tensorial contravariante antisimétrica de ordem

[30] O expoente simbólico (!) serve para que nos recordemos do que acaba de dizer-se sobre o sinal da permutação.

três A^{klm}, a saber, $\partial A^{klm}/\partial x^m$ é uma densidade de ordem dois[31] da mesma descrição.

(1’) A divergência tensorial (ver o parênteses em (2´)) de uma densidade tensorial contravariante antisimétrica de ordem quatro A^{klmn}, a saber, $\partial A^{klmn}/\partial x^n$ é uma densidade de ordem três da mesma descrição.

Até onde chega o meu conhecimento, estas são todas as combinações lineares das primeiras derivadas dos tensores ou das densidades tensoriais que têm carácter tensorial. As mais relevantes são as (1), (2), (3), (4’) e (3’).

O anulamento de qualquer dos tensores deduzidos acima tem em todos os casos um bom significado, a saber, para

(1) que o escalar ϕ é constante,

(2) que o vector A_k é um gradiente,

(3) e (4) são exemplificadas pelas equações de Maxwell,

(4’) indica (normalmente se expressa dizendo) que a corrente A^k não tem fontes.

No entanto, não são suficientes para estabelecer uma análise exaustiva no nosso contínuo. Nem sequer uma pergunta tão simples como esta tem algum sentido: Quando deve um campo vectorial A_k ser considerado constante através de uma certa região? Já que o anulamento de todas as derivadas $A_{k,i}$ não é (como vimos) uma propriedade independente do sistema de referencia, porque $A_{k,i}$ não é um tensor.

[31] Na versão espanhola está três mas é de facto de ordem dois.

O conceito geométrico para eliminar esta dificuldade se introduzirá na parte II. Antes de o efectuar, expliquemos algo mais sobre o interessante facto, recentemente aludido, de que o significado analítico desenvolvido até aqui bastará para estabelecer as afirmações principais da teoria de Maxwell, a qual pode chamar-se, apropriadamente, a antecessora espiritual de todas as teorias de campo que a têm seguido. A forma elementar das equações de Maxwell é, na notação familiar do cálculo vectorial tridimensional:

$$\left.\begin{aligned} rot\, H - \dot{D} &= I \\ div\, D &= \rho \end{aligned}\right\}(A) \qquad \left.\begin{aligned} rot\, E + \dot{B} &= 0 \\ div\, B &= 0 \end{aligned}\right\}(B) \qquad \text{(II.2.10)}$$

(as unidades foram escolhidas de forma que não apareçam os factores 4π ou c). O comportamento atribuído normalmente, e naturalmente, à corrente e à carga (I,) numa mudança elementar da escala de comprimento leva-nos a considerá-las como densidades, e assim olharemos os quatro membros em (A) como equações entre densidades. Então, devemos unir as quantidades vectoriais elementares H e D numa densidade tensorial antisimétrica covariante de ordem dois f^{ik} de tal modo que

As componentes de H correspondam a f^{23}, f^{31}e f^{12};

As componentes de D correspondam a f^{41}, f^{42}e f^{43}.

Então as equações (A) escrevem-se

$$\frac{\partial f^{ik}}{\partial x^k} = s^i \qquad (A')$$

em que a quadri-corrente s^k substitui a (I, $\tilde{n}$). No caso do segundo conjunto de equações (B) não se manifesta por si só uma preferência em relação ao seu carácter (tensores ou densidades), mais, a escolha é irrelevante. É apenas uma questão de nomenclatura, já que a densidade ε permite uma transição simples de um a outro. (Ocorre o mesmo no primeiro conjunto. Mas se ali escolhermos um tensor covariante em lugar de $\mathfrak{f}^{ik}$, teremos que tomar um tensor antisimétrico covariante de ordem três no lugar de $\mathfrak{s}^{k}$; como Einstein sugeriu uma vez, e por muito boas razões.)

Conservando a nomenclatura acostumada, unimos *E* e *B* num tensor antisimétrico covariante ϕ_{ik}, de tal forma que

As componentes de *B* correspondam a ϕ_{23}, ϕ_{31} e ϕ_{12};

As componentes de *E* correspondam a ϕ_{14}, ϕ_{24} e ϕ_{34}.

Então as equações (B) ficam

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x^{l}} + \text{dois termos cíclicos} = 0 \qquad \text{(B')}$$

Mediante (A') e (B') estabelecemos as equações fundamentais de Maxwell de modo invariante num sistema de referencia arbitrário, usando nada mais que os recursos desenvolvidos até agora nestas conferências; isto é, para uma variedade espacio-temporal desconexa (não se introduziu nem a afinidade nem uma métrica). O que não podemos estabelecer desta maneira é a relação entre a densidade (*H*, *D*) ou $\mathfrak{f}^{ik}$, por um lado e o tensor (*B*, *E*), por outro. (é o que na teoria elementar se chamam equações em meios materiais.) Pois a única relação que se poderia pensar, a saber,

$$\mathfrak{f}^{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}\phi_{lm} \qquad \text{(II.2.11)}$$

converte as equações (A’), pelo menos na ausência de carga e corrente ($\mathrm{s}^k = 0$), numa consequência de (B’) mediante a identificação de *H* com *E* e *D* com *–B*; o qual é *completamente erróneo e não pode ser evitado mediante uma nomenclatura diferente*.

Uma forma alternativa de obter a relação requerida se sugerirá por si própria á luz de posteriores desenvolvimentos gerais.

Poderemos explicá-lo aqui facilmente de modo directo. A quantidade l_2 na equação (II.1.28) é uma densidade escalar. Portanto, a integral,

$$I = \int \mathrm{l}_2 dx^4 \tag{II.2.12}$$

tomada sobre uma região fixada de modo invariante, é um invariante. Agora consideremos juntamente com o campo original ϕ_{ik} um campo infinitesimamente próximo $\phi_{ik} + \delta\phi_{ik}$. Os $\partial\phi_{ik}$ (sendo cada um deles, a diferença de dois tensores referidos ao mesmo ponto) são também um campo tensorial com o mesmo carácter. Além disso,

$$\delta I = \int \frac{\partial \mathrm{l}_2}{\partial \phi_{ik}} \delta\phi_{ik} dx^4 \tag{II.2.13}$$

também é um invariante, já que é a diferença entre o invariante *I* formado de $\phi_{ik} + \delta\phi_{ik}$ e o formado de ϕ_{ik}. A partir de isto é fácil inferir que o integrando é por si mesmo uma densidade escalar; e dado que isto se mantém para um tensor arbitrário $\delta\phi_{ik}$, concluímos que

$$\frac{\partial \mathrm{l}_2}{\partial \phi_{ik}} = \begin{cases} \text{Densidade tensorial antisimétrica} \\ \text{contravariante de ordem 2} \end{cases} \tag{II.2.14}$$

Um olhar sobre (II.1.28) mostra que é o mesmo que havíamos obtido anteriormente «subindo os índices com a ajuda da densidade å». O que faz com que este procedimento seja também inútil.

E assim terminou Schrödinger o seu breve (mas profundo) estudo das bases de Cálculo Tensorial que se seguiu à Álgebra. Todos sabemos que a integração e derivação são operações simples (e até o sejam mesmo fáceis para os decoradores de fórmulas…). Com efeito, estamos a trabalhar no contínuo, mas poder-se-ia por o mesmo problema, tratado da mesma forma no discreto? Claro que não. Talvez seja esta uma das principais dificuldades dos modelos discretos da estrutura do espaço-tempo, mas não podemos ter a preocupação de estudar estes assuntos neste trabalho, embora lamentemos que Schrödinger não tenha feito uma referência a este assunto neste seu livro.

PARTE II

A VARIEDADE AFIMMENTE CONEXA

III Derivadas Invariantes

Tendo em vista averiguar (ou, talvez melhor, adequar) uma forma natural mediante a qual decidir de uma maneira invariante se um tensor varia, e como o faz, de um ponto a outro voltemos a (II.2.4).

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial A_l}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} A_l \qquad \text{(III.0.1)}$$

Suponhamos que temos alguma razão para estipular que A_k seja considerado como «realmente» constante, se as suas dezasseis derivadas são nulas no sistema de referência original, o sistema sem barra (portanto privilegiamos este sistema de referência provisoriamente). Examinaremos cuidadosamente ao que equivale esta afirmação em qualquer outro sistema de referência. Em qualquer outro sistema de referência (o com barra) isto se expressa, de acordo com (III.0.1), por

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} A_l = 0 \qquad \text{(III.0.2)}$$

No entanto com objectivo de o expressar consistentemente no sistema de referencia com barra, é melhor substituir A_l em função de $\bar{A}_l$, de acordo com (I.0.12) (posto inversamente). Assim

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} \bar{A}_n = 0 \qquad \text{(III.0.3)}$$

Ponhamos, para abreviar,

$$\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} = \bar{\Gamma}^n_{ki} \tag{III.0.4}$$

Então as equações

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} - \bar{\Gamma}^n_{ki}\bar{A}_n = 0 \tag{III.0.5}$$

expressam, num sistema de referência arbitrário, o facto de que a disposição das derivadas se anula no sistema de referência original, o sem barra. Já que a transformação arbitrária que vai do sistema de referência original ao sistema com barra pode ser a identidade, teremos que dizer que as Γ^n_{ki} sem barra são todas nulas. E, a propósito, o mesmo se mantém obviamente para todos os sistemas de referência que se obtêm do original perante uma transformação puramente *linear* das x^k, já que então as segundas derivadas se anulam em (III.0.4).

E esta é a única dificuldade que permanece e se opõe à ideia de invariância geral: <u>um sistema de referência, ou melhor, um conjunto de sistemas de referência, se privilegia mediante a suposição de que nele, ou neles, as Ã`s se anulam</u>. Não obstante, esta dificuldade é muito fácil de superar: omitimos precisamente a dita suposição. Este é um passo muito importante que leva imediatamente ao conceito de *transformação (conexão) afim*.

Assim agora, e no que se sucede, não definiremos as Ã`s mediante a estipulação de que se anulem num sistema de referência particular e de que venham dadas por (III.0.4) em qualquer outro. Considerá-las-emos como algo do tipo geral de um campo tensorial ou de um campo de uma densidade tensorial, mas realmente diferente de qualquer um dos dois; uma disposição de funções[1] às quais

(a) podem atribuir-se valores arbitrários num sistema de referência particular, e que

(b) estejam sujeitas à lei de transformação que faz com que a seguinte expressão[2] seja um tensor:

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \Gamma^n_{ki} A_n = A_{k;i} \qquad \text{(III.0.6)}$$

O símbolo $A_{k;i}$ é uma nova notação introduzida como uma abreviatura para a expressão da esquerda. Chamamos à disposição das Ã`s uma ***transformação afim*** ou, de uma forma sintética, uma ***afinidade***, a qual nós impusemos mediante (a) no nosso continuo.

A designação de «Transformação afim ou conexão afim» dada às Ã`s corresponde efectivamente ao facto de não devermos considerar apenas transformações puramente lineares, como foi dito acima, que levaria à anulação das Ã`s. Assim os Ã`s surgem como as entidades que vão aproximar a ideia de invariância geral, objectivo para o qual se pretende evoluir. Isto não quer dizer que não haja casos em que possam anular-se, se bem que em geral não se anulam. Este facto não é referido em geral pelos autores matemáticos de livros de cálculo tensorial, para os quais as Ã`s são

---

[1] Ao dizer que os Ã`s podem ser consideradas como «algo do tipo geral de um campo tensorial ou de uma densidade tensorial, mas realmente diferente de qualquer um dos dois», Schrödinger pode confundir o leitor. As Ã`s não são tensores nem densidades tensoriais, tem algumas propriedades operativas comuns com estas entidades como se verá, mas logo á partida são uma disposição de funções que obedecendo às regras (a) e (b) só fazem sentido quando se estabelece uma relação entre dois referenciais. Um tensor ou uma densidade tensorial é uma disposição de funções que podem ser defenidas num referencial único (embora a sua definição esteja sujeita a regras fixadas na mudança de um referencial e o seu uso seja «vantajoso» exactamente quando se operam estas mudanças).

[2] O membro esquerdo da equação.

simplesmente uma maneira de simplificar a escrita. (Aliás Schrödinger diz «para abreviar» na pág.56, mas a seguir explica o que pretende.)

A $A_{k\,;i}$ chama-se derivada *invariante* de A_k (relativa à afinidade Γ^{n}_{ki}), em contraste com a derivada ordinária $A_{k\,,i}$.

Na notação de Schrödinger $A_{k\,;i}$ é uma derivada invariante (designação que alguns autores preferem chamar derivada covariante[3] como por exemplo B. Spain ou James G. Simmonds[4]), neste caso, de um vector covariante, mas a noção será estendida a vectores contravariantes, a tensores e a densidades. (Estas últimas só no último capítulo o XII.)

Os nossos trabalhos prévios devem considerar-se como um caso especial, a saber, quando *sob* (a) atribuímos os valores zero para todas as Ã`s. A partir daqui é fácil inferir que o requerido sob (b) se satisfará se adoptarmos para Ã$^{n}{}_{ki}$ a lei de transformação seguinte: a correspondente a um tensor com três índices, mas com um termo extra adicional, que deverá ser a expressão que está à esquerda em (III.0.7).

Assim

$$\bar{\Gamma}^{n}_{ki} = \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^{n}}{\partial x^{l}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{i}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \bar{x}^{k}} \Gamma^{l}_{rs}}_{\text{Parte homogénea}} + \frac{\partial \bar{x}^{n}}{\partial x^{l}} \frac{\partial^{2} x^{l}}{\partial \bar{x}^{i} \partial \bar{x}^{k}} \qquad \text{(III.0.7)}$$

O termo adicional é independente das Ã`s. É o mesmo para qualquer afinidade; só depende da relação entre os dois sistemas de referência. É o responsável pelo facto de

[3] Não se infira que exista uma derivada contravariante. A escolha de um ou de outro nome tem vantagens e têm inconvenientes.
[4] “Tensor Calculus”, Barry Spain; Oliver and Boyd Edinburgh and London New York: Interscience Publishers, 1953.
“A Brief on Tensor Analysis” sec. edition , James G. Simmonds; Springer-Verlag;

que as Ã`s não se anulem em todos os sistemas de referência, mesmo que isso suceda nalguns deles.

Quer dizer, tal como referimos na nota de rodapé 1 da pág. 57 uma afinidade não é um tensor (ou densidade tensorial). As suas fórmulas de transformação embora *lineares* não são *homogéneas* como aliás resulta de (III.0.7).

O termo adicional é simétrico relativamente aos índices *i* e *k* de Ã, bem como a fórmula de transformação completa. A simetria relativa aos subíndices é, portanto, uma propriedade invariante de uma afinidade. (A antisimetria não o é!) Se uma afinidade é assimétrica, então na fórmula de transformação da sua parte antisimétrica, $\frac{1}{2}\left(\Gamma^n_{ik} - \Gamma^n_{ki}\right)$, a parte não homogénea desaparece; esta parte antisimétrica é portanto um tensor. Em geral, o facto de que o termo não homogéneo seja o mesmo para qualquer afinidade tem as seguintes consequências relevantes:

(1) Se considerarmos duas transformações afins Γ^n_{ki} e $\hat{\Gamma}^n_{ki}$ no mesmo contínuo (como efectivamente o podemos fazer, e muito frequentemente o fazemos) então a sua diferença $\Gamma^n_{ki} - \hat{\Gamma}^n_{ki}$ é sempre um tensor;

(2) Em particular, se temos ocasião de considerar uma variação infinitesimal $\Gamma^n_{ki} - \partial\Gamma^n_{ki}$ de uma afinidade dada Γ^n_{ki} (como muitas vezes fazemos), então $\partial\Gamma^n_{ki}$ é um tensor. Inversamente, por suposição, a soma de uma afinidade e de um tensor T^n_{ki} é sempre uma afinidade.

No entanto a *soma* de duas afinidades não é uma afinidade, porque na sua fórmula de transformação o termo crítico teria o factor 2. Claramente, uma combinação linear de afinidades é uma afinidade se os factores de ponderação forem constantes fixas ou invariantes e totalizarem a unidade[5].

$$\begin{cases} \lambda\Gamma^n_{ki} + \mu\hat{\Gamma}^n_{ki} \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \tag{III.0.8}$$

Portanto, uma afinidade assimétrica é sempre a soma de uma afinidade simétrica e de um tensor antisimétrico de ordem três, ou seja

$$\Gamma^n_{ik} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^n_{ik} + \Gamma^n_{ki}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\Gamma^n_{ik} - \Gamma^n_{ki}\right)}_{\text{Tensor}} \tag{III.0.9}$$

A noção de afinidade antisimétrica é vã, porque esta propriedade não é independente do sistema de referência.

As afinidades são um segundo tipo, ou se o desejarem, um terceiro tipo, de entidades relevantes, juntamente com os tensores e as densidades tensoriais. A noção de derivada invariante que introduzimos em (III.0.6) não é um conceito absoluto, enquanto se refere a uma certa afinidade, a qual deve ser indicada. Se se introduzir mais que uma e são desejáveis abreviaturas correspondentes (como a notação do ponto e virgula usada em (III.0.6)), devemos distingui-las usando sinais diferentes, em lugar do ponto vírgula, como dois pontos, uma barra vertical, etc., para as derivadas tomadas relativamente às diferentes afinidades.

Agora queremos estender a noção de derivada invariante a outros tensores, começando por um vector contravariante. A generalização nunca é forçosa, sugere-se por alguns simples princípios guia. No caso presente parece natural assumir

(1) que a regra ordinária da diferenciação de um produto

---

[5] No original, este parágrafo refere apenas a combinção linear de duas afinidades mas o resultado é facilmente generalizável para uma combinação linear de um número ilimitado de afinidades.

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \text{(III.0.10)}$$

deveria também aplicar-se à diferenciação invariante do produto de tensores;

(2) que no caso de um invariante, a derivada invariante deveria ser a derivada ordinária (já que, ao fim e ao cabo, o gradiente é um tensor; sem mais comentários!)

$$\phi_{;i} = \phi_{,i} \qquad \text{(III.0.11)}$$

Comecemos com uma pormenorização bem mais trivial, a qual, não obstante, deve estabelecer-se de uma vez por todas: já que

$$A_k = \delta_k^l A_l \qquad \text{(III.0.12)}$$

A regra do produto por si só diz-nos que

$$A_{k;m} = \delta_k^l A_{l;m} + \delta_{k;m}^l A_l = A_{k;m} + \delta_{k;m}^l A_l \qquad \text{(III.0.13)}$$

E já que isto tem de se manter para qualquer vector, deveremos ter

$$\delta_{k;m}^l = 0 \qquad \text{(III.0.14)}$$

De modo que o tensor misto unitário, considerado como um campo, tem derivada invariante nula relativamente a qualquer afinidade.

Agora consideremos o produto invariante $A_k B^k$ de dois campos vectoriais arbitrários. De acordo com os dois princípios guia acima assentes, queremos que

$$\left(A_k B^k\right)_{,i} = \left(A_k B^k\right)_{;i} \qquad \text{(III.0.15)}$$

ou seja,

$$A_k B^k_{,i} + \cancel{A_{k,i}B^k} = A_k B^k_{;i} + A_{k;i}B^k = A_k B^k_{;i} + \left(\cancel{A_{k,i}} - A_n \Gamma^n_{ki}\right) B^k \qquad \text{(III.0.16)}$$

Cancelando os termos

$$A_{k,i}B^k$$

obtemos

$$A_k B^k_{;i} = A_k B^k_{,i} + A_n B^k \Gamma^n_{ki} \qquad \text{(III.0.17)}$$

Reescrevemos isto, alterando os índices mudos k e n no último termo,

$$A_k \left(B^k_{;i} - B^k_{,i} - B^n \Gamma^k_{ni}\right) = 0 \qquad \text{(III.0.18)}$$

Uma vez que A_k é um vector arbitrário:

$$B^k_{;i} = B^k_{,i} + B^n \Gamma^k_{ni} \qquad \text{(III.0.19)}$$

Esta é a expressão para a derivada invariante de um vector contravariante, a equivalente de (III.0.6) apenas com uma notação ligeiramente distinta, a virgula indica a derivada ordinária,

$$\partial B^k / \partial x^i$$

Se alguma dúvida exista relativamente ao carácter tensorial de $B^k_{;i}$, voltemos a uma equação anterior a partir da qual se deduz (III.0.19), a saber,

$$\left(A_k B^k\right)_{,i} = A_k B^k_{;i} + A_{k;i} B^k \qquad \text{(III.0.20)}$$

Aqui A_k é arbitrário e sabe-se que todos os termos, com excepção do primeiro da direita, são vectores, portanto $B^k_{;i}$ é um tensor.

Uma nota mais: consideremos

$$B^k_{;i} = B^k_{,i} + B^n \Gamma^k_{in} \qquad \text{(III.0.19)(a)}$$

(teremos cometido um erro ao trocar os índices?) O que é? Se Ã é simétrica isto é irrelevante. Mas, se o não é?

Bem, isto é correctamente um tensor, e é correctamente uma derivada invariante de B^k, só que em vez de o ser relativamente á transformação afim que havíamos considerado, o é relativamente a outra que se obtém da primeira mediante a troca dos subíndices.

Isto é trivial. Não obstante, é importante de momento observar também que não resultaria qualquer inconsistência lógica se adoptássemos (III.0.19)(a), em vez de (III.0.19), como a definição da derivada invariante de um vector contravariante relativamente á *mesma* afinidade que foi adoptada em (III.0.6), no caso covariante (que é o que foi feito por outros, como por exemplo B.Spain e C. Lanczos). Mas, naturalmente, com esta eleição a regra do produto não se manteria para a diferenciação ponto-e-vírgula! Sem embaraço, isto apenas é uma observação marginal, à qual não concedemos importância. Isto é, adoptamos (III.0.19).

No caso de um tensor geral

$$T^{kl\ldots}_{pq\ldots} \qquad \text{(III.0.21)}$$

aplicamos considerações análogas ao invariante

$$T^{kl\ldots}_{pq\ldots}\ A_k B_l \ldots\ F^p G^q \ldots \qquad \text{(III.0.22)}$$

Sendo $A_k \ldots G^q \ldots$ vectores arbitrários; assim obtemos um resultado para a derivada invariante de T, o qual descreveremos primeiro em palavras e depois o escreveremos na sua forma completa. À derivada ordinária acrescentam-se termos adicionais, um para cada índice de T. Cada um dos ditos termos consiste num produto (contraído) de uma componente de T e uma de Ã, estando este produto formado exactamente segundo um padrão de (III.0.6) ou (III.0.19), individualmente, pelo que é tratado como se tivesse só um índice, descartando todos os demais, isto é, deixando-os inalterados ao formar este produto particular. Assim:

$$T^{klK}_{pqK\ ;i} = T^{klK}_{pqK\ ,i} + T^{nlK}_{pqK}\,\Gamma^{k}_{ni} + T^{knK}_{pqK}\,\Gamma^{l}_{ni} + \ldots - T^{klK}_{nqK}\,\Gamma^{n}_{pi} - T^{klK}_{pnK}\,\Gamma^{n}_{qi} - \ldots \qquad \text{(III.0.23)}$$

Notemos que o índice de diferenciação é sempre o *segundo* índice covariante de Ã, usando os dois restantes para colocar o índice mudo e o que se tenha perdido em T, que foi substituído pelo índice mudo. Se se recordar isto e o sinal, a fórmula é fácil de memorizar apesar do desconcertante baile dos índices!

Tendo em vista estender a diferenciação invariante às densidades, complementamos o nosso princípio guia de forma natural, a saber,

(1) A regra do produto deverá também aplicar-se se um dos factores for uma densidade.

(2) A densidade numericamente invariante,

$$\varepsilon^{klmn}$$

considerada como um campo, deverá ter derivada nula.

Seja, para uma densidade escalar S,

$$S_{;i} = S_{,i} + X \qquad \text{(III.0.24)}$$

em que X está por determinar (é claro, não sabemos o que significa $S_{;i}$, estamos justamente a defini-la!).

Agora consideremos uma densidade qualquer $\mathfrak{T}$. Se a factorizarmos numa densidade escalar *arbitrária* $\mathfrak{S}$ e num tensor[6], podemos escrever

$$\mathfrak{T}^{\cdots}_{\cdots} = \mathfrak{S} \cdot T^{\cdots}_{\cdots} \qquad \text{(III.0.25)}$$

em que T (aparte ser um tensor e não uma densidade) é obviamente do mesmo carácter que $\mathfrak{T}$. Agora aproveitemos o que foi postulado acima

$$\mathfrak{T}^{K}_{K\,;i} = \mathfrak{S} \cdot T^{K}_{K\,;i} + \mathfrak{S}_{;i} T^{K}_{K} = \mathfrak{S} \cdot T^{K}_{K\,;i} + \mathfrak{S}_{,i} \cdot T^{K}_{K} + X \cdot T^{K}_{K} \qquad \text{(III.0.26)}$$

Uma breve consideração mostra que os primeiro e segundo termos da direita constituem juntos precisamente os «termos normais», formados como se $\mathfrak{T}$ fosse um tensor. Deste modo podemos escrever

$$\mathfrak{T}^{K}_{K\,;i} = \text{termos normais} + (X/\mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{T}^{K}_{K} \qquad \text{(III.0.27)}$$

Agora, já que $\mathfrak{S}$ era completamente arbitrária e X só dependia dela, o factor $X/\mathfrak{S}$ deve ser independente de $\mathfrak{T}$ e pode determinar-se a partir de um caso particular qualquer. Determiná-lo-emos a partir do requisito

$$0 = \varepsilon^{klmn}_{;i} = 0 + \varepsilon^{rlmn}\Gamma^{k}_{ri} + \varepsilon^{krmn}\Gamma^{l}_{ri} + \varepsilon^{klrn}\Gamma^{m}_{ri} + \varepsilon^{klmr}\Gamma^{n}_{ri} + (X/\mathfrak{S})\varepsilon^{klmn} \qquad \text{(III.0.28)}$$

Nos somatórios sobre r apenas sobrevive um termo em cada caso, a saber, os termos $r = k, l, m$ e n, respectivamente. De modo que obtemos

$$0 = \varepsilon^{klmn}\left(\Gamma^{r}_{ri} + X/\mathfrak{S}\right) \qquad \text{(III.0.29)}$$

E portanto

$$X/\mathfrak{S} = -\Gamma^{r}_{ri} \qquad \text{(III.0.30)}$$

[6] Schrödinger aqui escreve de outro modo, para facilitar a compreensão de (III.0.28).

Daqui, finalmente, o termo adicional na derivada invariante de qualquer densidade T será

$$-\Gamma^{r}_{ri}\mathrm{T}^{\cdots}_{\cdots} \qquad \text{(III.0.31)}$$

estando inalterados todos os índices de T.

É fácil mostrar que não só os postulados guia que temos utilizado conduzem a uma determinação única das derivadas invariantes de tensores e densidades, como também, inversamente, aceitando estas definições, se satisfazem realmente todos aqueles requisitos.

Nesta secção Schrödinger dá uma lição de pedagogia à maior parte dos estudiosos e autores de trabalhos sobre cálculo tensorial. Com efeito, na maior parte desses trabalhos a certa altura definem-se os símbolos de Chrirstoffel e declara-se a preocupação de:

(1) faclitar a notação e a escrita;

(2) mostrar que não são tensores.

Schrödinger tem outro tipo de preocupação: explicar o que são e para que servem, ou melhor, qual a razão que levou ao aparecimento desse conceito. E a razão é tão importante que sem a noção de afinidade, não haveria progresso, pelo menos no sentido que se pretende seguir.

Não sabemos se Einstein (apesar do seu colaborador matemático Grassman) entendeu inicialmente o valor das Ã's na teoria, mas intuitivamente parece ter seguido claramente o caminho de Schrödinger tão bem descreve nesta secção.

IV Algumas relações entre as derivadas ordinárias e as invariantes

Antes de ser introduzida a noção de transformação afim, havíamos averiguado, no final do capítulo II, que certas combinações lineares das derivadas ordinárias são tensores apesar de tudo. Naturalmente, não podem perder esta propriedade pela nossa imposição de uma transformação nem pela introdução da noção de derivada invariante relativa a ela. Não obstante, as combinações lineares correspondentes das derivadas invariantes também são tensoras; *a fortiori*, já que as derivadas invariantes são, também, tensores por si sós. Perguntamo-nos se são os mesmos tensores (que os obtidos com as combinações das derivadas ordinárias) ou não.

Estudemos primeiro os casos designados por 1-4 no capítulo II.

No caso do gradiente de um invariante não há dificuldade: Era um dos nossos princípios guia o de que para um invariante ϕ

$$\phi_{,i} = \phi_{;i} \qquad \text{(IV.0.1)}$$

O que se passa com o rotacional de um vector covariante? A partir de (III.0.6)

$$A_{k;i} - A_{i;k} = A_{k,i} - A_{i,k} - A_n\left(\Gamma^n_{ki} - \Gamma^n_{ik}\right) \qquad \text{(IV.0.2)}$$

De forma que o «rotacional covariante» é o mesmo que o rotacional ordinário se e só se a afinidade é simétrica.

Deduzir e recordar as afirmações gerais (a menos que tenham que examinar-se, onde com frequência temos que memorizar toda a classe de tontices que ninguém sabe de memória) só se torna útil se estivermos perante uma aplicação frequente. Se o caso não se apresenta com frequência, é mais «barato» investigá-lo apenas quando presente. As afinidades não simétricas usam-se muito raramente. Por isso, com vista a não carregar sobre o leitor um peso morto e gratuito, restringiremos a investigação restante *desta secção* às afinidades simétricas, com uma forte ênfase, não obstante, de que as nossas afirmações se restringem definitivamente *a elas*.

Este parágrafo deveria ser lido por muitos professores. Quem o escreveu foi professor, foi Erwin Schrödinger, e a utilização do termo "barato" é excelente, sobretudo quando antecipa uma época em que a Economia é socialmente vista como a ciência com mais «interesse». Mesmo assim toda aquela classe de tontices que Schrödinger refere continua (e continuará) a ser exigido por aqueles professores que não fazem a mínima ideia do custo intelectual e preferem criar "papagaios"[1] a criar pensadores (talvez para defesa própria).

Não é difícil convencermo-nos mediante o cálculo directo de que as divergências cíclicas contempladas em (3) e (4), também são as mesmas, tanto se são formadas pelas derivadas ordinárias como pelas derivadas invariantes. Quer dizer que se as derivadas aparecem com ponto-e-vírgula, podemos em seu lugar colocar vírgulas. Os casos (4') e (1') referidos ás densidades não requerem uma investigação adicional, pois são virtualmente os mesmos que (4) e (1) devido à ligação geral entre tensores

---

[1] Os papagaios movidos pelo instinto de sobrevivência animal «interessam-se por pouco mais» que as sementes que comem e pela sua procriação.

antisimétricos e as densidades tensoriais de ordem complementar. Efectivamente, depois de termos averiguado, por exemplo, que

$$A_{ik;l} + A_{kl;i} + A_{li;k} = A_{ik,l} + A_{kl,i} + A_{li,k}\,,^{2} \tag{IV.0.3}$$

só necessitamos escrever

$$\mathfrak{A}^{ml} = \frac{1}{2}\varepsilon^{lmik} A_{ik} \tag{IV.0.4}$$

então

$$\frac{\partial \mathfrak{A}^{ml}}{\partial x^{l}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{mlik}\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^{l}} = \pm\left(A_{ik,l} + A_{kl,i} + A_{li,k}\right) \tag{IV.0.5}$$

e

$$\mathfrak{A}^{ml}_{;l} = \frac{1}{2}\varepsilon^{mlik} A_{ik;l} = \pm\left(A_{ik;l} + A_{kl;i} + A_{li;k}\right) \tag{IV.0.6}$$

de modo que

$$\mathfrak{A}^{lm}_{;i} = \mathfrak{A}^{lm}_{,i} \tag{IV.0.7}$$

(o sinal é em ambos os casos o da permutação *mlik*: usamos o facto de que $\varepsilon^{mlik}_{;s} = 0$, o qual, como se recordará, era um dos nossos «princípios guia» - ver pág.64).

