

Andreia Leite Gonçalves

Grafos: Aplicações ao Jogo

Universidade Portucalense

Porto, 2007

Trabalho realizado por
Andreia Leite Gonçalves

Grafos: Aplicações ao Jogo

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática/Educação sob a orientação do
professor Doutor António Pascoal

Universidade Portucalense

Porto, 2007

Resumo

Essencialmente este trabalho pretende fazer uma abordagem de problemas de carácter lúdico cuja resolução possa ser relacionada com a Teoria de Grafos. A Teoria de Grafos é talvez, de entre as teorias matemáticas, aquela que mais se pode usar com aplicações lúdicas, com o propósito de resolver ou compreender jogos. É uma teoria relativamente recente, nascida no século XVIII, e que entrou nos programas do ensino secundário no fim do século XX. Duas razões importantes para essa entrada: a grande aplicação prática mas também a possibilidade de introduzir os conceitos teóricos através de utilização de jogos. Assim, pretende-se com este trabalho percorrer vários jogos onde a utilização de grafos é notória. Como veremos na parte histórica, o nascimento da Teoria de Grafos deve-se a um problema sem interesse matemático, apenas a um entretenimento, o problema das pontes de Koenigsberg.

No Capítulo 1 é feita uma introdução histórica, desenvolvendo já resultados importantes que foram sendo estabelecidos durante os séculos XVIII, XIX e XX. Desde Euler, passando por Hamilton e até mais recentemente a demonstração do teorema das quatro cores por Appel e Haken. No Capítulo 2 é feito um estudo de carácter pedagógico realçando a componente didática do Jogo, didática essa que se fez questão que estivesse presente nesta tese. No capítulo 3 é então desenvolvido o aspecto matemático, neste particular a Teoria de Grafos, mediante a apresentação de estratégias para abordar alguns jogos que servem como exemplos.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Doutor António Pascoal, as sugestões que me foi dando, o apoio importante e claro o trabalho que teve em ler estas páginas.

Quem estuda matemática sabe que aprende com os professores, fica agradecida por isso, mas também quem ensina matemática sabe que aprende com as dificuldades dos alunos e também agradeço aqueles a quem ensinei nestes últimos anos.

Estou também agradecida à minha família e ao meu namorado, presentes nas ocasiões em que são precisos.

Índice

RESUMO	5
AGRADECIMENTOS	7
ÍNDICE	9
INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 1: TEORIA DE GRAFOS	13
1.1. CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS	13
1.1.1. <i>Euler</i>	13
1.1.2. <i>Vandermonde</i>	20
1.1.3. <i>Hamilton</i>	23
1.1.4. <i>Teorema das quatro cores</i>	25
1.1.5. <i>O carteiro chinês</i>	28
1.1.6. <i>O caixeiro viajante</i>	29
1.1.7. <i>Perseguições em flippers</i>	29
1.2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS	30
CAPÍTULO 2: JOGOS	33
2.1. O JOGO E O SER HUMANO	33
2.1.1. <i>O Jogo</i>	34
2.1.2. <i>Teoria dos Jogos</i>	35
2.1.3. <i>Jogos de informação perfeita e imperfeita</i>	36
2.1.4. <i>Jogos finitos e infinitos</i>	37
2.1.5. <i>Os Jogos e o número de jogadores</i>	37
2.1.6. <i>Jogos de soma zero e soma não zero</i>	38
2.1.7. <i>Os Jogos e as possibilidades de variação</i>	38
2.1.8. <i>Os Jogos e os tipos de regras</i>	39
2.1.9. <i>Jogos de acaso/deterministas</i>	39
2.1.10. <i>Análise transaccional dos Jogos</i>	40
2.2. O JOGO E A APRENDIZAGEM	40
2.2.1. <i>Jogos didáticos e não didáticos</i>	41
2.2.2. <i>O Jogo e interacção social</i>	41
2.2.3. <i>O Jogo e desenvolvimento afectivo-social</i>	42
2.2.4. <i>O Jogo e desenvolvimento cognitivo</i>	43
2.2.5. <i>Interacções e desenvolvimento afectivo-social e cognitivo</i>	43
2.2.6. <i>Representações sobre a matemática</i>	44
2.3. JOGOS DE MATRIZ.....	46

CAPÍTULO 3: ESTRATÉGIAS	49
3.1. EXEMPLOS TÍPICOS	49
3.1.1. <i>Labirinto de Hampton</i>	49
3.1.2. <i>Desenhar sem levantar o lápis:</i>	51
3.1.3. <i>O jogo do Dodecaedro</i>	55
3.1.4. <i>Coloração de Mapas</i>	63
3.2. PONG HAU KÍ.....	72
3.3. 4- PLANIFICAÇÕES DO CUBO.....	81
3.3.1. <i>1º Caso:</i>	83
3.3.2. <i>2º Caso:</i>	86
3.3.3. <i>3º Caso:</i>	88
3.3.4. <i>4º Caso:</i>	89
3.3.5. <i>5º Caso:</i>	90
3.3.6. <i>6º Caso</i>	91
CONCLUSÃO	93
BIBLIOGRAFIA	95
ÍNDICE REMISSIVO	97

Introdução

A Teoria de Grafos é talvez, de entre as teorias matemáticas, aquela que mais se pode usar com aplicações lúdicas, com o propósito de resolver ou compreender jogos. É uma teoria relativamente recente, nascida no século XVIII, e que entrou nos programas do ensino secundário no fim do século XX. Duas razões importantes para essa entrada: a grande aplicação prática mas também a possibilidade de introduzir os conceitos teóricos através de utilização de jogos. De facto, são inúmeros os exemplos de aplicação prática de grafos. Não há uma distinção clara entre o que é aplicação prática e o que não é. Quando escrevemos aplicação prática estamos a falar da resolução de problemas em áreas fora da matemática. Qualquer situação que possa ser modelada em função de estados e onde haja alteração de estados ao longo do tempo é passível de ser resolvida mediante a utilização de grafos e, na sua forma mais simples, através da procura de um caminho que simboliza essa mesma transição entre estados, como no caso dos labirintos. Muitas outras situações exigem algo mais, exige-se uma, ou várias, características a esse caminho. Por exemplo, pode-se ter associado a cada caminho um certo custo e pretender descobrir o caminho menos dispendioso, o que acontece em variados problemas de optimização, ou, podemos precisar de descobrir um caminho que passe por todas as cidades, como no caso do «problema do caixeiro viajante». Havendo uma clara tendência para a inclusão de conteúdos programáticos, nas disciplinas de Matemática, que evidenciem essa aplicação prática, a Teoria de Grafos, preenche essa característica na perfeição. Além disso, a necessidade cada vez maior de atrair a atenção dos estudantes, do ensino secundário, para os temas a serem estudados torna o carácter lúdico associado à utilização de jogos excelente para a aprendizagem do tema.

Assim, pretende-se com este trabalho percorrer vários jogos onde a utilização de grafos é notória. Como veremos na parte histórica, o nascimento da Teoria de Grafos deve-se a um problema sem interesse matemático, apenas a um entretenimento, o problema das pontes de Koenigsberg. Posteriormente, em termos cronológicos, muitas aplicações importantes houve da teoria de grafos mas também vemos que vários jogos podem ser analisados com recurso a grafos. O caso mais simples, já referido, dos labirintos onde se procura unicamente a existência de um caminho é o nosso ponto de partida no desenvolvimento de estratégias para a análise dos jogos. De facto, em vários casos, a própria representação gráfica permite encontrar mais facilmente o caminho e resolver o problema que seria mais difícil, a um humano, sem

utilização dos grafos. Neste trabalho, essa representação será muito usada mesmo para fazer referência ao grafo em causa e várias características do grafo se tornam mais claras. No entanto, para poder chegar lá teremos de ter definidos alguns conceitos. Posicionar em termos históricos o tema do nosso trabalho é o objectivo do capítulo seguinte, onde vemos já muitas conclusões válidas e de grande importância, quer teórica quer prática.

Capítulo 1: Teoria de Grafos

1.1. Considerações históricas

1.1.1. Euler

Muitos dos problemas que proporcionaram o desenvolvimento da Teoria de Grafos tiveram origem em jogos e esses jogos despertaram suficientemente o interesse dos matemáticos ao ponto de se criar uma nova teoria. Historicamente, a Teoria de Grafos nasceu de um problema, muito conhecido no século XVIII e que podemos resumir no seguinte enunciado: «Na cidade de Königsberg, na Prússia, há uma ilha, A , rodeada pelos dois braços do rio Pregel. Existem sete pontes, a, b, c, d, e, f e g que cruzam os dois braços do rio. A questão consiste em saber se uma pessoa pode realizar um passeio de tal forma que atravessasse cada uma das pontes uma só vez». Na cidade de Koenigsberg, actualmente Kaliningrado, o rio Pregel ramifica-se em torno de uma ilha, a ilha Kneiphof, e existem várias pontes a ligar as margens, como se pode ver na figura abaixo, uma gravura publicada no século XVII.

KONINGSBERGA

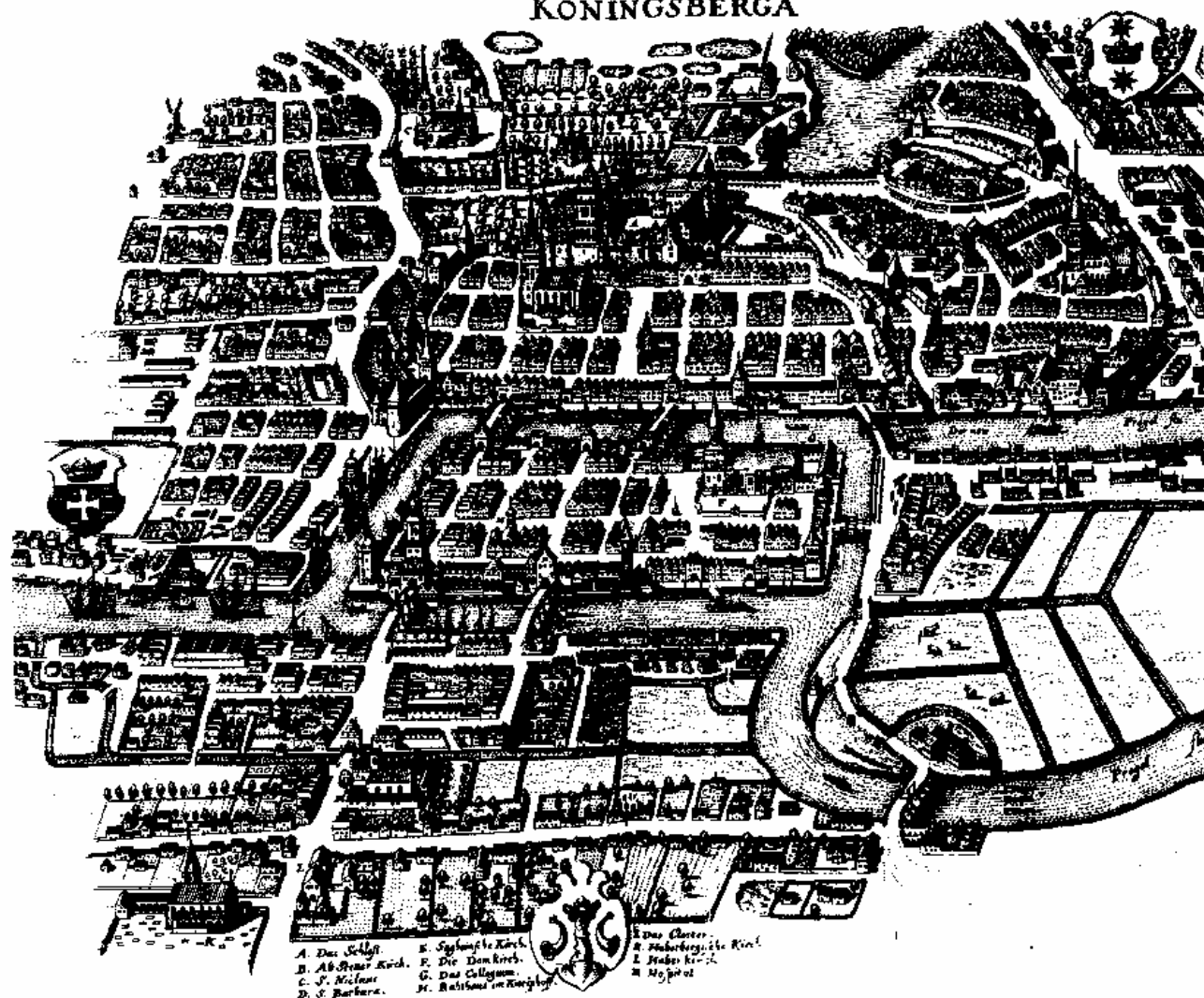


Figura 1

Consta que a população de Koenigsberg ao passear pelas pontes costumava tentar fazer um percurso que passasse pelas pontes todas mas uma única vez. Nunca ninguém o conseguiu e acreditava-se que tal não era possível. Este problema chegou até Leonard Euler (1707-1783), um matemático suíço, que se interessou pelo problema resolvendo-o e mais importante que isso, generalizando-o. O pai de Euler era um matemático mas que todavia deixou a matemática para se dedicar a assuntos religiosos e pretendia que o filho seguisse o mesmo caminho. Por isso Euler inscreveu-se na Universidade de Basileia nos curso de Teologia e de Hebraico. Foi lá que, em contacto com matemáticos conceituados, mostrou as suas invulgares qualidades para a matemática. Aos 17 anos, quando terminou os cursos referidos, o seu pai tentou que ele se afastasse da matemática mas a intervenção de alguns professores de matemática convenceram-no a deixar o filho prosseguir os estudos na área da matemática. Assim, aos 19 anos, publicou o seu primeiro trabalho original e

apresentou-o em 1727 na Academia Francesa num concurso sobre o tema da mastreação dos navios. O seu trabalho não ganhou e foi criticado por ser unicamente teórico.

Euler candidatou-se à cátedra de Matemática no Ateneu de Basileia e não foi nomeado. Mas os seus amigos Daniel Bernoulli (1700-1782) e Nicolas Bernoulli (1695-1726) que se tinham estabelecido em S. Petersburgo propuseram um lugar a Euler e assim, a partir de Maio de 1727, Euler passou a viver na Rússia, onde casou em 1734 com Katharina Gsell e da qual teve 13 filhos mas apenas 5 passaram da infância. Em 1740 Euler era já um conceituado matemático tendo conquistado por duas vezes, em 1738 e 1740 o Grande Prémio da Academia de Paris. A sua fama originou um convite para ir leccionar para Berlim, convite que recusou inicialmente. Mas devido aos tumultos políticos na Rússia acabou por ir para Berlim em Julho de 1741. Quando, em 1759, morre o director da Academia de Berlim, Euler assume a liderança da Academia mas sem o título de Presidente. Em 1766 regressa a S. Petersburgo mas começa a ter dificuldades de visão cegando completamente em 1771. Apesar disso continua a produzir matemática contando com a ajuda de um seu filho, Johann Albrecht Euler e mais dois membros da academia de S. Petersburgo, para os escrever. Após a morte de Euler em 1783, a Academia de S. Petersburgo continuou a publicar os seus trabalhos durante cerca de 50 anos.

A contribuição de Euler para o desenvolvimento da Matemática é enorme mas neste trabalho estamos especialmente interessados no modo como ele resolveu o problema das pontes de Koenigsberg.