Porque razão aparece este índice de derivação *i* agora em (IV.0.7) quando antes era *l*? Neste curto texto deixa-nos algumas pistas: lembra-nos inicialmente que na ligação geral entre densidades e tensores estes devem ser antisimétrcos, e remata na nota em parênteses com o índice de derivação *s* (alertando-nos por exemplo que $\mathfrak{A}^{12}_{;3} = 0$). Poupa os leitores que, mais hábeis no baile de índices, o vêem sem papel evitando a

---

[2] Na tradução o primeiro termo do membro direito vem com erro, em vez de um *l* está um *i* repetido.

dispersão. Para os mais distráidos ainda deixa uma pequena dificuldade (talvez como chamada de atenção para o mesmo i) e troca os índices ml e escreve lm.

Podemos aceitar assim que averiguamos por inspecção directa a equivalência do «ponto e vírgula» e da «vírgula» em todos os oito casos. (Pelo menos nestes oito casos se estabelece uma equivalência, não sei se haverá outros noutras dimensões…O certo é que Schrödinger só) Não obstante, estes cálculos podem evitar-se mediante uma prova alternativa que é mais curta, mais iluminadora, e que se aplica a qualquer dos oito casos em separado. Ilustramo-la com o exemplo da equação (IV.0.2). Para provar esta equação directamente, observe-se que se sabe que ambos os membros são tensores. Além disso, a partir da característica geral da derivada invariante, a diferença entre ambos os membros é uma combinação linear de componentes Γ^k_{lm}. Como a diferença de dois tensores deve ser um tensor. *Mas não existem tensores não nulos formados linearmente unicamente a partir de uma transformação simétrica.* (Isto pode parecer uma afirmação apressada, a sua simples razão de ser vem dada no final do capítulo.)

Com uma transformação assimétrica, sim, existem tensores não nulos; a saber, sua parte antisimétrica $\frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{lm} - \Gamma^k_{ml}\right)$. Esta é a razão pela qual as nossas afirmações não se sustentam neste caso.

A igualdade a que se chega a partir de (4’) é

$$A^k_{;k} = A^k_{,k} \tag{IV.0.8}$$

Ela introduz uma valiosa regra para «a integração parcial relativa à derivada invariante» em quatro dimensões, isto é, integrais no espaço-tempo. Para o propósito da integração parcial o ponto e vírgula pode tratar-se como se se referisse a uma derivada ordinária, desde que se cumpra com determinação o mandato de que apenas uma densidade invariante pode figurar como integranda.

Suponhamos que temos um integral do seguinte tipo

$$I = \int \left(A^{\cdots}_{\cdots}\right)_{;k} B^{\cdots}_{\cdots} \, dx^4 \qquad \text{(IV.0.9)}$$

onde A e B são entidades tensoriais (tensores ou densidades) cujos índices foram apenas indicados com pontos. Agora é fácil ver que, devido a que o integrando tem que ser uma densidade escalar, o objecto a que chegamos mediante a supressão do índice covariante k (isto é a diferenciação invariante) deve ser uma densidade vectorial contravariante[3], digamos $\mathfrak{A}^k$:

$$A^{\cdots}_{\cdots} \, B^{\cdots}_{\cdots} = \mathfrak{A}^k \qquad \text{(IV.0.10)}$$

E como, a partir da regra de diferenciação de um produto (um dos nossos princípios guia!)

$$\left(A^{\cdots}_{\cdots}\right) B^{\cdots}_{\cdots;k} = A^{\cdots}_{\cdots} \left(B^{\cdots}_{\cdots}\right)_{;k} + \left(A^{\cdots}_{\cdots}\right)_{;k} B^{\cdots}_{\cdots} \qquad \text{(IV.0.11)}$$

Portanto,

$$I = \int \left[\mathfrak{A}^k_{;k} - \left(A^{\cdots}_{\cdots}\right)_{;k} B^{\cdots}_{\cdots} \right] dx^4 \qquad \text{(IV.0.12)}$$

Tendo em conta (IV.0.8), a primeira parte pode reduzir-se a um integral sobre a «superfície» (tridimensional). Isto estabelece o nosso teorema.

---

[3] N.A.: Prova: $AB_{;k}$ é uma densidade escalar. Mas ABF_k (sendo F_k um vector *arbitrário*) tranforma-se exactamente do mesmo modo e, por tanto, também será uma densidade escalar. Daqui se conclui que AB seja uma densidade vectorial contravariante.

Em muitas aplicações (particularmente no cálculo variacional) a primeira parte anula-se e temos

$$I = -\int \left(A^{L}_{L}\right)_{;k} B^{L} dx^4 \qquad \text{(IV.0.13)}$$

Esta regra não é trivial. O (;) posto apenas em A ou B não tem razões para ser equivalente à simples (,). Por exemplo, (IV.0.9) poderia ser

$$I = -\int \left(A^{lm}_{n}\right)_{;k} \mathrm{B}^{nk}_{lm} dx^4 \qquad \text{(IV.0.14)}$$

pelo que nem o tensor A nem a densidade B necessitam ter qualquer tipo de simetria nos seus índices.

Se, como muitas vezes se tem feito com a ideia de simplificar as coisas, se renuncia à demanda de só admitir um integrando invariante, a regra não é aplicável; com o efeito desagradável de que o cálculo se *complica* enormemente.

É conveniente acrescentar aqui um exemplo mais no qual as derivadas invariantes (embora numa ordem de ideias completamente distinta) podem substituir-se por derivadas ordinárias. Sempre se pode introduzir um sistema de referência com coordenadas tais que os dois tipos de derivadas coincidam num ponto particular qualquer do contínuo. Pode eescolher-se um sistema de referência para o qual todas as Γ^i_{kl} se anulem *nesse ponto.* Isto pode demonstrar-se da seguinte forma.

Mencionámos no capítulo III que estas componentes se transformam como as de um tensor mas com o primeiro membro da equação (III.0.4) acrescentado à fórmula familiar. Assim

$$\bar{\Gamma}^i_{kl} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l}\Gamma^r_{st} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l} \qquad \text{(IV.0.15)}$$

Desejamos, para uma adequada eescolha da transformação, fazer com que todas as Ã's se anulem num ponto; digamos, por simplicidade, no ponto $x^k = 0$. Escolhemos a transformação de tal forma que nesse ponto a transformação inversa tenha o desenvolvimento analítico

$$x^k = \bar{x}^k + \frac{1}{2} a^k_{lm} \bar{x}^l \bar{x}^m + \dots \tag{IV.0.16}$$

onde supomos $a^k_{lm} = a^k_{ml}$, pois obviamente não se ganharia nada se não o fizéssemos assim. Por outras palavras, é importante e necessário admitir a simetria dos coeficientes do desenvolvimento o que, no entanto, não faz de $a^k{}_{lm}$ um tensor. Obtemos de (IV.0.15), no ponto $x^k = \bar{x}^k = 0$,

$$\bar{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + a^i_{kl} = 0 \tag{IV.0.17}$$

Desde que façamos

$$a^i_{kl} = -\left(\Gamma^i_{kl}\right)_{\text{em } x^k = 0} \tag{IV.0.18}$$

A uma tal escolha de coordenadas chama-se <u>sistema de referência geodésico</u> (ou <u>coordenadas geodésicas</u>). A descrição verbal completa é, naturalmente, um sistema de referência geodésico num certo ponto para uma certa afinidade simétrica.

Claramente, se as $\bar{\Gamma}$'s não são simétricas não podem «transformar-se e desaparecer», nem sequer num ponto. Isto não é estranho, porque a parte antisimétrica é um tensor, o qual não pode anular-se em algum sistema de referência, a menos que se anule em todos eles. Por outro lado, para este propósito, não se requer que Ã seja simétrica em qualquer ponto, isto é que seja «uma afinidade simétrica». Apenas deve ser simétrica no ponto em causa. (É de ocorrer que isto seria obviamente um aspecto invariante. Significa que o tensor antisimétrico se anula no ponto em questão.)

Portanto um sistema particular de coordenadas, chamadas coordenadas geodésicas, pode, em princípio, ser sempre escolhido de tal forma que as afinidades simétricas sejam nulas num dado ponto a que é costume chamar pólo.

A transformação (IV.0.16) não é o único método de obter coordenadas geodésicas (Spain, pág 43). Tal como o fizemos, a conclusão óbvia é que o pólo é a origem das coordenadas.

Um sistema geodésico é com frequência muito conveniente para os cálculos, mas há que levar em conta que somente simplifica as coisas num ponto, em nenhum mais, nem sequer nos pontos vizinhos. Quero dizer que as derivadas das Ã's não se anulam, e deve-se ter cuidado no curso de um cálculo em não eliminar uma Ã que, mais tarde, poderia vir a ser diferenciada relativamente a uma coordenada.

Tal como Schrödinger abordou, no início desta secção, o sistema de coordenadas geodésico foi construído, exactamente, para que tivesse a seguinte propriedade: as derivadas invariantes (relativas a uma afinidade) deveriam reduzir-se às derivadas ordinárias num ponto (o pólo). Para que isso fosse possível, mostrou que bastaria que a afinidade fosse simétrica para que todas as componentes transformadas se anulassem.

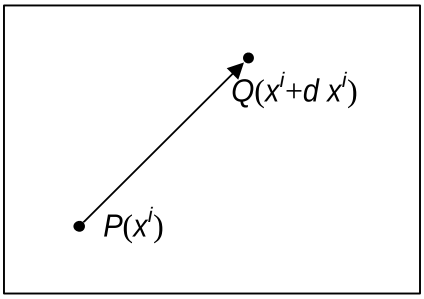
Por outro lado, existe uma importante propriedade que é a seguinte: O estabelecimento e a resolução de uma equação, com carácter tensorial, envolvem geralmente um «pesado» conjunto de manipulações algébricas. Ora como sabemos que se um tensor (ou densidade) for nulo num dado sistema de referência, ele é nulo em qualquer outro sistema (a lei de transformação é homogénea), segue-se que o conjunto de manipulações algébricas acima referido pode ser reduzido se demonstrarmos em primeiro lugar que a equação tensorial é válida num sistema de coordenadas geodésicas no seu pólo. Segue-se que a equação será verdadeira para todos os sistemas de coordenadas consideradas nesse pólo e se esse ponto for geral, a equação é válida para todos os pontos do espaço considerado.

Ainda, uma consequência adicional é a verdade da nossa «afirmação apressada» da pág. 70, de que não existem tensores não nulos com componentes que sejam combinações lineares das componentes de uma afinidade *simétrica*. Efectivamente, tais combinações lineares, independentemente dos coeficientes que tenham, devem todas anular-se num sistema de referência geodésico, pelo que, se adicionalmente formam um tensor, devem anular-se em todos os sistemas de referência. Já que esta consideração se aplica a todo o ponto do contínuo, um tensor com a descrição mencionada teria de ser identicamente nulo.

Esta secção é talvez aquela em que Schrödinger revela os seus extraordinários dotes de investigador, com uma qualidade pedagógica não muito frequente. Dissemos acima que há um parágrafo que deveria ser lido por todos os professores. Agora acrescentaríamos que toda esta secção deveria ser lida por todos os investigadores.

V A Noção de Transporte Paralelo

Existe uma maneira alternativa de introduzir a noção de transformação afim e derivada invariante. Tendo em vista o carácter fundamental de estas noções em todas as nossas considerações, indicaremos esta alternativa.



A disposição de derivadas $\partial A^k / \partial x^i$ não constitui uma entidade invariante, pois está formada pelo procedimento inadmissível de subtrair o vector A^k em P do vector A^k+dA^k noutro ponto, a saber, no ponto vizinho Q com coordenadas x^i+dx^i (sendo x^i as coordenadas de P). A sua diferença, dA^k, *não é um vector.* Daqui que, com a fórmula correcta

$$dA^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} dx^i \tag{V.0.1}$$

$A^k / \ x^i$ não pode ser um tensor, já que dx^i é um vector.

Para remediar este defeito, e com o propósito de criar uma derivada, deve-se subtrair de A^k+dA^k não o vector A^k em P, mas antes algum vector em Q, que, para este propósito, tome, por assim dizer, o lugar de A^k, isto é, que jogue o papel do valor «original» ou «inalterado» da função na diferenciação ordinária. Por outras palavras, deve-se estipular, por definição, que mudança nas componentes de A^k, ao ir de P a Q, o considera como «não alterado». (A simples sugestão de que, concretamente, a não mudança dos valores numéricos represente a não mudança da entidade geométrica, não é suficiente, pois não é independente do sistema de referência.)

Chamemos A^k+äA^k a este «substituto em Q do A^k de P», ou seja, «por definição, a entidade inalterada em Q correspondente à entidade em P». Naturalmente, äA^k, ao ser a diferença de um vector em Q (a saber, A^k+äA^k) e um vector em P (a saber, A^k), tão pouco é um vector, precisamente pelas mesmas razões pelas quais dA^k não o é; mas dA^k-äA^k sim, é um vector, pois é a diferença considerada no mesmo ponto (no caso presente, o ponto Q).

äA^k deve fazer-se depender dos dois vectores A^k e dx^i e não pode depender de nada mais. Além disto, deve fazer-se com que se anule quando qualquer um destes dois seja nulo. Uma dependência linear e homogénea em A^k e dx^i sugere-se por si mesma como a decisão mais simples. Consideremos, por isso, uma forma bilinear de estes dois vectores

$$\delta A^k = -\Gamma^k_{li} A^l dx^i \qquad \text{(V.0.2)}$$

sendo as Ã's uma disposição de 64 (4^3, pois são 3 índices) coeficientes, funções das coordenadas, introduzidos novamente sobre o ponto de vista tomado neste capítulo (mas, naturalmente, em conformidade com a notação do capítulo III).

Devido a que A^k e dx^i são vectores, e a que äA^k não o é, as Ã's não constituem um tensor. Elas seguem a lei de transformação linear, ainda que não homogénea, que já foi indicada no capítulo III, a equação (III.0.7). Isto pode demonstrar-se facilmente mediante a exigência de que a associação dos vectores A^k em P e A^k+äA^k em Q deveria subsistir sob uma transformação de coordenadas. Omitiremos a prova aqui.

Ao vector

$$A^k + \delta A^k \equiv A^k - \Gamma^k_{li} A^l dx^i \tag{V.0.3}$$

chama-se <u>vector deslocado paralelamente</u> (ou <u>transportado paralelamente</u>). A derivada invariante define-se agora assim

$$\begin{aligned} A^k_{;i} &= \frac{\left(A^k + dA^k - A^k - \delta A^k\right)_{\text{só } dx^i \neq 0}}{dx^i} \\ &= \frac{\left(dA^k - \delta A^k\right)_{\text{só } dx^i \neq 0}}{dx^i} \\ &= A^k_{,i} + \Gamma^k_{li} A^l \end{aligned} \tag{V.0.4}$$

que está exactamente de acordo com (III.0.19), ou seja, a expressão da derivada invariante definida antes para um vector contravariante.

As Γ̃'s estabelecem uma *aplicação linear biunívoca* entre as «estrelas de vectores de pontos vizinhos». Uma aplicação linear entre dois conjuntos de quatro funções cada um requer dezasseis coeficientes arbitrários, mas já que há ^{4} pontos vizinhos[1], tomamos 64 deles. Em geometria elementar chama-se transformação afim a uma transformação linear das coordenadas. As figuras geométricas que se convertem uma na outra mediante a dita transformação, dizem-se «afimmente» relacionadas; por exemplo uma esfera e um elipsóide concêntrico em três dimensões. Chama-se «Geometria afim» à geometria «sob este grupo»: apenas contempla propriedades tais como a invariância sob uma transformação afim em qualquer ponto, sendo a mesma para figuras "afimmente" relacionadas - por exemplo todos os elipsoides, incluindo a esfera, consideram-se como a mesma figura. E assim se chega ao nome «conexão afim» ou «afinidade». Não é um bom nome (estou completamente de acordo) e por duas

---

[1] Julgo que se trata de um erro de tradução, a ideia seria: uma vez que existem pontos vizinhos de um ponto existirão ^{4} coeficientes. Tomando 4 pontos vizinhos de um ponto, serão 4^4 coeficientes independentes.

razões essenciais: primeiro, numa variedade não conexa a transformação geral de coordenadas implica uma transformação afim em qualquer ponto; segundo, as Ã's *não* indicam, precisamente, uma relação afim arbitrária entre pontos vizinhos, mas antes distinguem de uma vez por todas uma particular.

Acabou-se de explicar e criticar a terminologia, que facilmente pode dar lugar a confusão.

Seguindo as ideias do presente capítulo agora passaremos a definir, analogamente a (V.0.2), o deslocamento paralelo de qualquer tensor ou densidade tensorial, usando como princípios guia (1) que um produto é deslocado mediante o deslocamento de todos os seus factores, (2) que um invariante não se altera por deslocação, (3) que a densidade não muda no deslocamento. Desta forma se deduz com facilidade que a mudança $\delta T^{kl\ldots}_{pq\ldots}$ de qualquer tensor ao deslocar-se deve dar-se em resultado dos termos adicionais de (III.0.23), multiplicado por ($-dx^j$). No caso de uma densidade tensorial de qualquer tipo, há que acrescentar-se o termo (III.0.31) também multiplicado por ($-dx^j$). As derivadas invariantes definem-se então em estreita analogia com (V.0.4) e são, naturalmente, as dadas em (III.0.23), com a correcção (III.0.31) no caso de uma densidade tensorial.

Na linha de pensamento do presente capítulo não há nada que sugira que Γ^k_{lm} deva ser simétrica em relação a l e m. E já que tampouco nos capítulos anteriores haja algo que *imponha* esta suposição, não o faremos em geral, a não ser que venhamos a considerar a afinidade simétrica como um caso especial (ainda que muito frequente e importante), que se indicará cada vez que tratemos com *ele* e não com o caso geral.

O aspecto da afinidade apresentado como constituindo um sistema de transporte paralelo é o mais fundamental. Assim pois a aproximação na qual a colocamos em primeiro lugar e a noção de derivada invariante num segundo lugar, é mais fundamental que a seguida no capítulo III.

Apesar de simples e óbvio, devemos, não obstante, destacar o facto de que o transporte paralelo de um tensor zero ou uma densidade tensorial zero voltará a ser zero de igual modo.

Isto tem a consequência de que qualquer equação tensorial se preserva sempre num transporte paralelo, precisamente como o faz numa transformação de coordenadas. Com efeito pode sempre reduzir-se a afirmação de que uma certa combinação linear de produtos de tensores é igual ao tensor zero do mesmo carácter (isto é, o mesmo no que se refere aos índices co- e contravariantes e assim é um tensor ou uma densidade).

Mas haja cuidado por favor! A equação cumpre-se noutro ponto para os tensores transportados paralelamente. Não obstante, os tensores *podem* ser tensores de campo. E os seus valores, não necessariamente são, e não o serão como regra geral, os obtidos mediante o transporte paralelo. De forma que a equação não tem por que cumprir-se para os tensores de campo num ponto vizinho! (Spain, pág.46).

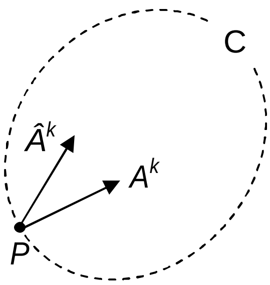
Isso é o mais necessário enfatizar porque, na realidade, muito frequentemente se cumprem ali (e em todo o lado); a saber, quando são equações de campo estabelecidas explicitamente ou é exigido que se satisfaçam em cada ponto.

Quer dizer, voltando à pág. 77, o vector obtido em Q, por deslocação paralela a partir de P, depende da curva que une P com Q. Consequentemente o deslocamento paralelo ao longo de uma curva fechada não conduz necessariamente ao vector inicial. E no fundo, também isto, Schrödinger salienta nestes dois últimos parágrafos.

VI O Tensor de Curvatura

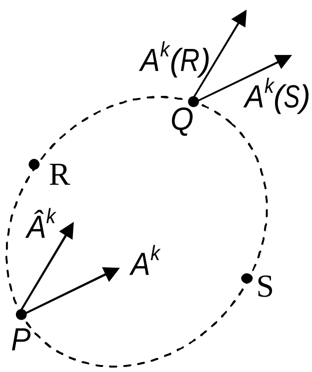
VI.1 O problema da integrabilidade

Provavelmente, o ponto mais interessante e vital que se apresenta no estudo da transformação afim e do transporte paralelo seja este. Se considerarmos uma entidade tensorial, como, por exemplo, um vector contravariante A^k num ponto P (não necessariamente membro de um «campo»), e o transladarmos mediante um transporte paralelo *contínuo* em torno de um circuito fechado C regressando a P, a entidade, em geral (isto é, para uma afinidade arbitrária), não voltará ao seu valor original, pelo contrário, chegaremos com uma entidade



diferente, digamos com um vector $\hat{A}^k \neq A^k$. Tal como acabou de ser observado no final da secção anterior.

Uma forma diferente de expressar o mesmo facto, quer dizer, que o resultado de transportar A^k de P a qualquer ponto Q dependerá, em geral, do caminho percorrido. Por exemplo, se o transporte de A^k passando por S em direcção a Q dá lugar a $A^k(S)$ (digamos), o transporte via R levará a um outro, digamos $A^k(R)$ em Q e diferente de



$A^k(S)$. Já que, obviamente, o transporte até ali e o seu regresso pela mesma curva é reversível; de modo que *se* $A^k(R)= A^k(S)$, então $\hat{A}^k = A^k$, e vice-versa.

Se o transporte é independente do caminho percorrido por qualquer vector A^k (e portanto, como veremos, para qualquer entidade tensorial), diremos que a <u>transformação afim é integrável</u>; ou, possivelmente, integrável dentro de uma região, se a independência se mantém apenas em pontos e caminhos de uma certa região. Para que uma afinidade seja ou não integrável se decide, como veremos em breve, mediante a anulação ou não de um tensor de ordem 4, chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel, que tem um papel central em *todas* as teorias da estrutura do espaço-tempo, de forma que trataremos com ele incessantemente em todas as considerações seguintes. E, naturalmente, é o caso não integrável, quando este tensor não se anula (variedade curvada), o que apresenta maior interesse.

De momento, sem qualquer problema, recompilaremos informação do caso integrável por um método mais directo. Neste caso seja um vector simples, não um campo, h num ponto P. Já que, agora, o transporte paralelo não depende do caminho percorrido, podemos «desdobrar» h num campo mediante o transporte paralelo desde P, definindo o vector campo h mediante a condição de que a sua mudança real ao passar de um ponto ao seguinte seja igual à mudança do seu transporte paralelo. Usando a nossa notação geral, isto exprime-se mediante

$$dh^{\nu} = \delta h^{\nu} \tag{VI.1.1}$$

ou escrito mais desenvolvidamente

$$\frac{\partial h^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda} = -\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} h^{\alpha} dx^{\lambda} \tag{VI.1.2}$$

Devido a que isto se mantém para qualquer dx , equivale à submissão de h às equações diferenciais

$$\frac{\partial h^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} = -\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} h^{\alpha} \qquad \text{(VI.1.3)}$$

juntamente com a condição inicial de que em P os h tomam os valores dados. A ligeira inconsistência de termos usado h , primeiramente, para indicar o vector em P, e utilizá-lo agora para obter o vector campo integrando (VI.1.3), não tem importância. Efectivamente, depois do «desdobramento», o ponto P já não está privilegiado; o vector campo num ponto qualquer obtém-se mediante o transporte paralelo desde qualquer outro ponto ao longo de qualquer curva que una os dois pontos.

Este estado de coisas (e situações similares no caso de outros campos tensoriais) expressa-se adequadamente dizendo: a afinidade Ã leva (a saber, mediante o transporte paralelo) o vector campo h sobre si mesmo. Por certo, notemos que, segundo (III.0.19) as equações (VI.1.3) simplesmente estabelecem que h tem uma derivada invariante nula.

Agora façamos o mesmo com quatro vectores linearmente independentes em P, aos quais *designaremos* com um subíndice a, seja h^{ν}_{a}, com a = 1, 2, 3, 4. Podíamos também ter usado quatro letras diferentes, como h , g , f , j , para indicar os nossos vectores em vez do dito subíndice, *o qual não deve confundir-se com um índice tensorial*. É preferível a numeração, porque convém, para o propósito da presente investigação, estender a noção da soma a este subíndice quando apareça duas vezes (ainda que sempre se escreverá como um subíndice, sendo uma mera designação).

Escolhemos os quatro vectores h^{ν}_{a} linearmente independentes em P. Esta independência linear manter-se-á, obviamente, para os vectores de campo em qualquer ponto, simplesmente porque qualquer combinação linear

$$c_1 h_1^\nu + c_2 h_2^\nu + c_3 h_3^\nu + c_4 h_4^\nu = 0 \qquad \text{(VI.1.4)}$$

(não sendo todas as componentes c_k numéricas nulas) se conservaria pelo transporte paralelo e portanto não pode manter-se em nenhum ponto do campo, já que não se sustentará em P[1].

De modo que agora temos quatro campos vectoriais governados pelas relações

$$\frac{\partial h_a^\nu}{\partial x^\lambda} = -\Gamma_{\alpha\lambda}^\nu h_a^\alpha \qquad \text{(VI.1.5)}$$

Estas são 64 relações lineares não homogéneas com determinante não nulo[2], a partir das quais podem determinar-se as 64 quantidades em todas as partes. Fazemo-lo da maneira habitual. Aos menores normalizados no determinante h_a^ν, chamamos-lhes $h_{\nu a}$ (por normalizados queremos dizer divididos pelo determinante). Então

$$h_{\rho a} h_a^\nu = \delta_\rho^\nu \qquad \text{(VI.1.6)}$$

Para justificar a notação: $h_{\rho a}$, para um a fixo, é um campo vectorial covariante. Isto deduz-se da consideração de que:

(i) as equações precedentes cumprem-se em todos os sistemas de referência, significando sempre $h_{\rho a}$ os menores normalizados;

(ii) os $h_{\rho a}$ estão univocamente determinados pelas ditas equações;

(iii) as equações preservam-se, se os $h_{\rho a}$ se transformam como componentes vectoriais.

---

[1] Esclarecimento: Pois o vector nulo por transporte paralelo se conservaria.
[2] N.A.: Não é difícil demonstrar que o determinante pode anular-se num ponto se, e só se, uma relação como (VI.1.4) se satisfaz nesse ponto.

Se se tratasse de uma linguagen tensorial, dir-se-ia que dois tensores A_{ij} e B^{ik} tais que $A_{ij}B^{ik}$= ä$^{k}_{j}$ seriam tensores conjugados conforme lhes chama Spain, mas o mais interessante deste passo está no uso que Schrödinger faz do índice a (avisando que não é um índice covariante) para escrever quatro equações tensoriais indexadas.

Observemos, ainda, o facto de que, inversamente, os h^{ν}_{a} são os menores normalizados do determinante $h_{\nu a}$. Agora «multiplica-se» (isto é, multiplica-se e soma-se sobre a) a equação (VI.1.5) por $h_{\nu a}$, obtém-se então, usando (VI.1.6),

$$\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} = -h_{\rho a} \frac{\partial h^{\nu}_{a}}{\partial x^{\lambda}} \qquad \text{(VI.1.7)}$$

Isto mostra que a *integrabilidade* é uma severa restrição para a afinidade. Torna possível expressar as 64 funções Ã mediante as componentes de quatro campos vectoriais, isto é, apenas 16 funções.

A representação precedente de uma afinidade integrável tem uma consequência particularmente simples se Ã *é simétrica* relativamente aos seus dois índices covariantes. Assim suponhamos, pois, também que

$$\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} \qquad \text{(VI.1.8)}$$

Ora bem, de (VI.1.6), as equações (VI.1.7) podem escrever-se de forma equivalente (por derivação de (VI.1.6).

$$\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} = h^{\nu}_{a} \frac{\partial h_{\rho a}}{\partial x^{\lambda}} \qquad \text{(VI.1.9)}$$

daqui, a partir do suposto em (VI.1.8)

$$h^{\nu}_{a} \left(\frac{\partial h_{\rho a}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial h_{\lambda a}}{\partial x^{\rho}} \right) = 0 \qquad \text{(VI.1.10)}$$

e, portanto, já que o determinante não se anula,

$$\frac{\partial h_{\rho a}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial h_{\lambda a}}{\partial x^{\rho}} = 0 \qquad \text{(VI.1.11)}$$

em palavras: Os quatro campos vectoriais covariantes $h_{\rho a}$ são irrotacionais.

São irrotacionais porque o rotacional de cada um deles é nulo.

Isto capacita-nos para introduzir um novo sistema de coordenadas da seguinte maneira. A um ponto fixo P atribuímos-lhe as coordenadas 0,0,0,0. A outro ponto qualquer Q atribuímos-lhe as coordenadas

$$y^{a} = \int_{P}^{Q} h_{\rho a} dx^{\rho} \quad (a = 1, 2 \ldots 4) \qquad \text{(VI.1.12)}$$

Com efeito, da análise geral sabe-se que (VI.1.11) é a condição necessária e suficiente para que esta integral de linha seja independente do caminho percorrido. Além disso, as derivadas das y's relativamente às x's são obviamente

$$\frac{\partial y^{a}}{\partial x^{\rho}} = h_{\rho a} \qquad \text{(VI.1.13)}$$

Formando os menores normalizados de ambos os lados, obtém-se

$$\frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{a}} = h_{a}^{\rho} \qquad \text{(VI.1.14)}$$

pelo que, (VI.1.9) pode expressar-se assim:

$$\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{a}} \frac{\partial^{2} y^{a}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}} \qquad \text{(VI.1.15)}$$

Comparando com (III.0.4) e considerando o seu contexto aí, inferimos:

A nossa afinidade simétrica integrável pode considerar-se como o resultado da transformação da afinidade de componentes nulas no sistema de referência y, desde esse sistema ao sistema de referência x. Ou então, inversamente: Todas as componentes da nossa afinidade se anulam quando as transformamos no sistema de referência y.

Assim, uma afinidade integrável *simétrica* é uma coisa muito simples: pode sempre «transformar-se em zero».

Não é estranho que este teorema se restrinja apenas ao caso simétrico. Pois recordemos que uma afinidade assimétrica geral se pode separar numa soma de uma afinidade simétrica e num tensor antisimétrico de ordem três. Estas duas entidades mantêm-se cristalinamente separadas na transformação. E, por conseguinte, a parte antisimétrica, ao ser um tensor, nunca pode anular-se na transformação, a menos que se anule desde o princípio. Tudo o que podemos dizer em geral é que o requisito de ser integrável implica em qualquer caso que as componentes da afinidade são expressáveis mediante as 16 componentes de quatro campos vectoriais. Existe inclusivamente uma redução maior no caso de uma afinidade assimétrica que tem 64 componentes independentes, que numa simétrica, que em geral tem 40, como vimos.