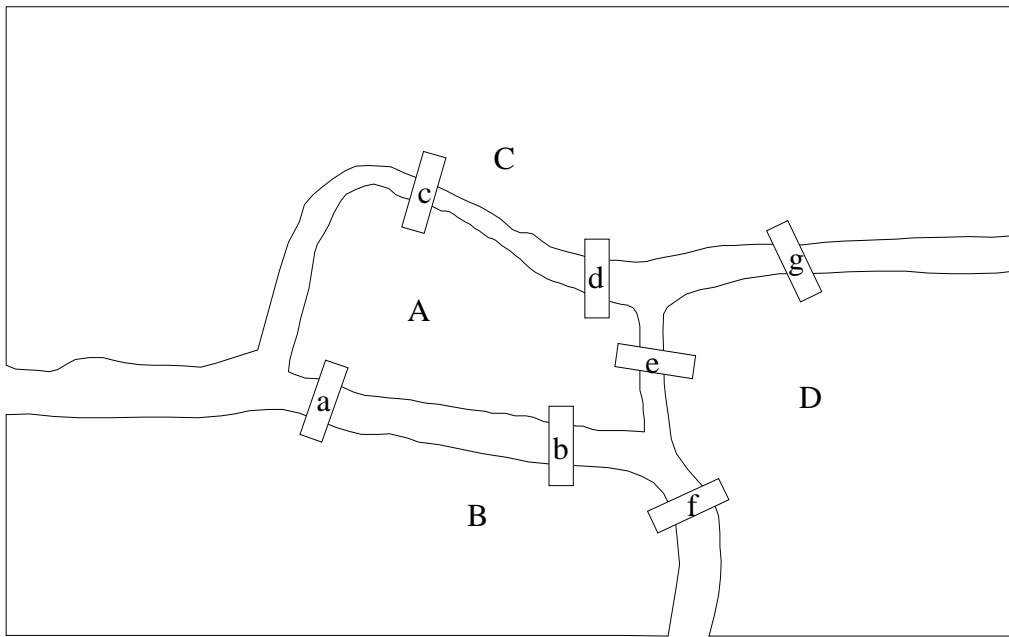


Figura 2

A figura acima mostra um diagrama do problema tal como foi colocado a Euler mas ele procurou uma resolução que permitisse generalização para um problema que considerasse um número qualquer de regiões de terra e também um número qualquer de pontes unindo-os. No caso particular de Königsberg temos quatro regiões de terra e sete pontes. Designando as regiões de terra por letras maiúsculas, A, B, C e D, uma caminhada pelas sete pontes seria representada por uma sequência de 8 letras maiúsculas indicando as regiões de terra por onde se passava. Assim, ir de A para B por uma das suas pontes representar-se-ia por AB. Como se pretendia que se passasse por todas as pontes uma única vez então teríamos de construir uma sequência com oito letras, usando as letras A, B, C e D, aparecendo a combinação AB (ou BA) duas vezes, pois há duas pontes entre as regiões A e B. Analogamente a combinação AC (ou CA) apareceria duas vezes, enquanto que apareceria apenas uma vez qualquer uma das combinações AD (ou DA), CD (ou DC) e BD (ou DB). Euler quis primeiro analisar se existiria tal possibilidade procurando uma regra para tirar essa conclusão. Considerando agora o problema do ponto de vista de uma certa região que chamaremos A e a qual estava ligada por um determinado número de pontes, que designaremos por n , pontes essas que ligavam a região A a qualquer outra região, que será sempre designada por X, independentemente qual seja. Pretendemos analisar uma sequência que represente uma caminhada por essas n pontes. Se $n=1$ então temos de passar por A exactamente uma vez pois o percurso ou começa em A e acaba em X ou começa em X e acaba em A. Se $n=3$ então, quer comece em A ou em X,

passaremos por A duas vezes pois será AXAX ou XAXA. Se $n=5$ as hipóteses são AXAXAX ou XAXAXA portanto passaremos por A três vezes. Mais geralmente, se n é ímpar então a sequência terá sempre comprimento $n+1$, que será par, e metade dos quais são A's sendo a outra metade X's. Assim existirão $\frac{n+1}{2}$ A's. Ora, no problema particular das pontes de Koenigsberg existem 5 pontes que conduzem à região A da figura, por isso essa região tem de aparecer 3 vezes. O mesmo raciocínio permite elaborar a tabela seguinte:

Tabela 1

Região	Nº de pontes	Nº de vezes que aparece na sequência
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

Teríamos de formar então uma sequência de comprimento oito com três A's, dois B's, dois C's e dois D's. Mas isto é impossível pois $3+2+2+2=9 \neq 8$.

Deste modo fica resolvido o famoso problema das pontes de Koenigsberg. No entanto, Euler analisou também o caso de n ser par separando-o em dois casos: começar em A ou não começar em A. Se $n=2$ e começa em A então temos AXA, havendo dois A's mas se não começa em A então temos XAX, havendo apenas um A. Se $n=4$ e começa em A temos AXAXA, havendo três A's mas se não começa em A então temos XAXAX, havendo apenas dois A's. Em geral, sendo n par, o número de vezes que aparece o A é $\frac{n}{2}$ se não se parte de A e será $\frac{n}{2}+1$ se se parte de A.

O método proposto então por Euler para, num caso geral, decidir se existe solução seria:

- 1º - designar as diferentes regiões de terra por letras, A, B, C, D, ...;
- 2º - tomar o número total de pontes, aumentá-lo de uma unidade e escrever o valor resultante na parte superior do papel;
- 3º - escrever as letras das regiões numa coluna e em frente de cada letra o número de pontes que conduzem a cada região particular;
- 4º - colocar um asterisco junto de cada letra que corresponde um número par;

5° - numa terceira coluna colocar à frente de cada número par a sua metade e, à frente de cada número ímpar a metade da soma desse número com uma unidade;

6° - somar os números da terceira coluna.

Se a soma obtida no 6° passo é superior ao número anotado no 2° passo então não existe o trajecto pretendido. Se a soma é igual ao número anotado então existe o trajecto mas deve começar numa região que não tenha asterisco. Se a soma é uma unidade menor que o número anotado então existe o trajecto mas deve começar numa região que tenha asterisco.

No seu trabalho, Euler, apresenta ainda um exemplo fictício para mostrar como proceder noutros casos. Considerando a figura seguinte:

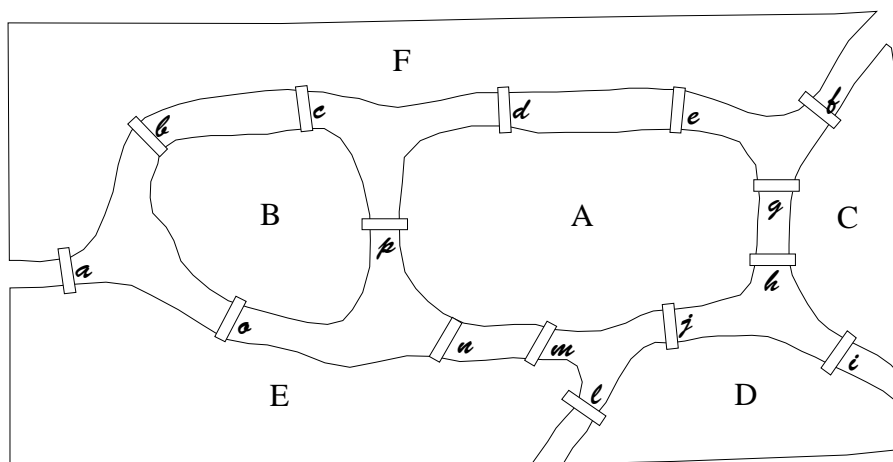


Figura 3

Temos agora quinze pontes designadas por *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, e p*, que unem seis regiões designadas por A, B, C, D, E e F. Seguindo os passos descritos atrás elaboramos a seguinte tabela:

Tabela 2

Número total de pontes adicionado de uma unidade		15+1=16
Número de pontes que conduzem a cada região		
A *	8	4
B *	4	2
C *	4	2
D	3	2
E	5	3
F *	6	3
Soma:		16

Como a soma da terceira coluna é igual ao número anotado na parte superior então é possível efectuar um passeio passando por todas as pontes uma única vez mas esse passeio deve começar numa região que não tenha asterisco.

Euler apresenta também, além da justificação da existência, um possível trajecto nas condições pedidas: $EaFbBcFdAeFgCgAhCiDjAmEnApBoElD$. Aqui Euler alterou a sua notação indicando por letras minúsculas entre as maiúsculas as pontes que atravessam cada par de regiões. Isto mostra que ele percebeu rapidamente uma dificuldade na notação anteriormente apresentada. Actualmente só no caso de grafos simples (grafos sem lacetes nem arestas múltiplas) é costume indicar os trajectos por uma sequência apenas de vértices. Baseado no raciocínio que fez para elaborar este método, Euler, continua apresentando um método mais simples. Ao contar as pontes para preencher a segunda coluna cada ponte é contada duas vezes, pois se ela une as regiões X e Y é contada uma vez na região X e outra vez na região Y. Assim a soma dos números da segunda coluna é necessariamente o dobro do número de pontes, portanto um número par. Se nessa coluna existirem números ímpares será sempre em número par, caso contrário a soma seria ímpar. Assim o número de regiões sem asterisco é sempre par. A soma dos números da segunda coluna adicionada de duas unidades e posteriormente dividida por dois dá obrigatoriamente o número escrito na parte superior da tabela. Ora, se não existirem regiões sem asterisco então, na terceira coluna, está sempre metade do número da segunda coluna, logo a soma da terceira coluna será inferior ao número escrito na parte superior da tabela e será sempre possível atravessar todas as pontes independentemente da região onde se comece. Se há duas regiões sem asterisco então o caminho pretendido será possível desde que se comece por uma região com um número ímpar de pontes. Como, para preencher a terceira coluna, se considera nas regiões com asterisco a metade do número da segunda coluna e, nas regiões sem asterisco, a metade do número da segunda coluna adicionado de uma unidade então a soma dessas metades será uma unidade superior ao número de pontes, logo igual ao número escrito na parte superior da tabela. No entanto se o número de regiões sem asterisco for superior a dois então a soma da terceira coluna já é superior ao número da parte superior da tabela logo não existirá o trajecto nas condições pretendidas.

Depois destas explicações Euler dá então as regras para num caso geral averiguar a existência dos trajectos de forma simples:

- Se há mais de duas regiões com um número ímpar de pontes então não existe o trajecto nas condições pedidas;

- Se há só duas regiões com um número ímpar de pontes então existe o trajecto nas condições pedidas desde que se comece numa dessas duas regiões;

- Se não há regiões com um número ímpar de pontes então o trajecto nas condições pedidas existe independentemente da região onde se comece.

Euler dava aqui por completa a resolução do problema inicialmente proposto. No entanto ele ainda teceu algumas considerações sobre o modo de encontrar o trajecto nas situações em que esse trajecto existe. Em primeiro lugar deve-se eliminar pontes aos pares quando esse par ligue as mesmas regiões. Depois de eliminar todos os pares nestas condições fica fácil determinar o trajecto através das restantes pontes. De seguida é só aumentar o trajecto de modo a passar pelas pontes eliminadas o que será sempre fácil.

1.1.2. *Vandermonde*

Em 1771 Alexandre Vandermonde (1735-1796) publicou um trabalho onde procura descobrir trajectos ao longo de posições do plano e do espaço. Para isso ele divide o plano em zonas obtidas pela intersecção de faixas criadas por rectas paralelas ou planos paralelos no caso do espaço tridimensional. Ele representa essas zonas por pares ou ternos de números inteiros e usa essas representações para resolver os problemas propostos em lugar das figuras das regiões em causa. Como exemplo ele particulariza ao caso do movimento dos cavalos no xadrez, um problema que já tinha sido resolvido por Euler em 1759. O problema é o seguinte: «Como pode um cavalo do xadrez passar por todas as casas uma única vez começando e acabando na mesma?». Vejamos a resolução proposta por Vandermonde.

Designamos as 64 casas do tabuleiro de xadrez como se indica na figura.

8	8	8	8	8	8	8	8
1	2	3	4	5	6	7	8
7	7	7	7	7	7	7	7
1	2	3	4	5	6	7	8
6	6	6	6	6	6	6	6
1	2	3	4	5	6	7	8
5	5	5	5	5	5	5	5
1	2	3	4	5	6	7	8
4	4	4	4	4	4	4	4
1	2	3	4	5	6	7	8
3	3	3	3	3	3	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8

Figura 4

Temos então que, um trajecto pelas 64 casas do tabuleiro será uma reordenação dos 64 pares: $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 & 2 & \dots & 8 & 8 & \dots & 8 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 1 & 2 & \dots & 1 & 2 & \dots & 8 \end{matrix}$, obedecendo à regra do xadrez para

o movimento do cavalo, isto é, a seguir ao par $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ pode estar o par $\begin{matrix} a\pm 1 \\ b\pm 2 \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} a\pm 2 \\ b\pm 1 \end{matrix}$.

Notam-se aqui simetrias pois se tivermos dois desenhos de trajecto do cavalo no tabuleiro tendo um sido obtido do outro por troca de 1 por 8, 2 por 7, 3 por 6, 5 por 4 e vice-versa em cima, em baixo, ou em ambos temos duas figuras simétricas. O método proposto por Vandermonde usa essas simetrias. Devemos escolher ao acaso uma primeira casa, no exemplo dele, $\begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$. A partir desta, por simetria, obtemos mais

três casas, $\begin{matrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix}$. Voltando ao $\begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$ escolhemos, de novo ao acaso, uma casa para

onde se possa legalmente mover o cavalo, $\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$ e construímos as correspondentes

simetrias, $\begin{matrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{matrix}$ e $\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$. Dispomos os pares em quatro linhas, na primeira uma sequência

de pares obedecendo à regra do movimento do cavalo e nas linhas inferiores as correspondentes simetrias, como representado abaixo.

5 4 2 1 3 2 1 3 1 2 4 3 1 2 4 3
5 3 4 2 1 3 1 2 3 1 2 4 5 7 8 6

4 5 7 8 6 7 8 6 8 7 5 6 8 7 5 6
 5 3 4 2 1 3 1 2 3 1 2 4 5 7 8 6

5 4 2 1 3 2 1 3 1 2 4 3 1 2 4 3
 4 6 5 7 8 6 8 7 6 8 7 5 4 2 1 3

4 5 7 8 6 7 8 6 8 7 5 6 8 7 5 6
 4 6 5 7 8 6 8 7 6 8 7 5 4 2 1 3

Podemos agora justapor a primeira com a quarta, e a segunda com a terceira obtendo,

5 4 2 1 3 2 1 3 1 2 4 3 1 2 4 3 4 5 7 8 6 7 8 6 8 7 5 6 8 7 5 6
 5 3 4 2 1 3 1 2 3 1 2 4 5 7 8 6 4 6 5 7 8 6 8 7 6 8 7 5 4 2 1 3

4 5 7 8 6 7 8 6 8 7 5 6 8 7 5 6 5 4 2 1 3 2 1 3 1 2 4 3 1 2 4 3
 5 3 4 2 1 3 1 2 3 1 2 4 5 7 8 6 4 6 5 7 8 6 8 7 6 8 7 5 4 2 1 3

Estas duas sequências não se podem justapor obedecendo à regra do movimento do cavalo, mas podemos tentar intercalar na primeira sequência a segunda. Vandermonde fez isso entre os terceiro e quarto par da primeira, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$. A sequência obtida corresponde ao desenho da figura abaixo.



Figura 5

1.1.3. Hamilton

Em 7 de Outubro de 1856, William Hamilton, numa carta destinada ao seu amigo Graves, comunicava a sua descoberta mais recente, e que, no ano seguinte, deu origem a um jogo que foi vendido a um grossista de jogos e puzzles. Hamilton chamou ao jogo «Icosian Game» derivado de uma palavra grega que significa vinte. Esse jogo constava de um tabuleiro com vinte furos unidos por linhas e vinte peças, numeradas de 1 a 20, para colocar nos furos, como se mostra na figura abaixo.

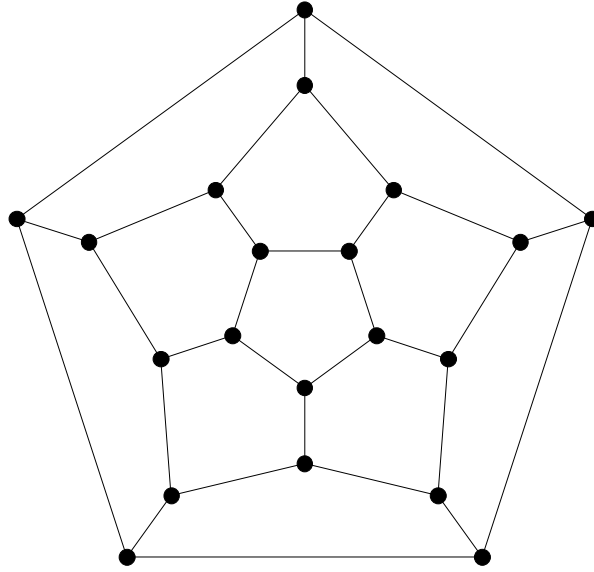


Figura 6

As regras do jogo colocavam vários problemas. Havendo apenas um jogador o objectivo seria colocar as vinte peças nos vinte furos por ordem, de modo que duas peças com números consecutivos estivessem em furos que fossem unidos por uma linha e além disso a última também uniria com a primeira. No caso de haver dois jogadores, o primeiro a jogar colocava cinco peças em cinco furos consecutivos e o segundo jogador deveria completar a sequência, sempre em furos ligados, de modo a terminar num furo ligado com o início da sequência começada pelo primeiro jogador. Qualquer que seja a jogada do primeiro jogador, o segundo tem sempre pelo menos duas possibilidades de resposta bem sucedida mas, em alguns casos, tem quatro hipóteses de resposta. Um outro problema, para dois jogadores, permite ao primeiro jogador colocar três peças em sequência e escolhe um furo dos vazios onde o adversário deverá terminar a sequência. Este problema permite ao segundo jogador ter uma, duas ou quatro hipóteses de resposta dependendo das escolhas do primeiro jogador. No entanto, o primeiro jogador pode ainda fazer escolhas que não permitem qualquer hipótese de resposta ao adversário, ganhando assim o jogo.

Como veremos em secções posteriores, o que está aqui em jogo é a descoberta de trajectos especiais que ficaram conhecidos com o nome de Hamilton.

1.1.4. Teorema das quatro cores

Depois do problema das pontes de Königsberg, o teorema das quatro cores é o mais famoso problema de Teoria de Grafos. Este problema teve origem, em 23 de Outubro de 1852, na correspondência entre Hamilton e Augusto De Morgan (1806-1871), problema esse que foi levantado por um aluno de De Morgan. O seu enunciado era aproximadamente o seguinte: «porque razão, quando dividimos qualquer figura em zonas coloridas, de modo que duas zonas que tenham fronteira comum fiquem com cores diferentes, precisamos, no máximo, de quatro cores». Esse aluno era Frederick Guthrie mas realmente o criador do problema foi um seu irmão, Francis Guthrie (1831-1899), que facilmente deu um exemplo de um mapa onde sejam necessárias 4 cores, mas não provou que não existe nenhum mapa que obrigue à utilização de mais de 4 cores. Conjecturou esse facto e foi o primeiro a falar na «conjectura das 4 cores».

Posteriormente foram muitos os matemáticos, célebres e menos célebres, que se dedicaram a tentar demonstrar o teorema das 4 cores. Arthur Cayley (1821-1895) publicou em 1879 um artigo na Royal Geographical Society onde explicava as razões que o levavam a supor que a conjectura seria falsa e que não haveria mesmo nenhum número mínimo que fosse suficiente para colorir qualquer mapa. Já Alfred Kempe (1849-1922), que foi aluno de Cayley, estava convencido do contrário e publicou mesmo uma prova do teorema das 4 cores que se supôs correcta durante onze anos, até que Percy Heawood (1861-1955) lhe apontou um erro na demonstração. Nas próximas linhas descrevemos aproximadamente o raciocínio de Kempe. Considere-se todo o mapa já colorido excepto uma região, que falta colorir. Suponhamos que essa região está rodeada por quatro outras regiões como na figura abaixo.

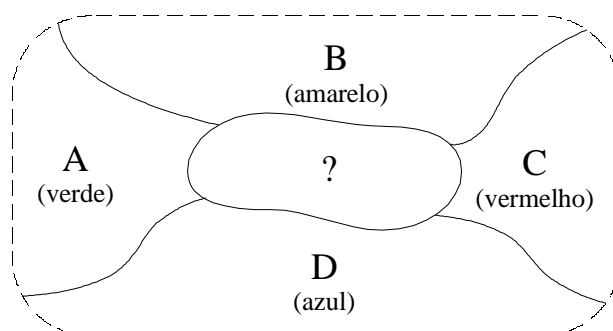


Figura 7

O tracejado na figura simboliza que «algo se passa» no exterior do desenho mas que não sabemos o quê. Ora, duas coisas podem acontecer nesse exterior. Ou as

regiões A e C se tocam tendo uma fronteira comum ou tal não acontece. Se isso não acontecer então podemos colori-las ambas de verde ou ambas de vermelho libertando uma cor para a região central. Isso já não pode ser feito se as regiões tiverem uma fronteira comum. Mas, tendo-a, então existirá uma cadeia contínua das regiões A e C até se tocarem impedindo que haja uma fronteira comum entre as regiões B e D e podemos usar a mesma cor agora nestas regiões libertando também uma cor para a região central. Este tipo de argumento ficou conhecido como o método das cadeias de Kempe e é usado frequentemente no seu artigo onde supõe demonstrar o teorema das 4 cores. Kempe tem de analisar várias situações e Heawood encontrou-lhe um erro no caso onde cinco regiões rodeiam uma região por colorir. O artigo de Heawood não é apenas destrutivo, pois Heawood mostra ainda que bastam cinco cores para colorir qualquer mapa. Apesar disso o trabalho de Heawood não foi acolhido com muito interesse e houve até vários trabalhos posteriores que apresentavam a demonstração de Kempe como estando correcta.

Depois do insucesso desta demonstração passou-se a olhar para a Teoria de Grafos de outra forma e considera-se que foi o atingir da maturidade para uma teoria que era recente. Os matemáticos não desistiram de tentar provar a conjectura das quatro cores, mas procurou-se formulações alternativas do problema de modo a poder usar técnicas de outros ramos da matemática. Exemplo disso foi um artigo, ainda de Heawood onde ele tenta usar sistemas de congruências. Heawood começa por considerar apenas mapas onde não há pontos em que se toquem mais de três países e os pontos onde se tocam três países correspondem aos vértices de um grafo cujas arestas são as fronteiras unindo dois países. Deste modo define um grafo chamado trivalente, por todos os vértices serem incidentes com três arestas. Depois supõe que a cada vértice está associado um número do conjunto $\{-1,+1\}$ e elabora a seguinte proposição: para cada região, a soma dos valores associados aos vértices que limitam essa região é um múltiplo de 3 se e só se o mapa se pode colorir com, no máximo, quatro cores. Heawood gastou muito do seu tempo a estudar sistemas de congruências e publicou mais artigos dedicados a esse tema mas nunca conseguiu grande sucesso na utilização desses resultados na demonstração da conjectura das quatro cores. No início do século XX essencialmente procurava-se a resolução do problema com argumentos topológicos e algébricos e eram especialmente os matemáticos americanos que estudavam este problema. Oswald Veblen (1880-1960) e George Birkhoff (1884-1944) interessaram-se também muito pelo problemas das quatro cores e o seu estudo desenvolveu áreas da matemática como a Geometria Projectiva e a

Geometria Diferencial. Em 1912 Veblen publica um artigo «An application of modular equations in analysis situs» e no fim desse artigo ele próprio explica em que sentido o trabalho dele pode ser considerado uma generalização dos sistemas de congruências de Heawood. No mesmo ano Birkhoff publica um artigo «A determinant formula for the number of ways of coloring a map» onde aplica as técnicas das cadeias de Kempe e de redutibilidade de mapas onde são apresentadas várias proposições sobre o modo de colorir mapas mas a conjectura das quatro cores continuava por demonstrar. Em 1922, Philip Franklin (1898-1965) publica um artigo «The four color problem» na sequência dos trabalhos anteriores onde estuda várias configurações de mapas e as possíveis situações de redução. Mostra nesse artigo que qualquer mapa com um máximo de 25 regiões pode ser colorido com quatro cores no máximo.

Hassler Whitney (1907-1989) publica no Bulletin of American Mathematical Society, em 1932, um artigo «A logical expansion in a mathematics». Whitney procura desenvolver o seu trabalho de modo que possa usar grafos e não mapas. Para ele uma coloração de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices do grafo de modo que vértices unidos por uma aresta tenham cores diferentes e representa por $M(\lambda)$ o número de formas de colorir um dado grafo usando λ cores. M é uma função polinomial e é conhecido pelo polinómio cromático de um grafo. Também Birkhoff voltou ao estudo da conjectura das quatro cores com uma abordagem semelhante e apresenta um polinómio, na variável λ , mas em função do número de regiões, n , do grafo. Ele prova que para $n \geq 3$ temos $P_n(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^{n-3}$ para qualquer $\lambda \neq 4$. O que se pretende é concluir que 4 não é solução da equação, na incógnita λ , $P_n(\lambda) = 0$, qualquer que seja $n \geq 3$, pois daí decorreria o teorema das quatro cores. Ora isso aconteceria se a expressão de Birkhoff fosse também válida para $\lambda = 4$.

A redutibilidade dos grafos era o caminho traçado para demonstrar o teorema das quatro cores e foi nesse sentido que se trabalhou. Depois de Franklin ter demonstrado a validade do resultado para mapas com um máximo de 25 países, em 1926, C. N. Reynolds demonstra o resultado para 27 países, em 1936 de novo Franklin demonstra para 31 países, em 1938, C. E. Winn demonstra para 35 países e em 1968, Oystein Ore e Joel Stemple demonstram para 40 países.

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken conseguem provar que qualquer grafo é redutível a uma de 1478 configurações básicas e usaram um programa de computador para analisar a possibilidade de colorir esses 1478 mapas com 4 cores,

no máximo. Estava finalmente «demonstrado» o teorema das 4 cores. No entanto esta demonstração não agradou a todos por fazer uso da utilização do computador. A necessidade de utilização do computador resulta do facto de ser impossível ao ser humano no seu tempo de vida analisar todas as 1478 configurações. Por isso os matemáticos continuaram a investigar o tema e, em 1994, Paul D. Seymour, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Robin Thomas conseguem mostrar a possibilidade de redução a 663 configurações mas ainda assim precisam do auxílio de computadores para as analisar.

Permanece assim em aberto a questão de encontrar uma demonstração do teorema das 4 cores que possa ser seguida pelo ser humano do princípio ao fim, sem utilizar o computador para efectuar a análise de todas as configurações possíveis.

1.1.5. O carteiro chinês

De algum modo relacionado com a questão vista inicialmente de encontrar trajectos que percorressem todas as arestas de um grafo está um outro problema, que também ficou famoso em termos históricos, que é o problema do carteiro chinês. Este problema foi posto pelo matemático chinês Mei-Ko Kwan em 1962. É o seguinte: “Um carteiro sai do correio com as cartas para distribuir na sua área. Tem de percorrer todas as ruas pelo menos uma vez e pretende escolher um caminho tão curto quanto possível”.

Se estivermos perante um grafo onde exista um trajecto que comece e acabe no mesmo vértice, passando por todas as arestas, então qualquer um desses trajectos serve pois o caminho mais curto será passar uma única vez por cada aresta. No caso de não existirem trajectos nessas condições, então para escolher qual o mais curto temos de associar a cada aresta do grafo um certo número, chamado peso, e por isso estamos perante um problema que lida com grafos pesados. Cada rua será representado por uma aresta e intersecções entre ruas corresponderão aos vértices. Para tratar o problema tal como foi colocado então a cada aresta associaremos um número que corresponda ao comprimento dessa rua. Podemos, no entanto, perceber aqui uma generalização a várias situações práticas onde o peso de cada aresta seja um qualquer atributo que se pretenda otimizar.

1.1.6. O caixeiro viajante

Relacionado agora com os trajectos de Hamilton temos outro problema também historicamente famoso que é o problema do caixeiro viajante: “Um caixeiro viajante pretende visitar várias localidades uma única vez e regressar à sua cidade. Pretende fazê-lo da maneira mais económica.”

Este problema pode ser modelizado por um grafo pesado e admitindo que existe ligação entre quaisquer duas das localidades então precisamos de encontrar ciclos de Hamilton num grafo completo e esses caminhos existirão sempre. Trata-se de entre as várias hipóteses encontrar o menos pesado, ou por ser o mais curto, ou por ser o menos dispendioso.

1.1.7. Perseguições em flippers

Mais recentemente, uma promoção de vendas usou jogos baseados em mesas de flippers. O desafio em cada caso é encontrar um caminho à volta da mesa pontuando o mais possível. Consideremos a figura abaixo que representa uma possível mesa de flippers.

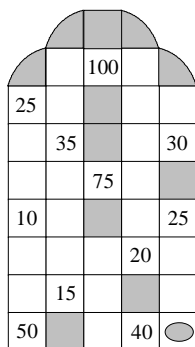


Figura 8

Este jogo pode ser resolvido por etapas, todas elas relacionadas com Teoria de Grafos. Na primeira etapa constrói-se um grafo representando cada quadrado por um vértice e arestas ligando vértices de quadrados que tenham algum lado comum, portanto não se pode andar na diagonal nos flippers. De seguida pretende-se construir um trajecto passando uma única vez por cada vértice de modo a atingir a maior soma de pontos. Como veremos na parte teórica este trajecto corresponde a um caminho de Hamilton.

1.2. Considerações teóricas

A representação visual dos exemplos atrás apresentados é geralmente suficiente para compreender o conceito de grafo e a sua possível aplicação a situações do quotidiano. No entanto, e apesar de neste trabalho estarmos interessados em aplicações lúdicas, ao desenvolver uma teoria, e necessitando de demonstrar eventuais teoremas, surge muitas vezes a necessidade de matematizar (leia-se tornar abstractos) certos conceitos. Foi isso que aconteceu com a Teoria de Grafos e os próximos parágrafos apresentam a teoria que vamos necessitar ao longo deste trabalho.

Um **grafo** é um terno (V, A, φ) onde V e A são conjuntos finitos não vazios e $\varphi: A \rightarrow \mathcal{P}(V)$ tal que $(\forall a \in A)(\exists u, v \in V): \varphi(a) = \{u, v\}$. Os elementos de V chamam-se **vértices** e os elementos de A chamam-se **arestas**. Uma aresta a para a qual exista $v \in V$ tal que $\varphi(a) = \{v\}$ chama-se um **lacete**. Quando, para $u, v \in V$ temos mais do que um elemento em $\varphi^{-1}(\{u, v\})$ chamamos **arestas múltiplas** a esses elementos. Um grafo que não tenha lacetes nem arestas múltiplas diz-se um **grafo simples**.

Sejam $u, v \in V$ e $a, b \in A$. u e v dizem-se **vértices adjacentes** quando existe $c \in A$ tal que $\varphi(c) = \{u, v\}$. a e b dizem-se **arestas adjacentes** quando existe $w \in V$ tal que $w \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$. O vértice v e a aresta a dizem-se **incidentes** quando $v \in \varphi(a)$.

Um **grafo vazio** é um grafo sem arestas e um **grafo completo** é um grafo onde quaisquer dois vértices distintos são adjacentes.

O **grau** de um vértice $v \in V$ defini-se como sendo $2i + j$ onde i é o número de lacetes incidentes com v e j é o número de arestas, que não sejam lacetes, incidentes com v .

Um **passeio** é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e acaba com um vértice e tal que, quaisquer dois elementos consecutivos, nessa sequência, são incidentes. O passeio diz-se **fechado** quando o primeiro e o último vértice dessa sequência são o mesmo.

Um **atalho** é um passeio que não repete arestas.

Um **caminho** é um passeio que não repete vértices.

Um **circuito** é um passeio fechado que passa por todas as arestas. Um **atalho de Euler** é um atalho que passa por todas as arestas. Um **circuito de Euler** é um atalho fechado que passa por todas as arestas.

Um **ciclo** é um passeio fechado que não repete vértices interiores. Um **caminho de Hamilton** é um caminho que passa por todos os vértices. Um **ciclo de Hamilton** é um ciclo que passa por todos os vértices.

Um grafo diz-se **euleriano** quando possui algum circuito de Euler.

Um grafo diz-se **hamiltoniano** quando possui algum ciclo de Hamilton.

Um grafo diz-se **conexo** quando, para quaisquer dois vértices existe um passeio que começa num vértice e acaba no outro.

Dado um grafo podemos criar, a partir dele, outros grafos. Aqui vamos precisar das seguintes definições.

Seja $G=(V,A,\Phi)$ um grafo e $B\subset A$, não vazio. Chamamos **grafo eliminação** de B a um novo grafo, que se representa por $G-B$, e se define por $G-B=(V^*,A^*,\Phi^*)$ onde $V^*=V$, $A^*=A\setminus B$ e $\Phi^*=\Phi|_{A\setminus B}$. Se $B=\{b\}$ representa-se usualmente $G-B$ por $G-b$. Portanto temos um novo grafo onde se retiram as arestas que estão em B mas mantemos todos os vértices.

Sendo $a\in A$ com $\Phi(a)=\{u,v\}$ e $u\neq v$ chamamos **grafo contracção** de a a um novo grafo, que se representa por $G\cdot a$, e que se define por $G\cdot a=(V^*,A^*,\Phi^*)$ onde $V^*=V\setminus\{u\}$, $A^*=A\setminus\{a\}$ e, para $b\in A^*$ se $\Phi(b)=\{u,w\}$ define-se $\Phi^*(b)=\{v,w\}$ e se $u\notin\Phi(b)$ define-se $\Phi^*(b)=\Phi(b)$. Na prática isto corresponde a eliminar uma aresta e a juntar os dois vértices dessa aresta num só.

De seguida duas proposições com muita utilidade prática e que serão usadas em algum dos nossos exemplos lúdicos posteriores.

Proposição:

Um grafo conexo é euleriano se e só se não tem vértices de grau ímpar.

Proposição:

Num grafo conexo existirá um atalho de Euler se e só se, no máximo, tiver dois vértices de grau ímpar.

Na futura secção onde focaremos coloração de mapas vamos precisar da seguinte teoria.

Seja $G=(V,A,\Phi)$ um grafo e $k\in\mathbb{N}$. Uma **k -coloração de vértices** é uma função $c:V\rightarrow\{1,2,\dots,k\}$. Uma **coloração própria** é uma coloração tal que, se u e v são dois

vértices adjacentes então $c(u) \neq c(v)$, isto é, vértices adjacentes têm cores diferentes. G diz-se **k -colorível** quando possui alguma k -coloração própria. O **número cromático** de um grafo, G , é o menor valor de k tal que G é k -colorível, e representa-se por $\chi(G)$.

Como já tínhamos visto na secção histórica, a partir do princípio do século XX, o «ataque» à demonstração do teorema das quatro cores baseava-se na utilização de argumentos topológicos e algébricos. Para esse trabalho temos as seguintes definições e resultados.

Num grafo G , para $k \in \mathbb{N}$, o número de k -colorações próprias distintas representa-se por $\pi_k(G)$. A proposição seguinte é imediata a partir das definições envolvidas.

Proposição:

Seja G um grafo com n vértices. Se G é vazio então, para $k \in \mathbb{N}$, temos $\pi_k(G) = k^n$. Se G é completo então, para $k \in \mathbb{N}$, temos $\pi_k(G) = k \times (k-1) \times (k-2) \times \dots \times (k-n+1)$ se $k \geq n$, e $\pi_k(G) = 0$ se $k < n$.

Vamos agora apresentar dois resultados importantes na definição de polinómio cromático e consequentemente na determinação do número cromático de um grafo.

Proposição:

Se G é um grafo simples não vazio então, para qualquer aresta a temos, $\pi_k(G) = \pi_k(G-a) - \pi_k(G \cdot a)$.

Proposição:

Seja G um grafo com n vértices. Então $\pi_k(G)$ é um polinómio mónico, na variável k , de grau n de coeficientes inteiros sendo 0 o termo independente. Além disso os coeficientes alternam em sinal.

Nas condições das proposições anteriores, o polinómio, na variável k , $\pi_k(G)$, chama-se **polinómio cromático** do grafo G .