VI.2 O Tensor de Curvatura

Dadas as 64 funções Ã que constituem uma transformação afim seria difícil decidir directamente se podem ou não exprimir-se na forma (VI.1.7). Procuramos, por tanto, um critério de integrabilidade que possa aplicar-se imediatamente ao campo Ã quando seja dado.

Aliás em matemática é quase sempre muito mais difícil usar a definição para uma dada finalidade de cálculo e daí que surjam métodos e critérios, isto é, processos de efectuar cálculos em principio mais abreviados para obter o resultado pretendido.

Deduzir uma condição necessária é muito fácil. Para obter a integrabilidade, as equações (VI.1.3) devem admitir uma solução para o campo vectorial h com valores iniciais arbitrários. Então, certamente as segundas derivadas mistas das componentes do campo formadas de duas maneiras diferentes devem coincidir. Por tanto devemos ter

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} h^{\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} h^{\alpha}\right) \\
&= \left(-\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right) h^{\alpha} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\frac{\partial h^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \quad .
\end{aligned}
\qquad \text{(VI.2.1)}
$$

Usando a equação (VI.1.3) para exprimir as primeiras derivadas, obtemos (recorde-se a notação dos índices mudos!)

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda}\right) h^{\alpha} \\
&= B^{\nu}_{\alpha\lambda\mu} h^{\alpha}
\end{aligned}
\qquad \text{(VI.2.2)}
$$

onde abreviamos a expressão com parêntesis substituindo-a por B. Já que isto se mantém para um h arbitrário, deveremos ter

$$
B^{\nu}_{\alpha\lambda\mu} = 0 \qquad \text{(VI.2.3)}
$$

em todos os sistemas de referência (o qual justifica a presunção de que as B's formam um tensor). Assim pois, esta é uma condição necessária para a integrabilidade.

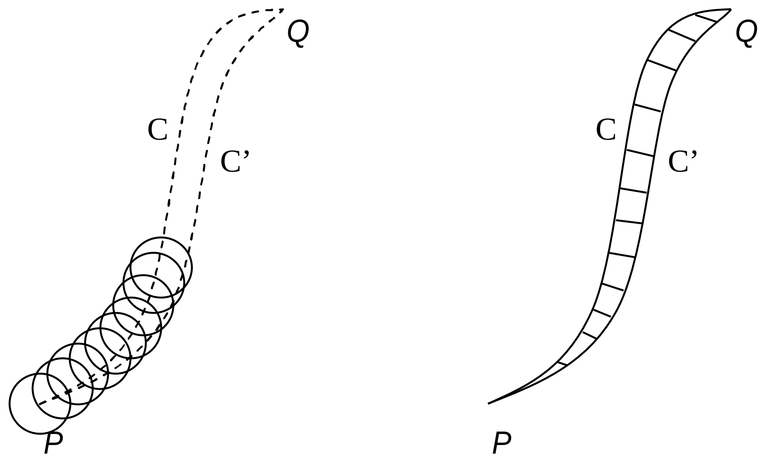
Para compreender que também é uma condição *suficiente*, notemos que a nossa exigência (VI.2.1) equivaleria exactamente à conhecida condição necessária e suficiente para que a diferencial de Pfaff

$$-\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} h^{\alpha} dx^{\lambda} \qquad \text{(VI.2.4)}$$

(que é a h devida ao transporte paralelo sobre dx) seja uma diferencial completa, se as h fossem umas funções dadas das coordenadas. Mas não são, e seria um círculo vicioso antecipá-lo, posto que é exactamente o que queremos provar.

Não obstante, na vizinhança imediata de um ponto, as equações (VI.1.3) juntamente com as (VI.2.1) bastam para determinar a primeira e segunda derivadas das h univocamente e sem contradição. De forma que, dados os valores iniciais num ponto, podemos determinar o campo h na vizinhança de um ponto, incluindo quantidades de segunda ordem relativas às diferenças de coordenadas. Se tomarmos em (VI.2.4) estas funções h , chegamos a uma diferencial de Pfaff cujas condições de integrabilidade (VI.2.1) são satisfeitas, incluindo a primeira ordem (só a primeira, porque contém as derivadas de h). A integral de (VI.2.4) tomada sobre qualquer circuito fechado e pequeno nessa vizinhança se anulará, por tanto, com uma aproximação que inclui a segunda ordem, quer dizer, que pode alcançar, no máximo, a terceira ordem.

Agora consideremos duas curvas infinitamente próximas C e C' que unam um ponto P a outro ponto distante Q. A partir dos valores iniciais h dados em P construímos, primeiro, o campo h na vizinhança de P, escolhendo um ponto próximo em C bem dentro desta vizinhança, seguidamente faremos o mesmo ali e assim sucessivamente, até alcançarmos Q. Em tudo isto teremos de ter a precaução de que a união das nossas pequenas regiões cubram também o caminho C´. Então, em primeiro lugar, o h obtido em Q pode estar «errado» (em comparação com o transporte *exacto*) só em quantidades de primeira ordem. Em segundo lugar, se seccionarmos a franja entre C e C' em pequenos elementos de superfície, a integral de circuito fechado em redor de cada um deles não excederá a terceira ordem, a partir do qual deduzir-se-á facilmente que a integral de linha sobre C e a integral de linha sobre C' não podem diferir em mais do que a segunda ordem.



Da mesma forma, podemos distorcer a curva C, em pequenos passos, em qualquer outra que una P e Q. As integrais de linha diferirão então apenas numa quantidade de primeira ordem.

Fazendo as subdivisões e os passos da distorção mais e mais pequenos, chegamos, no final, a provar que (VI.2.3) é uma condição *suficiente* para que o transporte de um vector contravariante seja integrável. O nosso objectivo era demonstrá-lo.

A independência do caminho percorrido do transporte de um vector covariante segue-se do contravariante porque o invariante $B_k A^k$ permanece inalterado, para um B_k fixo e um A^k qualquer. Teria que ser assim pois a contravariância e a covariância não são mais do que modos diferentes de «vestir» o nosso vector (tensor). Analogamente, se demonstra o mesmo para tensores de maior ordem e densidades tensoriais.

Se (VI.2.3) não se cumpre, qualquer vector h pode «desdobrar-se» todavia segundo (VI.1.3), na vizinhança de um ponto, mas só incluindo quantidades de primeira ordem. Usando isto em (VI.2.4), a integral de esta diferencial sobre um circuito infinitesimal pode indicar-se facilmente a partir do teorema de Stokes. Para o quadrilátero infinitesimal de vértices x^k, $x^k + dx^k$, $x^k + dx^k +\ \ x^k$, $x^k +\ \ x^k$, se obtém

$$B^{\nu}_{\alpha\lambda\mu} h^{\alpha} dx^{\lambda} \delta x^{\mu} \tag{VI.2.5}$$

para as quantidades mediante as quais as componentes *h* mudam pelo transporte paralelo em volta de este quadrilátero. *Mas este teorema não pode estender-se a um circuito finito*; simplesmente porque neste caso não existe, numa região finita, um campo *h* ao qual possa ser aplicado.

Devido a que (VI.2.5) é, em si mesmo, um vector (ao ser a diferença entre os vectores no ponto x_k) e que o é para vectores arbitrários *h* , *dx* e *x* , segue-se que *B* é um tensor de ordem quatro. Uma demonstração alternativa de este importante facto se obtém produzindo as componentes de *B* de um modo diferente, que tem interesse por si mesmo, a saber, mediante a *permutação* da diferenciação invariante de um tensor qualquer. Por exemplo, para um campo vectorial contravariante obtém-se pelo cálculo directo:

$$A^{\nu}_{;\lambda;\mu} - A^{\nu}_{;\mu;\lambda} = -B^{\nu}_{\alpha\lambda\mu} A^{\alpha} - \left(\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\right) A^{\nu}_{;\beta} \tag{VI.2.6}$$

O segundo termo da direita anula-se apenas quando Γ é uma afinidade simétrica, porque depende apenas da sua parte antisimétrica. Não obstante, este último é, em qualquer caso, um tensor, de modo que, já que o campo *A* é arbitrário, a propriedade tensorial de *B* se segue imediatamente. (Porque as derivadas invariantes de tensores são tensores como já foi visto e a lei do quociente completa a prova.)

No caso mais geral (afinidade assimétrica) o tensor *B* tem a simetria óbvia: de é antisimétrico nos seus últimos índices, *ë* e *µ* na nossa notação actual. É fácil ver que, então, tem 4 4 6=96 componentes independentes.

Se Ã é simétrica, resulta da expressão explícita (VI.2.2) que *B* tem a simetria cíclica adicional

$$B^{\nu}_{\alpha\lambda\mu} + B^{\nu}_{\lambda\mu\alpha} + B^{\nu}_{\mu\alpha\lambda} = 0 \qquad \text{(VI.2.7)}$$

Para contar, neste caso, as componentes independentes, damos primeiro a um valor fixo. Logo, tomamos para os subíndices um tripleto definido *á ë µ*[3]. Das três componentes independentes, que a anti-simetria natural no último par deixa neste caso, uma pode exprimir-se mediante as outras duas em virtude da relação antes mencionada. Isto contribui com dois por cada terno *á ë µ*, e assim oito para os quatro tripletos diferentes. Na situação em que dois dos três índices (*á*, *ë* e *µ*) sejam iguais (para a qual há 2 6=12 possibilidades[4]), já a anti-simetria natural deixa só uma componente independente em cada caso (por exemplo, B_{212}= - B_{221} e B_{122}=0). Aliás, a condição cíclica, neste caso, satisfaz-se automaticamente; só reafirma a anti-simetria natural. Por tanto temos doze componentes adicionais; e isto é tudo. Assim temos 8+12=20 componentes, para um fixo, e, portanto, 80 no total. O tensor de Riemann-Christoffel de uma afinidade simétrica tem oitenta componentes independentes. Veremos depois o caso de uma simetria maior e que tem uma importância especial, em que o número se reduz apenas a 20.

O tensor *B* pode contrair-se a respeito de (*í*,*á*), (*í*,*ë*) ou a respeito de (*í*,*µ*), mas os dois últimos, por causa da anti-simetria, não são essencialmente diferentes. Tomamos

---

[3] Três índices diferentes entre si, ou seja $^4C_3$ = 4 para e $^3C_2$=3 para ë e õ.
[4] Ou seja $^2P_2$ $^4C_2$ – escolhidos dois dos quatro índices sem repetição há que escolher qual deles ocupará o lugar duplo ë e *õ*.

de (VI.2.2) a expressão do tensor B e acrescentemos-lhe as de suas duas contracções, usando uma designação distinta (mais habitual) procedente de uma à qual chegámos por casualidade.

$$\left.\begin{aligned} B^i_{klm} &= -\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{km} - \Gamma^i_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{kl} \\ R_{kl} = B^\beta_{kl\beta} &= \underbrace{-\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x^l} + \Gamma^\beta_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{k\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{kl}}_{\text{tensor de Einstein}} \\ S_{lm} = B^\beta_{\beta lm} &= \underbrace{-\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha m}}{\partial x^l}}_{\text{segunda contracção}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.2.8)}$$

Na última fórmula é de referir que o simples «rotacional» das quatro componentes $\Gamma^\alpha_{\alpha l}$ (que não são um vector covariante) resulta ser um tensor.

R_{kl} não é simétrico em geral, nem sequer quando Γ o é (inclusive neste caso, o segundo termo não o permite). De qualquer modo, por suposição, as suas partes simétrica e antisimétrica são, igualmente tensores. Além disso, a sua parte antisimétrica reduz-se a $-1/2S_{kl}$ se Γ é simétrica[5]. Do que se conclui que no caso de uma transformação afim simétrica só exista, virtualmente, uma contracção relevante do tensor B, a saber, o tensor de Einstein.

Tendo á mão a, um tanto complicada, fórmula para B e R, gostaríamos de acrescentar um teorema muito útil relativo às mudanças que sofrem estes tensores quando se varia ligeiramente a transformação: $\Gamma^k_{lm} \to \Gamma^k_{lm} + \delta\,\Gamma^k_{lm}$. Recordemos que

---

[5] Erro na tradução, o factor ½ está ausente em ambas. Na verdade o tensor de Einstein, para uma Γ simétrica, quando decomposto fica:

$$R_{kl} = \underbrace{-\Gamma^\alpha_{kl,\alpha} + 1/2(\cancel{\Gamma^\alpha_{k\alpha,l}} - \Gamma^\alpha_{l\alpha,k}) + \Gamma^\beta_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{k\beta} - \Gamma^\beta_{k\beta}\Gamma^\alpha_{kl}}_{Simétrica} \underbrace{-1/2(\cancel{-\Gamma^\alpha_{k\alpha,l}} + \Gamma^\alpha_{l\alpha,k})}_{Antisimétrica=-1/2S_{kl}}$$

$\delta\Gamma^{k}_{lm}$ (a diferença do próprio Γ^{k}_{lm}) é um tensor. A fórmula seguinte pode escrever-se, sem problemas, pelo cálculo directo

$$\delta B^{i}_{klm} = -\left(\delta\Gamma^{i}_{kl}\right)_{;m} + \left(\delta\Gamma^{i}_{km}\right)_{;l} + \left(\Gamma^{\alpha}_{ml} - \Gamma^{\alpha}_{lm}\right)\delta\Gamma^{i}_{k\alpha} \qquad (4.2.9)$$

e, contraindo

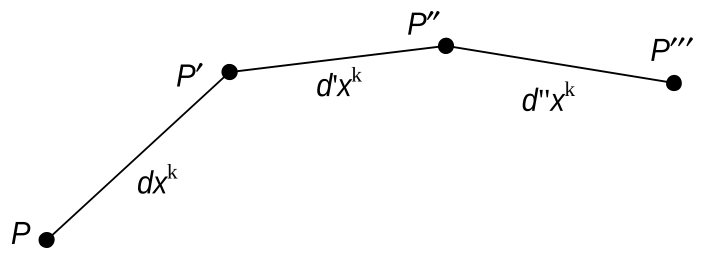
$$\delta R_{kl} = -\left(\delta\Gamma^{\alpha}_{kl}\right)_{;\alpha} + \left(\delta\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}\right)_{;l} + \left(\Gamma^{\alpha}_{\beta l} - \Gamma^{\alpha}_{l\beta}\right)\delta\Gamma^{\beta}_{k\alpha} \qquad (4.2.10)$$

Estas expressões são especialmente convenientes no caso de uma transformação simétrica, já que, então, se anula o último termo em cada uma delas.

VII As Geodésicas de uma Transformação Afim

Dada uma afinidade $\tilde{A}^k_{lm}$ consideremos num ponto $P(x)$ um elemento de linha dx^k, indo de P ao ponto $P'(x^k + dx^k)$. Transporta-se dx^k (sendo um vector em P) segundo a transformação $\tilde{A}$ desde P a P', e seja $d'x^k$ o resultado (sendo um vector em P').

Transporta-se este vector de P' a $P''(x^k + dx^k + d'x^k)$. O resultado, $d''x^k$, transporta-se a $P'''(x^k + dx^k + d'x^k + d''x^k)$ e assim sucessivamente.



Desta forma obtemos um traço poligonal que no limite dos «verdadeiros infinitésimos» e considerando um número infinitamente crescente de passos, se aproxima de uma curva, a qual, por certo, também poderia traçar-se «para trás» desde P na direcção $-dx^k$, e que tem, obviamente, as seguintes propriedades:

(i) Se transportamos um vector contravariante[1] finito, que esteja indicando a

---

[1] Na tradução está covariante, o que está errado e até contradiz o já afirmado.

direcção da curva num qualquer de seus pontos *P*, desde P e ao longo da curva até outro ponto *Q*, obteremos um vector indicando a direcção da curva em *Q*. (Por indicando a direcção, queremos dizer: que é tangente à curva, ou que tenha as componentes proporcionais aos incrementos dx^k ao longo da curva.)

(ii) A nossa construção proporciona um padrão natural para comparar os *comprimentos* de dois ramos quaisquer desta curva (*natural* relativamente à transformação Ã), a saber, a proporção entre o «número de passos» implicados em cada um deles, ou, para ser mais precisos, o valor limite desta proporção.

Uma curva como esta provém de cada um dos ^{4} pontos em cada direcção (^{3}), de modo que há ^{6} curvas no total (já que uma curva contém ^{1} pontos). Em termos gerais, as ^{3} curvas procedentes de um ponto dado cobrem uma certa vizinhança *finita* de pontos só uma vez e ali estará precisamente a curva com as propriedades pretendidas que une os pontos dados *P* e *Q*. É interessante a maneira como Schrödinger se refere à infinidade de pontos de acordo com a dimensão do espaço considerado, para nessa base estabelecer a infinidade de curvas que cobrem sem incidências uma vizinhança finita de um ponto. Estas curvas chamam-se *geodésicas*.[2] Estudemo-las analiticamente.

Qualquer curva pode representar-se, de muitas maneiras, dando as suas quatro coordenadas em função de um parâmetro contínuo ë. (de «muitas maneiras» queremos dizer unicamente que em lugar de ë podemos escolher qualquer função monótona continua de ë.). Se fizermos isto, o vector $dx^k/dë$ indica em cada ponto a direcção da curva da forma exposta.

[2] Geodésica de uma superfície curva qualquer é a trajectória (em geral curva) de uma partícula «livre». Uma geodésica representa a linha de extensão mínima entre dois quaisquer dos seus pontos. Este princípio é usada em muitos ramos da Física e toma o nome de princípio da acção mínima. Por exemplo o trajecto da luz ou de um partícula segue uma geodésica.

Ajustando-nos a (i) acima, impomos que este vector, quando se transporta paralelamente ao ponto $x^k + dx^k$, seja proporcional ao valor do vector que encontramos no ponto vizinho:

$$\frac{dx^k}{d\lambda} - \tilde{A}^k_{lm}\frac{dx^l}{d\lambda}dx^m = M\left(\frac{dx^k}{d\lambda} + \frac{d^2x^k}{d\lambda^2}d\lambda\right) \tag{VII.0.1}$$

onde M é um número. Dividindo por *dë* temos

$$M\frac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \tilde{A}^k_{lm}\frac{dx^l}{d\lambda}\frac{dx^m}{d\lambda} = \frac{1-M}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} \tag{VII.0.2}$$

Para que isto faça sentido, M deve diferir da unidade apenas na ordem de *dë*, o que é bastante compreensível. Portanto, pode substituir-se por 1 à esquerda. À direita, devemos deixar que 1–M dependa de *ë* e assim tomá-lo por (*ë*)*dë*. Então

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \tilde{A}^k_{lm}\frac{dx^l}{d\lambda}\frac{dx^m}{d\lambda} = \phi(\lambda)\frac{dx^k}{d\lambda} \tag{VII.0.3}$$

Isto incorpora o nosso primeiro requisito. Mas *ë* é a medida natural do comprimento ao longo da curva, aquela a que nos referimos em (ii)? Dificilmente, porque a sua escolha foi em grande medida arbitrária. Vejamos em que se converte (VII.0.3) quando alteramos a nossa escolha, tomando *s*(*ë*) em seu lugar. Obtemos facilmente.

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \tilde{A}^k_{lm}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds} = \frac{\phi s' - s''}{s'^2}\frac{dx^k}{ds} \tag{VII.0.4}$$

em que s' e s'' significam as derivadas relativas a *ë*.

Podemos anular o segundo membro e dar à nossa equação a forma:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \tilde{A}^k_{lm}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds} = 0 \tag{VII.0.5}$$

se, e só se, fizermos com que *s*'–*s*"=0, cuja solução geral é

$$s = \int^{\lambda} e^{\int^{\lambda} \phi(u) du} d\lambda \qquad \text{(VII.0.6)}$$

Assim pois, para obter a forma simplificada (VII.0.5) da equação diferencial da geodésica, a escolha da variável s está determinada salvo uma transformação linear com coeficientes constantes, do tipo $\hat{s} = as + b$ (que é uma transformação afim), uma liberdade associada aos limites inferiores das duas integrações em (VII.0.6). Dito de outra maneira: a teoria das equações diferenciais de segunda ordem diz que uma solução particular $x^i(s)$ pode ser determinada univocamente se forem conhecidos x^i e dx^i/ds num dado ponto.

A equação (VII.0.5) enuncia claramente que dx/ds se transporta paralelamente ao longo da geodésica. O vector $\left(\dfrac{dx^k}{ds}\right)_{\text{em } Q}$ é o deslocado paralelamente de $\left(\dfrac{dx^k}{ds}\right)_{\text{em } P}$. O mesmo se mantém para os vectores infinitesimais $(dx^k)_{\text{em } P}$ e $(dx^k)_{\text{em } Q}$, *se a ds lhe dermos o mesmo valor infinitesimal em ambos os pontos*. Portanto, ds é uma medida do comprimento de uma secção infinitesimal e ds é uma medida de uma secção finita de uma geodésica no sentido exposto mais acima em (ii).

É algo totalmente curioso e de salientar que uma transformação puramente afim torne possível uma comparação de comprimentos (que é um conceito métrico) ainda que apenas seja ao longo de uma geodésica. Certamente, não se proporciona nenhuma comparação natural entre geodésicas diferentes, nem sequer no caso em que se cruzem, pois a transformação linear (ou melhor afim) aludida acima cumpre-se em cada geodésica, independentemente.

Devemos dirigir a atenção para o facto de que segundo (VII.0.5) e (VII.0.3) a parte antisimétrica de $\tilde{A}^{k}{}_{lm}$ é irrelevante tanto para as geodésicas como para a «métrica» em qualquer geodésica, pois desaparece pela simetria já existente em (VII.0.3). Qualquer tensor antisimétrico $^{k}{}_{lm}(= -\ ^{k}{}_{ml})$ pode adicionar-se a $\tilde{A}^{k}{}_{lm}$ sem produzir as alterações aludidas.

A experiência de que qualquer parcela antisimétrica é irrelevante justifica a pergunta: existem, também, adicionados simétricos a uma afinidade que não mudem o seu sistema de geodésicas? A resposta é que o adicionado da forma

$$\delta_l^k \mathrm{V}_m + \delta_m^k \mathrm{V}_l \qquad \text{(VII.0.7)}$$

a $\tilde{A}^{k}{}_{lm}$ (onde V_l é um campo vectorial arbitrário) é a única adição simétrica que não muda as geodésicas de $\tilde{A}^{k}{}_{lm}$. Claramente, a «métrica» muda em alguma das geodésicas (realmente muda em muitas delas), dependendo da escolha do campo V_l. Isto implica que não é possível nenhuma mudança na parte simétrica de uma afinidade, se pretendermos preservar todas as geodésicas juntamente com a métrica de todas elas.

Deixo ao leitor a prova destas últimas afirmações.

Em conclusão, sabe-se que existe uma relação injectiva entre a afinidade e a métrica ao longo de uma geodésica. Contudo a uma afinidade pode corresponder mais que uma geodésica se bem que a cada uma delas (das geodésicas) esteja associada uma única métrica. Embora única não permite comparar comprimentos entre elas. No entanto e como foi visto, a adição de um tensor antisimétrico a uma afinidade (ou, o que é o mesmo dizer, a parte antisimétrica de uma afinidade) não produz qualquer perturbação no sistema de geodésicas (com métricas incluído). Porém, a parte simétrica de uma afinidade pode também ser alterada (por adição de (VII.0.7), cuja simetria lm ressalta naturalmente da própria expressão) sem que as geodésicas sejam alteradas – não se mantendo contudo a mesma «métrica» em muitas delas. Daí que Schrödinger conclua este capítulo com o parágrafo atrás sublinhado.

VIII A Hipótese Geométrica Geral Sobre a Gravitação

VIII.1 A ideia subjacente

Está muito mais para além da mira das nossas conferências relatar o desenvolvimento das ideias da Relatividade, primeiro da Especial e depois da Geral, e mostrar como se hão construído logicamente como resultado de um conjunto de experiências cruciais, como a aberração da luz das estrelas fixas, a experiência de Michelson- Morley, certos factos referentes à luz das estrelas binárias visuais, e as experiências de Eötvös que determinaram, com um maravilhoso alto grau de exactidão, o carácter universal da aceleração gravitacional, quer dizer, que num campo dado é a mesma para qualquer corpo-teste, independentemente do material.

Não obstante, antes de entrar no detalhe sobre o contínuo métrico (ou de Riemann), desejo assinalar a principal linha de pensamento que sugere a dita escolha como um modelo do espaço-tempo, em ordem a dar conta da gravitação de uma forma puramente geométrica. Não seguiremos, nisto, a evolução histórica do pensamento tal como teve lugar realmente, ainda que muito bem poderia ter ocorrido desse modo, sendo já familiar a ideia da transformação afim para os físicos naquela época. Realmente a ideia geral de esta emergiu gradualmente (no trabalho H. Weyl, A.S. Eddington e Einstein) do caso especial de uma afinidade que surge a partir de uma transformação métrica (de Riemann); emergiu apenas depois de que esta última tivesse adquirido uma ampla publicidade devida ao grande êxito da teoria de Einstein de 1915. Hoje, não obstante, parece mais simples e natural colocar uma transformação afim, agora que estamos familiarizados com ela, num primeiro plano, e chegar à métrica mediante uma sua, muito simples, especilização.[1]

Mostramos que no caso particularmente simples de uma afinidade *integrável* simétrica, pode encontrar-se um sistema de coordenadas em que as geodésicas sejam linhas rectas[2]. Além disso, sabemos a partir da mecânica ordinária que a trajectória de uma partícula, sobre a qual não actua nenhuma força, é uma linha recta, tanto no espaço como no tempo (já que, neste caso, o movimento é uniforme). Pondo-o mais cautelosamente e de maneira muito mais significativa para o nosso propósito actual: é uma linha recta num sistema de referência adequadamente escolhido, o mesmo para todas as partículas não sujeitas a forças, o chamado sistema de referência inercial. Contudo a trajectória não será recta no espaço-tempo, isto é, a trajectória espacial não será recta, nem o movimento uniforme, quando seja referido a um sistema de coordenadas que possua, em si mesmo, um movimento acelerado ou de rotação relativo a um sistema de referencia inercial, como, por exemplo, o sistema de referencia espacial fixo rigidamente à Terra no seu movimento de rotação.

Agora, a partir das experiências de Eötvös inferimos que num campo gravitacional dado, qualquer partícula independentemente da sua natureza, partindo de um ponto dado do espaço-tempo (isto é, a partir de um ponto do espaço e num instante de tempo dados) numa direcção concreta do espaço-tempo (isto é, numa direcção

[1] Schrödinger expõe agora muito claramente o caminho que escolheu desde o início deste trabalho. Caminho que, como também o diz, não foi o escolhido por outros célebres investigadores e estudiosos deste assunto.

[2] N.A.: Porque neste caso as Ã ‘s podem tranformar-se em zero em todas as partes, de modo que (VII.0.5) define linhas rectas. A restrição a afinidades integráveis *simétricas* é requerida inclusivamente ainda que a parte anti-simétrica não afecte a forma das geodésicas. Isto é devido a que a parte simétrica de uma afinidade integrável não é necessariamente integrável (e não o será, como regra geral) e, portanto, *não pode* transformar-se e desaparecer.

espacial e com uma velocidade dadas), segue uma curva (que chamamos «linha do universo») que depende tão só das condições iniciais mencionadas e do campo gravitacional, e não da natureza da partícula. Além disso esta curva não é uma linha recta quando a referimos a um sistema de referência inercial. Ou melhor, já que, neste caso, pode ser duvidoso o significado de um sistema de referencia inercial devido a que não há partículas isentas de gravitação: estas curvas não são linhas rectas em nenhum sistema de referência; não existe um sistema em que todas sejam rectas, com uma excepção que não é notável dado que é mais fictícia[3].

Este estado de coisas sugere estender por tentativas a analogia entre as geodésicas de uma afinidade integrável e as trajectórias (ou «linhas do universo») de partículas não submetidas a nenhuma força, às geodésicas de uma afinidade geral, não integrável, e as trajectórias de partículas submetidas à acção de um campo gravitacional. A tentação é particularmente forte, porque a geodésica, por definição, poderia ser denominada como a linha «mais recta», de tal maneira que teríamos a simples lei: uma partícula segue em todos os casos uma linha *recta*; uma lei que não carece de precedente. Recorda fortemente um conhecido resultado da mecânica clássica ordinária, a saber, que uma partícula limitada a permanecer sobre uma superfície dada, e que para além disso não esteja submetida a nenhuma força, move-se com velocidade uniforme ao longo de uma geodésica de esta superfície.

Por outras palavras, suponhamos que um campo gravitacional pode representar-se por uma propriedade puramente geométrica do espaço-tempo, a saber, como uma afinidade imposta nele, e que equivale a uma limitação geométrica sobre o movimento das partículas. Esta transformação afim há de ser considerada como uma

---

[3] N.A.: Este é o caso de um campo gravitacional estritamente uniforme, o qual não existe. Infelizmente este caso fictício converteu-se em exemplo típico de todos os tratamentos populares ou semipopulares.

propriedade inerente do contínuo espacio-temporal, não como algo que é criado apenas quando há um campo gravitacional. O caso em que não o há é simplesmente o caso em que a afinidade é integrável.

Nestas considerações adoptamos tacitamente uma generalização muito relevante da ideia clássica de «sistema de referência» que não deve ser silenciada nesta ocasião, ainda que tenha chegado a ser-nos familiar em capítulos precedentes. Não só se trata de que tenhamos incluído o tempo de uma forma completamente geral na transformação de coordenadas, mas também que um físico clássico, quando fala de um sistema de referência inercial ou qualquer outro sistema de referência, só tem em mente que as coordenadas cartesianas de um ponto poderiam referir-se a qualquer dos dois sistemas rígidos de eixos os quais se movem um em relação ao outro como o de uma pedra lançada se move relativamente à Terra ou a Terra relativamente a um sistema de referência inercial. Neste caso as coordenadas num sistema de referência são funções lineares especiais das coordenadas em outro sistema de referência, com coeficientes que são alguma função do tempo. Sem qualquer objecção, passámos, de modo inadvertido, a considerar as nossas transformações completamente gerais, as quais só são lineares na imediata vizinhança de um ponto; e os coeficientes (os $\partial x^i / \partial \bar{x}^k$) são funções *arbitrárias* de todas as quatro coordenadas e mudam de um ponto a outro. Para justificar esta generalização podemos dizer que sem ela a ideia geral de transformação afim não chegaria de nenhuma forma e, portanto, não poderia usar-se para representar o campo gravitacional.

É útil outro comentário. Tendo adoptado esta ideia geral de um sistema de referência, não desejamos privilegiar nenhum sistema de referência especial. De aqui que onde quer que, no sistema de referência particular que estamos usando, as componentes da transformação afim não sejam todas zero em todas as partes, estamos obrigados a considerá-las como representando um campo gravitacional do ponto de vista deste sistema de referência, inclusive ainda que possamos estar inclinados a denominá-lo como um campo falso no caso de uma afinidade integrável, em cujo caso pode encontrar-se um sistema de referencia no qual se anulam todas elas. Mas se, devido a isto, não as consideramos no sistema de referência original onde não se anulam, então não traçaremos correctamente as geodésicas. Tão pouco queremos fazer excepções neste caso especial, não desejamos impor a regra de que sempre devamos incomodarmo-nos em ver se pode reduzir-se a nada a transformação afim como um todo, e, de ser assim, nos preocupemos em adoptar o sistema de referência no qual se reduza desta maneira.

Quiçá seria interessante saber se pelo menos na vizinhança de um ponto particular o campo gravitacional pode «transformar-se e desaparecer». A resposta a isto é simples: pode-se sempre. Mas voltaremos a isto mais tarde.

VIII.2 A Lei de Gravitação

Na Teoria de Newton a gravitação descreve-se por um potencial , cujo gradiente, tomado negativo, é a aceleração ministrada a um pequeno corpo teste. Reza a lei que governa o campo

$$\phi = \text{Constante, onde não há campo;} \tag{VIII.2.1}$$

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ onde há campo, mas não há matéria gravitando;} \tag{VIII.2.2}$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi k\rho \text{, onde há matéria gravitando de densidade } \rho, \tag{VIII.2.3}$$

Sendo k a constante da gravitação, 6,67 10^{-8} g^{-1}cm^{3}s^{-2}.

Obviamente e por necessidade, inclui-se (VIII.2.1) como um caso especial de (VIII.2.2), e este ultimo caso como uma caso especial de (VIII.2.3). Ou escrevendo-o ao contrário os últimos casos são generalizações dos anteriores.

Já que desejamos representar um campo mediante uma transformação afim $\tilde{A}^{i}_{kl}$, a pergunta fulcral é: quais são as leis correspondentes que governam as $\tilde{A}^{i}_{kl}$ nestes três casos?

Não há dúvida sobre o análogo de (VIII.2.1). Onde não há campo, a conecção afim deve ser integrável e as geodésicas, linhas rectas. Descobrimos no capítulo VI que a condição necessária e suficiente para que isto seja assim é

$$\underbrace{B^{i}_{klm} = 0}_{\text{80 equações}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\tilde{A}^{i}_{kl} = \tilde{A}^{i}_{lk}}_{\text{24 equações}} \tag{VIII.2.4}$$

De modo que isto deve satisfazer-se onde não há campo (nem matéria). A condição a impor às $\tilde{A}^{i}_{kl}$ onde há campo mas não matéria exprime-se mediante uma (ou mais) equações tensoriais, as quais devem ser satisfeitas, *inter alia*[4], no caso limite de ausência de campo, quer dizer, estas devem ser uma consequência matemática de (VIII.2.4) e, não obstante, requerer menos que (VIII.2.4). Isto deixa-nos todavia com uma ampla escolha, como normalmente tem de suceder num propósito de generalização. Por exemplo, as equações tensoriais

[4] *Inter alia* - Entre outras coisas.

$$
\begin{aligned}
B^i_{klm}B^k_{pqr} &= 0, \\
B^i_{klm}B^k_{pqi} &= 0, \qquad \text{(VIII.2.5)} \\
R_{lq}R_{mr} + aB^i_{klm}B^k_{iqr} &= 0 \ (a = \text{uma constante})
\end{aligned}
$$

e muitas outras satisfazem o requisito. Assim pois, guiemo-nos pelo princípio da simplicidade, o qual sugere que merece a pena ensaiar uma equação ou equações que sejam lineares, pelo menos, relativamente às derivadas das Ã's (como a equação (VIII.2.4) o é realmente) se as houver. (notemos que as equações clássicas (VIII.2.1) a (VIII.2.3) são todas lineares.) Se acrescentarmos este requisito, então excluímos os produtos das B's, e a única forma[5] de deduzir a partir de (VIII.2.4) algo menos exigente que o próprio (VIII.2.4) é vê-lo de outro prisma[6]. Assim obtemos

$R_{kl} = 0,$ $(S)_{kl}$ Tφ / Φ5 15.93 Tφ 1 0 0 1 360 (VIII.2.6)

Agora recordemos, por um lado, que se $Ã^i_{kl}$ é uma afinidade simétrica, a segunda equação está contida na primeira e pode retirar-se; por outro lado, parece que merece especialmente a pena provar se podemos fazê-lo com Ã´s simétricas, já que a parte antisimétrica não teria qualquer influência sobre as geodésicas, o que ao fim e ao cabo,

---

[5] N.A. A simples não consideração das 24 condições, leva ao "Fernparalelismo" de Einstein. Não funcionou. (Fernparallelismus - Paralelismo na geometria fractal como diríamos hoje. (Fern= Variedade de Feto)

[6] Na nota de roda-pé anterior da autoria de Schrödinger, a simples e educada afirmação, «não funcionou», é bem típica da sua forma de trabalhar e da sua consideração por Einstein. Efectivamente o conceito de «Fernparalelismo» ou «paralelismo absoluto» ou «paralelismo distante» ou ainda «teleparalelismo» e o seu aproveitamento por Einstein nos seus estudos sobre a teoria do campo unificado, tem uma história bem interessante e que revela a forma como Einstein usava os resultados obtidos por outros, deixando pensar que eram seus. Na verdade a ideia nasceu em Cartan em 1922/23, foi trabalhada por Heisenhart em 1925 e por Schouten, em conjunto com Cartan. Einstein é acusado de a ter assumido por sua (o que se poderia interpretar no mínimo como sendo dos seus colaboradores matemáticos, em geral esquecidos por Einstein) ao publicar vários artigos sobre o assunto em que estava realmente interessado: a teoria do campo unificado.
Neste caso não se repetiu o problema de 1905. Houve trocas de cartas e críticas muito fortes à forma de Einstein trabalhar, sobre tudo por parte de Cartan e Pauli (um matemático e um físico) e outras mais delicadas de Eddington, e até do próprio Lanczos que colaborou sempre com Einstein. A história é extensa, deu origem a muitas trocas de cartas e a artigos com críticas (e elogios) e Schrödinger muito calma e delicadamente resume-a assim: "*Não funcionou.*"

inspirou toda a nossa tentativa. Fazemos isto, e no que se segue *até novo aviso, tomamos a afinidade como simétrica*.

$$\tilde{A}^{i}_{kl} = \tilde{A}^{i}_{lk} \qquad \text{(VIII.2.7)}$$

Então ficaremos com

$$R_{kl} = 0 \qquad \text{(VIII.2.8)}$$

como a equação geral a impor sobre as Ã's onde não há matéria.

Isto tem um aspecto que é muito satisfatório e outros que não o são tanto. Falemos em primeiro lugar do que é satisfatório. Trata-se de que a anulação de um tensor de ordem dois no espaço vazio é precisamente o que esperávamos como a descrição matemática do conceito de «vazio», isto é, desprovido de matéria. Já que, segundo a famosa identificação entre massa e energia, que Einstein inferiu a partir de uma simples experiência mental sobre a pressão da luz, e que foi tão fortemente confirmada mediante as experiências reais de desintegração da matéria mediante colisões nucleares cuja funesta confirmação a grande escala pela «bomba atómica» foi totalmente gratuita, digo que, segundo esta famosa descoberta de Einstein, a matéria não se representa por um escalar, mas antes por um tensor de ordem dois, porque a energia não é um escalar. É a componente Tempo-tempo do tensor energia momento (stress-energy-momentum ou flux-energy-momentum)[7].

Utilizando a terminologia da Teoria da Relatividade Especial, apesar de neste momento não o podermos explicar em detalhe, temos que para uma partícula de massa em repouso m este tensor é

---

[7] N.A.: Que a energia não é um invariante pode ver-se a partir da consideração elementar de que a energia cinética de uma partícula se anula em alguns sistemas de referência inerciais, mas não em todos eles.

$$m\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^k}{\partial s} \tag{VIII.2.9}$$

onde ds é a diferencial do tempo próprio (um invariante).

Assim, poderíamos considerar que o nosso R_{kl} é essencialmente o tensor de matéria, que (VIII.2.8) expressa o facto de que este se anula (espaço *vazio*) e que a generalização de (VIII.2.8) dentro da matéria, correspondente na teoria de Newton à transição de (VIII.2.2) a (VIII.2.3), será da forma

$$R_{kl} = CT_{kl} \tag{VIII.2.10}$$

onde C é uma constante e T_{kl} é o tensor de matéria. Demonstrar-se-á que esta interpretação não será de todo correcta; requererá um pequeno reajuste.

Dependente de uma investigação detalhada, isto é satisfatório até certo ponto. Um pequeno inconveniente é que o tensor (VIII.2.9) é contravariante enquanto que em (VIII.2.10) se requer um tensor covariante[8]. É muito mais incómodo, que o tensor (VIII.2.9), assim como qualquer tensor de energia elementar, como, por exemplo, o maxwelliano, seja simétrico, enquanto que R_{kl} não o é, nem sequer com a nossa afinidade simétrica; havíamos dirigido a nossa atenção sobre este facto no capítulo VI. Mas o facto mais desconcertante é que existem 40 funções[9] Ã$^{i}_{kl}$, que não podem ser suficientemente controladas mediante as equações (VIII.2.8), ou falando com mais generalidade (VIII.2.10), cujo número é de apenas 2^4=16 e terá que ser reduzido a 10, já que, de todas as formas, haverá que desfazermo-nos da assimetria[10] de R_{kl}.

Tanto a inquietante assimetria em R_{kl} como a anomalia do número de equações parecem indicar que para representar um campo gravítico puro deve considerar-se algo

---

[8] Erro no texto estava contravariante.
[9] 4x10=40 posto que agora estamos a considerar uma afinidade simétrica.
[10] Não ser simétrico: Recorde-se que R_{kl} não é simétrico em geral, tão pouco quando o é.

muito menos geral que uma $\tilde{A}^{i}_{kl}$ simétrica com 40 componentes independentes, por outras palavras, que deve impor-se alguma restrição geral adicional sobre a transformação. Esta necessidade fundamenta-se dum ponto de vista completamente distinto, o qual nos mostrará o caminho.

PARTE III

A VARIEDADE METRICAMENTE CONEXA

IX Afinidades Métricas

IX.1 Investigação geral

A combinação de duas circunstâncias permite-nos pensar que, de alguma maneira, deve estar associada à transformação afim básica outra entidade geométrica de significado fundamental, a saber, uma métrica de Riemann. Realmente este foi o ponto de vista do qual Einstein atacou primeiro o problema do espaço-tempo. A noção de afinidade foi incorporada mais tarde por H. Weyl[1].

A primeira circunstância é que, como temos visto, uma transformação afim já permite a consideração de um invariante ds ao longo de cada geodésica. A comparação de «comprimentos» ou «intervalos» (não é realmente um comprimento, recordemos que estamos a 4 dimensões) chega a ser possível.

A ideia sugere por si mesma que esta comparação de intervalos não devia restringir-se à mesma geodésica.

A segunda circunstância é que o dito invariante ds é realmente conhecido na chamada Teoria da Relatividade Especial. Entraremos no detalhe seguidamente. Não é a soma de quadrados, mas dt^2-$d\quad^2$ (= ds^2, digamos), onde d significa o elemento

[1]N.A.: *Raum, Seit, Materie* (Berlin, Spriger, 1918)

espacial da distância. Uma generalização disto é o elemento de linha geral que teremos de considerar:

$$g_{ik}dx^i dx^k \qquad \text{(IX.1.1)}$$

(onde é suficiente tomar g_{ik} g_{ki}). Qual é a ligação entre os dois «ds»? Obviamente teremos que pedir que a métrica Ã primitiva forme parte desta métrica g_{ij}.

Voltemos a uma investigação mais profunda destas relações. Se x^1, x^2 e x^3 se interpretam como coordenadas espaciais e x^4 como o tempo, as componentes da velocidade de uma partícula no ponto x^k são

$$\frac{dx^1}{dx^4}, \frac{dx^2}{dx^4} e \frac{dx^3}{dx^4} \qquad \text{(IX.1.2)}$$

onde $x^k + dx^k$ é um ponto vizinho da linha do universo da partícula. As fórmulas de transformação das três quantidades (IX.1.2) deduzem-se facilmente de (I.0.10), mas são extremamente pesadas, quer dizer, são lineares mas não homogéneas e fraccionárias. Agora, já que, ao fim e ao cabo, dx^k é um vector, é razoável considerar em lugar de (IX.1.2) um vector definido com componentes proporcionais a dx^k (não o próprio dx^k, por não ser um vector *definido*) a partir do qual podem obter-se (IX.1.2), se se deseja como quocientes. Também, é razoável requerer que o dito vector possa sempre ser obtido.

Para este propósito necessitamos de um invariante infinitesimal proporcional a dx^k. No capítulo sobre geodésicas descobrimos que a própria transformação afim proporciona tal invariante, a saber, a diferencial ds do parâmetro s e que se distingue em cada geodésica em que dá à sua equação a forma simples (VII.0.5). E vimos que o vector dx^k/ds é transportado paralelamente ao longo da geodésica. Não obstante, este não é um vector completamente *definido*, porque a variável distinguida não é totalmente única ao estar determinada salvo uma transformação linear com coeficientes constantes arbitrários ($\hat{s} = as + b$). Portanto, ds está determinada salvo um factor constante (a) e o mesmo ocorre a dx^k/ds. Este multiplicador está, todavia, livre em cada uma das [6] geodésicas.

Pode eliminar-se esta falta de definição, de forma que dx^k/ds se converta num vector definido em cada geodésica e, portanto, para todo o elemento de linha? Em principio isto parece fácil: Tomemos uma escolha definida arbitrária de s, independente em cada geodésica.

Bom, vejamos como funciona. *Depois de termos tomado a nossa escolha*, ds será, para cada elemento de linha, uma função invariante homogénea definida e de primeira ordem nas dx^k. Não iremos explorar as amplas possibilidades que isto deixa, a não ser unicamente a sugerida mediante a qual a distância elementar seja medida num sistema de coordenadas «cartesiano oblíquo»; essencialmente mediante o teorema de Pitágoras. Isto é, assumimos

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \qquad \text{(IX.1.3)}$$

onde g_{ik} é um tensor simétrico, variando de um ponto a outro. Esta suposição tão especial está razoavelmente justificada pela compreensão de que nenhuma outra faz com que o nosso modelo adira aos conceitos mais elementares da Física. Não obstante, devemos dar-nos conta de que impomos assim uma restrição que não é provável que seja compatível com uma afinidade *arbitrária*.

Desejamos saber a condição necessária e suficiente para que (IX.1.3) esteja de acordo com a medida afim de distância ao longo de cada geodésica. A resposta que temos de esperar é uma relação entre o tensor g_{ik} e a transformação afim $\tilde{A}^k_{lm}$. A tarefa não é simples. Primeiro exploraremos, um pouco em profundidade, uma condição *suficiente e não necessária*, mas que nos levará por si mesma à menos restritiva condição *necessária e suficiente*.

Afirmo que uma condição suficiente é que o invariante

$$g_{ik} A^i A^k \tag{IX.1.4}$$

onde A^k é um vector qualquer (não um campo vectorial) num ponto qualquer, se conserve em qualquer deslocamento paralelo do vector A^k.

Efectivamente, seja (para distingui-lo, de momento, do s de (IX.1.3)) um parâmetro afim eleito numa geodésica dada. Então, o invariante

$$g_{ik} \frac{dx^i}{d\hat{s}} \frac{dx^k}{d\hat{s}} = C \text{ (digamos)} \tag{IX.1.5}$$

conservar-se-á no transporte paralelo de dx^i/d ao longo desta geodésica. Portanto, se se substituir, como efectivamente se pode fazer, o parâmetro nesta geodésica por $\hat{s}\sqrt{C}$ e chamarmos a isto s, então satisfaz-se (IX.1.3) . Devido a que podemos fazer o mesmo com cada geodésica, *fica demonstrada a condição suficiente*.

Dado que, certamente, um produto invariante se conserva no transporte paralelo quando todos os seus factores são transportados paralelamente (ver Cap. V), a condição satisfaz-se com segurança se a afinidade $\tilde{A}^i_{kl}$ transfere o campo g_{ik} sobre si mesmo, isto é, se a derivada invariante de g_{ik}, tomada relativamente a $\tilde{A}^i_{kl}$, se anula:

$$g_{ik;l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0 \tag{IX.1.6}$$

Facilmente dar-se-á também conta de que nenhum outro além de g_{ik} transportado paralelamente pode conservar o invariante (IX.1.4) para um A^k arbitrário. Efectivamente ao ser A^k arbitrário o seu transportado paralelamente é também arbitrário. Por conseguinte se se conhece o invariante (transportado) para um vector arbitrário (transportado), e mediante este o g_{ik} no novo lugar determina-se univocamente.

Sendo assim, (IX.1.6) é a expressão matemática da nossa condição *suficiente*. Escrevemos as três condições que resultam de uma permutação cíclica dos subíndices i, k e l:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} &= 0 \\ \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ml}\Gamma^m_{ki} - g_{km}\Gamma^m_{li} &= 0 \\ \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - g_{mi}\Gamma^m_{lk} - g_{lm}\Gamma^m_{ik} &= 0 \end{aligned}}\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2} \\ &+\tfrac{1}{2} \\ &+\tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad \text{(IX.1.7)}$$

e os combinamos comos factores indicados fora do quadro. Ao fazê-lo assim, estamos tomando em consideração a simetria de g_{ik}, mas não a de $\Gamma^m{}_{kl}$. Por outras palavras, de momento estamos a considerar a afinidade não simétrica mais geral que obedece à nossa condição suficiente. (A razão se apresentará posteriormente. Não estamos realmente interessados nas afinidades não simétricas. Mas este procedimento facilitará o achado da condição necessária e suficiente.) Obtemos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) - \frac{1}{2} g_{lm}\left(\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{ik}\right) + \frac{1}{2} g_{im}\left(\Gamma^m_{kl} - \Gamma^m_{lk}\right) + \frac{1}{2} g_{km}\left(\Gamma^m_{li} - \Gamma^m_{il}\right) = 0 \qquad \text{(IX.1.8)}$$

Podemos resolver estas equações relativamente à parte simétrica de Γ, com a ajuda do tensor g^{ik} deduzido a partir do tensor g_{ik} da forma descrita no capítulo II (ver equações (II.1.24) a (II.1.26)) e que está univocamente determinado por

$$g^{ik} g_{lk} = \delta^i_l \qquad \text{(IX.1.9)}$$

Obviamente, no caso presente, g^{ik} é, também, simétrico.

«Multiplicamos» (IX.1.8) por g^{sl} e ponhamos para abreviar

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{ik}+\Gamma^m_{ki}\right) &= \Gamma^m_{\underline{ik}} \\ \frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{ik}-\Gamma^m_{ki}\right) &= \Gamma^m_{\underset{\vee}{ik}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.1.10)}$$

$$\frac{1}{2} g^{sl}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)=\left\{\begin{matrix} s \\ ik \end{matrix}\right\} \qquad \text{(IX.1.11)[2]}$$

Obtemos (adicionando $\Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$ a ambos os lados):

$$\Gamma^s_{ik} = \underbrace{\left\{\begin{matrix} s \\ ik \end{matrix}\right\} + g^{sl} g_{im}\Gamma^m_{\underset{\vee}{kl}} + g^{sl} g_{km}\Gamma^m_{\underset{\vee}{il}}}_{\text{simétrica em } ik} + \underbrace{\Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}}_{\text{antisimétrica}} \qquad \text{(IX.1.12)}$$

Esta fórmula dá a resposta completa à pergunta de quais as afinidades que transportam um campo dado g_{ik} sobre si mesmo. Observe-se que tanto o termo entre chavetas como a soma do segundo e terceiro termos da direita, são simétricos relativamente a i e k[3]. Pelo que a parte antisimétrica $\Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}$ pode escolher-se arbitrariamente e então a parte simétrica $\Gamma^s_{\underline{ik}}$ (a saber, os três primeiros termos da direita) determina-se univocamente mediante a parte antisimétrica e o campo g_{ik}. De (IX.1.12) <u>se segue que os símbolos de Christoffel</u>

$$\Gamma^s_{ik} = \left\{\begin{matrix} s \\ ik \end{matrix}\right\} \qquad \text{(IX.1.13)}$$

<u>formam a única transformação simétrica que se ajusta a (IX.1.6) para um campo g_{ik} dado</u>. Mas de (IX.1.12) descobrimos algo mais, inclusive ainda que estejamos

---

[2] N.A.: A estes chamamos colchetes de Christoffel. Não constituem um tensor, mas antes, segundo (IX.1.13) , uma afinidade.

[3] O segundo termo converte-se no terceiro e "vice-versa".

interessados apenas nas transformações simétricas. Vimos no capítulo VII que nem as geodésicas nem os seus parâmetros de «métrica afim» dependem da parte antisimétrica da afinidade. Separemo-la em duas e menosprezemos a antisimetria; então ficamos com

$$\tilde{A}^{s}_{ik} = \begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} + g^{sl} g_{im} \tilde{A}^{m}_{\underline{kl}} + g^{sl} g_{km} \tilde{A}^{m}_{\underline{il}} \qquad \text{(IX.1.14)}$$

Esta família de afinidades *simétricas*, nas quais $\Gamma^{m}_{\underline{kl}}$ é um tensor antisimétrico

arbitrário, é, mesmo assim, perfeitamente «compatível» com a métrica g_{ik}, embora, naturalmente, tenha geodésicas diferentes das de (IX.1.12)[4], e não obedece a (IX.1.6), mostrando que esta última condição, ainda que seja suficiente, não é necessária. Agora é fácil deduzir a condição necessária e suficiente.

Por um lado, o tensor adicionado aos símbolos de Christoffel em (IX.1.14), pode escrever-se; ou, melhor, (IX.1.14) pode escrever-se

$$\Gamma^{s}_{ik} = \begin{Bmatrix} s \\ ik \end{Bmatrix} + g^{sl} T_{lik} \text{ com} \qquad \text{(IX.1.15)}$$

$$T_{lik} = T_{lki} \qquad \text{(IX.1.16)}$$

e é fácil convencer-mo-nos de que

(i) o tensor T, além da sua simetria em i e k, satisfaz a simetria peculiar (circular)

$$T_{lik} + T_{ikl} + T_{kli} = 0 \qquad \text{(IX.1.17)}$$

---

[4] O que parece à primeira vista uma contradição com o final da secção VII. Contudo deve-se notar que o segundo e terceiro termos juntos são simétricos, contudo aqui as ’s são tensores antisimétricos arbitrários.

(ii) que, em qualquer caso é arbitrário, já que $\tilde{A}^{m}_{kl}$ o é. Efectivamente tomando

$$\Gamma^{s}_{ik} = -\frac{1}{3} g^{ms} (T_{ksl} + T_{lsk}) \qquad \text{(IX.1.18)}$$

em (IX.1.14) e considerando (IX.1.16) e (IX.1.17), obtemos (IX.1.15). As três ultimas relações, são portanto, equivalentes a (IX.1.14) e a família completa de afinidades descritas por elas é a que chamamos «compatível» com a métrica g_{ik}. (Esta é uma breve expressão não para um duro e rápido postulado, mas para o tipo de ajuste entre elas do que temos falando em detalhe.)

Ao rever os nossos achados respeitantes a esta compatibilidade falaremos, agora, só de afinidades simétricas, às quais como sabemos, pode acrescentar-se qualquer parte antisimétrica sem alterar as geodésicas e sua métrica afim, e por tanto sem interferir com a compatibilidade. A condição *suficiente* de compatibilidade (IX.1.6) singulariza-se em (IX.1.13) como a única afinidade simétrica que a cumpre para uma g_{ik} dada; mas, agora, encontrámos a classe completa de afinidades simétricas compatíveis com uma g_{ik} dada, a saber, (IX.1.15) juntamente com (IX.1.16) e (IX.1.17). Trataremos de demonstrar que esta é a classe mais ampla, por outras palavras, que as três últimas relações juntas representam as condições necessárias e suficientes de compatibilidade.

Observemos, primeiramente, que inclusivamente com um g_{ik} fixo, só (IX.1.17) representa qualquer possível restrição à afinidade simétrica (IX.1.15), já que a diferença de duas afinidades simétricas, a afinidade Ã e a de Christoffel, é, em qualquer caso, um tensor simétrico e isso é precisamente o que as equações (IX.1.15) e (IX.1.16) dizem sobre isto. Em consequência, só fica por demonstrar que (IX.1.17), para além de ser suficiente, é também *necessária*.

A compatibilidade pede que o invariante (IX.1.4) deveria ser a unidade se se toma o dx^k/ds *afim* por A^k. Isto deve manter-se em toda a parte ao longo de uma geodésica e, já que aqui o vector direcção se desloca paralelamente, o invariante (IX.1.4) não deve mudar quando o vector A^k se desloca paralelamente segundo a afinidade (IX.1.15) sobre um elemento de linha $çA^k$ (em que $ç$ é uma constante infinitesimal), enquanto as g_{ik} mudam os seus valores no ponto vizinho. Ora bem, sabe-se que esta última mudança cancela exactamente aqueles termos que se originariam deslocando A^k só segundo a afinidade de Christoffel. Portanto, sabe-se que na operação completa a maioria dos termos se cancelam; só aqueles que contém o tensor T sobrevivem e devem anular-se por si mesmos. Isto deixa-nos com as condições seguintes, as quais devem impor-se às componentes do tensor T.

$$0 = -2g_{ik}A^i g^{ks} T_{slm} A^l A^m \eta \qquad \text{(IX.1.19)}$$

quer dizer,

$$0 = -2\eta A^i A^l A^m T_{ilm} \qquad \text{(IX.1.20)}$$

Agora recordemos que A^k é arbitrário. Tomando primeiro apenas uma das suas componentes diferente de zero, depois duas delas, finalmente três e usando (IX.1.16) prova-se facilmente (IX.1.17); a última representa vinte condições independentes aquém da (IX.1.16) <u>e reduz T a vinte componentes independentes</u>.

Isto completa a prova de que (IX.1.15) a (IX.1.17) são as condições necessárias e suficientes para que uma afinidade simétrica Ã$^i_{kl}$ e um tensor métrico g_{ik} se ajustem, no sentido de que a métrica completa g_{ik} se harmonize com a métrica incompleta Ã, definida só ao longo de cada geodésica afim. E, repito, um tensor antisimétrico arbitrário adicionado à nossa Ã não interfere em absoluto, porque não altera nem as geodésicas afins nem a sua métrica afim.

De quantas funções independentes depende a nossa «afinidade métrica» em geral? (É adequado chamá-la assim) Há 10 g_{ik} independentes. O tensor T_{klm} restringe-se a 40 componentes independentes mediante a simetria em l e m. Uma cuidadosa recontagem mostra que (IX.1.17) equivale a 20 condições independentes. O nosso tensor tem assim 20 componentes independentes e a nossa Ã parece, portanto, depender de 30 funções arbitrárias.

No final da secção anterior tínhamos o desejo de restringir Ã de tal forma que dependesse só de 10 funções. Isto sugere, ao fim e ao cabo, que contemplemos o caso mais simples, a saber, T_{klm}=0. Esta decisão coincide, além do mais, com outro desejo que tínhamos, a saber, obter um tensor de Einstein R_{kl} simétrico. Com uma Ã simétrica, o único termo que perturba a simetria é, de (VI.2.8)

$$\frac{\partial \tilde{A}^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x^{l}} \qquad \text{(IX.1.21)}$$

Veremos, dentro de pouco, que para a afinidade de Christoffel (IX.1.13) este termo é, certamente, simétrico em k e l.

Aceitando (IX.1.13) e, portanto, (IX.1.6), alcançámos agora o ponto de vista geométrico da teoria de Einstein de 1915, conhecida como a Teoria da Relatividade Geral, e o seu estudo manter-nos ia ocupados durante vários capítulos. Inclusivamente antes de entrar em qualquer pormenor sobre ela, chegámos a dar-nos conta de que representa, <u>do ponto de vista afim, um caso muito especial, susceptível de generalizar-se em mais de que uma direcção</u>. Por outras palavras, existem mais “teorias da relatividade” além da de Einstein, baseadas nos mesmos conceitos que temos vindo a analisar.

IX.2 Alguns factos e relações importantes

Familiarizemo-nos de seguida com alguns factos e conceitos simples, todos eles girando sobre o facto (IX.1.6) de que a derivada invariante do tensor métrico (com frequência chamado tensor fundamental desta teoria) se anula.

Primeiro, segue-se que, também,

$$g^{ik}_{;l} = 0 \tag{IX.2.1}$$

Porque, a partir de

$$g_{ik}g^{il} = \delta^l_k \tag{IX.2.2}$$

Mediante diferenciação invariante:

$$g_{ik;m}g^{il} + g_{ik}g^{il}_{;m} = \delta^l_{k;m} = 0 \tag{IX.2.3}$$

Multiplicando isto por g^{ks}, encontramos

$$g^{sl}_{;m} = -g^{ks}g^{il}\,g_{ik;m} = 0 \tag{IX.2.4}$$

Como foi dito, uma densidade escalar fundamental é a raiz quadrada do determinante, $\sqrt{g}$. Que ocorre com a sua derivada invariante? Um determinante é um polinómio de todas as n^2(=16) componentes. Diferenciando-o relativamente a cada componente individual g_{ik} e recordando que o «cofactor» é gg^{ik}, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = gg^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \tag{IX.2.5}$$

Substituímos a derivada da direita pelo seu valor obtido de (IX.1.6):

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = gg^{ik}(g_{mk}\tilde{A}^m_{il} + g_{im}\tilde{A}^m_{kl}) = 2g\tilde{A}^\alpha_{\alpha l} \tag{IX.2.6}$$

e isto pode-se escrever assim

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{l}}-\sqrt{g}\,\Gamma^{\alpha}_{\alpha l}=0 \tag{IX.2.7}$$

ou então

$$\left(\sqrt{g}\right)_{;l}=0 \tag{IX.2.8}$$

A propósito agora dispomos da prova de que o tensor métrico de Einstein é simétrico. Já que o termo ostensivamente perturbador (IX.1.21) pode escrever-se agora

$$\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial x^{l}}=-\frac{\partial^{2}\log\sqrt{g}}{\partial x^{l}\partial x^{k}} \tag{IX.2.9}$$

que é simétrico. Resumindo, g_{ik}, g^{ik}, $\sqrt{g}$ têm derivadas invariantes nulas. Este facto faz de uma certa convenção sobre o «transporte» (ou a «elevação» ou «descida» de índices), uma ferramenta particularmente conveniente. Associamos com um tensor qualquer de uma descrição definida

$$T^{klm...}_{pq...} \tag{IX.2.10}$$

muitos outros (para ser precisos, $2^{s}-1$, para uma ordem s), os quais diferem de este no carácter mediante a «descida» de um ou mais superíndices e/ou a «subida» de um ou mais subíndices. O procedimento para obter estes tensores é ilustrado por

$$\begin{aligned} T^{lm...}_{kpq...}&=g_{ks}T^{slm...}_{pq...}\\ T^{klm...q}_{p...}&=g^{qs}T^{klm...}_{ps...}\end{aligned} \tag{IX.2.11}$$

A elevação e o correspondente abaixamento do mesmo índice (ou vice versa) repõem o tensor original. É claro que, ao introduzir esta convenção, tem que estabelecer-se e observar-se uma cuidadosa ordem entre todos os índices, não apenas como antes[5], entre os do mesmo carácter, já que podem mudar este último. Há que adquirir o hábito de considerar todos estes tensores associados como sendo o *mesmo* tensor. Isto é totalmente legítimo, mas, naturalmente, refere-se a um tensor fundamental definido g_{ik} dado de uma vez por todas.

De uma forma muito similar também pode associar-se um tensor qualquer com uma densidade tensorial mediante a sua multiplicação ou divisão por $\sqrt{-g}$. (à parte de excepções raras e estranhas em pontos isolados, assume-se que g é negativo e diferente de zero.)

È fácil demonstrar, ainda que mereça uma menção especial, que um par de índices mudos podem subir-se e baixar-se simultaneamente sem nenhum efeito adicional. Por exemplo, temos a identidade (segundo as nossas convenções)

$$T^{klm...}_{kq...} \equiv T^{lm...k}_{kq...} \qquad \text{(IX.2.12)}$$

Agora, estas convenções são particularmente convenientes porque os tensores fundamentais g_{ik}, g^{ik} e a $\sqrt{g}$ são seus próprios transformados paralelamente, ou, o que é o mesmo, porque têm derivada zero.