Capítulo 2: Jogos

Falar em jogos numa forma geral é falar em pensar, em divertir-se, em relacionar-se com outros.

Na aprendizagem o jogo esteve sempre associado à ideia de transmitir conhecimentos numa forma mais leve e dinâmica, à ideia de quebrar uma certa monotonia e austeridade.

Neste sentido a temática do jogo já foi explorada das mais diversas formas e perspectivas.

2.1. O jogo e o ser humano

O jogo tem, sobre a criança, o poder de um exercitador universal: facilita tanto o progresso de sua personalidade integral, como o progresso de cada uma de suas funções psicológicas, intelectuais e morais.

Jacquin, 1965

O jogo é uma actividade tão antiga como o Homem. Ele está ligado ao impulso lúdico do homem, traço de personalidade que persiste desde a infância até à idade adulta. Como traço de personalidade ele encontra a sua fundamentação em características biológicas, culturais e sociais do ser humano.

Do ponto de vista biológico o jogo aparece relacionado com a diferente complexidade das habilidades necessárias para a sobrevivência. É possível constatar que as espécies biológicas mais avançadas na escala filogenética brincam mais quando são adultas, como por exemplo os leões. Nas espécies inferiores, como nos insectos, existe uma passagem rápida ao estado adulto, através do treino de habilidades. Parece assim que o jogo está ligado e é necessário à aquisição de estratégias para um desenvolvimento adulto, onde a complexidade tem lugar.

No caso específico do homem o papel do aspecto lúdico é mais ambíguo embora necessário. Uma consequência desta necessidade é o efeito aparentemente conflituoso no trabalho humano, como actividade de sobrevivência. Se por um lado a componente lúdica parece indispensável para se poder adquirir maior complexidade para trabalhar

e sobreviver, por outro lado a necessidade do lúdico atrasa o momento de estar apto a trabalhar em pleno, como adulto. Assim, no ser humano esta dualidade jogo-trabalho, uma vez que estamos no topo da escala da complexidade biológica, é ambígua e conflituosa quanto à proeminência de um ou outro, quanto à oportunidade de cada um e quanto à conveniência ou não da distinção entre ambos.

Reflexo desta ambiguidade são as posições de alguns autores. Freinet critica o trabalho sob a forma de jogo (jogo-trabalho) e advoga um trabalho criativo (trabalho-jogo), pois para ele transformar o trabalho em jogo é admitir implicitamente que o trabalho é impotente para educar e dar realização pessoal. Leif e Brunelle (1978) criticam também a interpenetração entre jogo e trabalho, defendendo antes uma complementaridade. No entanto para Kangas e Solomon a distinção entre jogo e trabalho é algo nebuloso.

Todos estão de acordo que o jogo, no ser humano, contém características que introduzem um elemento cultural e social importante. É um dado adquirido que jogar contém elementos de socialização e de aquisição de regras e de valores. No entanto a questão de qual a contribuição do jogo, do elemento lúdico, para esses aspectos cultural e social já não reúne consenso.

Se é verdade que o jogo contribui para criar e desenvolver mitos, símbolos e a aprendizagem de regras, contribuindo para o conhecimento das coisas, das relações entre as coisas, e portanto para a adaptação social, a relevância desse contributo difere de autor para autor.

2.1.1. O Jogo

Encarando a perspectiva cultural e social do jogo, própria do ser humano, interessa referir duas características fundamentais do jogo, que o faz ser indispensável tanto na sua capacidade de representação e interpretação do real, como na aprendizagem do Homem como ser social: o acaso e as regras.

Sobre o acaso, é evidente essa característica, se olharmos em redor. Ela aparece nas formas de organização das estruturas vivas, e em diversas formas do comportamento social dos seres humanos.

Quanto às regras, elas aparecem nas leis naturais, nas interações sociais e nas tomadas de decisão, e são passíveis de aprendizagem (ao contrário do acaso, do qual apenas podemos estudar as consequências).

Além destas duas características fundamentais, ao analisar-se um jogo a perspectiva que se toma implica uma classificação e caracterização diferentes e uma análise diferenciada para duas questões fundamentais:

- Qual o objectivo do Jogo?
- Qual deve ser o comportamento dos jogadores?

Conforme nos situemos numa perspectiva mais estrutural ou mais transaccional, assim o ênfase será dado à forma e regras do jogo e ao que o jogador deverá fazer, ou aos jogadores na sua subjectividade, no que efectivamente fazem.

Mais especificamente, o Jogo, no sentido de actividade intelectual organizada, com regras, interactivo, com ganhos e perdas para os jogadores, analisado mais na forma e nas regras, pode ser estudado tendo em conta parâmetros como:

- A informação de cada jogador perante cada jogada,
- O número de jogadores,
- Se é infinito ou finito,
- Se depende ou não do acaso,
- A igualdade ou não de regras para cada jogador,
- A total ausência ou não de cooperação entre os jogadores,
- O maior ou menor número de possibilidades perante cada jogada.

É nesta perspectiva que aparece a Teoria dos Jogos, numa perspectiva estrutural.

2.1.2. *Teoria dos Jogos*

Uma forma de abordagem centrada no jogo, cada vez mais desenvolvida, é aquela que deu origem à teoria dos jogos, tendo por fundo estudos matemáticos. A sua origem situa-se na área da tomada de decisões no campo da economia, mas actualmente alarga-se cada vez mais a outras ciências onde a tomada de decisão é fundamental.

Os seus fundamentos remontam a 1928, quando John Von Neuman demonstrou o teorema minimax básico. Com a publicação em 1944 de *Theory of Games and Economic Behavior*, de John Von Neuman e Oskar Morgenstern, mostrou-se que se podem interpretar acontecimentos sociais através de jogos de estratégia.

Na teoria dos jogos estes são analisados de uma maneira estrutural, formal. Nela são estudadas as várias possibilidades em termos de número de jogadores, possibilidades de ganhos e perdas e estratégias conducentes a tal, assim como qual a informação disponível.

A sua característica dominante é analisar o jogo tendo como pressuposto aquilo que os jogadores deveriam ser, objectiva e racionalmente, e não o que são, de forma subjectiva e pessoal.

Na análise de jogos segundo esta perspectiva muitas possibilidades podem ser consideradas, em função dos parâmetros atrás assinalados. Alguns adquirem uma relevância especial para esta teoria.

Na Teoria dos Jogos um conceito fundamental é o conceito de estratégia, entendendo esta como "uma descrição completa de como uma pessoa deverá agir sob quaisquer circunstâncias possíveis" (Davis, p.27). Ora, para que se possa definir uma estratégia é necessário que:

- A informação de cada jogador perante cada jogada seja completa, para poder estudar todas as alternativas;

- O jogo seja finito, isto é, o número de alternativas a analisar seja limitado e o jogo acabe após um número finito de lances;

- Cada jogador saiba em que medida é que os seus interesses (para ganhar) se opõem aos dos outros jogadores.

Em teoria, se um jogador tem estes conhecimentos, ele pode, depois de estudar todas as possibilidades, tomar uma decisão, definir uma estratégia, independentemente daquilo que outro jogador planeia fazer.

Neste sentido o jogo é determinado, e se for possível fazer uma opção depois de verificadas todas as hipóteses diz-se que é um jogo de forma normal.

2.1.3. Jogos de informação perfeita e imperfeita

Nos jogos de informação perfeita parte-se do pressuposto que cada jogador:

- Pode racionalmente conceber de forma completa as suas possibilidades;
- Possui a informação completa sobre vantagens e desvantagens de cada escolha;
- Tem indicador de utilidade, um valor para o ganho ou perda.

Nos jogos de informação imperfeita cada participante, em cada momento, não tem possibilidade de conhecer toda a informação para fazer uma determinada escolha, pois isso depende de escolhas do adversário.

Nestes jogos desempenham um papel importante as relações interpessoais, pois a atitude, a escolha que o adversário vai fazer, interfere com a escolha do outro. A definição de uma estratégia ganhadora por um dos jogadores, a existir, levaria paradoxalmente o adversário a adoptar a mesma estratégia, e então a estratégia

ganhadora poderia já não o ser. Nestas situações a análise psicológica pode condicionar o ganho ou perda de um jogador.

2.1.4. *Jogos finitos e infinitos*

Um jogo diz-se finito se o número de alternativas a analisar é limitado e se termina depois de um número determinado, finito, de jogadas; infinito se suceder o contrário.

2.1.5. *Os Jogos e o número de jogadores*

Na Teoria dos Jogos uma distinção importante é aquela que é feita com base no número de jogadores.

Os mais simples, os individuais, por alguns não considerados jogos, podem ser encarados como tendo a natureza por parceiro (Davis, 21). Estes jogos, assumidos contra a natureza, têm esta como passiva e desinteressada.

Podem ser agrupados em três categorias:

- A natureza não tem qualquer papel. O jogador faz uma escolha, e essa escolha determina os acontecimentos (é o caso da construção de um puzzle);
- A natureza participa com as leis do acaso. O jogador faz uma escolha inicial e o acaso faz o resto, embora o jogador conheça previamente as probabilidades pertinentes (é o caso do apostador num número da roleta);
- Semelhante à anterior, o jogador não conhece previamente as probabilidades pertinentes (é o caso do apostador em corridas de cavalos que correm pela primeira vez).

Nestes jogos o que a teoria dos jogos pode fazer é analisar quais as consequências de uma determinada acção executada por um indivíduo, assumindo que ele quer o melhor resultado possível.

Nos jogos com mais do que um participante assumem especial relevo aqueles jogados entre dois participantes. Nestes jogos os interesses entre os dois jogadores, desde completamente opostos até completamente convergentes, criam uma distinção crucial para a teoria dos jogos, criando o conceito de soma zero.

Se se considerar um contínuo em que num extremo estão os jogos de soma nula e no outro os de convergência total, entre esses extremos estão os de soma não nula,

onde existe conflito e cooperação, e onde a interacção pode desempenhar papel importante.

Existem obviamente jogos para n jogadores e análises para esses jogos, mas isso ultrapassa o âmbito deste estudo.

2.1.6. Jogos de soma zero e soma não zero

Nos jogos de duas pessoas os interesses dos jogadores são ou não divergentes. Nos habituais jogos de tabuleiro, cada jogador quer ganhar e quer que o adversário perca; no entanto num jogo em sentido lato podem ambos perder.

Diz-se que um jogo é de soma zero quando os interesses dos jogadores são opostos, isto é, o que um ganha o outro perde. Pelo contrário num jogo de soma não zero podem ambos perder ou o que um ganha não ser o que o outro perde.

2.1.7. Os Jogos e as possibilidades de variação

Nos jogos a pares podemos referir dois grupos, com base na possibilidade real de dispor da informação perfeita sobre o jogo.

O primeiro grupo, chamado de pseudo-jogos, diz respeito àqueles em que a quantidade de informação necessária é muito reduzida, e que leva rapidamente os jogadores a conhecerem a estratégia ganhadora (se existir), podendo ser jogados na forma normal e com interesse por vezes meramente matemático.

O segundo refere-se àqueles que, embora teoricamente se possa possuir a informação completa, a sua complexidade, derivada do número elevadíssimo de possibilidades, transforma-os na prática em jogos de forma extensiva. Nestes as características subjectivas de cada jogador interferem no resultado final (como por exemplo no caso do Xadrez).

Embora estes dois tipos de jogos se possam distinguir, existe sempre uma zona nebulosa onde acabam uns e começam outros, se tivermos em conta o escalão etário dos jogadores assim como o seu desenvolvimento cognitivo.

2.1.8. Os Jogos e os tipos de regras

Uma outra classificação dos jogos a pares tem a ver com as regras. Por um lado elas podem ser iguais para os dois jogadores, isto é, a informação é igual para cada elemento, e existe um processo de simetria. Por outro lado a informação é diferente para cada jogador. Não existe um processo de simetria e um jogador tem que ter presente que a sua estratégia é condicionada por uma estratégia diferente; ele tem que conhecer dois tipos de regras e de estratégias, simultaneamente.

Nestes jogos a real determinação das probabilidades de vencer é complexa, e muitas vezes não é possível quantificar qual dos jogadores é que tem mais probabilidades de ganhar.

2.1.9. Jogos de acaso/deterministas

Já atrás foi referido que o acaso é um dos elementos essenciais do jogo, entendido este num sentido amplo.

Nos jogos com regras é possível estabelecer um contínuo que vai dos jogos onde apenas interfere o acaso, até àqueles em que existe apenas a componente dum sequência lógica, um determinismo. Entre estes dois extremos estão os jogos combinados, em que entra em menor ou maior grau o acaso.

Um jogo de puro acaso cedo deixa de interessar, se não forem introduzidos prémios para a sorte, como é o caso da Lotaria. Do outro lado, nos jogos onde o acaso não tem qualquer papel, o determinismo na prática é condicionado pelo número de possibilidades de variação, pela maior ou menor complexidade. Nestes últimos, naqueles jogos onde existem muitas possibilidades de variação, a intuição e a subjectividade desempenham um papel importante.

Nos jogos combinados é necessário realçar que não se pode confundir acaso com estratégias psicológicas, indispensáveis aos jogos de informação incompleta e aplicados nos de informação completa. Quando um participante no jogo das copas, por exemplo, opta por uma determinada carta, não o está a fazer ao acaso (esse acaso existiu quando recebeu as suas cartas) mas em função dum estratégia definida a partir de análises lógicas (que cartas tem, que cartas saíram, etc.) e de análises psicológicas (como é que o adversário costuma jogar, se está ansioso, se costuma fazer bluff, etc.). Se no campo das leis naturais os jogos são combinados em função do binómio acaso/sequência lógica, no campo das leis sociais eles são combinados em função do trinómio acaso/sequência lógica/análise psicológica, o que torna esta última interferente nas relações interpessoais.

2.1.10. Análise transaccional dos Jogos

A componente relacional presente nos jogos não individuais torna pertinente a abordagem dos jogos numa perspectiva diferente da teoria dos jogos, em que o jogador é considerado como é, na sua subjectividade, e não como deveria ser, em circunstâncias formais e ideais.

Seguindo de perto a análise proposta por Marc e Picard, outra abordagem do jogo é o seu estudo pragmático, de tipo psicológico, onde serão estudadas as situações interactivas concretas.

Neste sentido jogo, é “uma série de transacções escondidas, complementares, progredindo para um resultado bem definido, previsível” (Barne, cit em Marc). Cada um dos participantes procura vantagens, sociais e psicológicas.

Um jogo analisa-se segundo determinadas características:

- A tese, ou descrição geral do jogo, compreendendo a sucessão imediata dos acontecimentos (o nível social) e o seu plano de retaguarda, a sua evolução e significação psicológicas;

- A meta, que define o objectivo geral do jogo (assegurar-se, defender-se, ...);

- Os desempenhos, os papéis de cada participante;

- As jogadas;

- As vantagens, de ordem biológica, existencial, social e psicológica;

- A dinâmica, que designa o tipo de forças entre participantes e como elas evoluem.

Estas duas formas de abordar os jogos, a teoria dos jogos e a análise transaccional, podem parecer complementares e permitir analisar os efeitos de algumas características dos jogos: a competição, a auto-regulação, a interacção, a autonomia face ao mundo.

2.2. O jogo e a aprendizagem

Algumas características do jogo evidenciam as suas qualidades educativas e potenciam a sua utilização num processo de aprendizagem, aqui entendida num sentido lato, extravasando o meio escolar e as estratégias pedagógicas. A existência de regras e de interacção apresentam a possibilidade de recriar no jogo capacidades cognitivas e sociais que se pretende que sejam adquiridas por uma criança em determinado contexto. Neste sentido, a aprendizagem através do jogo pode ser feita em meio escolar ou extra-escolar, pois as regras e interacções que se pretendem desenvolver deverão contribuir para a construção de um cidadão responsável e autónomo, para o qual a escola é apenas um dos contributos.

2.2.1. Jogos didácticos e não didácticos

Embora com o mesmo fim, é possível distinguir os jogos pela finalidade da sua utilização: didácticos e não didácticos.

O jogo didáctico, entendido no sentido de jogo educativo, como o definem Georges Bright, John Harvey e Margariete Wheeler, citados por Sá (1992, p.9), é uma actividade para a qual foram definidos um conjunto de objectivos educacionais, cognitivos ou afectivos, e são determinados pelas pessoas que planeiam o ensino. A acrescentar há a mencionar que estão directa ou indirectamente relacionados com os conteúdos curriculares e são jogados em situações lectivas (é o caso do Dominó de Fracções).

Os jogos que não cabem nesta definição serão os que chamaremos não didácticos, como os aplicados neste estudo.

Esta distinção, que se baseia sobretudo ao nível da diferenciação das intenções, não invalida que um jogo criado e pensado como jogo não didáctico não possa ser aplicado como jogo didáctico, e vice-versa.

Entendidas assim as virtualidades do jogo, numa utilização didáctica ou não, as duas vertentes com que foram perspectivados os jogos (a formal e a transaccional) põem em destaque as suas potencialidades nos domínios cognitivo, afectivo e psicomotor, assim como nas relações entre estes domínios. O domínio psicomotor não é aqui focado em virtude dos jogos aqui referidos não estarem relacionados com qualquer tipo de destreza sensorio-motora, nem resistência física.

2.2.2. O Jogo e interacção social

Qualquer que seja a classificação adoptada, as características do jogo — com excepção dos individuais — implicam que se desenvolvam relações entre sujeitos, que potenciam a interacção social.

A interacção social é um dos aspectos determinantes do ser humano. Ela só existe na medida em que um sujeito modifica a sua percepção, devido à expectativa de uma reciprocidade, num processo interactivo, em que a comunicação, e consequentemente a contrapartida, é condição essencial.

A criança ao jogar é confrontada consigo própria, com tarefas que lhe dão origem a processos intelectuais, e com outros, com os quais dá e recebe contrapartida.

Desde o seu nascimento a criança joga, ora copiando, ora jogando com o imaginário. Manipulando a realidade no sentido da criação de simbolizações, na sua relação com outros, a criança cria regras, as quais lhe vão permitir uma socialização.

Adoptando uma perspectiva construtivista, a criança constrói a sua realidade na interacção social de forma individual e activa, criando e aceitando regras, utilizando informação de que dispõe em cada momento, informação essa que elabora a partir da experiência e do confronto permanente entre as ideias antecipadas e a realidade (Matos, in Brown, p.130).

Quando a criança está numa fase em que já joga o jogo de regras, quer ainda esteja no estágio das operações concretas quer esteja no início das operações formais (usando a terminologia de Piaget), estas desempenham um papel crucial na aquisição de códigos para uma socialização, uma descentração. É uma vez que nesta altura a criança parece ter um prazer particular em prever os casos possíveis e em codificá-los (Leif, p.44), o jogo de regras parece ser um meio privilegiado para a evolução da criança ao mostrar-lhe a limitação imposta pelas regras, mas por ela livremente aceite, e a necessidade de se descentrar, mas também de forma livremente aceite.

O jogo pode assim fornecer-lhe a ponte entre um mundo livre e a realidade, onde o conflito daí resultante a fará ultrapassar-se e realizar-se.

Mas se é nos níveis da construção das operações concretas e formais que se coloca o problema dos papéis respectivos da troca social e das estruturas individuais no desenvolvimento do pensamento (Piaget, cit Clermont, 1978, p. 25), é nessa altura que as crianças estarão numa fase de transição e mais abertas a reestruturações interiores. Por outro lado, a influência da presença de um adversário é geradora de conflito motivador, já que obriga a mudanças de tática e a ter que apreender a situação de forma diversificada, mas também inibidor, pois que a actividade desse adversário se opõe constantemente à da criança (Dami, cit Clermont, 1978, p. 29).

2.2.3. O Jogo e desenvolvimento afectivo-social

Quando se fala de interacções sociais há que ter em conta que a comunicação existente é condicionada pela personalidade de cada interveniente, pelo ser social que cada um é, pelo desenvolvimento emocional e social de cada um.

Sem procurar analisar os vários aspectos afectivo-sociais e a sua classificação e/ou hierarquização, é consensual que os obstáculos de natureza afectiva podem prejudicar a aprendizagem e o desenvolvimento.

Entre os recursos para resolver esses problemas aparecem actividades com jogos, sejam elas lúdicas ou especificamente terapêuticas. São desta opinião muitos investigadores, como Reinert,

Erikson, Piaget ou Czikszenmihalyi, que afirma que "filósofos de Platão a Sartre notaram que as pessoas são mais humanas, integradas, livres e criativas quando jogam" (cit Clermont, 1978, p. 92).

Sem querer entrar por uma abordagem ideológica da sociedade, e não sendo claro que os jogos realizem a integração social, esses jogos, pela sua capacidade de envolver a criança, os adultos e as instituições (escola, família, ...) podem influenciar positivamente aspectos afectivo-sociais das crianças.

2.2.4. O Jogo e desenvolvimento cognitivo

Se o jogo contribui para o desenvolvimento afectivo-social ele contribui notoriamente para o desenvolvimento cognitivo.

No jogo as crianças aprendem quem são, quais os papéis dos que os cercam e familiarizam-se com a cultura e costumes da sociedade. "Elas começam a raciocinar, a desenvolver o pensamento lógico, a expandir seus vocabulários e a descobrir relações matemáticas e factos científicos" (Danoff, Breitbart e Barr, cit em Clermont, 1978, p. 77).

Assim o jogo contribui para a "construção de um pensamento operatório na criança, ou seja um pensamento formal, capaz de manipular o raciocínio hipotético-dedutivo" (Ferran, 1979, p. 18), e particularmente o jogo de regras, que pela organização, pela codificação e pela análise de possibilidades que implica, obriga a afirmação de um pensamento estruturado e convencional, porque livremente aceite.

Não é indiferente, por exemplo, começar a jogar xadrez aos 6 ou aos 16 anos. O cálculo de possibilidades, a organização lógica, a adopção de uma estratégia necessária para jogá-lo vão ter reflexos na estruturação cognitiva da criança.

2.2.5. Interacções e desenvolvimento afectivo-social e cognitivo

Mostrou-se até aqui que o jogo contribui para o desenvolvimento afectivo-social e cognitivo, assim como para as interacções sociais. No entanto estes aspectos não se dissociam entre si, mas pelo contrário relacionam-se e interdependem-se.

"A obrigação de não se contradizer, de pensar logicamente, de fazer afirmações verdadeiras e de usar palavras comumente (culturalmente) entendidas, nasce da interacção social. (...) O desejo de 'fazer sentido' e de trocar pontos de vista com outras pessoas é que auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico da criança" (Kamii, 1986, p. 51). Do mesmo modo os jogos desenvolvem o

senso de competência, segundo White, citado por Anne Clermont (1978), e esta leva à confiança e sentido de eficácia, diminui a ansiedade e melhora o auto-respeito.

Ao coordenar com outrém, a criança cria sistemas de organização das suas acções sobre o real. E nestas condições de coordenação interindividuais que irá procurar dominar e, através de um processo de abstracção, elaborar as suas estruturas cognitivas. Por sua vez, num processo circular, os seus processos cognitivos irão permitir novas interacções sociais (Clermont, 1978, p. 43), cuja dimensão conflitual empresta dinâmica ao conseqüente desenvolvimento intelectual.

Para este processo contribui de forma notória o jogo de regras de tipo competitivo, ao criar situações de conflito sócio-cognitivo. Piaget, ao analisar o papel do jogo de regras na estrutura do pensamento da criança afirma que ele "marca o enfraquecimento do jogo infantil e a passagem ao jogo propriamente adulto, que não é mais uma função vital do pensamento, na medida em que o indivíduo se socializa. Ora, o jogo de regras apresenta precisamente um equilíbrio subtil entre a assimilação ao eu — princípio de todo o jogo — e a vida social. Ele é ainda satisfação (...) intelectual e, ademais, tende à vitória do indivíduo sobre os outros. Mas essas satisfações são, por assim dizer, tornadas 'legítimas' pelo próprio código do jogo, que insere a competição numa disciplina colectiva e numa moral da honra e do fair-play." (1975, p. 216).

2.2.6. *Representações sobre a matemática*

Além da força motivadora, com os contributos óbvios para o desenvolvimento afectivo-social, os comportamentos lúdicos em geral e os jogos de regras em particular, revelam características que são também próprias das formas superiores de raciocínio matemático.

A princípio estabelecem-se convenções sobre processos e conceitos, das quais (pelas regras lógicas) derivarão numerosas proposições isoladas, formulação de leis e de processos.

Nos jogos, as suas regras definem, de entrada, determinadas palavras e símbolos, aos quais o jogador se tem de submeter, rigorosamente. Da sua análise resulta a possibilidade de várias jogadas e estratégias (Hole, 1977, p. 88).

Embora o que se pretenda neste estudo não é averiguar se os jogos de regras têm ou não reflexos na aprendizagem em Matemática de forma quantificável, a motivação e a atitude perante a Matemática são factores que para isso contribuem.

A atitude em particular, ainda numa perspectiva construtivista, envolve "o que as pessoas pensam, sentem, e a forma como gostariam de se comportar em relação a um dado objecto. O comportamento não é apenas determinado pelo que as pessoas gostariam de fazer mas também por aquilo que elas pensam que devem fazer pelas normas sociais, por aquilo que em geral fazem pelos

hábitos sociais, e pelas consequências esperadas do seu comportamento." (Triandis, cit Matos, in Brown, p. 127).

Assim, a atitude condiciona e contribui para o comportamento positivo ou negativo dum criança perante a actividade matemática. Se a criança, na interacção social, constrói o seu próprio conhecimento dum forma pessoal, ela forma então uma concepção acerca da Matemática, no sentido de uma estrutura organizada de informação, "uma rede de construções que podem ser mais ou menos permeáveis à introdução de novos elementos" (Kelly, cit Matos, in Brown, p. 131).

Por sua vez, ainda segundo Matos, os sistemas de concepções, redes interactuantes, constituem a visão dos alunos acerca do mundo matemático. Estes sistemas de concepções influenciam o comportamento dos alunos e as escolhas que eles realizam quando se encontram em actividade matemática.

Os sistemas de concepções vão encaixar na ideia de representações sociais, teorias implícitas acerca dos objectos sociais relevantes e são uma modalidade de conhecimento que serve a apreensão, avaliação e explicação da realidade. Isso sucede também para a Matemática em particular, onde as experiências pessoais, extra e intra escolares, com professores, com pessoas que falam sobre a Matemática, com ideias transmitidas pelos Media, e com o tipo de actividades matemáticas em que se viu envolvida, leva a criança a construir a sua própria representação.

Então, nesta perspectiva, qualquer actividade que envolva aplicações matemáticas, sequências lógico-dedutivas, histórias da Matemática, resolução de problemas ou hábitos de pensamento organizado parece contribuir para modificar as atitudes e as representações sobre a Matemática. Parece ser o caso do jogo com regras.

Sendo o jogo de regras um jogo com três características fundamentais:

- Jogado, a partir dum certa altura, ao longo de toda a vida;
- Exigir regras, uma estrutura cognitiva;
- Estabelecer relações interpessoais.

Parece ser um tipo de actividade privilegiado para potenciar numa criança/ aluno um determinado número de valências nos campos relacional, afectivo, social, cognitivo, de forma harmoniosa, lúdica e motivadora, acrescentando ainda os factores oportunidade e consenso.

Isto porque sendo jogos não didácticos, não ficam limitados ao ambiente escolar e podem ser usados em família, em qualquer local, com qualquer pessoa. Por outro lado escapam às polémicas relações entre jogo e trabalho, e à maior ou menor conveniência de se introduzir o jogo no espaço-aula. Por outras palavras, é abrangente, motivador e consensual.

2.3. Jogos de Matriz

A moderna teoria de jogos desenvolveu-se sem fazer referência a nenhum jogo em concreto e pode-se aplicar à análise de qualquer comportamento competitivo, incluindo jogos, a economia, a guerra ou a competência biológica. Em muitos dos jogos mais conhecidos os oponentes devem fazer uma sequência de movimentos de acordo com as regras do jogo e, em alguns casos, os movimentos sucessivos fazem-se com a informação completa das possibilidades do adversário, como no xadrez, mas noutros casos essa informação é incompleta, como nos jogos de cartas onde não sabemos qual o jogo do adversário. Um jogador pode decidir as suas jogadas ao acaso ou analisando todas ou algumas das jogadas possíveis.

Nesta secção vamos analisar jogos entre duas pessoas que possam ser descritos por uma matriz de ganhos e, por isso, chamados Jogos de Matriz.

Seja $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ uma matriz. Consideremos um jogo entre dois adversários, João Linha (L) e Paulo Coluna (C), determinado pela matriz A baseado nas seguintes regras. Em cada movimento do jogo, L escolhe uma das suas m escolhas disponíveis e, C escolhe uma das suas n escolhas disponíveis. Estas escolhas são simultâneas e nenhum dos dois sabe a escolha do adversário. O valor de a_{ij} representa o ganho de L num movimento onde L optou pela escolha i e C optou pela escolha j . Se a_{ij} for negativo isso representa que L não ganha mas sim paga. Por isso chamamos a esta matriz, a matriz de ganhos.

Um exemplo simples de um jogo de matriz é o «jogo da moedinha». Suponhamos que L joga com 2 moedas e C joga com 3 moedas. Uma jogada corresponde a ambos mostrarem numa das mão as moedas que entenderem daquelas que possuem. Portanto L tem três hipóteses, 0, 1, ou 2, e C tem quatro hipóteses, 0, 1, 2, ou 3. Se o número de moedas mostradas por ambos os jogadores for par então L ganha 1 unidade de prémio, caso contrário L paga 1 unidade a C. Podemos então escrever a matriz de ganhos:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Várias questões se podem levantar relativamente a este tipo de jogo: Em cada jogada haverá alguma escolha que seja melhor que as restantes, portanto, que dê mais

probabilidade de sucesso. Numa jogada qual o valor que posso esperar ganhar. Em n jogadas qual o valor que posso esperar ganhar? Haverá alguma estratégia óptima a seguir?

Como facilmente se percebe a Teoria de Probabilidades desempenhará papel importante na análise destas questões, e será um tema interessante que relaciona jogos com probabilidades.

Capítulo 3: Estratégias

Neste capítulo vou dar alguns exemplos conhecidos de aplicações de grafos. Quero salientar, no entanto a última aplicação, “Planificações do Cubo”, visto não ser uma aplicação conhecida, mas sim um estudo feito por mim. Este interesse surgiu de uma aula de Métodos de Investigação em Matemática, donde resultou uma dúvida; quantas planificações possíveis teria o cubo? Como o cubo se pode transformar num grafo planar, decidi investigar.

3.1. Exemplos Típicos

3.1.1. Labirinto de Hampton

Um exemplo frequente de aplicação de grafos à resolução de jogos é o caso dos labirintos. O objectivo num labirinto costuma ser sair do labirinto. Então, no grafo, bastará encontrar um caminho que satisfaça esse objectivo. Um labirinto famoso encontra-se nos jardins do Palácio Real de Hampton, do qual temos uma vista aérea na figura seguinte.



Figura 9

Vamos definir um grafo onde os vértices representam determinadas posições do labirinto, um dos vértices será o ponto de partida e o ponto de chegada será a saída do labirinto. No esquema seguinte definimos a colocação dos vértices.

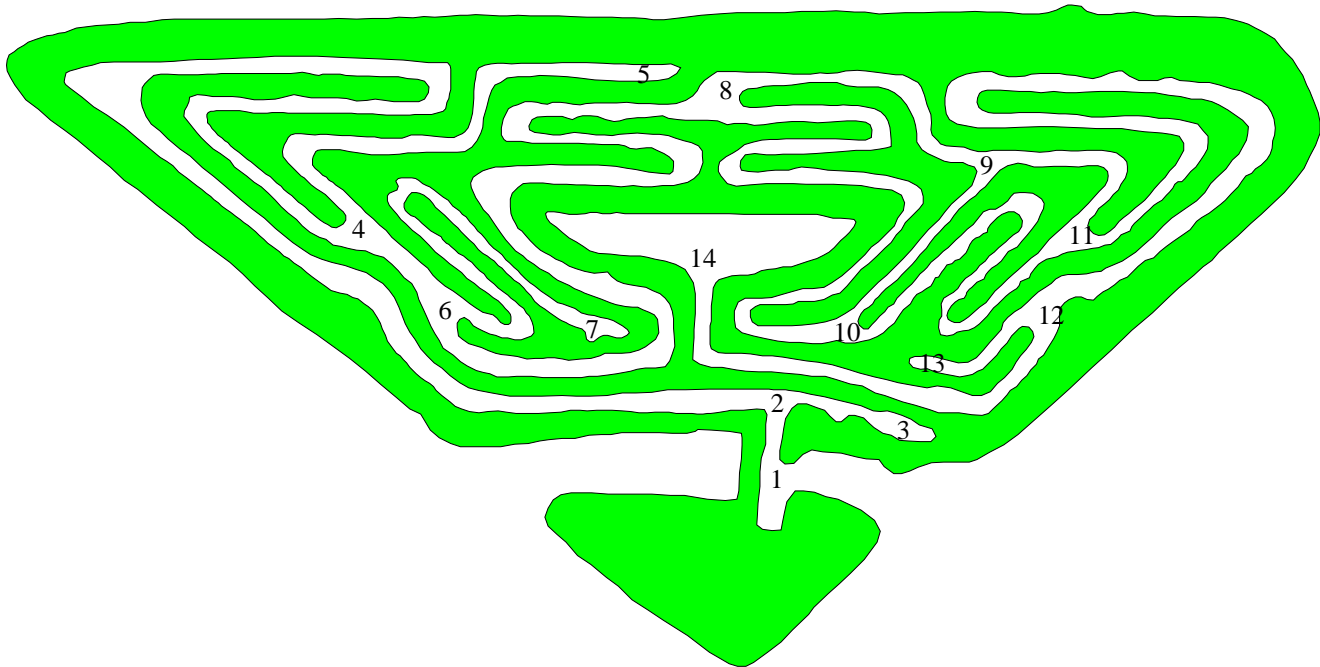


Figura 10

Somos portanto conduzidos ao grafo da figura seguinte, onde o vértice 14 é o ponto de partida e o vértice 1 é o ponto de chegada. Temos então de averiguar se existe um caminho desde o vértice 14 até ao vértice 1.