A partir da primeira maneira de expressar este facto segue-se imediatamente que as associações em questão se conservam no deslocamento paralelo. De uma utilidade ainda mais prática é a consequência de que a trasladação de índices pode efectuar-se

[5] A este propósito, note-se que o autor usou sempre a mesma regra, isto é colocou em primeiro lugar os superíndices ordenados e seguiu-os dos subíndices também ordenados. Na tradução presente isto é feito apenas no texto corrido, que não permite escrever de outra forma; quando foi usado o editor de fórmulas, que permite alinhar os índices de cima com os de baixo, escreveram-se as fórmulas de modo mais compacto. Em todo o caso o *importante* é que existe uma ordem para todos os índices e que deve ser suposta inicialmente.

«dentro do ponto e vírgula». Bastará um exemplo para aclarar este ponto. Digamos que nos dão a equação:

$$B^k_{;i} = t^k_i \qquad \text{(IX.2.13)}$$

então pode-se inferir que

$$B_{k;i} = t_{ki} \qquad \text{(IX.2.14)}$$

A razão é que

$$B_{k;i} = (g_{kl} B^l)_{;i} = g_{kl;i} B^l + g_{kl} B^l_{;i} = g_{kl} B^l_{;i} \qquad \text{(IX.2.15)}$$

Analogamente e pelas mesmas razões a «latinização» ou a «gotização», isto é, a divisão ou a multiplicação por $\sqrt{g}$, pode efectuar-se sob o ponto e vírgula.

É digno de menção que g^{ik}, ainda que definido originalmente de outra maneira, é realmente o tensor fundamental g_{ik} com seus índices subidos, exactamente à maneira da nossa convenção. Se apenas se sobe um índice

$$g^{is} g_{sk} = \delta^i_k \qquad \text{(IX.2.16)}$$

o resultado é o tensor misto unidade, *independente da métrica especial*.

Da diferença do que se haja dito especificamente sobre a relação entre g_{ik} e g^{ik}, o seguinte é destacável. Muitas vezes há que considerar uma *variação* arbitrária do tensor fundamental g_{ik}, digamos g_{ik}. Isto implica automaticamente os incrementos correspondentes g^{ik}. Agora, se tomarmos as diferenças da equação anterior, obtém-se

$$\delta g^{is} g_{sk} + g^{is} \delta g_{sk} = 0 \qquad \text{(IX.2.17)}$$

ou multiplicando por g^{kl},

$$\delta g^{il} = -g^{kl} g^{is} \delta g_{sk} \qquad \text{(IX.2.18)}$$

Poder-se-ia esperar o sinal +. De todas as formas resulta que não são g^{ik} e g^{ik} as que estão associadas, mas sim – g^{ik} e g^{ik}.

IX.3 As Coordenadas Geodésicas

Demonstrámos no capítulo VI que existe sempre um sistema de referência no qual todas as componentes de uma afinidade *simétrica* dada se anulam num dado ponto. A este caso chamamos as coordenadas geodésicas no dito ponto.

A partir de (IX.1.6) isto significa, no caso presente, que todas as derivadas $g_{ik,l}$ se anulam no dito ponto ou que a g_{ik} é estacionária ali. Frequentemente é muito conveniente particularizar por um momento num sistema de referência geodésico, porque podem descobrir-se, mediante esta grande simplificação, algumas relações independentes do sistema de referência, com um simples olhar, enquanto que não são tão patentes no sistema de referência geral. Para dar um exemplo, consideremos o tensor de Riemann-Christoffel da afinidade do símbolo de Christoffel:

$$B^{i}_{klm} = -\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix}_{,m} + \begin{Bmatrix} i \\ km \end{Bmatrix}_{,l} + \begin{Bmatrix} i \\ \alpha l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ km \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i \\ \alpha m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha \\ kl \end{Bmatrix} \qquad \text{(IX.3.1)}$$

No capítulo VI ficamos ao corrente de algumas das propriedades de simetria deste tensor de R.Ch. geral. É sempre antisimétrico no seu último par de subíndices e possui para qualquer afinidade simétrica a simetria cíclica expressada em (VI.2.7). Substituamos, agora, os símbolos de acordo com (IX.1.11) e usemos um sistema de coordenadas geodésicas, o qual faz com que se anulem todas as primeiras derivadas. Obtém-se

$$B^{i}_{klm} = \frac{1}{2} g^{is} \left(-g_{ls,k,m} + g_{kl,s,m} + g_{ms,k,l} - g_{km,l,s} \right) \qquad \text{(IX.3.2)}$$

O tensor associado totalmente covariante

$$B_{sklm} = \frac{1}{2} \left(-g_{ls,k,m} + g_{kl,s,m} + g_{ms,k,l} - g_{km,l,s} \right) \qquad \text{(IX.3.3)}$$

exibe agora duas propriedades de simetria adicionais, além das que acabámos de mencionar. Isto é além de

(i) ser simétrico no segundo par (l,m);

(ii) e de cumprir, segundo (VI.2.7)

$$B_{sklm} + B_{slmk} + B_{smkl} = 0 \qquad \text{(IX.3.4)}$$

é também

(iii) antisimétrico no primeiro par (s, k), e

(iv) simétrico relativamente á troca do par interior (k, l) entre si, acompanhada da troca do par exterior (s, m) entre si: ou por outras palavras (olhando para (i) e (iii)), uma mudança do primeiro e segundo subíndices *com* o terceiro e quarto.

Não pode encontrar-se mais nenhuma simetria independente, e *portanto não a há*. E isso porque na forma simplificada não podem cancelar-se e então teriam que aparecer, já que as quatro segundas derivadas são, obviamente, totalmente capazes de tomar qualquer valor arbitrário. Esta conclusão negativa é claramente tão importante como as positivas anteriores, ainda que, normalmente, os livros de texto não a realcem.

Contemos o número de componentes independentes do nosso tensor. Mediante (i) e (iii) devemos ter s k e l m, se a componente não é nula. Devido a que há 6 dos ditos pares de números, obtemos primeiramente 6   6=36 componentes. Entre elas há precisamente 6 onde os pares são idênticos, de tal modo que (iv) se cumpre trivialmente para elas. Para as 30 componentes restantes não é trivial, reduzindo virtualmente o seu número a 15. Deste forma, agora, ficamos com 15+6=21 componentes. Uma cuidadosa consideração da única propriedade cíclica restante (ii) mostra que o número se reduz precisamente em um, *deixando-nos com 20 componentes independentes.*

Schrödinger encontrou, de uma forma muito sua, o número de componentes do tensor de Riemann-Christoffel, tensor esse que está na base das teorias da relatividade. Será interessante referir que todos determinam as componentes do tensor depois de o estudar «matematicamente», sobretudo analisando as possíveis simetrias que lhe são características. Mas Schrödinger faz mais do que isso como por exemplo no penúltimo parágrafo deste capítulo.

X O Significado da Métrica Segundo a Teoria Especial da Relatividade

A nossa construção geométrica (um contínuo quadri-dimensional) com transformação afim e métrica serve de modelo do mundo físico real. Que interpretação física havemos de dar ao «elemento de linha» ds o invariante infinitesimal determinado para cada par de pontos vizinhos x^k e x^k+dx^k?

No princípio do capítulo IX o requisito para o invariante ds inspirou-se no desejo formal de obter para a velocidade tridimensional uma representação mais prática, tratável mediante o cálculo tensorial. A sua definição elementar mediante as componentes

$$\frac{dx^1}{dx^4}, \frac{dx^2}{dx^4}, \frac{dx^3}{dx^4} \qquad \text{(X.0.1)}$$

é de difícil manejo, já que isto não é um tensor. Não se anula em todos os sistemas de referência quando o faz num deles, e tem uma fórmula de transformação linear bastante complicada, que é *fraccionária*.

Claramente, ds deve relacionar-se com algum tipo de «distância» entre os dois pontos, os quais, não obstante, recorde-se, não são dois pontos no espaço mas dois pontos do universo (espacio-temporais), isto é, dois pontos vizinhos no espaço, contemplados em dois momentos infinitamente próximos no tempo (dx^4). Segundo um conhecido teorema algébrico, a definição métrica original de ds, a saber,

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{X.0.2}$$

pode sempre converter-se mediante uma transformação linear de dx^k com coeficientes constantes e determinante não nulo,

$$dx^k = a_i^k d\bar{x}^i \tag{X.0.3}$$

numa combinação de quadrados unicamente

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} (\pm)(d\bar{x}^k)^2 \tag{X.0.4}$$

E, naturalmente, sempre pode indicar-se uma transformação geral de coordenadas que produza esta forma num ponto particular qualquer. (Por exemplo, no ponto x^k=0, tomamos uma transformação de tal forma que *nesse ponto* tenha o desenvolvimento $x^k = a_i^k \bar{x}^i +$ potências maiores em $\bar{x}^k$). A partir do famoso teorema de Euler da «inércia das formas quadráticas» sabe-se que se os coeficientes a_k^i de (X.0.3) se limitam a ser reais, o número de sinais (–) em (X.0.4) não depende da nossa escolha, estando invariavelmente determinado pelos coeficientes originais g_{ik}. Podemos dizer mais. Recorde-se que o determinante das g_{ik}, a que temos chamado g, ao transformar-se vem multiplicado pelo quadrado do determinante dos a_k^i. De modo que se estes são reais, a paridade do número de sinais (–) em (X.0.4) está determinada pelo sinal de g, sendo o número de sinais (–) par se $g>0$ e impar se $g<0$.

Agora já que excluímos g=0 (salvo em alguns pontos isolados, totalmente excepcionais), o sinal de g nunca pode mudar e, portanto, a paridade em questão, e de aqui, o número exacto de sinais (–), nunca pode mudar, porque, obviamente, só poderia fazê-lo quando *g*=0 (os pontos isolados não importam, já que se podem evitar). Assim o número de sinais menos é o mesmo na totalidade do espaço-tempo e é um assunto importante fazer uma escolha para o nosso modelo de uma vez por todas.

A chave deste número e do significado de *ds* dá-se mediante a Teoria Especial da Relatividade. Esta Teoria parte do quotidiano sistema de coordenadas espaciais cartesiano (um sistema inercial, completamente definido, quer dizer, um sistema para o qual as leis ordinárias da mecânica se mantém pelo menos no limite das pequenas velocidades dos corpos em movimento), mais um parâmetro de tempo linear registado por um bom relógio antigo de bolso do avô. A teoria, então, contempla um grupo de certas transformações lineares homogéneas com coeficientes constantes, transformações que implicam todas as quatro coordenadas e que é razoável interpretar como: passando a outro sistema inercial que se move a velocidade de translação constante respectivamente ao primeiro. Ao denominá-lo, novamente, como sistema inercial fazemos a suposição (bem fundada) de que nele também se mantêm as leis ordinárias da mecânica no limite das velocidades que *nele* são pequenas. (A propósito, esta é a forma em que a teoria estende as leis ordinárias da mecânica às grandes velocidades. Pois a velocidade relativa dos dois sistemas de referência espaciais não é necessariamente pequena, ainda que está limitada, devido à natureza da transformação, a ser inferior à velocidade da luz.) Na realidade, o verdadeiro núcleo da teoria é que todas as leis da Natureza hão de ser as mesmas em cada sistema de referência alcançado desta maneira, incluindo, naturalmente, o sistema original do qual partimos; em princípio, não haveria diferença ou distinção entre todos estes sistemas de referência inerciais, cada um dos quais pode alcançar-se desde qualquer outro mediante uma transformação deste grupo: a denominada transformação de Lorentz. Numa palavra, assume-se que todas as leis da Natureza são invariantes nas transformações de Lorentz.

Agora, devido a que estas transformações lineares da relatividade especial implicam (precisamente como as nossas mais gerais) as quatro «coordenadas» x^1, x^2, x^3, x^4, estas podem identificar, por suposição, o mesmo ponto do universo depois da transformação, mas não tem um significado claro (do mesmo modo que não o tem no nosso caso mais geral) falar do mesmo ponto do espaço depois de uma transformação, a menos que especifiquemos também o instante de tempo no qual se contempla; tão pouco tem sentido falar do instante de tempo depois da transformação sem referir-se ao ponto do espaço donde este se contempla. O que num sistema de referência é o mesmo ponto do espaço considerado em instantes diferentes do tempo se converterá, em geral, em dois pontos distintos do espaço, contemplados em dois instantes diferentes. Também, o que num sistema de referência é o mesmo instante em dois pontos diferentes corresponderá, noutro sistema de referência, a instantes diferentes referidos a pontos distintos do espaço. Este é o estado de coisas que deu nascimento a todos os tão discutidos «paradoxos» da Teoria Especial da Relatividade; tão difícil de explicar ao não matemático, enquanto o matemático está equipado para se enfrentar com o senso comum corrente graças ao mero facto de que todas as quatro coordenadas estão implicadas na transformação.

A partir do que se disse há que antecipar-se que nem a distância entre dois pontos no espaço (digamos, a distância entre dois pontos em que ocorrem dois eventos bem definidos) nem o intervalo de tempo entre a ocorrência dos dois sucessos são invariantes nas transformações de Lorentz; qualquer deles poderia, inclusivamente, anular-se num sistema de referência e não o fazer em qualquer outro. Se por conveniência, tomamos que um dos dois eventos ocorre na origem e no tempo zero, e o outro no ponto x^1, x^2, x^3 e no tempo x^4, o quadrado da sua distância neste sistema de referência é dado pelo teorema de Pitágoras, assim

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 \qquad \text{(X.0.5)}$$

e o seu intervalo de tempo mediante x^4. Já que todos os sistemas de referência devem ser igualmente válidos, manter-se-iam as mesmas expressões em qualquer outro sistema de referência, só que com as $\bar{x}^k$ em lugar das x^k. Mas tão pouco é invariante. Teremos em geral

$$\begin{gathered}(\bar{x}^1)^2+(\bar{x}^2)^2+(\bar{x}^3)^2 \neq (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2, \\ \bar{x}^4 \neq x^4.\end{gathered} \qquad \text{(X.0.6)}$$

Não obstante (e este é o ponto crucial) a transformação de Lorentz caracteriza-se pelo facto de que a expressão seguinte (a qual pode, igualmente, expressar-se com o sinal oposto) seja invariante

$$-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2+(x^4)^2=-(\bar{x}^1)^2-(\bar{x}^2)^2-(\bar{x}^3)^2+(\bar{x}^4)^2 \qquad \text{(X.0.7)}$$

O que digo é que as transformações se caracterizam por esta invariância. Com efeito, isto é quase uma definição exaustiva que distingue as transformações de Lorentz entre todas as transformações lineares homogéneas de quatro coordenadas. Este estado de coisas é formalmente análogo ao caso das transformações ortogonais (rotações do sistema cartesiano) em três dimensões, as quais se caracterizam a respeito das demais transformações pela invariância da distância $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$.

Tenho todavia que comentar o «quase». Primeiramente, de entre o grupo de transformações delimitado pela invariância (X.0.7) há-as com um determinante de transformação +1 e há-as com um determinante de transformação -1. Normalmente exclui-se o último caso sobre a base de que não pode alcançar-se a partir da «transformação identidade» ($\bar{x}^k = x^k$) mediante a mudança continua dos seus coeficientes. Mesmo assim, pretende-se normalmente que os coeficientes que dão

$d\bar{x}^4 / dx^4$ sejam positivos por razões óbvias: não se deseja que o tempo cresça em direcções opostas em sistemas de referência diferentes.

Pode-se dar uma descrição formal do requisito (X.0.7) nos termos seguintes. Se escrevermos abaixo as quatro fórmulas de transformação linear e transcrevermos cada termo que contenha x^4 ou $\bar{x}^4$ assim:

$$ax^4 = (-i)a(ix^4), \ldots$$ [illegible]

noutros termos, se a considerarmos como uma transformação entre as variáveis x^1, x^2, x^3, ix^4 e as $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, i\bar{x}^4$, então, é uma transformação *ortogonal* (ou uma «rotação») em quatro dimensões mas com alguns requisitos relevantes sobre os coeficientes em ordem a serem ou bem reais ou imaginários puros.

O invariante (X.0.7) de dois pontos espaço-temporais ou «eventos pontuais», um dos quais, por simplicidade, se tornou na origem do sistema de referência quadri-dimensional, é o quadrado do intervalo temporal subtraído do quadrado da distância. Pode ser positivo ou negativo. No primeiro caso, $\bar{x}^4$ não pode anular-se nunca, e portanto, em virtude das nossas convenções sobre o determinante e o coeficiente $d\bar{x}^4 / dx^4$, não pode mudar o seu sinal na transformação de Lorentz. Ao segundo evento (o de coordenadas x^k) denomina-se *posterior* ou *anterior* relativamente ao primeiro (aquele que está na origem do referencial) conforme $x^4>0$ ou $x^4<0$. O termo «*tempo próprio*» (mais geralmente, o intervalo de tempo próprio entre dois eventos) adopta-se, neste caso, para o valor absoluto da raiz quadrada do invariante (X.0.7). Neste caso, existe um sistema de referência (alcançável mediante uma transformação de Lorentz) no qual a distância espacial entre os dois eventos se anula, ou por outras palavras, no qual se considera que os dois eventos se deram no mesmo local. É *este* o sistema de referência no qual um ponto material, que no sistema de referência original se move em linha recta, e com velocidade uniforme no intervalo de tempo $0 \to x^4$ e do ponto espacial (0,0,0) ao ponto do espaço (x^1, x^2, x^3), se considera que está em repouso todo o tempo. O tempo próprio é o intervalo de tempo entre os dois eventos que leria num seu cronómetro um «observador liliputiano[1]» movendo-se desta forma. Em vista da invariância de (X.0.7), este intervalo de tempo é o mais curto entre eles, em qualquer sistema de referência.

Voltemos ao caso de que o invariante seja negativo. Neste caso, o intervalo de tempo $\bar{x}^4$ pode anular-se e mudar de sinal na transformação de Lorentz apesar da nossa convenção sobre o determinante e o coeficiente $d\bar{x}^4 / dx^4$. A ordem temporal entre os dois eventos não se estabelece de maneira invariante. O significado do invariante é: o quadrado negativo da sua distância num sistema de referência em que os dois eventos são simultâneos. Esta é a distância mais pequena que se pode obter em qualquer sistema de referência. Não tenho conhecimento que o valor absoluto da raiz quadrada do invariante tenha recebido, neste caso, um nome tão popular como o termo de tempo próprio do caso anterior[2]. Poder-se-ia chamar-lhe a distância de simultaneidade ou, simplesmente, distância simultânea. Mas não são termos estabelecidos. Uma noção ligeiramente mais complicada teve a sua importância. Se uma vara recta de comprimento adequado se situa com seus extremos nos pontos do espaço (0,0,0) e (x^1, x^2, x^3) e se se deixa no sistema de referencia original, podemos averiguar o seu comprimento, a saber, $\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, inspeccionando as coordenadas espaciais de seus extremos, sendo indiferente, que o façam simultaneamente ou não, já

[1] Muito pequeno.
[2] Hoje alguns autores usam o termo distância própria.

que a vara está em repouso. Escolhamos fazê-lo no tempo 0 e $\bar{x}^4$, respectivamente, onde $\bar{x}^4$ se selecciona de tal maneira que noutro determinado sistema de referência, relativamente ao qual a vara está em movimento de translação uniforme, $\bar{x}^4 = 0$. É essencial que neste sistema de referência as duas inspecções se façam nele simultaneamente, se $\sqrt{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^3)^2}$ há de significar o comprimento da vara *nele*. O nosso invariante aplicado a estes dois sucessos (as duas inspecções), dá

$$-(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 = -(\bar{x}^1)^2 - (\bar{x}^2)^2 - (\bar{x}^3)^2 \qquad \text{(X.0.9)}$$

Desta igualdade, em geral

$$\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} > \sqrt{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^3)^2} \qquad \text{(X.0.10)}$$

A vara tem o comprimento máximo no sistema de referência em que ela estiver em repouso. A este chamamos-lhe, seu comprimento em repouso (*Ruhlänge*, em alemão). A contracção noutro sistema de referência (ou também: quando se tiver posto em movimento) é a famosa contracção de Lorentz-Fitzgerald. Ainda que intimamente ligada com o que eu chamo «distância simultânea» de dois eventos pontuais dados, as noções de comprimento em repouso e de contracção de Lorentz são, como eu digo, ligeiramente mais complicadas. Pois o comprimento de uma vara não se refere a um par de eventos pontuais dados, os mesmos em cada sistema de referência. Refere-se a um par de eventos pontuais dos quais um pelo menos muda de um sistema de referência para outro; a saber, as duas inspecções (simultâneas nesse sistema de referência) das coordenadas espaciais dos extremos da vara.

Continuemos investigando os dois eventos (ou pontos espaço-temporais) de coordenadas respectivamente *0, 0, 0, 0* e x^1, x^2, x^3, x^4. Teremos que considerar o caso em que o seu invariante (X.0.7) não é nem positivo nem negativo, mas sim nulo. Neste caso não poderemos reduzir a zero o intervalo de tempo permanecendo finita a distância, nem vice-versa. Que ambos sejam nulos simultaneamente não vem pugnar contra a invariância de (X.0.7), mas sim contra o facto de que a transformação seja uma correspondência biunívoca de pontos espaço-temporais. Por outro lado, considerando este caso como limite de um dos outros dois, antecipamos realmente a situação: Agora não há um limite inferior, nem para o intervalo de tempo nem para a distância no espaço. Mediante uma adequada transformação de Lorentz podemos torná-las ambas tão pequenas quanto queiramos (e isto simultaneamente, já que devem permanecer sempre iguais), mas sem *alcançar* o zero. (Mediante uma adequada transformação de Lorentz o tempo entre a emissão e a absorção de um quantum pode tornar-se tão pequena quanto se queira.)

Portanto, agora, como no primeiro caso e diferentemente do segundo caso, o sinal de x^4 é invariante e sabemos que evento é anterior. Todos os eventos temporais que compartilham com a origem ($0,0,0,0$) a relação de invariante nulo caem na variedade

$$-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2+(x^4)^2=0 \tag{X.0.11}$$

a qual é a superfície (tridimensional) de um hipercone «esférico» (com menos uma dimensão diríamos «circular») com o seu vértice na origem. Tem literalmente a mesma equação em todos os sistemas de referência. *Essa* metade na qual $x^4>0$ chama-se cone futuro («*Nachkegel*», em alemão), e a outra o cone passado («*Vorkegel*»); Todos eles relativamente à origem, o qual, sem dúvida, representa qualquer ponto espaço-temporal e foi eleito como um dos nossos dois eventos pontuais apenas por conveniência.

A característica física de um evento temporal qualquer do cone futuro é que coincide no espaço e no tempo com a chegada de um sinal de luz emitido na origem, isto é, do ponto do espaço ($0,0,0$) no instante zero. A característica física de um evento temporal qualquer do cone passado é que a origem (*0,0,0,0*) cai no seu cone futuro; por outras palavras, que o «evento da origem» é simultâneo à chegada de um sinal de luz emitida «desde esse evento pontual», no caso de que este consista na emissão de um sinal de luz.

Estas são simples consequências de

(1) a relação antes-depois, dependendo de $x^4>0$ ou $x^4<0$;

(2) a igualdade de intervalo de tempo e distância;

(3) uma pontualização que poderíamos ter feito antes, quer dizer que todas as nossas afirmações foram simplificadas tacitamente mediante a suposição de que as nossas coordenadas devem medir o tempo em tais unidades que tornem a velocidade da luz igual a um. Por exemplo quando, usamos para o tempo o segundo, teremos que medir o comprimento em «segundos-luz» (um segundo-luz = 3 10^{10}*cm*.). Ou bem, e isto é o que se prefere normalmente, se conservamos o *cm* para o comprimento, devemos usar o «centímetro-luz» para o tempo, o tempo que a luz leva a percorrer a distância de 1*cm*, isto é, 10^{-10}*s.* Creio que alguns autores chamam à última unidade um segundo-luz. Mas isto está em franca contradição com o que chamamos um ano-luz, que é uma medida de distância e não de tempo.)

O cone de luz separa nitidamente a região onde o nosso invariante (X.0.7) é positivo, isto é,

$$\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} < |x^4| \text{ (interior do cone de luz)} \qquad \text{(X.0.12)}$$

da região onde é negativo, isto é

$$\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} > |x^4| \text{ (exterior do cone de luz).} \qquad \text{(X.0.13)}$$

Ao último também se chama região de simultaneidade ou de simultaneidade virtual (tudo isto a respeito da nossa origem quadri-dimensional). A terminologia está clara desde a nossa discussão anterior. Uma direcção apontando desde a origem ao interior, denomina-se tipo tempo e quando aponta na direcção de simultaneidade, tipo espaço, porque a primeira pode eleger-se como eixo x^4 num sistema de referência de Lorentz e a última, por exemplo, como eixo x^1. Um sinal de qualquer tipo (incluindo uma partícula em movimento, uma «partícula mensageira») que procede da, ou passa através da, origem só pode alcançar pontos dentro do cone futuro ou da sua hipersuperficie. Que não possa alcançar os pontos que são definitivamente anteriores (dentro ou no cone passado) é evidente. Mas também se exclui a região de simultaneidade virtual, já que em alguns sistemas de referência estes são anteriores à origem. Ali a mensagem chegaria antes de ser enviada. Isto basta para excluir a possibilidade, não perdendo de vista o princípio da igualdade de privilégio de cada sistema de referência de Lorentz. A condição necessária e suficiente é que nenhuma partícula nem sinal possam mover-se jamais com uma velocidade superior à da luz.

Não é necessário dizer que estas consequências alcançadas aqui algo dogmaticamente na nossa breve exposição formam, de facto, parte da base em que a teoria foi construída e estão amplamente sustentadas e corroboradas por uma imensa evidência experimental.

Considerando que na Teoria da Relatividade Especial já se atribui um nível equivalente, até um certo grau, entre as coordenadas espaciais e a coordenada temporal, o desejo referido no princípio desta secção surge já na Teoria Especial: obter uma descrição da velocidade de uma partícula em movimento que esteja mais de acordo com esta atitude do que a obtida com as suas três componentes espaciais

$$\frac{dx^1}{dx^4}, \frac{dx^2}{dx^4}, \frac{dx^3}{dx^4} \tag{X.0.14}$$

Agora, se chamarmos ds^2 ao invariante (X.0.7) de dois pontos espaço-temporais vizinhos x^k e x^k+dx^k do percurso,

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \tag{X.0.15}$$

e decidirmos dar a ds (que é sempre real!) o sinal de dx^4, então as quatro componentes

$$\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds}, \frac{dx^4}{ds} \tag{X.0.16}$$

estão bem qualificadas para o nosso propósito. Em primeiro lugar, transformam-se pela transformação de Lorentz exactamente como as próprias coordenadas, já que isto se mantém, obviamente para as dx^k, e ds é um invariante. Têm um invariante de construção semelhante, que é trivialmente igual a 1:

$$-\frac{d(x^1)^2}{ds^2} - \frac{d(x^2)^2}{ds^2} - \frac{d(x^3)^2}{ds^2} + \frac{d(x^4)^2}{ds^2} = 1 \tag{X.0.17}$$

Em segundo lugar, se chamarmos, de momento, às três componentes da velocidade espacial (X.0.14), v_x, v_y, v_z e v ao seu valor absoluto, então

$$\frac{ds}{dx^4} = \sqrt{1-v^2} \tag{X.0.18}$$

e as quatro componentes (X.0.16) são

$$\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{X.0.19}$$

Portanto, no caso limite muito frequente de que a velocidade seja pequena em comparação com a velocidade da luz ($v<<1$), as três primeiras componentes diferem muito pouco, apenas em termos de segunda ordem, das componentes da velocidade espacial, e a quarta difere muito pouco da unidade.

Na Relatividade Especial, a uma disposição de quatro números que se transforma como as coordenadas é chamada quadrivector, e o quadrivector (X.0.16) é referido como a quadrivelocidade. Não obstante, a qualificação «quadri» omite-se muitas vezes se se subentende do contexto. A partir de (X.0.19) vê-se que as suas componentes não se restringem a serem menores do que 1. Excepto pela condição (condicionadas por) (X.0.17), podem ter quaisquer valores reais.

Ao fazer uso das noções da Relatividade Especial ou Restrita para interpretar fisicamente o esquema matemático da Relatividade Geral que temos estado a tratar até agora nestas páginas (e tratando-o, com efeito, apenas de um modo bem mais formal), não é demais destacar-se que a última, sob um certo ponto de vista, não é de modo algum o que o seu nome parece indicar; inclusivamente, de uma certa perspectiva, tão pouco é uma generalização, é antes uma restrição da chamada Teoria Restrita.

A sua validade restringe-se à vizinhança infinitesimal de qualquer ponto espaço-temporal (e isto, por suposição, refere-se a todo o ponto). Na prática, a região «infinitesimal» pode, com frequência, tomar-se bastante grande, se o campo gravítico nela for bastante débil e perceptivamente constante, como, por exemplo, dentro do nosso laboratório para qualquer duração de tempo.

Não obstante, é importante estabelecer que, em princípio, adoptamos o esquema da Relatividade Especial apenas num elemento de volume quadridimensional em torno de um ponto espaço-temporal, que, para essa região, pode jogar o papel que desempenha a «origem» nas nossas deliberações precedentes. As coordenadas, as distâncias, os intervalos de tempo, são as diferenciais das coordenadas ou se formam a partir das diferenciais das coordenadas apenas dentro dessa pequena região.

Uma transformação geral das coordenadas ($\bar{x}^k$ = quatro funções arbitrárias das x^k) equivale a uma transformação linear das dx^k em cada ponto espaço-temporal, e por conseguinte, vem a ser o mesmo (como veremos imediatamente), *inter alia*[3], que uma transformação de Lorentz das dx^k em cada ponto, variando de maneira contínua de um ponto a outro, de forma que possa considerar-se constante dentro de uma pequena região.

Ora bem, na realidade, a transformação das dx^k num ponto qualquer

$$d\bar{x}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} dx^l \qquad \text{(X.0.20)}$$

não é realmente uma transformação de Lorentz, é algo ligeiramente mais geral. Uma transformação de Lorentz, considerando o número de constantes ou de graus de liberdade implicado, é equivalente a uma rotação em quatro dimensões. Uma rotação em n dimensões depende de $n(n–1)/2$ 1 constantes (dando correctamente 3 para $n=$ 3, como sabemos). Para $n=$ 4, obtemos 6 como o número de constantes livres numa transformação de Lorentz. (Outra maneira de contar é: uma transformação de Lorentz equivale a uma rotação no espaço (3) mais uma velocidade arbitrária (3) do novo sistema de referência espacial relativamente ao antigo.)

Mas em (X.0.20) todos os 16 coeficientes $\partial \bar{x}^k / \partial x^l$ são arbitrários. A que equivalem os dez graus de liberdade adicionais? Nada de muito interessante do ponto de vista deste ponto espaço-temporal ou elemento de volume espaço-temporal.

---

[3] Entre outras coisas

Evitá-lo-íamos se pudéssemos. A transformação linear geral, e isto é o que é (X.0.20), inclui quatro mudanças independentes das unidades em que as coordenadas se medem em quatro direcções certas e mutuamente ortogonais[4]; isto equivale a mais uma «rotação» arbitrária (adiamos a questão de saber se é e quando o é, a última, uma transformação de Lorentz).

Isso dá conta dos 10 graus de liberdade adicionais. Efectivamente, podemos escolher a primeira das quatro direcções mutuamente ortogonais de forma totalmente arbitrária (3), depois, a segunda ortogonal a ela (2), logo, a terceira ortogonal a ambas (1), depois, escolhemos as quatro mudanças de medida (4), obtendo 10.

Temos que permitir estes dez graus de liberdade no nosso ponto espaço-temporal simplesmente porque a transformação geral de coordenadas se serve de todos os pontos espaço-temporais, e a sua forma diferencial (X.0.20), possivelmente não pode ajustar-se a uma forma mais especial com apenas 6 constantes em cada ponto espaço-temporal. E permitimo-lo precisamente porque o nosso invariante ds^2 não tem a inalterável forma (X.0.15) em cada sistema de referência

$$ds^2 = -d(x^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + d(x^4)^2 \qquad \text{(X.0.21)}$$

mas antes a forma mais geral

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \qquad \text{(X.0.22)}$$

mudando as dez funções g_{ik} com o sistema de referência.

Não pode negar-se que isto é um grande inconveniente. Pois a partir de esta forma geral não podemos distinguir, inclusivamente dentro desta pequena região, *nem*

---

[4] N.A.: Tomemos aqui, de momento, o termo ortogonal num sentido elementar. Poderá discutir-se posteriormente, pois para contar as constantes é irrelevante.

sequer relativamente ao sistema de referência que temos estado utilizando, a distância espacial e o intervalo de tempo entre os sucessos pontuais. *As coordenadas do universo gerais não são adequadas para interpretar-se fisicamente*. Se desejarmos fazê-lo, devemos reduzir (X.0.22) mediante uma transformação local, à forma (X.0.21).

Chamemos dy^k às coordenadas locais para as quais ds^2 toma esta forma estandardizada, a «*d*» só significa que são infinitesimais e não necessariamente que sejam diferenciais das funções $y^k(x^l)$. Para outro sistema de coordenadas espaço-temporais $\bar{x}^k$, sejam $d\bar{y}^k$ e têm o mesmo significado. Então, as $d\bar{y}^k$ são, via as dx^k e $d\bar{x}^k$, funções lineares das dy^k, e limita-se esta transformação linear a ser uma transformação de Lorentz, pelo menos no sentido de que

$$-(d\bar{y}^1)^2-(d\bar{y}^2)^2-(d\bar{y}^3)^2+(d\bar{y}^4)^2=-(dy^1)^2-(dy^2)^2-(dy^3)^2+(dy^4)^2 \qquad \text{(X.0.23)}$$

Podemos assegurar que isto é uma transformação de Lorentz também no sentido restrito de que o seu determinante $\left|\partial\bar{y}^k/\partial y^l\right|$ seja +1 e de que o coeficiente $\partial\bar{y}^4/\partial y^4>0$?

O primeiro pode garantir-se facilmente se acordamos de uma vez por todas que as únicas transformações espaço-temporais permitidas sejam as que têm determinante positivo $\left|\partial\bar{x}^k/\partial x^i\right|$ (um pequeno sacrifício, já que, de todas as formas, o sinal é constante) e se mantenha a mesma precaução na transformação $dx^k \to dy^k$ que produz a forma estandardizada. O segundo, o sinal positivo de $\partial\bar{y}^4/\partial y^4$, *seria* garantido se pudéssemos assegurar que também em cada sistema de referência espaço-temporal geral e em cada ponto do espaço-tempo, três dos quatro elementos de linha

$$\left.\begin{array}{llllll} (1) & (dx^1 & 0 & 0 & 0 &), \\ (2) & (\,0 & dx^2 & 0 & 0 &), \\ (3) & (\,0 & 0 & dx^3 & 0 &), \\ (4) & (\,0 & 0 & 0 & dx^4 &), \end{array}\right\} \qquad \text{(X.0.24)}$$

fossem de tipo espaço e um (o mesmo em todo o espaço-tempo) de tipo tempo. Não tenho conhecimento[5] que se tenham usado alguma vez sistemas de referência espaço-temporais que não obedeçam a este requisito. Mas não consigo ver um fundamento geral para, nem sequer uma maneira simples de, excluir o dito sistema de referência. Não é o caso de que uma vez cumprida a condição num ponto do espaço-tempo deva manter-se em todo o lado. É certo que um elemento de linha coordenado[6] pode mudar o seu carácter unicamente passando através do cone de luz. Mas, infelizmente, isto não produz uma singularidade. A forma

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - 2dx^3dx^4 \qquad \text{(X.0.25)}$$

é exactamente tão regular e tem tão bom comportamento como a forma estandardizada, na qual se converte rapidamente mediante

$$\begin{array}{ll} dy^1 = dx^1 & dy^2 = dx^2 \\ dy^3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(dx^3 + dx^4) & dy^4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(dx^3 - dx^4) \end{array} \qquad \text{(X.0.26)}$$

Sem dúvida, na primeira forma (0, 0, dx^3, 0) e (0, 0, 0, dx^4) caem sobre o cone de luz.

---

[5] N.A.: *Nota acrescentada em provas*: Ao explicar nesta pág. que não existe necessidade em que precisamente três dos quatro elementos de linha (X.0.24) sejam do tipo espaço e um do tipo tempo, eu acrescentava que não tinha conhecimento que tivessem usado alguma vez sistemas de referência espaço-temporais que não obedeçam a este requisito. Desde que isto foi escrito, Kurt Gödel proporcionou um exemplo do contrário, *Reviews of Modern Physics*, 21, 447, 1949. Gödel comunica uma solução cosmológica fascinante, de um tipo completamente novo, da teoria de Einstein de 1915. Esta solução adquire sua forma mais simples com dois dos elementos de linha coordenados tipo tempo (os outros dois tipo espaço). Na medida que posso vê-lo, neste caso não é possível encontrar um sistema de referência tal que a distribuição habitual (3+1) se mantenha *em todo o lado*. A assinatura do elemento de linha de Gödel é, por suposição, (- - -   ), tal como se requeria!

[6] Referimo-nos a um do tipo (X.0.24)

Em algum ponto do espaço-tempo próximo, dx^4 poderia ser do tipo tempo, dx^3 do tipo espaço e em algum outro ponto próximo poderia ser ao contrário. No primeiro poderíamos sentir-nos inclinados a interpretar como tempo a x^4 e no segundo a x^3. Nenhuma estaria correcta: deve produzir-se a forma estandardizada para a interpretação correcta. Isto implica, *inter alia*, que a velocidade local da luz é a mesma em todo o lado em todo o espaço-tempo, a saber, 1 nas nossas unidades. Não obstante, novamente, não devemos considerar isto como um resultado do pensamento puro: construiu-se a teoria, *inter alia*, sobre este requisito.

Não deveríamos concluir este capítulo sem indicar o ponto em que a Teoria Geral é realmente mais Geral que a Restrita. Mediante uma transformação de Lorentz podemos «transformar em zero» qualquer velocidade. Poderá fazer mais a teoria geral, já que tem eventualmente que retroceder a um sistema de referência da relatividade restrita, a partir do qual as g_{ik} locais, por assim dizer, desapareçam? Não se supõe que elas representam o campo gravítico?

Elas não, mas, como veremos de pronto, as suas primeiras derivadas. Mesmo assim veremos que também podem anular-se em qualquer ponto dado mediante uma adequada transformação *geral.* Assim, «transformamos em zero» o campo gravítico local. Não mediante um truque de magia: o significado físico é que adoptamos localmente um sistema de coordenadas espaciais que partilhe a *aceleração* que experimentaria um corpo teste no campo gravítico local.

CONCLUSÃO

O nosso trabalho teve por objectivo estudar a forma como o Cálculo Tensorial interessa nos estudos da estrutura do espaço-tempo, tal como os trabalhos de Erwin Schrödinger e até o próprio Einstein quis mostrar. Interessava-nos sobretudo destacar a necessidade de conhecer profundamente o cálculo tensorial, tal como Schrödinger fez para compreender a estrutura (matemática e geométrica) do espaço-tempo.

Nos capítulos XI e XII da obra de Schrödinger, intitulados Leis da Conservação (cap. XI) e Generalizações da Teoria de Einstein (cap. XII), são nitidamente apresentados os problemas e conceitos da Física do Espaço-Tempo, cuja resolução, na versão do autor, completamente baseada nos resultados dos capítulos anteriores se revestem por via de considerações e resultados de carácter físico - como por exemplo as leis de conservação. Estes dois últimos capítulos, e mesmo o X, têm por isso uma forte componente física, onde intervêm cordenadas generalizadas, momentos e energia e suas variações sobre superfícies de controlo etc… e a nossa intenção era bem mais modesta.

Estudar as noções básicas de cálculo tensorial - que os físicos também precisam para compreender uma estrutura quadridimensional geral, sendo a do espaço-tempo um caso particularmente importante - era a nossa intenção e, portanto, não incluímos esses dois capítulos neste nosso estudo. No entanto dada a relação entre as transformações de Lorentz e o espaço de Minkowsky entendemos incluir o nono capítulo.

Se realmente aqui se efectuou uma tradução do caminho seguido por Schrödinger, não se tratou de uma simples cópia nem tão pouco de uma extensão da visão física do cientista. Tratou-se sim de uma cuidada interpretação e análise deste livro, modificando o “pouco” que pareceu ser conveniente, sem modificar a cadeia de pensamento científica e pedagógica que o autor quis incutir.

Na posse da versão inglesa da Universidade de Cambridge, que adquiri quase no final deste trabalho, pude conferir e emendar mais alguns erros (e são bastantes para quem se inicia neste tema) que se me tornavam incompreensíveis ou mesmo errados. Acrescia-se ainda outra dificuldade: Schrödinger por razões didáticas (e/ou para evitar alguma dispersão) parece introduzir voluntariamente algumas mudanças inesperadas cujo verdadeiro conteúdo está nalguma regra ou pormenor que ele tenha entendido necessário reforçar.

Tentemos não esquecer que este nosso trabalho é um trabalho integrado num mestrado de Matemática/Educação, e daí o atrevimento de modificar por vezes a notação do grande Mestre e tentar compreender e explicar por outros termos certas passagens que Schrödinger, como todos os grandes investigadores que pensam que as suas ideias são cristalinas, talvez nem sequer tenha pensado poderem ser de interpretação difícil.

Finalmente, dada a necessidade que tive visualizar toda a obra, entendi integrar um resumo anotado (na forma de fichas) mais cuidado nos conteúdos mais básicos e que me eram desconhecidos (como o eram as densidades e o transporte paralelo).

APÊNDICE 1

Número de componentes, por tipo, de um tensor/densidade e simetria.

Sendo N a dimensão do espaço, n o número de índices e $p,q,r,\ldots$ o número de vezes que um índice aparece repetido, isto é,

$$\underbrace{abcbabd\ldots}_{n\text{ índices}}$$

Os índices a e b aparecem 2 e 3 vezes respectivamrente, enquanto os outros c e d só aparecem uma vez pelo que r =1 e s =1.

È verdade o seguinte,

1) O número de componentes de um tensor é N^n.

2) $n \le N + (p-1) + (q-1) + \ldots$

3) O número de posições dos índices que se repetem e dos índices que ocorrem só uma vez é,

$$\text{Posições para os índices que se repetem} = p+q+\ldots$$

$$\text{Posições para os índices que } não \text{ se repetem} = n - p+q+\ldots$$

4) Segue-se o cálculo do número de permutações por tipo de permutação ($N,n,p,q,\ldots$).

Indicam-se as seis etapas.

a) A escolha dos índices que vão ser usados dá origem a estas combinações,

$$C^{N}_{n-(p-1)-(q-1)-\ldots}$$

b) A escolha de todos os índices, dentro dos usados, que se repetem dá origem a estas combinações, em que o cardinal exprime o número de pares, ternos etc. com índices iguais,

$$C^{n-(p-1)-(q-1)-\ldots}_{\#\{p,q,\ldots\}}$$

c) Da escolha das $p+q+\ldots$ posições para os índices que se repetem resultam as seguintes combinações,

$$C^{n}_{p+q+\ldots}$$

d) Da escolha das posições possíveis do índice que se repete p vezes, entre as posições em que aparecem os índices repetidos, resultam as seguintes combinações,

$$C^{p+q+\ldots}_{p}$$

e) Da escolha da posição dos índices repetidos subsequentes (se os houver) entre as posições não preenchidas, em que aparecem os índices repetidos, resultam as seguintes combinações,

$$C_q^{(p+q+\ldots)-p}$$

f) Das permutações dos índices que não se repetem nos lugares que restam resultam as seguintes permutações para cada caso composto por uma das combonações de a) a d).

$$A^{n-(p+q+\ldots)}$$

Resulta então que num tensor o número de componentes é[1]:

$$C^{N}_{n-(p-1)-(q-1)-\ldots}\cdot C^{n-(p-1)-(q-1)-\ldots}_{\#\{p,q,\ldots;p>1,q>1\ldots\}}\cdot C^{n}_{p+q+\ldots}\cdot C^{p+q+\ldots}_{p}\,.$$
$$\cdot\left[\underbrace{C_q^{(p+q+\ldots)-p}\left[C_r^{(p+q+\ldots)-p-q}\left[\ldots\right]\right]}_{\text{se houver mais!}}\right]\cdot A^{n-(p+q+\ldots)}$$

É fácil construir uma tabela com o número de componentes de qualquer tensor.

Exemplo: o número de componentes de um tensor de ordem 7 num espaço de dimensão 4 com componentes tipo N, n, p, q = 4, 7, 2, 3 (conforme o exemplo acima dado) é,

$$C^{4}_{7-(2-1)-(3-1)}C_2^{7-(2-1)-(3-1)}C^{7}_{2+3}C_2^{2+3}C_3^{2+3-2}A^{7-(2+3)}=2520\,.$$

---

[1] Se houver mais índices repetidos, deve-se repetrir o procedimento dentro da chaveta, havendo o cuidado em cada caso de ir retirando a ($p+q+\ldots$) sucessivamente os lugares p, q até zero.

Num espaço de dimensão 4 e para um tensor de ordem 4, 3 e 2 só covariantes ou só contravariantes temos ao todo 256, 64 e 16 componentes, de uma forma geral diferentes, respectivamente distribuídas pelos seguintes tipos[2]:

Tensor só covariante (ou só contravariante) de ordem 4			
Número de repetições de índices		Cálculo	Nº de componentes
4 *iiii*	$p = 4$	$C^4_1 C^1_1 C^4_4 C^4_4 A^0$	4
3 *iiij*	$p = 3$	$C^4_2 C^2_1 C^4_3 C^3_3 A^1$	48
2,2 *iijj*	$p,q = 2,2$	$C^4_2 C^2_2 C^4_4 C^4_2 \underbrace{C^2_2}_{\text{òpcional}} A^0$	36
2 *iijk*	$p = 2$	$C^4_3 C^3_1 C^4_2 C^2_2 A^2$	144
Todos diferentes *ijkl*	$p,q = 0,0$ ou 1,1 (*é indiferente*)	$C^4_4 C^4_0 C^4_4 C^4_{\underset{p}{1}} C^{4-1}_{\underset{q}{1}} C^{3-1}_{\underset{r}{1}} C^{2-1}_{\underset{s}{1}} A^0$ A^4	24

Tensor só covariante (ou só contravariante) de ordem 3			
Número de repetições de índices		Cálculo	Nº de componentes
3 *iii*	$p = 3$	$C^4_1 C^1_1 C^3_3 C^3_3 A^0$	4
2 *iij*	$p = 2$	$C^4_2 C^2_1 C^3_2 C^2_2 A^1$	36
Todos diferentes *ijk*	$p,q = 0,0$ ou 1,1 (*é indiferente*)	$C^4_3 C^3_0 C^3_3 C^3_{\underset{p}{1}} C^{3-1}_{\underset{q}{1}} C^{2-1}_{\underset{r}{1}} A^0$ A^4_3	24

Tensor só covariante (ou só contravariante) de ordem 2			
Número de repetições de índices		Cálculo	Nº de componentes
2 *ii*	$p = 2$	$C^4_1 C^1_1 C^2_2 C^2_2 A^0$	4
Todos diferentes *ij*	$p,q = 0,0$ ou 1,1 (*é indiferente*)	A^4_2	12

[2] Aqui «tipo» deve-se entender como «lugar» da componente na «disposição» das componentes. Notar ainda que, para fins práticos, na nomenclatura usada neste apêndice, duas letras diferentes para índice significa que os índices são realmente diferentes. E portanto as combinações e os arranjos aqui usadas são sem repetição.

APÊNDICE 2

Relativo às páginas: 28

Prova de que só se pode garantir que uma disposição S^{kl} é um tensor se

$$S^{kl} A_l A_K \qquad (1)$$

for invariante, para um vector A arbitrário, e, se a disposição for simétrica, $S^{kl} = S^{lk}$.

Uma prova pelo método que o autor usa seria esta: procuremos uma transformação qualquer, chamemos $\bar{S}^{kl}$ às componentes ^{kl} (particulares) do transformado como se fora um tensor, e $\bar{S}'^{kl}$ a qualquer conjunto de números que compartilham com os $\bar{S}^{kl}$ a propriedade de tornar invariante a expressão (1) acima, nesta transformação, para todo o o vector não nulo A_l. Subtraindo as duas equações que exprimem que $\bar{S}^{kl}$ e $\bar{S}'^{kl}$ levam ao mesmo invariantes a (1), obtêm-se,

$$(\bar{S}^{kl} - \bar{S}'^{kl}) \bar{A}_l \bar{A}_k = 0 . \qquad (2)$$

Como as componentes do vector eram arbitrárias, o mesmo se passará para as componentes com barra, já que a fórmula de transformação (I.0.12) tem determinante não nulo. Por conseguinte, podem escolher-se vectores de tal forma que só duas componentes a l-ésima e a k-ésima de $\bar{A}$ sejam diferentes de zero. Então o produto só será nulo se

$$(\bar{S}^{kl} - S^{kl}) + (\bar{S}^{lk} - S^{lk}) = 0 \Leftrightarrow \bar{S}^{kl} + \bar{S}^{lk} - (S^{kl} + S^{lk}) = 0 \Leftrightarrow \bar{S}^{kl} + \bar{S}^{lk} = S^{kl} + S^{lk}$$

e isto quer dizer, que estes dois números particulares das disposições $\bar{S}$ e $\bar{S}$ são iguais. Mediante eleições diferentes do vector A, pode demonstrar-se o mesmo para qualquer escolha do par $\bar{S}$ e $\bar{S}$.

Fica assim demonstrado que $\bar{S}^{kl} + \bar{S}^{lk}$ é um tensor. Finalmente se

$S^{kl} = S^{lk}$ então

$$\bar{S}^{kl} = \frac{\bar{S}^{kl} + \bar{S}^{lk}}{2}.,$$

fica provada a propriedade tensorial de S^{kl}.

O que se acabou de demonstrar, poder-se-ia fazer com mais generalidade a respeito de qualquer par de índices (contra ou) covariantes de um tensor mais geral. Isto é se B for simétrico a respeito de dois índices covariantes, neste caso i e j,

$$A^{ijk\mathrm{K}}_{qrs\mathrm{K}}\ B^{p}_{ij} = C^{pk\mathrm{K}}_{qrs\mathrm{K}}$$

só se pode provar a propriedade tensorial de A,

a não ser que se saiba também a respeito da disposição A que ela é simétrica face aos mesmos índices, podendo-se, neste último caso, provar o carácter tensorial de A.

Já não será possível fazê-lo no caso da antisimetria de B a respeito de dois índices quaisquer.

A razão reside no facto de que não é possível escolher um tensor B arbitrário tal que anule *apenas* um par de índices, uma vez que ele é simétrico. Esta razão faz com que a soma expressa pelos índices mudos i e j não possua um só termo mas dois o (i e j) e o (j e i).

…/

BIBLIOGRAFIA

Tensor Calculus – Barry Spain – *Oliver and Boyd Edinburgh and London New York: Interscience Publishers, (1953)*

Aplications of Tensor Anaysis – *A. g. McConnell – Dover Publicatios, (1947)*

Space Through The Ages – Cornelius Lanczos – *Academic Press, (1970)*

A Brief on Tensor Analysis – James G. Simmonds; sec. edition – *Springer-Verlag (1991)*

Apontamentos das aulas de Geometrias não Euclidianas – Prof. Dr. António Pascoal – Universidade Portucalense (2005/2006)

Cálculo Diferencial e Integral – N. Piskounov; *(2 vols) 4ª edição - Éditions Mir Moscou (1970)*

Física Moderna – Paul A. Tipler, Ralph A. Llewellyn; 3ª *edição – Livros Técnicos e Científicos (2001)*

Space-Time Structure – Erwin Schrödinger – *Cambridge Science Classics - Cambridge UniversitY Press (1950, reprinted 1997)*

The Meaning of Relativity - Albert Einstein; *3ºed - Institute for Advqanced Study - Princeton University Press – Princeton and Oxford – (1922)*

<u>Documentação da Internet</u>

Introduction to Differential Geometry & General Relativity (lecture notes with a special guest lecture by Gregory C. Levine) – Stefan Waner – 3º printing - Departments of Mathematics and Phisics, Hofstra University (2002) – http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/diff_geom/tc.html

ANEXOS

O ponto de partida de Schrödinger

A individualidade dos pontos de um contínuo quadridimensional determina-se pelos arranjos,

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad \text{ou} \quad (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4) \ldots$$

A escolha de dois sistemas de referência deve ser tal que as quatro funções contínuas e diferenciáveis que exprimem um arranjo em relação ao outro possuam um determinante funcional que não se anule em nenhuma parte.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^2, x^3, x^4) & \bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \bar{x}^3 = \bar{x}^3(x^1, x^2, x^3, x^4) & \bar{x}^4 = \bar{x}^4(x^1, x^2, x^3, x^4) \end{array}}$$

Necessariamente, alguma propriedade (invariável) deve ter um ponto particular! Seja um número, ou um conjunto de números.

(*Todos os valores numéricos das coordenadas como a soma dos seus quadrados ou qualquer função delas mudarão...*)

Procuremos essas propriedades!

Uma propriedade que se exprima por um número chama-se Escalar ou Campo Escalar consoante nos referirmos a uma propriedade de um único ponto ou a uma propriedade de cada ponto do contínuo (em geral não uniforme).

$$\phi(x^1, x^2, x^3, x^4) = \psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4)$$

Para dois pontos quaisquer *A, B* serão também invariantes as diferenças;

$$\phi(A) - \phi(B) = \psi(A) - \psi(B)$$

e

$$d\phi = d\psi \quad (\text{ou } d\bar{\phi})$$

O gradiente de um campo escalar e as diferenciais das coordenadas são disposições das quatro quantidades $\partial\phi/\partial x^j$ e dx^j, respectivamente, que se transformam assim,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^k}=\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k} \quad \text{e} \quad d\bar{x}^k=\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^m}dx^m$$

$$d\bar{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^k}d\bar{x}^k=\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^m}}_{\substack{1(i=m)\\ 0\ (i\neq m)}}dx^m=\frac{\partial\phi}{\partial x^m}dx^m=d\phi \quad \text{(A)}$$

Estas duas entidades, que não são numericamente invariantes, exprimem algo de muito definido, independentemente do sistema de referência, e, para cada ponto.

Definição de Vector

$\bar{A}_k=\dfrac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^k}A_l$ (como o gradiente) A_l é um Vector Covariante

$\bar{B}^k=\dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^l}B^l$ (como as diferenciais totais) B^l é um Vector Contravariante

$\bar{A}_k\bar{B}^k=A_lB^l=$ Invariante (como $d\phi$) A_lB^l é um Produto Escalar ou Interno

Definição de Tensor

Dados vários vectores uns covariantes e outros contravariantes à disposição dos 4^{s+t} produtos,

$$\overbrace{A^k B^l C^m \ldots}^{s\ \text{índices}} \underbrace{G_p H_q \ldots}_{t\ \text{índices}}$$

chamamos Tensor Misto de Ordem $s+t$ e representamo-la pelo símbolo,

$$T^{klm\ldots}_{pq\ldots}$$

e, é fácil verificar que este tensor cumpre uma lei de transformação linear

(uma proporcionalidade directa);

$$\bar{T}^{klm\ldots}_{abc\ldots} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^o}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^q}\ldots\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^c}\ldots T^{opq\ldots}_{hij\ldots}$$

A ordem dos índices no símbolo $\bar{T}^{klm\ldots}_{abc\ldots}$ não é arbitrária! $\bar{T}^{lkm\ldots}_{abc\ldots}$ é outro tensor! Apesar da fórmula de transformação ser exactamente a mesma!

Em conclusão,

Tensores de ordem	
0	Escalares
1	Vectores
2	…
…	…

Operações com Tensores

Produto Tensorial

$$T^{klm\ldots}_{pq\ldots} = \overbrace{A^k B^l C^m \ldots}^{s\ \text{índices}} \underbrace{G_p H_q \ldots}_{t\ \text{índices}}$$

Da definição de tensor surge a noção de produto tensorial, produto directo ou produto externo;

$$T^{abc\ldots}_{ijk\ldots} S^{mno\ldots}_{qrs\ldots}$$

A multiplicação das componentes de dois tensores em todas as combinações é um tensor!

É curioso notar que qualquer componente de um tensor é também um tensor!

Contracção

$$\bar{A}_k \bar{B}^k = A_l B^l = \text{Invariante}$$

A noção de contracção advém do que anteriormente está definido.

$$T^{mbc\ldots}_{imk\ldots} = S^{bc\ldots}_{ik\ldots}$$

A contracção de dois índices sendo um de cada tipo conduz a um tensor de ordem duas unidades menor.

Combinação linear de tensores (adição algébrica)

$$\alpha.\overbrace{A^k B^l C^m \ldots}^{s\ \text{índices}} \underbrace{G_p H_q \ldots}_{t\ \text{índices}} + \beta.\overbrace{M^h N^i O^j \ldots}^{s\ \text{índices}} \underbrace{S_m T_n \ldots}_{t\ \text{índices}}$$

A soma ou mais geralmente uma combinação linear de tensores é um tensor se e só se os tensores forem da mesma ordem e do mesmo tipo.

A demonstração de que o resultado desta operação seja um tensor não é imediata se for usada a definição de Schrödinger, pois será necessário provar que esta expressão é factorizável num produto de vectores! (*A questão das letras escolhidas para os índices*…)

…/produto contraído

A importância do Zero!

$$\bar{T}^{klm\ldots}_{abc\ldots} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^o}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^q}\cdots\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^c}\cdots T^{opq\ldots}_{hij\ldots}$$

Da análise da fórmula de transformação de um tensor resulta:

- O Tensor Zero de qualquer tipo deve ter todas as componentes nulas! *(para que funcione como elemento absorvente no produto tensorial)*
- A definição tensorial de vector recupera a importante propriedade dos números reais (perdida com a definição elementar dos produtos interno e externo). O Zero não é factorizável. (*A não ser que um dos factores seja Zero*).
- É uma «segunda» entidade numericamente invariante «com mais de uma componente». A Primeira?

Como corolários se segue também que:

- Uma equação tensorial é invariante posto que $A^{\ldots}_{\ldots} = B^{\ldots}_{\ldots}$ então $A^{\ldots}_{\ldots} - B^{\ldots}_{\ldots}$ será o tensor zero e este é invariante!
- A simetria e a antisimetria a respeito de um par de índices são também propriedades invariantes de um tensor.

$$A^{\ldots ik\ldots}_{\ldots} = \pm A^{\ldots ki\ldots}_{\ldots} \Rightarrow \bar{A}^{\ldots ik\ldots}_{\ldots} = \pm \bar{A}^{\ldots ki\ldots}_{\ldots}$$

- Um corolário trivial: A cada par de componentes nulas de um tensor a respeito de um par de índices, correspondem quatro componentes nulas, duas na sua parte simétrica e duas na sua parte antisimétrica a respeito dos mesmos índices. mcc

$$(\forall)_{ijkmnp}\; A^{ijk}_{mnp} = A^{ijk}_{mpn} = 0 \Leftrightarrow A^{ijk}_{m\underline{np}} = 0 \wedge A^{ijk}_{m\overset{\wedge}{np}} = 0$$

$$A^{ijk}_{m\underline{np}} = 1/2(A^{ijk}_{mnp} + A^{ijk}_{mpn}) \text{ e } A^{ijk}_{m\overset{\wedge}{np}} = 1/2(A^{ijk}_{mnp} - A^{ijk}_{mpn})$$

.../ produto contraído

Teorema (Produto Interno ou Produto Contraído e Lei do Quociente)

$$T^{klm\ldots}_{pq\ldots} = \overbrace{A^k B^l C^m \ldots}^{s\ \text{índices}} \underbrace{G_p H_q \ldots}_{t\ \text{índices}}$$

O produto (contraído) de um tensor por *s* vectores contravariantes e *t* vectores covariantes arbitrários - que é um número, tendo acabado com todos os índices - é um invariante:

(e a recíproca também é verdadeira!)

$$S^{kl\ldots}_{pq\ldots}\ \text{é Tensor} \Leftrightarrow S^{kl\ldots}_{pq\ldots} A_k B_l \ldots F^p G^q \ldots\ \text{é Invariante}\ \forall_{A_k B_l \ldots F^p G^q \ldots}$$

Schrödinger não se refere à Lei do Quociente na sua forma mais geral, mas ilustra-a com alguns corolários...

...corolários

$$S^{kl}\ \text{é Tensor} \Leftrightarrow S^{kl} A_k\ \text{é Vector Contravariante}\ \forall_{A_k}$$

Mas atenção os vectores $A, B, \ldots$ devem ser totalmente arbitrários! Isto é:

$$S^{kl}\ \text{é Tensor} \Rightarrow S^{kl} A_k A_l\ \text{é Invariante}\ \forall_A$$

a condição necessária (lado direito da implicação anterior) não é suficiente!

$$\forall_A\ S^{kl} A_k A_l\ \text{é Invariante} \Rightarrow \left(S^{kl} + S^{lk}\right)\ \text{é Tensor}$$

$$\left(\forall_A\ S^{kl} A_k A_l\ \text{é Invariante}\right) \wedge \left(S^{kl} = S^{lk}\right) \Rightarrow S^{kl}\ \text{é Tensor}$$

Tensor misto unitário

$$d\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial x'^k} dx'^k = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \overbrace{\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}}_{\substack{1 (i=m) \\ 0\ (i\neq m)}}}^{\delta^i_m} dx^m = \frac{\partial\phi}{\partial x^m} dx^m = d\phi$$

O carácter tensorial da disposição dos 16 números que constituem o símbolo de Kronnecker,

$$\delta^i_k = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq k \\ 1 \text{ se } i = k \end{cases}$$

está patente na expressão onde para qualquer par de vectores num ponto,

$$\forall_{A,B} \quad \delta^i_k A_i B^k = A_k B_k \text{ é Invariante } \Leftrightarrow \delta^i_k \text{ é Tensor}$$

E está escrito correctamente…

Schrödinger acaba o capítulo onde o começou (observe-se (A)) :

$$\delta^i_m = \frac{\partial x^i}{\partial x^m} = \begin{cases} 1 & i = m \\ 0 & i \neq m \end{cases}$$

- É uma das escassíssimas entidades numericamente invariantes «com mais de uma componente» (nas palavras de Schrödinger e de facto, esta é a segunda - ou a primeira não trivial - que apresenta).