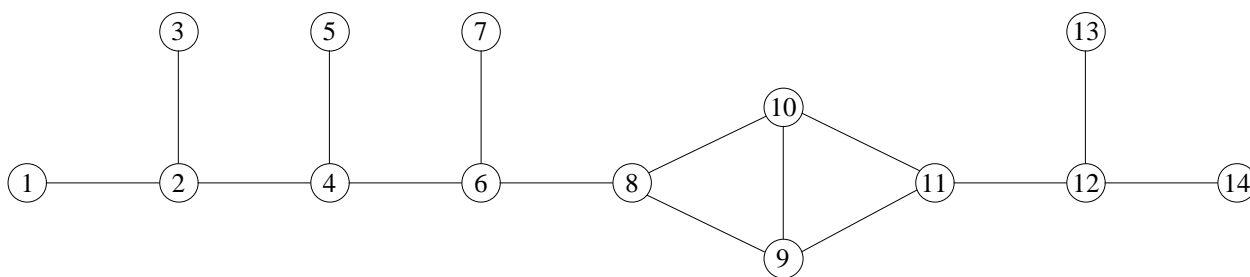


Figura 11

A existência do caminho pretendido é óbvia por observação da representação do grafo. Basta seguir a sequência de vértices: (14,12,11,10,8,6,4,2,1).

3.1.2. *Desenhar sem levantar o lápis:*

Na secção relativa às considerações históricas escrevemos sobre o problema das pontes de Königsberg, problema importante em termos históricos mas também um problema que retracts uma situação que nos é colocada frequentemente em alguns jogos, quando nos pedem para desenhar uma figura sem levantar o lápis do papel e passando uma única vez em cada linha. De facto, conseguir efectuar tal desenho corresponde a determinar um atalho de Euler e portanto podemos usar a teoria apresentada para decidir por simples observação do desenho em que situações vai existir solução.

Suponhamos que pretendemos desenhar a figura abaixo:

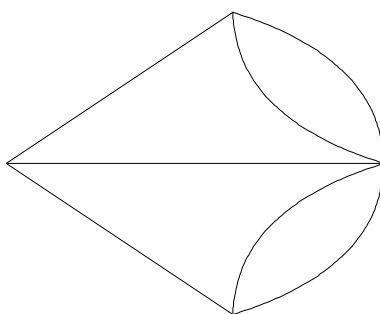


Figura 12

Alguém inexperiente começará por efectuar várias tentativas e rapidamente começará a suspeitar da impossibilidade da tarefa que lhe foi proposta. Este desenho é o que se obtêm no caso das pontes de Königsberg. Na figura abaixo relembramos o esquema de Königsberg e as suas pontes.

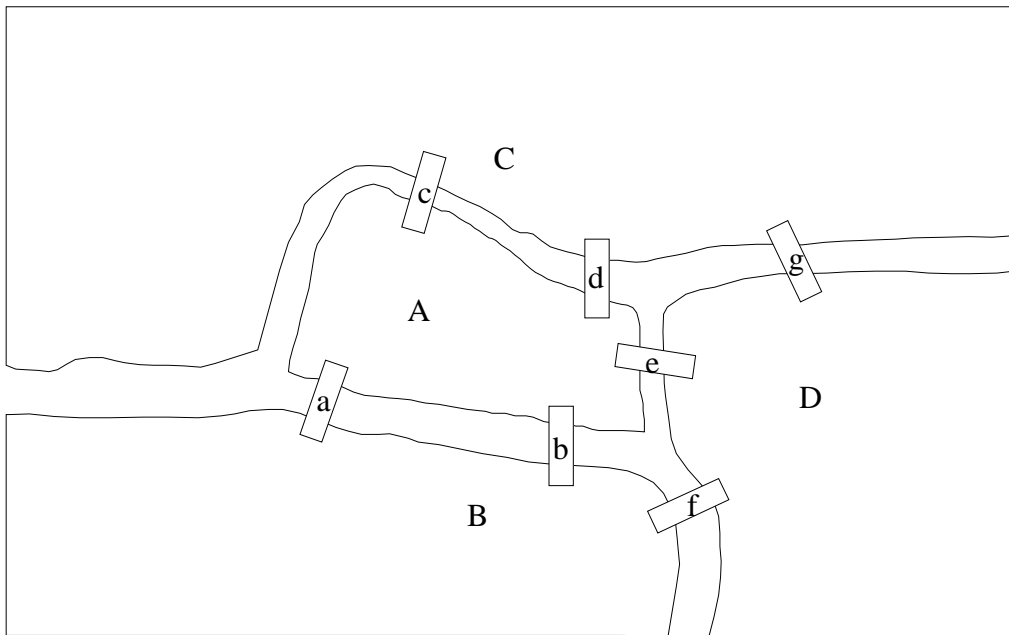


Figura 13

A partir da figura com as pontes podemos desenhar um grafo usando as letras das regiões para identificar os vértices do grafo e as letras das pontes para identificar as arestas. Na figura abaixo vemos o grafo originado.

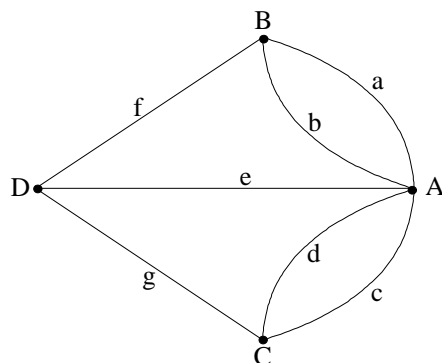


Figura 14

Este grafo tem cinco vértices e, como o grau de um vértice, não havendo lacetes, é o número de arestas que lhe são incidentes vemos que o vértice A tem grau 5 e os restantes vértices têm grau 3. Existem mais do que dois vértices de grau ímpar logo, baseados na teoria apresentada, não será possível efectuar o desenho sem levantar o lápis do papel e passando uma única vez em cada linha.

Vamos agora efectuar uma pequena alteração ao desenho mudando apenas a posição de um dos riscos e pretende-se agora efectuar este desenho nas condições já referidas.

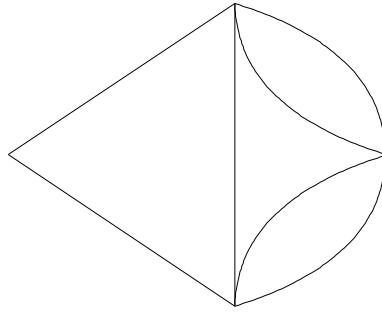


Figura 15

Note-se que, em termos de Königsberg, isto corresponderia a mudar a posição de uma das pontes. A ponte 'e' deixa de unir as regiões A e D e passa a unir as regiões B e C, obtendo este novo esquema:

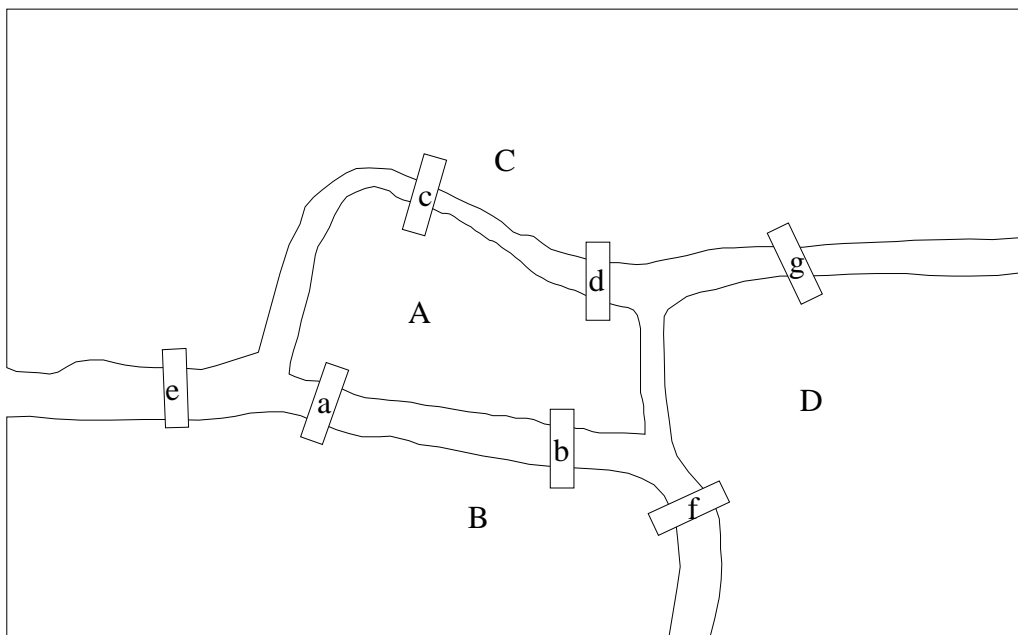


Figura 16

O grafo obtido passa a ser o seguinte:

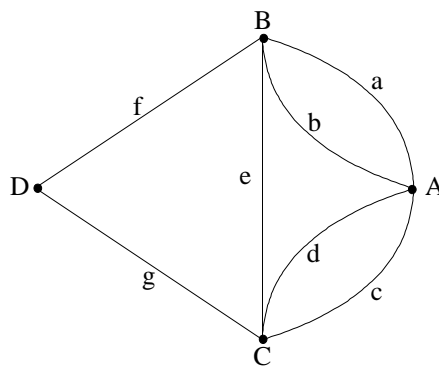


Figura 17

A próxima figura, apesar de muito mais simples, já não é possível ser desenhada nas condições referidas. De facto, havendo quatro vértices de grau ímpar ficamos impossibilitados de efectuar tal desenho.

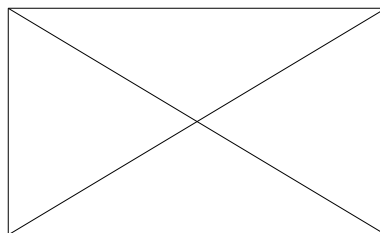


Figura 21

3.1.3. *O jogo do Dodecaedro*

Apresentámos, na exposição histórica, o jogo criado por William Hamilton «Icosian Game». Como o jogo consta de um grafo que é a planificação de um sólido com doze faces vamos designar este jogo por Dodecaedro. Um primeiro desafio que se pode colocar a um jogador é descobrir um trajecto que passe por todos os vértices começando e terminando no mesmo vértice e sem repetir vértices interiores, ou seja, pretende-se descobrir um ciclo de Hamilton. Este problema tem solução e uma forma de o provar é evidenciando-a. Na figura abaixo está marcado um ciclo de Hamilton: 1, 2, 3, 4, 9, 14, 19, 20, 16, 17, 18, 13, 8, 12, 7, 11, 6, 15, 10, 5, 1, e por esse facto este grafo é hamiltoniano.

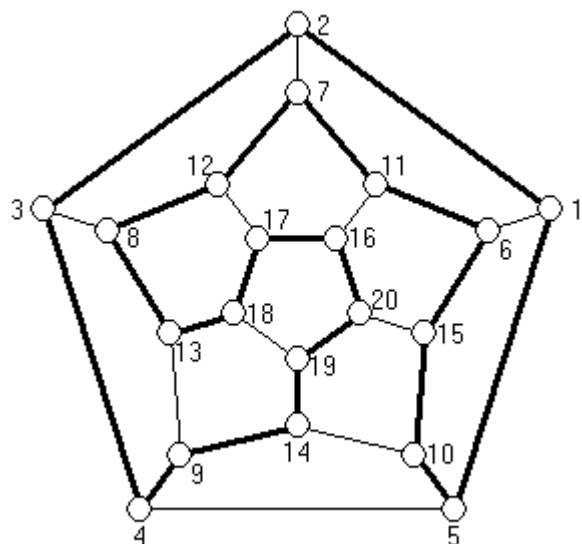


Figura 22

Outro problema que pode ser colocado no Dodecaedro, agora para dois jogadores, é iniciado pelo primeiro jogador escolhendo um caminho de comprimento quatro, isto é, escolhendo cinco vértices consecutivos, e o segundo jogador terá de prolongar esse caminho de modo a obter um ciclo de Hamilton. Por exemplo, o primeiro jogador escolhia a sequência de vértices 17, 16, 11, 6, 15 como se indica na figura.

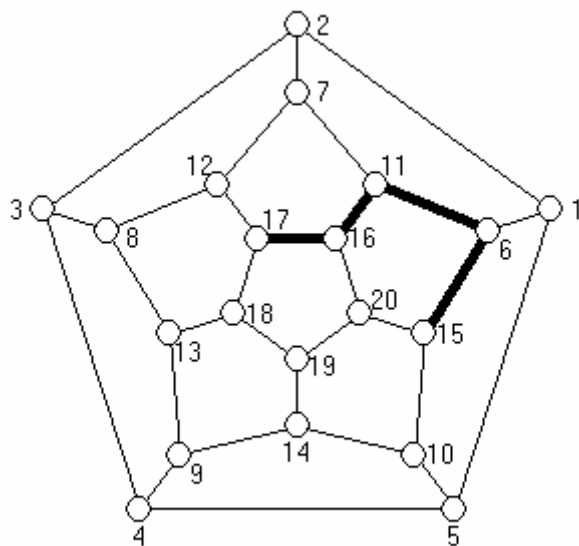


Figura 23

De seguida o segundo jogador pode responder de qualquer uma destas formas pois desse modo consegue completar um ciclo de Hamilton: 20, 19, 14, 10, 5, 1, 2, 7, 12, 8, 3, 4, 9, 13, 18 ou então 20, 19, 18, 13, 8, 3, 4, 9, 14, 10, 5, 1, 2, 7, 12, como se pode ver na figura abaixo onde o caminho relativo aos vértices colocados pelo

primeiro jogador aparece mais carregado e o prolongamento até formar um ciclo aparece a traço intermédio.

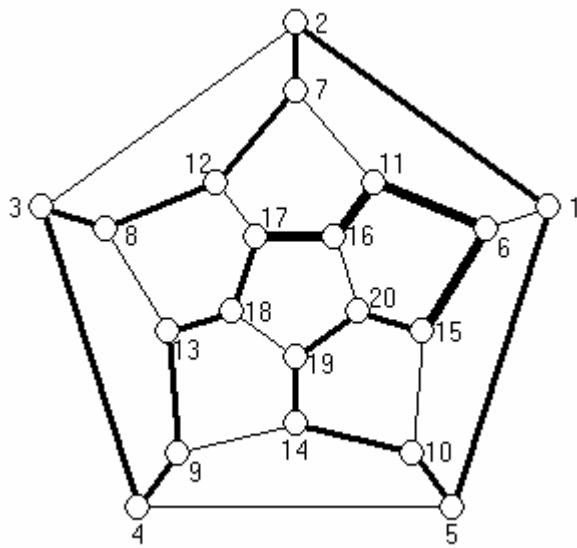


Figura 24

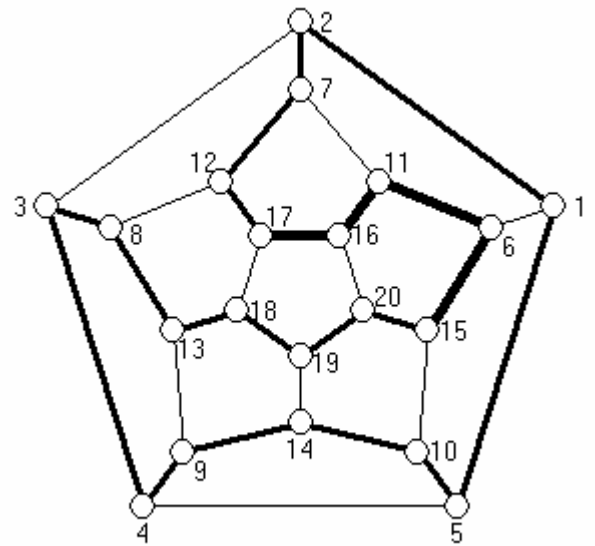


Figura 25

Um outro problema que se pode colocar para dois jogadores é iniciado pelo primeiro jogador escolhendo os três vértices iniciais e a posição do vértice final de um caminho de Hamilton. A resposta do segundo jogador será com o objectivo de completar esse caminho. Na figura seguinte aparece uma possível escolha do primeiro jogador 17, 16, 20 com fim em 5, estando o vértice final assinalado a preto.

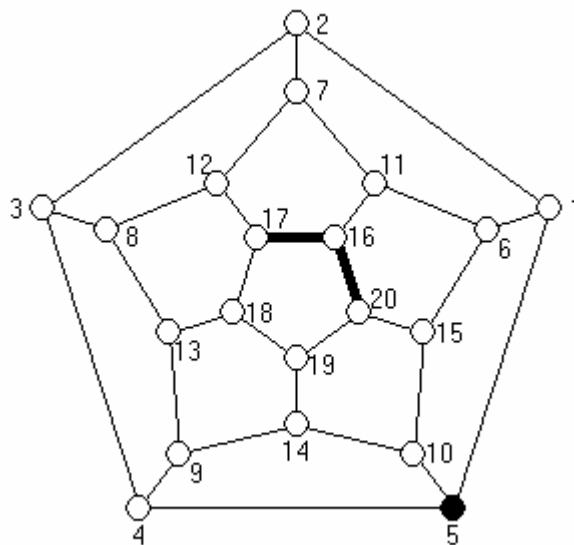


Figura 26

O segundo jogador pode responder com 19, 18, 13, 8, 12, 7, 11, 6, 15, 10, 14, 9, 4, 3, 2, 1, 5 como se indica na figura, estando marcados a preto os vértices escolhidos pelo primeiro jogador e o passeio correspondente à sequência de vértices escolhida pelo segundo jogador está marcada com arestas de grossura intermédia.

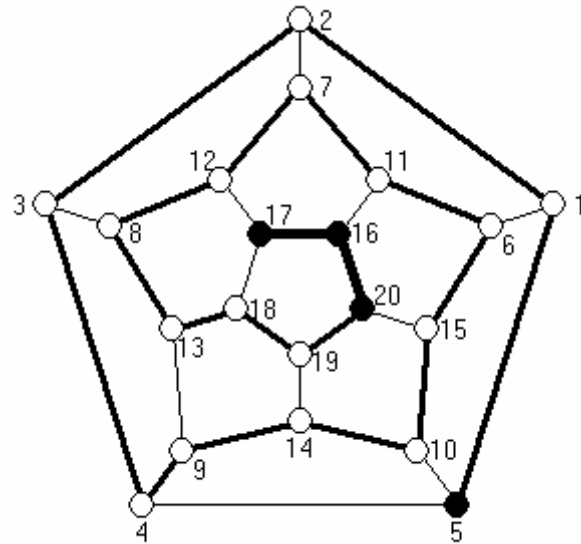


Figura 27

Vamos mostrar de seguida que este jogo é um jogo de estratégia óptima injusta pois o primeiro jogador tem uma estratégia óptima a seguir que lhe garante a vitória. De facto, se o primeiro jogador escolher, por exemplo, os vértices 17, 16, 20 e pedir que o passeio termine no vértice 15 então o segundo jogador nunca conseguirá fazê-lo, como se prova de seguida.

Na figura abaixo está a jogada inicial que o primeiro jogador deve efectuar:

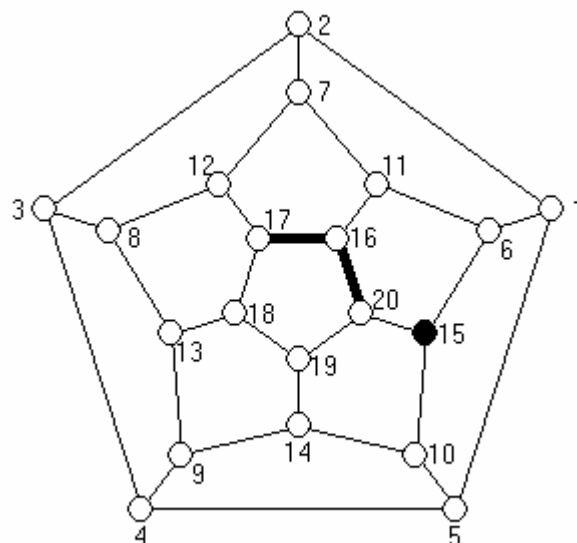


Figura 28

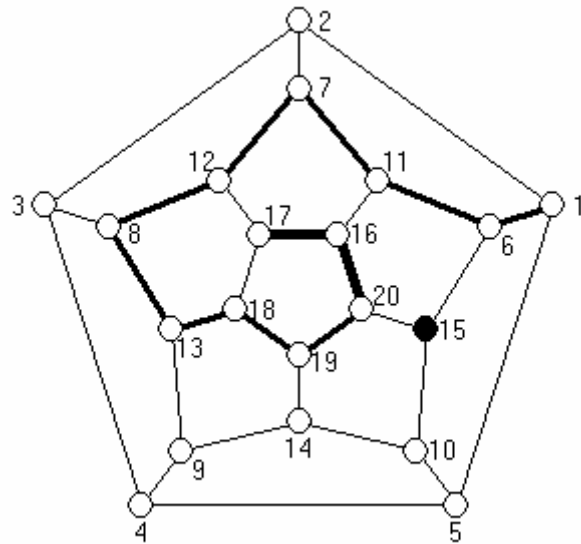


Figura 30

Se seguisse agora por 5 então, para passar por 2 seria a partir de 3 e ficaria encurralado. Logo não pode seguir por 5 mas sim por 2. Depois, obrigatoriamente por 3 e por 4 chegando a 17, 16, 20, 19, 18, 13, 8, 12, 7, 11, 6, 1, 2, 3, 4, como se vê abaixo:

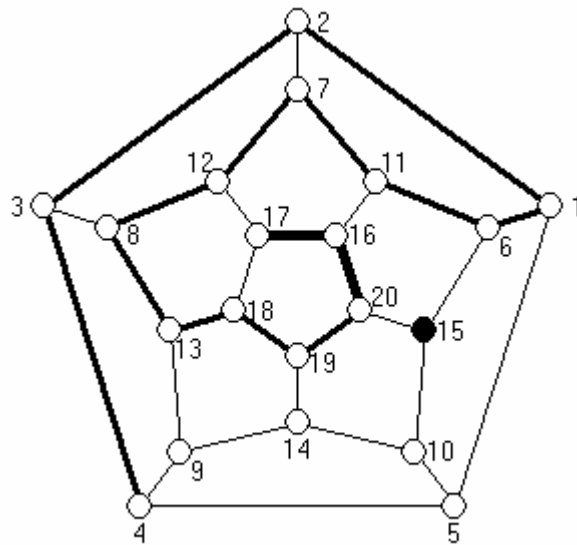


Figura 31

Nesta fase não poderá seguir por 5 pois nesse caso para chegar ao 9 seria a partir de 14 e ficaria encurralado, logo tem de ir agora para o 9. Depois obrigatoriamente para 14 e depois 10. Obtemos 17, 16, 20, 19, 18, 13, 8, 12, 7, 11, 6, 1, 2, 3, 4, 9, 14, 10 como se vê na figura:

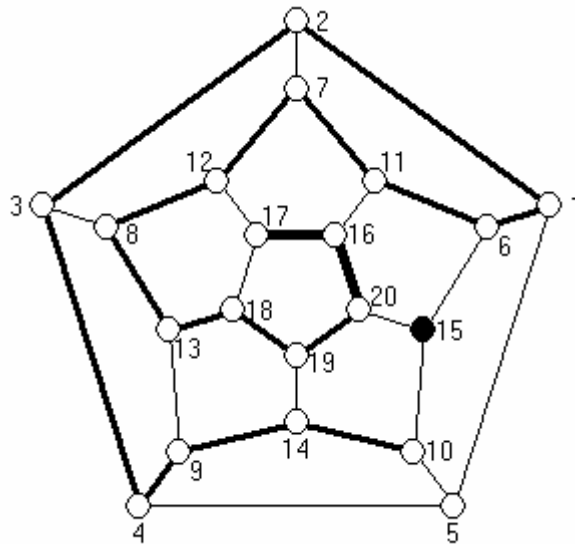


Figura 32

Falta só passar por 5 e por 15. Mas se vou para 15 chego ao fim sem passar pelo 5 e, se vou para 5 não conseguirei chegar a 15. O nosso objectivo de chegar a 15 não pode ser alcançado por aqui.

Temos ainda de analisar a outra hipótese que tínhamos quando estávamos na posição da figura abaixo:

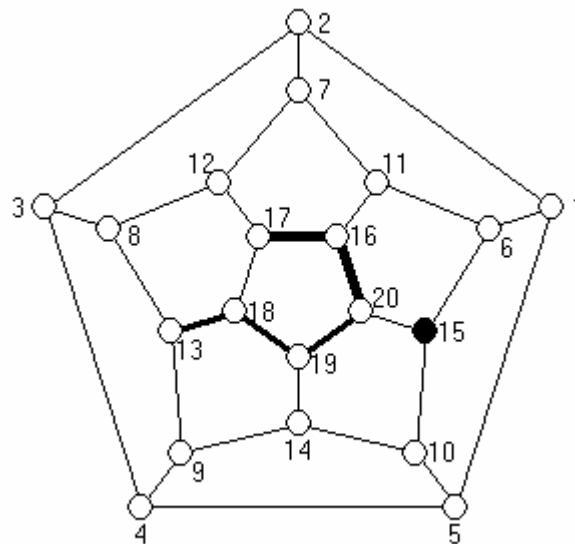


Figura 33

Na altura tínhamos optado por 8 vamos agora optar por 9. Se continuarmos por 4 então para chegar posteriormente ao 14 será a partir de 10 e ficaremos encurralados. Logo, depois do 9 terá de vir o 14 e de seguida o 10, obtendo 17, 16, 20, 19, 18, 13, 9, 14, 10. Não podemos terminar já por isso temos de prosseguir para 5 e não para 15. Obtemos 17, 16, 20, 19, 18, 13, 9, 14, 10, 5 como se mostra na figura:

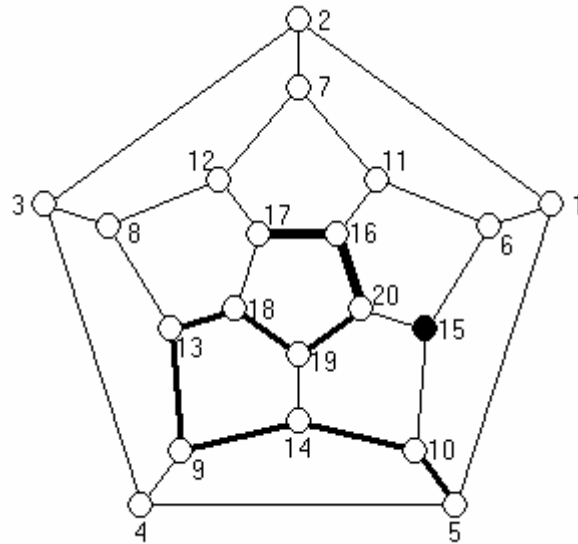


Figura 34

Se seguíssemos para 1 então para chegar ao 4 seria a partir de 3 e ficaríamos encurralados, logo vamos para 4 agora. Depois obrigatoriamente para 3 e obtemos 17, 16, 20, 19, 18, 13, 9, 14, 10, 5, 4, 3. Se não formos agora para 8 então para lá chegar será a partir de 12 e novamente encurralados, por isso terá de ser agora o 8, depois obrigatoriamente o 12 e o 7, obtendo 17, 16, 20, 19, 18, 13, 9, 14, 10, 5, 4, 3, 8, 12, 7 como se vê na figura:

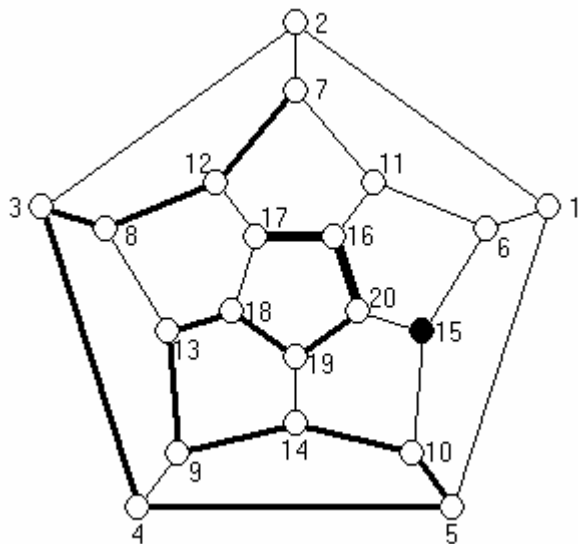


Figura 35

Chegando ao 7, se não formos para o 2 agora, teríamos de ir lá dar a partir do 1 e ficaríamos encurralados, logo vamos para o depois e depois, obrigatoriamente para o 1 e de seguida para o 6, obtendo 17, 16, 20, 19, 18, 13, 9, 14, 10, 5, 4, 3, 8, 12, 7, 2, 1, 6, como se vê na figura abaixo:

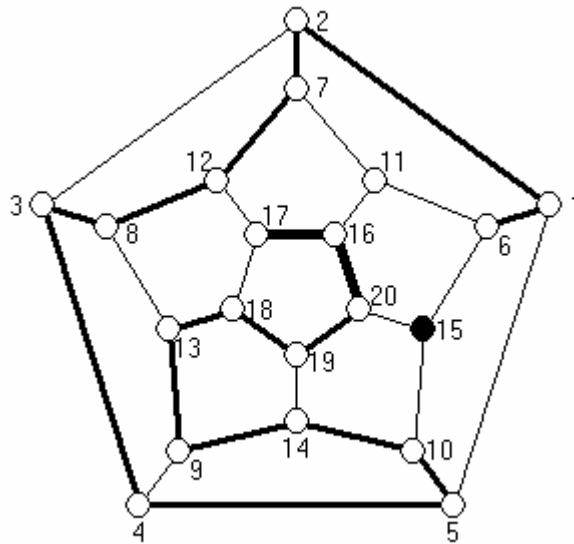


Figura 36

Vemos agora que, não podemos ir para o 15 pois chegávamos ao fim sem passar pelo 11, mas também não podemos ir para o 11 pois não chegávamos assim ao 15. Não temos mais hipóteses por isso conclui-se que não existe uma resposta para a jogada inicial 17, 16, 20 e fim no 15.

3.1.4. *Coloração de Mapas*

Considere-se a seguinte figura:

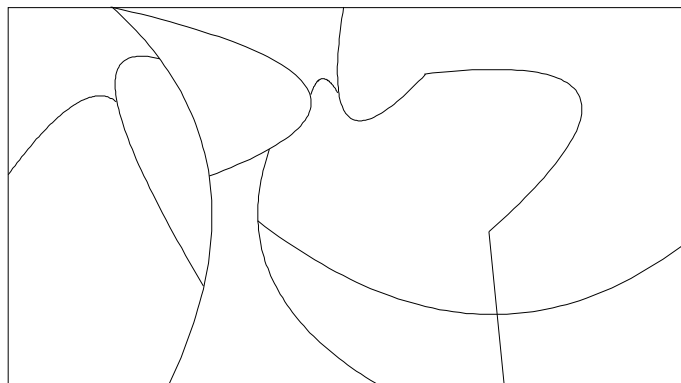


Figura 37

Será possível colorir as várias regiões de modo que regiões adjacentes fiquem com cores diferentes, usando, no máximo, quatro cores? Como vimos, na secção relativa à parte histórica, a resposta é afirmativa pois qualquer mapa pode ser colorido usando no máximo quatro cores. Nesta secção vamos aplicar resultados

enunciados na secção teórica para ver como proceder, em cada mapa, para determinar qual o número mínimo de cores necessário para a coloração do mapa.

Relativamente ao mapa da figura abaixo pretende-se colori-lo usando o menor número de cores e de modo que dois países com fronteira comum tenham cores diferentes.

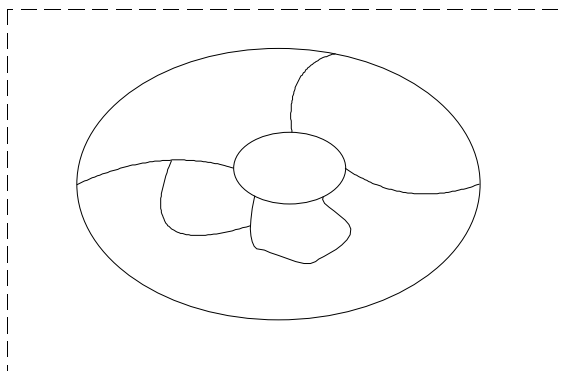


Figura 38

Uma vez que este mapa tem 5 países vamos associar a este mapa um grafo com 6 vértices pois precisamos também de um vértice para representar a região exterior. Unimos por uma aresta os vértices que correspondem a países com fronteira comum e obtemos a seguinte representação visual do grafo.