Análise Tensorial

$$\bar{T}^{klm...}_{abc...} = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_o}\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_p}\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_q}...\frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_a}\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_b}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_c}...T^{opq...}_{hij...}$$

Na secção consignada à álgebra tensorial a investigação da Invariância Geral permitiu concluir:

- Não nos devemos limitar à busca de «designações» invariantes. Outras entidades invariantes são importantes (proposições e condições invariantes)
- As entidades com carácter tensorial são relevantes! Pela generalidade que abarcam e pela invariância das equações entre elas.
- Posto que os tensores (de um modo geral) não são invariantes - isto é, a comparação entre eles em pontos distintos é desfeita por uma transformação – interessará o estudo de derivadas e de integrais com tensores ou entidades com carácter análogo.

Integrais

Pensemos nos integrais (um campo definido sobre alguma região) calculado sobre a uma região por suposição *fixa*.

$$\iiint\int \mathcal{L}\; dx^1dx^2dx^3dx^4 \equiv \int \mathcal{L}\; dx^4$$

Integrais deste tipo só terão interesse (e farão sentido) se … for um escalar.

Densidade Escalar

Sob uma transformação de coordenadas para que estas integrais sejam invariantes

$$\int A dx^4 = \int \bar{A}\, d\bar{x}^4$$

A invariância (mesmo quando |J|=1) do integral exige a lei de transformação:

$$\bar{A} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right| A$$

em que o jacobiano «funciona» como um factor.

A estas entidades chamaremos Densidades Escalares.

Estendendo a noção de densidade a outras densidades não escalares!

Seja um tensor antisimétrico de ordem 4, $T_{klmn} = \pm T$ (com sinal + ou segundo o sinal da permutação). Considerando a transformada de uma componente:

$$\bar{T}_{1234} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^1}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^2}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^3}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^4} T_{klmn}$$

Concluímos que *(dados os valores de T_{klmn})* é uma densidade escalar

$$\bar{T} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\right| T$$

De modo semelhante:

Sendo $G^{rstu} = \pm A$ (sendo A um escalar e tomando-se o sinal + ou segundo o sinal da permutação) ou zero, se os índices não forem todos diferentes, podemos concluir que uma forma de exprimir que A é um escalar ($\bar{A} = A$):

$$\bar{E}^{klmn} = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right| \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^u} E^{rstu}$$

(Curiosidade: esta fórmula estendida ocuparia cerca de 140.000 resmas de papel A4.)

posto que $\bar{E}^{klmn} = G^{klmn}$

Quando A=1, encontramos ε^{klmn} que é uma densidade (tal como E o é) tensorial antisimétrica contravariante de ordem 4.

v ε^{klmn} é mais uma das escassíssimas entidades numericamente invariantes com mais de uma componente. A Terceira!

Qual será a sua utilidade?

Const.	Factores (Antisimétricos)			Produtos (Antisimétricos)
	Densidade	Tensor Original		Densidade
1/8	ε^{klmn} Contravariante Ordem 4 (+/ 1)	$\phi_{kl}\phi_{mn}$	Covariante Ordem 2	$\phi_{12}\phi_{34}+\phi_{23}\phi_{14}+\phi_{31}\phi_{24} = I_2 = \sqrt{\lvert\phi_{lm}\rvert}$ Escalar
1/2		ϕ_{kl}		f^{mn} Contravariante Ordem 2

Teoremas *(formação de densidades escalares por outro caminho)*

- A raiz quadrada do determinante de qualquer tensor covariante de ordem 2 -

$$\bar{g}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^k} g_{lm}$$ - é uma Densidade Escalar, $\sqrt{g}$:

$$\sqrt{\bar{g}} = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right| \sqrt{g}$$

- Os menores normalizados de qualquer tensor covariante, g_{mk}, de ordem 2 (com $g \neq 0$) formam um tensor contravariante da mesma ordem.

(mesmo que se troquem os prefixos «co» e «contra».)

$$\boxed{g_{mk} \frac{M^{lk}}{g} = \delta^l_m \quad \{ g^{lk}} \Rightarrow \quad g^{lk}\frac{M_{mk}}{g} = \delta^l_m$$

- Estas equações são invariantes. *(Os seus primeiros membros são tensores e isso garante o carácter tensorial dos menores normalizados.)*

- Se g_{mk} for antisimétrico e sendo g o quadrado da densidade escalar, λ_2, a equação anterior (a enquadrada) escreve-se:

$$f^{lk}\phi_{mk} = \delta^l_m \lambda_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\varepsilon^{hilk}\phi_{hi}\phi_{mk} = \delta^l_m \lambda_2$$

(o produto matricial $f^{ik}\phi_{ik}$ é múltiplo da matriz unidade.)

Outras Densidades

- A partir dos seguintes tensores antisimétricos covariantes podem deduzir-se densidades antisimétricas contravariantes de ordem complementar pela multiplicação pela densidade ε

Const.	Factores (Antisimétricos)			Produtos (Antisimétricos)	
	Densidade	Tensor Original		Densidade	
1	ε^{iklm} Contravariante Ordem 4 (+/- 1)	A	Covariantes Ordem n	A^{iklm}	Contravariantes Ordem 4-n
1		A_i		A^{klm}	
1/2		A_{ik}		A^{lm}	
1/6		A_{ikl}		A^{m}	
1/24		A_{iklm}		A	

As constantes 1 a 1/24 fazem com que a densidade deduzida tenha as mesmas componentes que o tensor, só que numa designação diferente.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \phi}{\partial x^l} \quad \text{e} \quad \bar{A}_k = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} A_l$$

A derivada de uma componente tensorial (e.g. $A_{k,i}$) não tem um significado próprio (com excepção de um invariante), posto que resulta de uma diferença entre tensores em pontos diferentes!

Fórmulas de transformação para as segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\phi_{,l,m} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}\phi_{,l} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}A_{l,m} + \frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}A_l$$

- Estas fórmulas não formam um tensor
- A sua anulação não é invariante
- Qualquer tensor ou densidade tensorial, possuirá estas propriedades
- As combinações lineares das derivadas das componentes tensoriais (de tensores covariantes e antisimétricos) são tensores antisimétricos e covariantes.

	Entidades		Combinação Linear de Derivadas (*)		
	Tipo	Descrição	Descrição/Nome	Tipo / nº comp.	
1	ϕ Invariante	Ordem 0	$\phi_{,k}$ Gradiente	F_k Vector	*4*
2	$\phi_{,k}$ Vector	Gradiente Ordem 1	$\phi_{,k,i} - \phi_{,i,k} = 0$ Rotacional de Gradiente	0 T. Zero	*16(12)* $^4C_2$*=6 tn*
	A_k Vector	Ordem 1	$A_{k,i} - A_{i,k}$ Rotacional	B_{ik} Tensor	*16(12)* $^4C_2$*=6 nn*
3	$A_{k,i} - A_{i,k}$ Tensor	Rotacional Ordem 2	$(A_{k,i} - A_{i,k})_{,l} + \text{Termos cíclicos} = 0$ Divergência Cíclica (i, *k*, *l* todos diferentes)	0 T. Zero	*64(24)* $^4C_3$*=4 tn*
	ϕ_{ik} Tensor	Ordem 2	$\phi_{ik,l} + \phi_{kl,i} + \phi_{li,k}$ Divergência Cíclica (*i*, *k*, *l* todos diferentes)	F_{ikl} Tensor	64(24) *2.*$^4C_3$*= 8(4) nn*
4	A_{ikl} Tensor	Ordem 3	$\sum_{4\,parcelas} (-1)^{!iklm} A_{ikl,m}$ Cada parcela com o sinal correspondente à permutação	B_{iklm} Tensor	256(24) *P*$_3$*(ikl)= 6(1) nn*

Derivadas

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Tensores covariantes}\\ \text{antisimétricos}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Densidades contravariantes}\\ \text{antisimétricas}\end{array}\right\}$$

Esta correspondência permite escrever todas as combinações lineares de Tensores ou Densidades Antisimétricos:

	Entidades		Combinação Linear de Derivadas (1)		
	Tipo	Descrição	Descrição/Nome	Tipo / nº comp.	
1	ϕ Invariante	Ordem 0	$\phi_{,k}$ Gradiente	F_k Vector	*4*
1’	A^{klmn} Densidade	Ordem 4	$A^{klmn}_{,n}$ Divergência Tensorial	L^{klm} Densidade Tensorial	*24(4)*
2	$\phi_{,k}$ Vector	Gradiente Ordem 1	$\phi_{,k,i} - \phi_{,i,k} = 0$ Rotacional de Gradiente	0 T. Zero	*16(12)* $^4C_2$*=6 tn*
	A_k Vector	Ordem 1	$A_{k,i} - A_{i,k}$ Rotacional	B_{ik} Tensor	*16(12)* $^4C_2$*=6 nn*
2’	A^{lmn} Densidade	Ordem 3	$A^{lmn}_{,n}$ Divergência Tensorial	L^{lm} (2) Densidade Tensorial	*16(12)* *6*
3	$A_{k,i} - A_{i,k}$ Tensor	Rotacional Ordem 2	$(A_{k,i} - A_{i,k})_{,l}$ + 2 termos cíclicos = 0 Divergência Cíclica (i, *k*, *l* todos diferentes)	0 T. Zero	*64(24)* $^4C_3$*=4 tn*
	ϕ_{ik} Tensor	Ordem 2	$\phi_{ik,l} + \phi_{kl,i} + \phi_{li,k}$ Divergência Cíclica (*i*, *k*, *l* todos diferentes)	F_{ikl} Tensor	64(24) *2.*$^4C_3$*=* *8(4) nn*
3’	A^{lm} Densidade Tensorial	Ordem 2	$A^{lm}_{,m}$ Divergência Tensorial	L^{l} Densidade Vectorial	*4 nn*
4	A_{ikl} Tensor	Ordem 3	$\sum_{4\,parcelas} (-1)^{!iklm} A_{ikl,m}$ Cada parcela com o sinal correspondente à permutação	B_{iklm} Tensor	256(24) *P*$_3$*(ikl)=* *6(1) nn*
4’	A^{m} Densidade Vectorial	Ordem 1	$A^{m}_{,m}$ Divergência	L Densidade Invariante	*1 nn*

- A anulação de:

(1) o escalar é constante
(2) o vector é um gradiente
(3) e (4)) expressam-se pelas equações de Maxwell.

$$\left.\begin{aligned} rot\ H - \frac{dD}{dt} = J \\ div\ D = \rho \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial f^{ik}}{\partial x^k} = s^i \wedge \begin{cases} H \leftrightarrow f^{23}, f^{31}, f^{12} \\ D \leftrightarrow f^{41}, f^{42}, f^{43} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} rot\ E - \frac{dB}{dt} = 0 \\ div\ B = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial \phi^{ik}}{\partial x^l} + 2 \text{ termos cíclicos} = 0 \wedge \begin{cases} B \leftrightarrow \phi^{23}, \phi^{31}, \phi^{12} \\ E \leftrightarrow \phi^{14}, \phi^{24}, \phi^{34} \end{cases}$$

(não é possível condensar HD com EB num só campo tensorial)
(4') a corrente U^k não tem fontes.

- Quando é que um campo vectorial pode ser considerado constante?

Ainda não temos resposta, posto que $A_{k,i} = 0$ não é uma propriedade independente do SR.

Voltemos às derivadas.

A Variedade Afimmente Conexa

Derivadas Invariantes

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} = \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}}_{\text{Z}} A_{l,m} + \underbrace{\frac{\partial^2 x_l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}}_{\text{S}} A_l$$

Quando de uma forma invariante varia um tensor de um ponto a outro?

Esta fórmula mostra que a derivada não forma um tensor porque as suas componentes não se anulam em todos os SR quando se anulam num particular.

Provisoriamente, admitamos que um vector A_l é considerado constante se num SRO(original) se anulam as suas derivadas: $A_{l,m}=0$.

Para exprimir num SR arbitrário o facto das derivadas se anularem no SRO escrevemos: *(a azul o A_l está expresso no sistema de referência com barra)*

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} - \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i}}_{\bar{\Gamma}^n_{ki}} \bar{A}_n = 0$$

Estas equações levam-nos a concluir, contra a ideia de invariância geral, que alguns SR se privilegiam face a todos os outros. Porque, sendo a transformação arbitrária:

- Particularizando para transformação identidade todas as componentes $^{n}{}_{ki}$ se anulam.
- E o mesmo se passará em todos os SR que se obtêm por transformações puramente lineares a partir do SRO já que as segundas derivadas serão nulas.

O conceito de Transformação Afim

Não definiremos as `s mediante a estipulação de que se anulem num sistema de referência particular e de que venham dadas por $\bar{\Gamma}^n_{ki}$ em qualquer outro. Considerá-las-emos como «algo mais geral»; uma disposição de funções às quais:

(a)se podem atribuir valores arbitrários num sistema de referência particular

(b) seja aplicada uma lei de transformação tal, que faça com que o membro esquerdo da equação seja um tensor (*a Derivada Invariante de A_k relativa à afinidade*):

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \Gamma^n_{ki} A_n = A_{k;i}$$

Conclui-se por (b) que o termo adicional S que resulta da transformação da derivada do vector deve aparecer, na fórmula de transformação das `s, adicionado á parte que se transforma como um tensor! Isto é, a fórmula de transformação deve ser:

$$\bar{\Gamma}^n_{ki} = \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^l_{rs}}_{\text{Parte homogénea}} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}$$

$$\bar\Gamma^n_{ki} = \underbrace{\frac{\partial \bar x^n}{\partial x^l}\frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar x^k}\Gamma^l_{rs}}_{\text{Parte homogénea}} + \frac{\partial \bar x^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar x^i \partial \bar x^k}$$

Analisando a forma como se transforma uma afinidade.

- O termo adicional não homogéneo é
  - independente das `s è o mesmo para qualquer afinidade só depende da relação entre os SR's
  - simétrico em *ki*
- A fórmula de transformação de uma afinidade
  - é simétrica em *ki*
  - mostra que a simetria de uma afinidade é uma propriedade invariante

$$\Gamma^l_{rs} = \Gamma^l_{sr} \Rightarrow \bar\Gamma^n_{ki} = \bar\Gamma^n_{ik}$$

  - mostra que a antisimetria de uma afinidade não é uma propriedade invariante (E num tensor é!)

$$\Gamma^l_{sr} = -\Gamma^l_{rs} \not\Rightarrow \bar\Gamma^n_{ik} = -\bar\Gamma^n_{ki}$$

  - mostra que a parte antisimétrica de uma afinidade simétrica, $\frac{1}{2}\left(\Gamma^n_{ik} - \Gamma^n_{ki}\right)$ é um tensor,3 posto que a parte não homogénea desaparece.
  - mostra que a diferença de duas afinidades é um tensor,3
  - revela que a soma de uma afinidade e de um tensor,3 é uma afinidade.
  - revela que a variação infinitesimal, , de uma afinidade é um tensor,3
  - a soma ou mais geralmente uma combinação linear de afinidades é uma afinidade se e só $_i$ for 1
- À semelhança dos tensores qualquer afinidade (*Schrödinger limita às assimétricas*) pode ser decomposta numa afinidade simétrica e num tensor antisimétrico.

$$\Gamma^n_{ik} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^n_{ik} + \Gamma^n_{ki}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\Gamma^n_{ik} - \Gamma^n_{ki}\right)}_{\text{Tensor}}$$

- As afinidades são um segundo (ou terceiro) tipo de entidades relevantes, juntamente com os tensores e as densidades tensoriais.

$$\frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \Gamma^n_{ki} A_n = A_{k;i}$$

Vimos que a Derivada Invariante de um vector covariante é um tensor *(Foi este o caminho escolhido por Schrödinger para a definição de derivada invariante e de afinidade.)*

É possível, mas não obrigatório, generalizarmos a definição de Derivadas Covariantes seguindo três princípios guia:

- vistas como um campo, δ^l_k e ε^{klmn} (que são numericamente invariantes) devem ter derivadas invariantes nulas a respeito de qualquer afinidade. *(São-no, tanto de ponto a ponto como de referencial a referencial.)*

  (Schrödinger demonstra a primeira afirmação partindo do 3º princípio)

$$\delta^l_{k;j} = 0 \text{ e } \varepsilon^{klmn}_{;j} = 0$$

- para um invariante as derivadas deveriam coincidir

$$\phi_{;i} = \phi_{,i}$$

- A regra de derivação ordinária de um produto deve ser mantida independentemente dos factores (tensores, densidades ou ambos).

Das seguintes três igualdades $A_k B^k = \phi;\ T^{kl...}_{pq...} A_k B_l \text{L}\ F^p G^q \text{L}$ e $\mathrm{U} = \mathrm{T} \cdot T^{\text{L}}_{\text{L}}$ se pode concluir que as seguintes derivadas invariantes são tensores (ou densidades):

$$B^k_{;i} = B^k_{,i} + B^n \Gamma^k_{ni} \text{ (é um tensor)}$$

$$T^{klK}_{pqK\ ;i} = T^{klK}_{pqK\ ,i} + T^{nlK}_{pqK} \Gamma^k_{ni} + T^{knK}_{pqK} \Gamma^l_{ni} + \ldots - T^{klK}_{nqK} \Gamma^n_{pi} - T^{klK}_{pnK} \Gamma^n_{qi} - \ldots$$

$$\mathrm{U}^{klK}_{pqK\ ;i} = \mathrm{U}^{klK}_{pqK\ ,i} + \mathrm{U}^{nlK}_{pqK} \Gamma^k_{ni} + \mathrm{U}^{knK}_{pqK} \Gamma^l_{ni} + \ldots - \mathrm{U}^{klK}_{nqK} \Gamma^n_{pi} - \mathrm{U}^{klK}_{pnK} \Gamma^n_{qi} - \ldots - \mathrm{U}^{klK}_{pqK} \Gamma^r_{ri}$$

Analisemos algumas relações entre estas derivadas e as derivadas ordinárias.

$$A_{k;i} = A_{k,i} - A_n \Gamma^n_{ki}$$

$$T_{pq\kappa\,;i} = T_{pq\kappa\,,i} - T_{nq\kappa}\,.\Gamma^n_{pi} - T_{pn\kappa}\,\Gamma^n_{qi} - \ldots$$

Como algumas combinações das derivadas ordinárias eram Tensores (densidades) será que essas combinações agora com as derivadas invariantes serão os MESMOS Tensores (densidades)?

- No caso 1, do gradiente é $\phi_{,i} = \phi_{;i}$ é o mesmo tensor.
- No caso 2, do rotacional $A_{k;i} - A_{i;k} = A_{k,i} - A_{i,k} - A_n \left(\Gamma^n_{ki} - \Gamma^n_{ik}\right)$ só o será se a afinidade for SIMÉTRICA.
- Com as divergências cíclicas: casos 3 - $\underbrace{(A_{k;i} + A_{i;k})_{;l} + \ldots}_{3\ \text{termos cíclicos}} = 0$, $\phi_{ik;l} + \phi_{kl;i} + \phi_{li;k}$ e caso 4 - $\sum\limits_{4\,parcelas} (-1)^{!iklm} A_{ikl;m}$ a prova é análoga:

$$\left.\begin{array}{l} A_{ik;l} = A_{ik,l} - A_{nk}\Gamma^n_{il} - A_{in}\;{}^{n}_{kl} \\ A_{li;k} = A_{li,k} - A_{ni}\;{}^{n}_{lk} - A_{ln}\;{}^{n}_{ik} \\ A_{kl;i} = A_{kl,i} - A_{nl}\;{}^{n}_{ki} - A_{kn}\;{}^{n}_{li} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{ik;l}` + A_{li;k} + A_{kl;i} = A_{ik,l} + A_{li,k} + A_{kl,i} + \\ -A_{nk}\;{}^{n}_{il}\quad{}^{n}_{li}) - A_{ni}\;{}^{n}_{lk}\quad{}^{n}_{kl}) - A_{nl}\;{}^{n}_{ki}\quad{}^{n}_{ik}) \end{array}$$

$$\mathrm{A}^{k}_{;k} = \mathrm{A}^{k}_{,k}$$

Para calcular o integral:

$$I = \int \left(A^{L}_{L}\right)\left(B^{L}_{L}\right)_{;k} dx^4 \quad \text{com} \quad A^{L}_{L} B^{L}_{L} = A^{k}$$

podemos resolver, com grande simplificação de cálculos, os seguintes dois integrais e como o primeiro se reduz a um integral sobre uma superfície tridimensional, pode tornar-se nulo (como por exemplo no cálculo variacional):

$$I = \underbrace{\int \mathrm{A}^{k}_{,k} dx^4}_{\substack{\text{quando não}\\ \text{haja fontes}\\ \text{será nulo}}} - \int A^{L}_{L}{}_{;k} B^{L}_{L} \, dx^4$$

$$T^{kl\mathrm{K}}_{pq\mathrm{K}\;;i} = T^{kl\mathrm{K}}_{pq\mathrm{K}\;,i} + T^{nl\mathrm{K}}_{pq\mathrm{K}}\,\Gamma^{k}_{ni} + T^{kn\mathrm{K}}_{pq\mathrm{K}}\,\Gamma^{l}_{ni} + \ldots - T^{kl\mathrm{K}}_{nq\mathrm{K}}\,\Gamma^{n}_{pi} - T^{kl\mathrm{K}}_{pn\mathrm{K}}\,\Gamma^{n}_{qi} - \ldots$$

As derivadas invariantes (relativas a uma afinidade) podem substituir-se por derivadas ordinárias sempre que todas as componentes de essa afinidade sejam zero.

$$\bar{\Gamma}^{n}_{ki} = \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^{l}_{rs} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}$$

Tendo em vista a invariância geral, será interessante procurar-se um SR em que todas as Ã's se anulem num ponto (seja a origem por simplicidade).

Se escolhermos um SR, nesse ponto, de tal modo tal que a transformação inversa seja,

$$x^k = \bar{x}^k + \frac{1}{2} a^k_{lm}\bar{x}^l \bar{x}^m + \mathrm{L} \quad \text{com } a^k_{lm} = a^k_{ml}$$

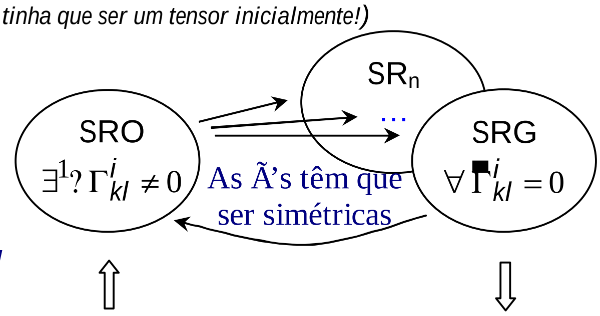
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} = \frac{\partial x^k}{\partial x^l} = \delta^k_l \wedge \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial x^k}{\partial x^l} = \delta^k_l \wedge \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m} = a^k_{lm} \right)_{\bar{x}^k = x^k = 0}$$

Asseguraremos que $\bar{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + a^i_{kl} = 0$ se $a^i_{kl} = -\left(\Gamma^i_{kl}\right)_{\text{em } x^k=0}$ Tφ / Φ5 24. 43

(*não tinha que ser um tensor inicialmente!*)

Teremos que concluir que

a afinidade deve ser simétrica!



$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{\underline{kl}} + \mathrm{A}^i_{kl} \Leftarrow A^i_{kl} = 0 \Leftarrow \bar{A}^i_{kl} = 0$$

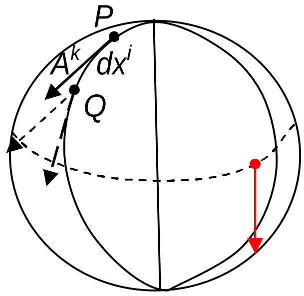
- As afinidades (nos SR's) devem ser simétricas pelo menos no ponto em causa.
- Se não são simétricas, não podem transformar-se e desaparecer, nem num ponto!
- A afirmação em «Relações entre as derivadas …» pode agora ser efectuada com uma outra mais geral: Não existem tensores não nulos com componentes que sejam combinações lineares das componentes de uma afinidade simétrica. Estas combinações lineares devem todas anular-se num SRG, pelo que, se formam um tensor em todos os SR.
- Como esta consideração se aplica a todo ponto do contínuo, então, um tensor com esta descrição será identicamente nulo.

A Noção de Transporte Paralelo e o Tensor de Curvatura

Transporte paralelo

$$\tilde{\Gamma}^n_{ki} = \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \tilde{x}^k}\Gamma^l_{rs} + \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k}$$

Outro modo de se introduzir a noção de afinidade e de derivada invariante é a seguinte:



A disposição das derivadas $\partial A^k / \partial x^i$ não constitui uma entidade invariante, pois resulta do procedimento inadmissível de se subtrair o vector A^k em P do $A^k + dA^k$ noutro ponto vizinho. *dA^k não é um vector embora dx^i o seja.*

$$dA^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^l} dx^i$$

Chamemos a um substituto em Q do vector em P o vector $A^k + \delta A^k$ e que "*jogue o papel de inalterado*". Podemos concluir que $äA^k$

- também não é um vector;
- deve depender exclusivamente dos vectores A^k e de dx^i, e essa dependência deve ser linear e homogénea;
- é a forma bilinear (com 64 coeficientes que apenas dependam das coordenadas) em que as $Ã^k_{li}$ sejam de tal modo que esta associação subsista sob uma transformação de coordenadas *(sendo esta condição necessária e suficiente para que a fórmula de transformação seja a indicada acima - razão pela qual foi usado o símbolo Ã)*

$$A^k + \delta A^k \equiv A^k - \Gamma^k_{li} A^l dx^i \quad \text{Vector Deslocado Paralelamente}$$

De modo que se este vector (*o deslocado ou transportado paralelamente*) é o que deve ser «subtraído». A derivada invariante define-se então por:

$$A^k_{;i} = \frac{\left[(A^k + dA^k) - (A^k + \delta A^k)\right]_{\text{só } dx^i \neq 0}}{dx^i} = \frac{\left[dA^k - \delta A^k\right]_{\text{só } dx^i \neq 0}}{dx^i} = A^k_{,i} + \Gamma^k_{li} A^l$$

A definição de transporte paralelo de um vector covariante de um tensor ou de uma densidade resulta da «*conveniência*» destes princípios:

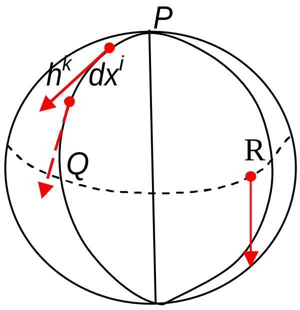
- o deslocado de um produto de vectores é o produto dos deslocados.
- um invariante (o tensor zero inc.) não se altera por deslocação tal como, as grandezas numericamente invariantes o não devem fazer.

Qualquer Equação Tensorial se preserva no transporte paralelo, mas um campo de tensores numa região não tem que coincidir com o campo formado por um tensor transportado paralelamente para cada ponto dessa região.

Como se comporta uma entidade tensorial perante o

Transporte Paralelo (*c/* $\tilde{A}$ *arbitrária*)?

E a integração ao longo de um caminho fechado?



- Se o transporte é independente do caminho a afinidade será integrável! (nem que isso suceda numa região.)
- Se não, é não integrável. (*caso com maior interesse o das variedades curvadas*)

(*Veremos que uma afinidade será ou não integrável consoante o anulamento (ou não) de um tensor,4 chamado tensor de curvatura ou de Riemman-Christoffel.*)

Afinidade integrável:

"Desdobremos" (T.P.) o tensor ao longo de um caminho para que se constitua um campo (*no caso de um vector h^k a derivada invariante será nula:*

$$h^\nu + \underbrace{dh^\nu}_{\frac{\partial h^\nu}{\partial x^\lambda}dx^\lambda} = h^\nu + \underbrace{\delta h^\nu}_{-\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}h^\alpha dx^\lambda} \quad ou$$

Ora isto corresponde a um sistema de 16 EDO não homogéneas sujeitas ás condições inicias em P (*o vector h está definido em P*).

Para conhecer as restrições que devem ser impostas à afinidade (64 componentes), teremos que usar 4 vectores $h^i{}_a$ («*a*» campos vectoriais contravariantes). Conclui-se que a integrabilidade constitui uma severa restrição, já que bastarão 4 campos vectoriais (16 funções).

$$\Gamma^\nu_{\rho\lambda} = -h_{\rho a}\frac{\partial h^\nu_a}{\partial x^\lambda}$$

Se adicionalmente a afinidade é simétrica a restrição exige 4 campos irrotacionais:

$$\frac{\partial h_{\rho a}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial h_{\lambda a}}{\partial x^\rho} = 0 \quad \text{(4 equações 1 por cada } a\text{)}$$

Construindo um SR, y^a, tal que as coordenadas sejam dadas pelo seguinte integral

(*cujo integrando, sendo irrotacional, o torna independente do caminho*):

$$y^a = \int_{P(0,0,0,0)}^{Q} h_{\rho a}dx^\rho \quad (a = 1,...,4) \quad ou \quad \frac{\partial y^a}{\partial x^\rho} = h_{\rho a}$$

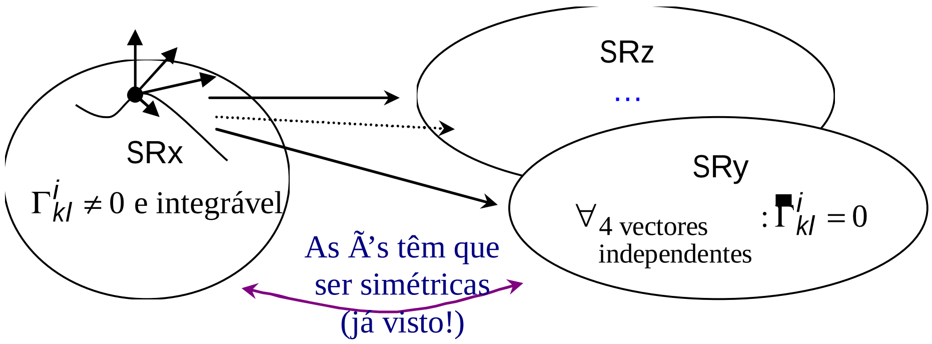
(*cont.*)

$$\blacksquare\Gamma^{n}_{ki} = \frac{\partial \blacksquare^{n}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{r}}{\partial \blacksquare^{i}}\frac{\partial x^{s}}{\partial \blacksquare^{k}}\Gamma^{l}_{rs} + \frac{\partial \blacksquare^{n}}{\partial x^{l}}\frac{\partial^{2} x^{l}}{\partial \blacksquare^{i}\partial \blacksquare^{k}}$$

Formando os menores normalizados de $\frac{\partial y^a}{\partial x^\rho} = h_{\rho a}$ ou seja, $\frac{\partial x^\rho}{\partial y^a} = h^\rho_a$, podemos caracterizar as componentes de uma afinidade integrável simétrica como:

$$\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{a}}\frac{\partial^{2} y^{a}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}}$$

- Inferimos que uma afinidade integrável simétrica poderá considerar-se como o resultado de uma transformação de uma afinidade de componentes nulas (no SRy) no SRx (e v.v.) isto é:



- Uma afinidade integrável simétrica pode sempre transformar-se em Zero.*(e v.v.)*

Embora nos possa parecer que estamos a repetir-nos, note-se que agora a simetria se exige para todo um caminho – que à partida nem sequer é uma geodésica - e não para um só ponto

- As componentes independentes (em geral 64, mas 40 no caso simétrico) de uma afinidade exprimem-se mediante 16 componentes de 4 campos vectoriais, se for integrável.

$$\frac{\partial h^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} = -\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} h^{\alpha} \rightarrow h^{\nu} = \int \frac{\partial h^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} dx^{\lambda} = \int -\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} h^{\alpha} dx^{\lambda}$$

Para a determinação de um critério integrabilidade (ou o que é o mesmo dizer: para que o transporte seja independente do caminho), será importante procurar a uma condição necessária e, sendo possível, verificar se, cumulativamente, é suficiente.

A forma de o fazer consiste na procura de duas condições necessárias que façam transparecer um critério de suficiência. Admita-se, então, que para um mesmo vector se estabelecem dois campos vectoriais (através do transporte paralelo, ao longo de um mesmo caminho, associado a duas afinidades diferentes – na verdade é a mesma afinidade só que com componentes trocadas). As segundas derivadas mistas das componentes do campo devem coincidir!

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda} h^{\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} h^{\alpha}\right)$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda} \right)}_{B^{\nu}_{\alpha\lambda\mu} = 0:\ \forall_{SR}} h^{\alpha}$$

B será um tensor de ordem 4 e será o tensor zero!

A verificação de que também é um critério de suficiência é efectuado pelo recurso ao critério atribuído a Pfaff - a diferencial $\delta h = X_{\lambda} dx^{\lambda}$ *será completa (dh) se e só se (ë aqui não é um índice contravariante exprimindo apenas uma soma):*

$$X_{\lambda} = \frac{\partial h}{\partial x^{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial X_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \Leftrightarrow -\frac{\partial X_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial X_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

Não o farei aqui! (mas convém referir, que esta prova só é efectuada, inicialmente, na vizinhança do ponto para que se determine o campo $h^{á}$*).*

- O critério de integrabilidade é então a anulação doTensor de Riemann-Christoffel

$$\underbrace{-\frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda}}_{B^{\nu}_{\alpha\lambda\mu}} = 0$$

(*Seguem-se as suas propriedades e contracções*)

$$B^i_{klm} = -\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{km} - \Gamma^i_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{kl}$$

$lmk =$ $\quad m.lk \quad -k.lm$

$mkl =$ $\quad k.ml \quad -l.mk$

$$R_{kl} = B^\beta_{kl\beta} = \underbrace{-\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x^l} + \Gamma^\beta_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{k\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{kl}}_{\text{tensor de Einstein}}$$

$$S_{lm} = B^\beta_{\beta lm} = \underbrace{-\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha m}}{\partial x^l}}_{\text{segunda contracção}}$$

- O tensor R.C. apresenta uma antisimetria natural nos dois últimos índices lm. (*4.4.6=96 componentes independentes*)
- Se a afinidade é simétrica o tensor tem uma simetria cíclica adicional,

  $B^\upsilon_{\alpha\lambda\mu} + B^\upsilon_{\lambda\mu\alpha} + B^\upsilon_{\mu\alpha\lambda} = 0$. (*4.(8+12)=80 componentes independentes*).
- O tensor RC pode contrair-se a respeito de um dos três índices covariantes (*só duas contracções têm interesse*):
  - Tensor de Einstein, a respeito de um dos últimos índices não é simétrico mesmo quando a afinidade o é (o segundo termo, e só este, estorva). A sua parte antisimétrica ½.(R_{kl} R_{lk}) reduz-se a $1/2S_{kl}$ se a afinidade for simétrica.
  - A contracção ik, mostra que o rotacional das 4 componentes $\Gamma^\alpha_{\alpha l}$ (*que não são um vector covariante!*) resulta ser um tensor.
- Os tensores de RC e de Einstein perante pequenas modificações da afinidade (*estas diferenças são tensores)* apresentam as variações:

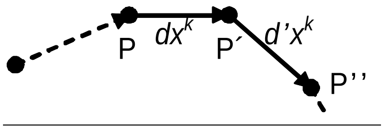
$$\delta B^i_{klm} = -\left(\delta\Gamma^i_{kl}\right)_{;m} + \left(\delta\Gamma^i_{km}\right)_{;l} + \left(\Gamma^\alpha_{ml} - \Gamma^\alpha_{lm}\right)\delta\Gamma^i_{k\alpha}$$ que contraída fica:

$$\delta R_{kl} = -\left(\delta\Gamma^\alpha_{kl}\right)_{;\alpha} + \left(\delta\Gamma^\alpha_{k\alpha}\right)_{;l} + \left(\Gamma^\alpha_{\beta l} - \Gamma^\alpha_{l\beta}\right)\delta\Gamma^\beta_{k\alpha}$$

(nota útil: se a afinidade é simétrica os terceiros termos desaparecem)

As Geodésicas de uma Transformação Afim e a Hipótese Geométrica Geral sobre a Gravitação

As Geodésicas de uma Transformação Afim



dx^k é um vector e representa o segmento orientado que une os dois pontos iniciais

Dada uma afinidade, podemos através do transporte paralelo transportar dx^k em P até P' com o resultado $d'x^k$ e assim sucessivamente (para trás ou para a frente). Se estes acréscimos forem suficientemente pequenos obtemos no limite uma curva (*que une digamos P a Q*).

Nesta curva, que é uma geodésica, os acréscimos possuem duas propriedades importantes:

- São em todo o lado tangentes á trajectória.
- São uma unidade básica para comparar comprimentos – seja o valor limite da proporção do número de passos necessários, *em dois caminhos distintos*, para que de P se atinja Q. E este é um Padrão Natural.
- Se usamos a representação paramétrica desta curva, com coordenadas em função de um parâmetro ë «*qualquer*» (no sentido de que pode ser qualquer *s*(ë), contínua e monótona). O vector contravariante $\partial x^k/\partial\lambda$ é um vector tangente que indica a direcção da curva.

Impondo então que o $\partial x^k/\partial\lambda$ num ponto vizinho e o $\partial x^k/\partial\lambda$ transportado paralelamente a esse mesmo ponto vizinho sejam proporcionais (razão M) concluímos (para um ë arbitrário):

$$\frac{dx^k}{d\lambda}-\Gamma^k_{lm}\frac{dx^l}{d\lambda}dx^m=M\left(\frac{dx^k}{d\lambda}+\frac{d^2x^k}{d\lambda^2}d\lambda\right)\Leftrightarrow\frac{d^2x^k}{d\lambda^2}+\Gamma^k_{lm}\frac{dx^l}{d\lambda}\frac{dx^m}{d\lambda}=\underbrace{\phi(\lambda)}_{\frac{1-M}{d\lambda}}\frac{dx^k}{d\lambda}$$

A pergunta que agora se impõe é a seguinte:

Como este ë foi escolhido de forma arbitrária, não pode ser tomado como a medida natural de comprimento ao longo desta geodésica. Que «características» deverá possuir uma função *s*(ë) quando tomarmos *s* por parâmetro em vez de ë?

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2}+\Gamma^k_{lm}\frac{dx^l}{d\lambda}\frac{dx^m}{d\lambda}=\phi(\lambda)\frac{dx^k}{d\lambda} \quad \text{(A)}$$

Digamos se substituirmos a dependência de ë da dependência por s teríamos

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{lm}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds}=\phi(s)\frac{dx^k}{ds}$$

Sim mas de nada serviria!

$$\frac{dx^i}{d\lambda}=\frac{dx^i}{ds}s' \quad \text{e} \quad \frac{d^2x^k}{d\lambda^2}=\frac{d\left(\frac{dx^k}{ds}s'\right)}{d\lambda}=\frac{d^2x^k}{ds^2}(s')^2+\frac{dx^k}{ds}s''$$

Obteríamos antes a equação,

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{lm}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds}=\underbrace{\frac{\phi s'-s''}{s'^2}\frac{dx^k}{ds}}_{=0\Leftrightarrow s=\int^\lambda e^{\int^\lambda \phi(u)du}d\lambda} \quad \text{(B)}$$

em que a necessidade de se anular o segundo membro se justifica pelo objectivo de que o membro esquerdo exprima que o vector $\left(\frac{dx^k}{ds}\right)_{\text{em } Q}$ seja o transportado paralelamente do vector $\left(\frac{dx^k}{ds}\right)_{\text{em } P}$ (*ibidem* para os vectores infinitesimais $(dx^k)_{\text{em } P}$ e $(dx^k)_{\text{em } Q}$, se a ds lhe dermos o mesmo valor infinitesimal em ambos os pontos)

Em conclusão:

- ds é uma medida do comprimento de uma secção infinitesimal e, ds é uma medida de uma secção finita de uma geodésica (O que é destacável posto que ainda não se havia estabelecido uma métrica, e o comprimento é um conceito métrico).
- A simetria lm em (A) ou (B) mostra que a parte antisimétrica de uma afinidade é irrelevante tanto para as geodésica como para a métrica (i.e. a adição de um tensor antisimétrico é neutra! E de um tensor simétrico?).

(Schrödinger exemplifica ainda com um adicionado simétrico, $\delta^k_l V_m+\delta^k_m V_l$, caso que diz ser único, e que embora não mude as suas geodésicas muda a métrica em muitas delas.)

A Hipótese Geométrica Geral sobre a Gravitação – A ideia subjacente

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{lm}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds}=0 \qquad \text{(A)}$$

Debruçamo-nos sobre a principal linha de pensamento que sugere o contínuo métrico (ou de Riemann) como modelo do espaço-tempo.

Nela seremos levados a considerar a gravitação de uma forma puramente geométrica.

Esta ideia da relatividade geral emergiu gradualmente (com Weyl, Eddington e Einstein) do caso especial de uma afinidade que surge a partir de uma métrica de Riemann. Emergiu apenas graças á publicidade devida ao grande êxito da Teoria de Einstein de 1915.

Agora deveremos colocar a transformação afim num primeiro plano, e chegarmos á métrica mediante um caso particular e simples desta transformação.

Observemos primeiro que:

- Se uma afinidade é integrável simétrica pode encontrar-se um sistema de coordenadas em que as geodésicas sejam linhas rectas. (um SR onde as Ã são nulas faz com que as segundas derivadas em (A) o sejam também – não existem concavidades.)
- Sabemos da mecânica que a trajectória de uma partícula livre é uma recta tanto no espaço como no tempo.
- Com Eötvös inferimos que num campo gravitacional dado, qualquer partícula partindo de um ponto dado do espaço-tempo (*isto é, a partir de um ponto do espaço e num instante de tempo dados*) numa direcção concreta do espaço-tempo (*isto é, numa direcção espacial e com uma velocidade dadas*), segue uma curva, «a sua linha do universo», que só depende do campo gravitacional. Além disso esta curva não é uma linha recta quando a referimos a um «*duvidoso*» (*não há partículas isentas de gravitação*) SR inercial; não existe um SR em que todas sejam rectas, com uma excepção que não é notável dado que é mais fictícia (campo uniforme).

A ideia subjacente está, agora, nesta analogia:

Geodésicas (Afinidade integrável) Linhas do universo de partículas livres

Geodésicas (Afinidade n/ integrável) Trajectórias de partículas num campo *g*

Poderíamos então considerar um campo gravitacional como uma propriedade puramente geométrica, isto é, uma limitação geométrica sobre o movimento das partículas, uma propriedade do contínuo espacio-temporal, em vez de algo que apenas é criado quando há um campo gravitacional.

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{lm}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds}=0 \qquad \text{(A)}$$

Comentários

- Nas considerações precedentes adoptou-se tacitamente uma generalização da ideia clássica de SR.
    - O tempo foi incluído de uma forma totalmente geral na transformação de coordenadas, enquanto que para um físico clássico;
    - Se adopta um sistema cartesiano na descrição do movimento (por exemplo a balística de um grave na terra) só tem em mente que as coordenadas se podem referir a qualquer dos dois SR (e pq um – o da terra - se move relativamente a outro – o inercial) as coordenadas de um são funções lineares especiais das coordenadas noutro com coeficientes que são alguma função do tempo.

Passámos a considerar as nossas transformações completamente gerais (só lineares na vizinhança de um ponto) com coeficientes $\partial x^i/\partial \bar{x}^k$ que são funções arbitrários das quatro coordenadas e mudam de um ponto a outro.

Sem esta generalização a ideia de Transformação Afim não poderia chegar e por isso representar o campo gravitacional.

- "Tendo adoptado a ideia geral de um SR, não desejamos privilegiar algum SR, pelo que, se as componentes da T. Afim não são todas nulas, estaremos obrigados a considera-las como representando um campo gravitacional do ponto de vista desse SR, mesmo que estejamos inclinados a considerá-lo um campo falso no caso de uma afinidade integrável, em cujo caso pode encontrar-se um SR no qual se anulam todas as componentes da afinidade. Ora, neste caso, devido á sua anulação, não poderemos desconsiderá-las no SRO, onde não se anulam, porque se o fizermos traçaremos mal as geodésicas. Tão pouco queremos fazer excepções neste caso especial"

(É difícil interpretar o texto de Schrödinger acima resumido.)

Veremos que na vizinhança de um ponto particular o campo gravitacional pode transformar-se e desaparecer.

Afinidade assimétrica

$$B^i_{klm} = -\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{km} - \Gamma^i_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{kl}$$

$$R_{kl} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x^l} + \Gamma^\beta_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{k\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{kl}$$

$$S_{lm} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha m}}{\partial x^l}$$

Afinidade simétrica

$$= -\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{km} - \Gamma^i_{\alpha m}\Gamma^\alpha_{kl}$$

$$= -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{kl}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x^l} + \Gamma^\beta_{\alpha l}\Gamma^\alpha_{k\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{kl}$$

$$= -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha l}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha m}}{\partial x^l}$$

A lei de Gravitação:

- A teoria de Newton, descreve a gravitação por um potencial, cujo gradiente é a aceleração de um corpo teste.

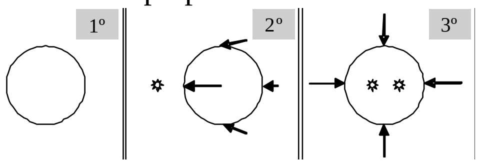
$\phi =$ Constante, onde não há campo;

$\nabla^2\phi = 0$ onde há campo, mas não há matéria gravitando;

$\nabla^2\phi = 4\pi k\rho$, onde há matéria gravitando de densidade ρ,

(A 3ª forma sendo mais geral generaliza as duas anteriores)

- Procuremos, então, descrever o campo por uma afinidade.



a) Algo menos exigente

...será um TRC contraído...

$^{i}_{kl} \quad 0)_{SRG}$ b) Deve ser simples

integrável e $R_{kl} \quad 0 (S)_{kl}$ Tφ / Φ5 16.004 Tφ 1 0 0 1 323.52

Geodésicas (rectas) c) A parte

simétrica

$B^i_{klm} \quad 0$

80 equações

$^{i}_{kl} \qquad ^{i}_{lk}$

24 equações

Os problemas:

- O tensor energia momento é contravariante e o tensor de Einstein é covariante.
- Qualquer Tensor de Energia elementar é simétrico enquanto R_{kl} não o é! (*nem mesmo com uma afinidade simétrica*)
- Como controlar as 40 funções de uma afinidade simétrica se o número das equações do campo é no máximo 16? (Desejavelmente 10, para que R_{kl} seja simétrico.)

A conclusão:

Estas dificuldades parecem mostrar que um campo gravítico puro deve considerar-se algo muito menos geral que uma afinidade simétrica de 40 componentes (*sem qualquer outra restrição*).

A Variedade metricamente conexa

Afinidades métricas

Duas circunstâncias e duas perguntas…

1. Uma transformação afim já permitiu a comparação (por meio do invariante *ds*) de «comprimentos» (melhor será dizer intervalos, 4D) ao longo de uma geodésica.

Não poderá estabelecer-se «alguma comparação» entre os intervalos a todas as geodésicas? (Sabendo-se que as *s* estão determinadas a menos de um factor *a* - para cada uma delas)

2. A teoria da Relatividade Especial fez uso do dito intervalo $ds^2=dt^2-d\sigma^2$ (*cuja generalização é o elemento de linha* $g_{ik}dx^i dx^k$)

Qual a ligação entre os dois *ds*? (*Entre a métrica primitiva, afim, e a métrica* g_{ik})

É razoável fazermos a correspondência,

$$\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \leftrightarrow \frac{dx^1}{dx^4}, \frac{dx^2}{dx^4}, \frac{dx^3}{dx^4} \rightarrow \frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds}, \frac{dx^4}{ds}$$

De modo que dx^k/ds fique bem definida por uma determinada escolha, mas arbitrária de *s*, e independente em cada geodésica. Escolha que faça com que ds para cada elemento de linha dx^k seja uma função:

- Invariante desde logo!
- Homogénea
- E de primeira ordem

Amplas possibilidades isto dá! A mais elementar: a distância "Pitagórica" ou "Cartesiana" embora generalizada para qualquer SC oblíquo.

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$$

Qual é a condição necessária e suficiente para que *ds*, assim definida, esteja de acordo com a medida afim de distância ao longo de cada geodésica?

Uma Condição Suficiente é que o invariante $g_{ik}A^i A^k$ se conserve no transporte paralelo. Isto é que a afinidade Γ^i_{kl} transfira g_{ik} sobre si mesma:

$$g_{ik;l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0$$

$$g_{ik;l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0$$ Condição Suficiente

Procuramos a $\tilde{\Gamma}$ mais geral (não simétrica) que obedece a esta C. Suficiente!

A simetria de g_{ik} permite escrever,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - g_{ml}\Gamma^m_{ki} - g_{km}\Gamma^m_{li} = 0 & +\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - g_{mi}\Gamma^m_{lk} - g_{lm}\Gamma^m_{ik} = 0 & +\dfrac{1}{2} \end{array}}$$

$$\underbrace{g^{sl}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)}_{\left\{ {s \atop ik} \right\}} - \underbrace{g^{sl}g_{lm}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{ik}\right)}_{\Gamma^m_{ki}}}_{\Gamma^s_{ki}}$$

$$\underbrace{+ g^{sl}g_{im}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{kl} - \Gamma^m_{lk}\right)}_{\Gamma^m_{\underset{\wedge}{kl}}} + g^{sl}g_{km}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{li}\right)}_{\Gamma^m_{\underset{\wedge}{il}}}}_{g^{sl}T_{lik}} = 0$$

somando a ambos os membros $\Gamma^s_{\underset{\wedge}{ik}}$ a resposta é:

$$\Gamma^s_{ik} = \underbrace{\left\{ {s \atop ik} \right\} + g^{sl}g_{im}\Gamma^m_{\underset{\wedge}{kl}} + g^{sl}g_{km}\Gamma^m_{\underset{\wedge}{il}}}_{\Gamma^s_{ik}\ \text{Simétrica em } ik} + \underbrace{\Gamma^s_{\underset{\wedge}{ik}}}_{\text{Antisimétrica}} \qquad \text{(A)}$$

Relativamente à afinidade $\tilde{\Gamma}$ (assimétrica) compatível com a métrica g_{ik} escolhida podemos concluir:

- A parte antisimétrica pode eleger-se arbitrariamente (determinando-se a parte simétrica de forma unívoca, isto é, para um g_{ik} definido)…
- O Símbolo de Christoffel constitui a única transformação (*os 3 últimos termos são tensores e não uma afinidade e T=0*) simétrica que se ajusta à condição suficiente.
- A família de afinidades simétricas $\left\{ {s \atop ik} \right\} + g^{sl}g_{im}\Gamma^m_{\underset{\wedge}{kl}} + g^{sl}g_{km}\Gamma^m_{\underset{\wedge}{il}}$ (*parametrizadas pelo tensor antisimétrico arbitrário* $\Gamma^m_{\underset{\wedge}{il}}$) permanece compatível com a métrica-g_{ik}

(*sabemos que um adicionado antisimétrico não altera o sistema de geodésicas incluindo a métrica*)

$$\Gamma^s_{ik} = \left\{ {s \atop ik} \right\} + g^{sl}\left(\underbrace{g_{im}\Gamma^m_{kl} + g_{km}\Gamma^m_{il}}_{T_{lik}=M_{ikl}-M_{kli}}\right) \quad \text{A}$$

Se rodarmos os índices e somarmos prova-se (C)

$$\Leftrightarrow$$

$$\Gamma^s_{ik} = \left\{ {s \atop ik} \right\} + g^{sl}T_{lik} \quad \text{B}$$

$$T_{lki} = T_{lik} \quad \text{C}$$

$$T_{lki} + T_{kil} + T_{ilk} = 0 \quad \text{D}$$

- O tensor arbitrário T_{lik} obedece às propriedades C e D indicadas acima e deve possuir 8 +12=20 componentes independentes.
- As equações B, C e D são equivalentes á família de afinidades simétricas, A.
- Estas equações são “ainda e apenas” a Condição Suficiente para que se ajuste uma afinidade simétrica e um tensor métrico-g_{ik} (no sentido em que o transporte paralelo da métrica g_{ik} coincida com o próprio campo g_{ik}).
- Prova-se que estas equações também são a Condição Necessária (pg. 123).
- Esta afinidade «agora métrica» depende de 10 funções g_{ik} e das 20 componentes de T , portanto 30 funções independentes.

Em resposta a uma das dificuldades anteriores “*Como controlar as 40 funções de uma afinidade simétrica se o número das equações do campo são, no máximo, 16?* “ podemos concluir: (*Desejavelmente 10, para um R_{kl} simétrico.*)

- A Afinidade de Christoffel, T_{ijk}=0, seja uma boa escolha (a mais simples afinidade métrica) já que depende exclusivamente de 10 funções g_{ik}. (*ver-se-á que satisfaz o desejo de tornar simétrico* $\tilde{A}^{\acute{a}}_{k\acute{a}} /\ x^{l}$ *e* R_{kl})

Esta é a base geométrica da Teoria da Relatividade Geral de Einstein de 1915

“ Podemos já dar-nos conta de que sob o ponto de vista afim ela é susceptível de generalizar-se em mais de que uma direcção.”

$$g_{ik;l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0$$

Na Teoria Precedente podemos identificar algumas relações notáveis e práticas:

- $g^{ik}_{;l} = 0$ que se extrai de $\left(g_{ik}g^{il}\right)_{;m} = \delta^l_{k;m} = 0$
- $\left(\sqrt{g}\right)_{;l} = 0$ que se extrai de $\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x^l} = g g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 2g\Gamma^\alpha_{\alpha l}}$ (gg^{ik} é o cofactor de g_{ik} no determinante g.)

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l} - \sqrt{g}\,\Gamma^\alpha_{\alpha l} = 0$$

- R_{kl} é simétrico que se extrai da simetria de $\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\alpha}}{\partial x^l} = -\frac{\partial^2 \log\sqrt{g}}{\partial x^l \partial x^k}$

NOTA relativa às operações com tensores

- A elevação ou descida de índices constitui uma nova operação sobre tensores.

$$T_k{}^{lm}{}_{pq} = g_{ks}T^{slm}{}_{pq}$$
$$T^{klm}{}_p{}^s = g^{qs}T^{klm}{}_{pq}$$

(*Para que a elevação ou abaixamento dos índices reponha o mesmo tensor é necessário respeitar-se a ordem dos índices, em certas situações, é mesmo conveniente marcar-se os lugares vazios com pontos indicando os lugares vagos a partir da esquerda:* $T^{kml}_{gp} = T^k{}_p{}^{ml}$)

Diferentemente de alguma simetria, deveremos associar os 2^s tensores considerando-os como «um único tensor» para um tensor fundamental, g_{ik}, dado! (são representações em espaços duais)

Uma parelha de índices permite estabelecer a curiosa identidade…

$$T^{kpr}_{lmk} \equiv T^{prk}_{klm}$$ (*mais uma vez a ordem arbitrada deve ser mantida*)

Fim deNota

- Estas capacidades dos tensores (e densidade) métricos g^{ik}, g_{ik} e $\sqrt{g}$ - porque são os seus próprios transportados paralelamente – faz com que a composição das operações de elevação, descida (1), latinização e gotização (2) (passagem de densidade a tensor e v.v.) com a derivação invariante seja comutativa.

$$(1)\quad B^k_{;i} = t^k_i \Leftrightarrow B_{k;i} = t_{ki} \qquad (2)\quad B^k_{;i} = t^k_i \Leftrightarrow \mathrm{P}^k_{;i} = \mathrm{t}^k_i$$

- O tensor fundamental g^{ik} que anteriormente havia sido definido como o menor normalizado de um tensor covariante de ordem 2 é «o mesmo que» que o tensor g_{ik}.
- Nota prática: $\delta g^{il} = -g^{kl}g^{is}\delta g_{sk}$

$$B^{i}_{klm} = -\left\{ {i \atop kl} \right\}_{,m} + \left\{ {i \atop km} \right\}_{,l} + \left\{ {i \atop \alpha l} \right\}\left\{ {\alpha \atop km} \right\} - \left\{ {i \atop \alpha m} \right\}\left\{ {\alpha \atop kl} \right\} \qquad \left\{ {i \atop kl} \right\} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\overset{p}{\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^{k}}} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^{l}} - \overset{q}{\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{s}}} \right)$$

Continuamos com a hipótese de afinidade simétrica compatível com a métrica-g_{ik} designada como teoria precedente, mas agora vamos observar a mais simples de todas, a do símbolo de Christoffel.

Que propriedades se exibem no tensor de curvatura para esta afinidade?

É relativamente simples (*não esquecendo que no SRG, as primeiras derivadas de g_{ik}, são todas nulas*) verificar que o Tensor de R.C. e o seu tensor covariante associado são:

$$B^{i}_{klm} = g^{is}.\frac{1}{2}.\underbrace{\left(-\overset{p}{g_{ls,k,m}} + \overset{q}{g_{kl,s,m}} + \overset{p}{g_{ms,k,l}} - \overset{q}{g_{km,l,s}} \right)}_{B_{sklm}}$$

- Para além das duas propriedades de simetria que este tensor já tinha a *lm e a cíclica para os índices klm*, passa a ter mais duas:
- Antisimetria em *sk* (o 1º termo troca de sinal com o 2º, e o 3º com o 4º)
- Simetria pelas trocas, simultâneas, da parelha interior e da parelha exterior (i.e: leitura da direita para a esquerda dos índices).
- Não há mais nenhuma simetria independente. Se houvesse ela deveria ter-se manifestado nesta expressão reduzida . (*i.e. nas segundas derivadas.*)
- Se as contarmos "cuidadosamente" o número de componentes independentes é 20!

$$\tilde{g}_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^k} g_{lm} \rightarrow \tilde{g} = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right|^2 g$$

Que significado físico atribuir ao *ds* quadridimensional anteriormente usado?

A definição métrica que usamos de *ds* «transforma-se» mediante uma transformação linear de dx^k com coeficientes constantes e determinante não nulo:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \underset{dx^k = a^k_i d\tilde{x}^i}{\Leftrightarrow} ds^2 = \sum_{k=1}^{n} (\pm)\left(d\tilde{x}^k\right)^2 \quad \text{(A)}$$

Na condição dos coeficientes a^k_i serem reais. Um teorema de Euler das formas quadráticas garante que o número de sinais (-) em (A) só depende dos coeficientes g_{ik}. (Obs. *o sinal de* $\tilde{g}$ e de *g , uma vez escolhidos os* g_{ik} *, não depende de qualquer transformação escolhida*). Sabemos ainda que esse número será *ímpar se g<0 e par se g>0.*

A chave deste problema que resulta na possibilidade de $ds^2<0$ *é dada pela Teoria da Relatividade Especial com a Transformação de Lorentz.*

O sinal de g (e a paridade do número de sinais – na expressão $\sum_{k=1}^{n} (\pm)\left(d\tilde{x}^k\right)^2$ *) é invariante também em todo o espaço-tempo se continuarmos a admitir que g 0 posto que sendo funções contínuas não podem mudar de sinal.*

(o que só pode ocorrer em pontos particulares, mas que podem sempre ser resolvidos mediante outras escolhas)

A Transformação de Lorentz caracteriza-se pelo facto de que a expressão seguinte seja invariante.

$$-(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 = -(\tilde{x}^1)^2 - (\tilde{x}^2)^2 - (\tilde{x}^3)^2 + (\tilde{x}^4)^2$$

(ou com sinais trocados),(formalmente é um análogo das transformações ortogonais em 3D)

$$-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2+(x^4)^2=-(\bar{x}^1)^2-(\bar{x}^2)^2-(\bar{x}^3)^2+(\bar{x}^4)^2$$

Na T.R.Especial já se atribui alguma semelhança entre as coordenadas espaciais e a temporal, pelo que, se chamarmos $ds^2=-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+(dx^4)^2$ ao invariante relativo a dois pontos espaço-temporais vizinhos, x^k e x^k+dx^k, num percurso. E, se decidirmos dar a ds (que é sempre um número real) o sinal de dx^4, as quatro componentes $\frac{dx^k}{ds}$ serão uma melhor descrição que as três componentes espaciais, $\frac{dx^1}{dx^4},\frac{dx^2}{dx^4},\frac{dx^3}{dx^4}$ porque:

- Transformam-se pela transformação de Lorentz como as coordenadas.
- Têm um invariante de construção semelhante e igual 1

$$-\frac{d(x^1)^2}{ds^2}-\frac{d(x^2)^2}{ds^2}-\frac{d(x^3)^2}{ds^2}+\frac{d(x^4)^2}{ds^2}=1$$

- E se chamarmos às 3 componentes espaciais e ao seu valor absoluto v_x, v_y, v_z e v as 4 componentes ficam:

$$\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}},\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}},\frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}},\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$d\bar{x}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} dx^l \qquad \text{(A)}$$

$$\text{(B)}\ ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \qquad ds^2 = -d(x^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + d(x^4)^2$$

Quando usámos a métrica da Relatividade Especial ou Restrita para interpretar fisicamente o esquema matemático da Relatividade Geral (cujo nome parece indicar ser esta mais geral que anterior) estabelecemos uma restrição a esta última. Na verdade a sua validade restringiu-se à vizinhança infinitesimal de qualquer ponto espaço-temporal (e isto, por suposição, refere-se a todo o ponto – que figurará como origem para todo o elemento de volume 4D).

As distâncias/intervalos de tempo   As diferenciais das coordenadas ou suas funções

Uma transformação geral de coordenadas envolve 16 coeficientes arbitrários.
Uma T. de Lorentz envolve apenas 6 - uma R 4D(6)   uma R 3D(3) e uma T(3)-.

Os 10 graus de liberdade que as distinguem dizem respeito a quatro factores de escala sobre quatro direcções mutuamente ortogonais (3+2+1 graus de liberdade).

A TG serve-se de todos os pontos espaço-temporais e a forma local (A) não tem a forma inalterável (A), mas antes a (B) - na qual as funções g_{ik}.se alteram com o SR -.

Este estado de coisas permite concluir:

- As coordenadas do universo gerais não são adequadas para que se possa fazer uma boa interpretação física – na verdade a forma geral (B) faz com que nem sequer seja possível distinguir entre dois eventos pontuais (neste SR) a distância espacial do intervalo de tempo de dois.
- Para uma boa interpretação física seremos sempre obrigados a restringir a forma (B) à (A).

Conclusão:

Sob que aspecto é a Teoria Geral da Relatividade mais Geral que a Especial?

Mediante uma transformação de Lorentz podemos transformar em Zero qualquer velocidade…

Poderá fazer mais a Teoria Geral, já que tem eventualmente que retroceder a um sistema de referência da relatividade restrita, a partir do qual as g_{ik} locais, por assim dizer, desapareçam?

As g_{ik} não! Mas as suas primeiras derivadas sim. As g_{ik} só poderiam desaparecer mediante uma adequada Transformação Geral. O campo gravítico transformar-se-ia em Zero, isto é, mediante a escolha local de coordenadas que incorporem a aceleração que um corpo experimentaria naquele campo gravítico local.

Fim de anexo