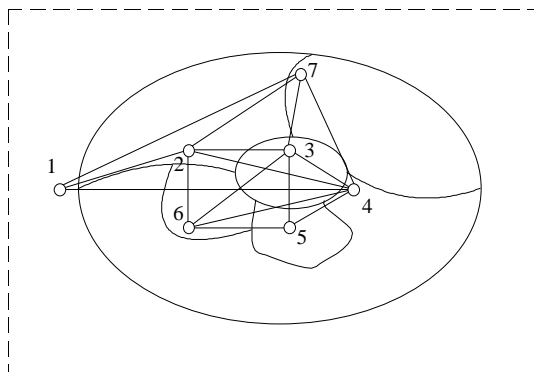


Figura 39

Vamos então determinar o polinómio cromático do grafo seguinte:

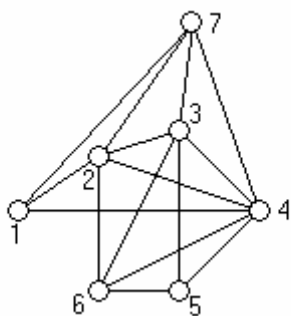
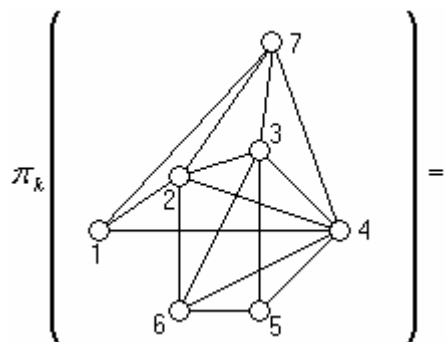
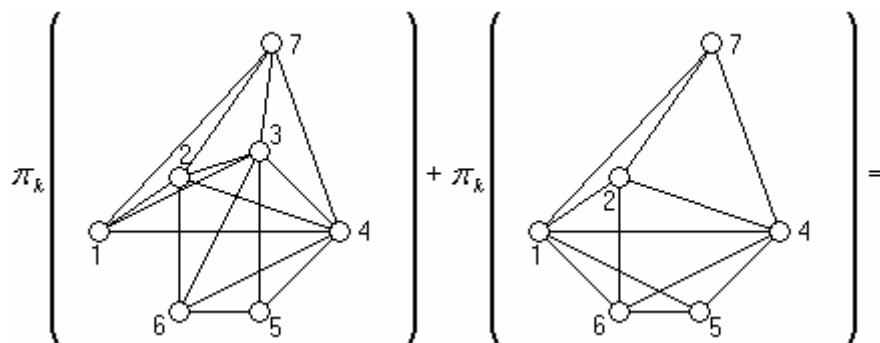


Figura 40

Vimos na secção teórica que, para qualquer aresta a de um grafo G temos $\pi_k(G) = \pi_k(G-a) + \pi_k(G \cdot a)$. Como, no caso de G ser vazio, temos uma regra para determinar $\pi_k(G)$ então a igualdade anterior fornece um método algorítmico para determinar $\pi_k(G)$ em geral, pois aplicando sucessivamente a igualdade anterior vamos obter apenas grafos vazios. Acontece que este grafo tem 11 arestas e, para eliminar cada uma delas teríamos de aplicar o método 11 vezes, ou seja, como de cada vez que se aplica o método o número de grafos duplica então iríamos transformar o cálculo de π_k para 1 grafo no cálculo de π_k para 2^{11} grafos. Vemos então que este algoritmo não é eficiente pois é exponencial, se o grafo tem m arestas então será preciso determinar 2^m grafos. Podemos, no entanto, observar que a igualdade anterior pode ser escrita de outra forma, $\pi_k(G-a) = \pi_k(G) - \pi_k(G \cdot a)$. Então, em vez de eliminar arestas até obter grafos vazios, podemos acrescentar arestas até obter grafos completos, pois também sabemos calcular $\pi_k(G)$ no caso de G ser completo. Como faltam 4 arestas para o nosso grafo ser completo teremos então de aplicar o método 4 vezes e determinar 2^4 grafos, o que já é um valor aceitável. É aceitável neste caso mas a verdade é que o algoritmo continua a ser exponencial. Não se conhecem algoritmos eficientes para determinar o polinómio cromático de um grafo. Vamos então aplicar o método neste caso.



vamos tornar adjacentes os vértices 1 e 3, obtendo



no primeiro grafo tornamos adjacentes os vértices 1 e 5, no segundo grafo os vértices 2 e 5, donde

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 1: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 2: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) + \\
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 3: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 4: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) =
 \end{array}$$

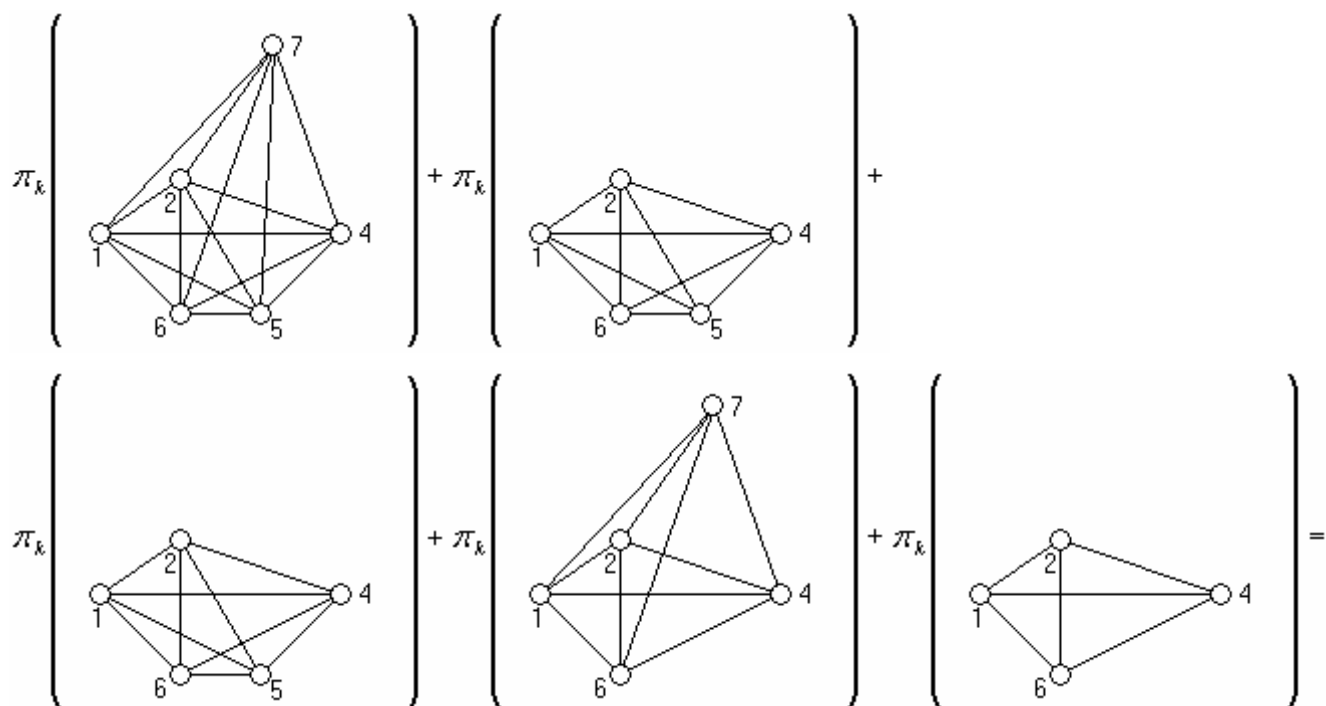
no primeiro grafo tornamos adjacentes os vértices 1 e 6, no segundo grafo os vértices 6 e 7, no terceiro grafo os vértices 5 e 7, e no quarto grafo os vértices 6 e 7, obtendo

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 1: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 2: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) + \\
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 3: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 4: Complete graph K}_7 \text{ with vertices 1-7]} \end{array} \right) +
 \end{array}$$

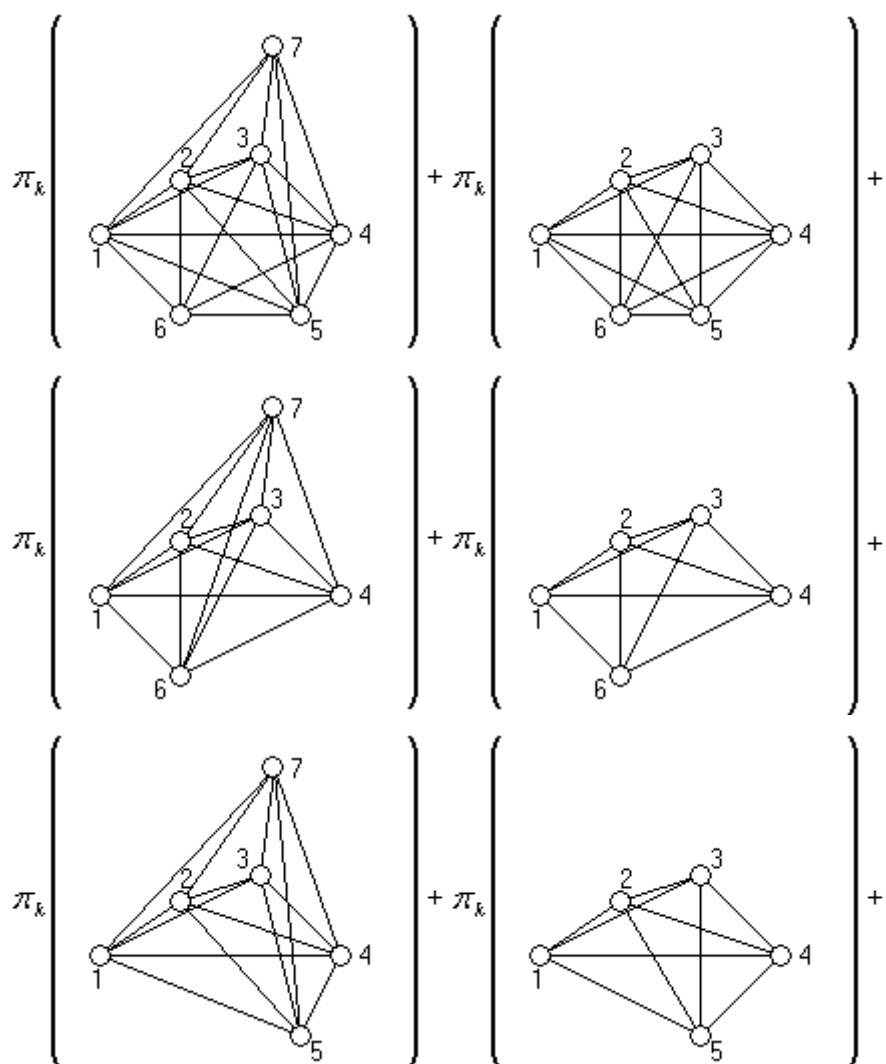
$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 1: 7 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7, 3-5, 3-6, 3-7, 4-5, 4-6, 4-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 2: 4 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7]} \end{array} \right) + \\
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 3: 7 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7, 3-5, 3-6, 3-7, 4-5, 4-6, 4-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 4: 4 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7]} \end{array} \right) =
 \end{array}$$

no primeiro e no segundo grafo tornamos adjacentes os vértices 2 e 5, no quinto grafo os vértices 6 e 7, os restantes grafos já são completo, donde obtemos

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 1: 7 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7, 3-5, 3-6, 3-7, 4-5, 4-6, 4-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 2: 7 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7, 3-5, 3-6, 3-7, 4-5, 4-6, 4-7]} \end{array} \right) + \\
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 3: 7 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7, 3-5, 3-6, 3-7, 4-5, 4-6, 4-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 4: 4 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7]} \end{array} \right) + \\
 \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 5: 7 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7, 3-5, 3-6, 3-7, 4-5, 4-6, 4-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Graph 6: 4 vertices, 1-4 complete, 1-6, 1-5, 2-5, 2-6, 2-7]} \end{array} \right) +
 \end{array}$$



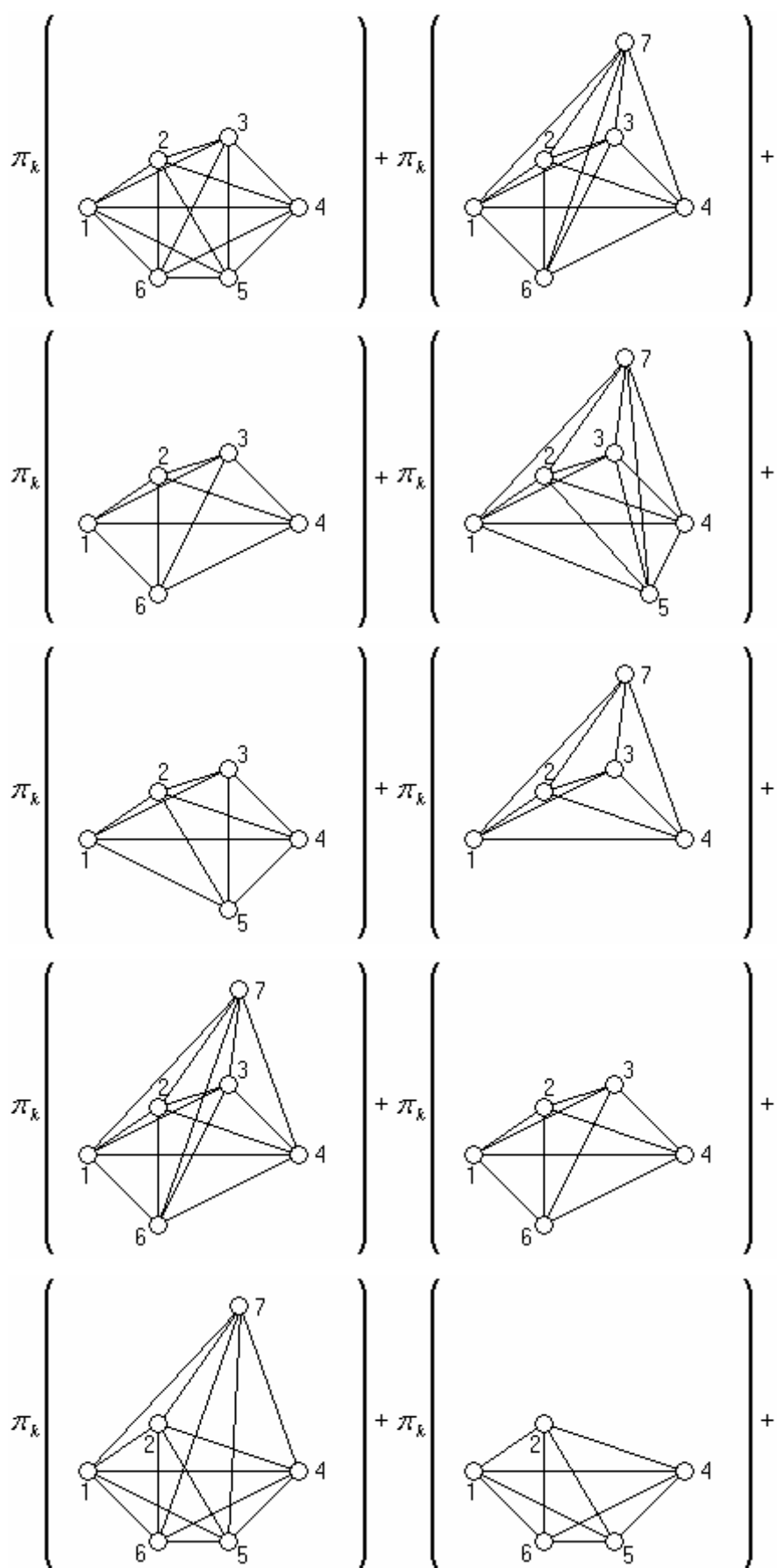
no primeiro grafo tornamos adjacentes os vértices 5 e 7, no segundo grafo os vértices 6 e 7, no terceiro grafo os vértices 5 e 7, todos os restantes são completos,



$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 1} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 2} \end{array} \right) + \\
& \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 3} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 4} \end{array} \right) + \\
& \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 5} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 6} \end{array} \right) + \\
& \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 7} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 8} \end{array} \right) =
\end{aligned}$$

no primeiro grafo falta só tornar adjacentes os vértices 6 e 7, todos os outros grafos já são completos,

$$\left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 9} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{Graph 10} \end{array} \right) +$$



$$\left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Diagram 1: } K_7 \text{ with nodes 1-7]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Diagram 2: } K_6 \text{ with nodes 1-6]} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \pi_k \\ \text{[Diagram 3: } K_5 \text{ with nodes 1-5]} \end{array} \right) =$$

$$= \pi_k(K_7) + 5 \times \pi_k(K_6) + 7 \times \pi_k(K_5) + \pi_k(K_4) = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)(k-7) +$$

$$+ 5 \times k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5) + 7 \times k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) + k(k-1)(k-2)(k-3) =$$

$$= k(k-1)(k-2)(k-3)[(k-4)(k-5)(k-6) + 5(k-4)(k-5) + 7(k-4) + 1]$$

Podemos aqui observar que, designando por G o nosso grafo, $\pi_1(G) = \pi_2(G) = \pi_3(G) = 0$, isto é, nunca conseguiremos colorir o nosso mapa com menos de quatro cores pois tais colorações não existem. Como $\pi_4(G) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (0 + 0 + 0 + 1) = 24$ temos então 24 maneiras diferentes de fazer essa coloração usando 4 cores. O facto de $\pi_4(G) \neq 0$ está de acordo com o enunciado do teorema das 4 cores que nos garantia a existência de tal coloração.

Vemos abaixo uma possível coloração do grafo com 4 cores

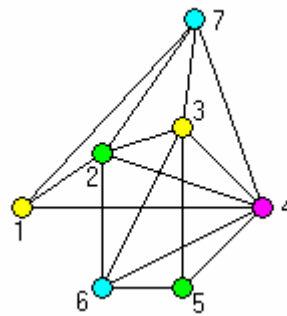


Figura 41

que corresponde ao mapa:

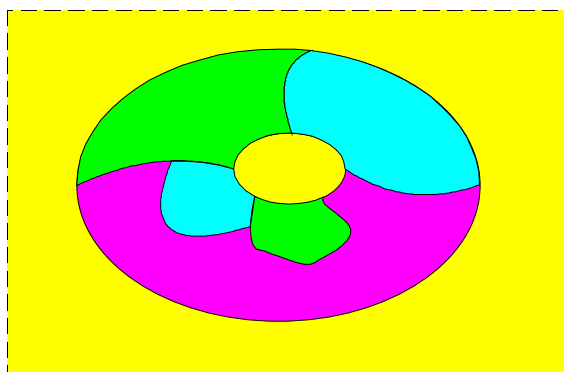


Figura 42

3.2. Pong Hau Kí

O Pong Hau K'i é um jogo originário da região de Cantão na China mas, na Coreia, é designado por Ou-moul-ko-no. O jogo é extremamente simples quer em termos de material usado como em termos de regras. Existe uma variante europeia do jogo, do período medieval, um pouco mais complexa conhecida por Madelinette.

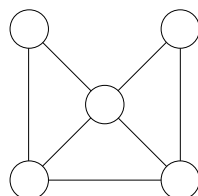


Figura 43

É um jogo para dois jogadores e o material necessário é um tabuleiro como o da figura acima, com cinco casas, e duas peças para cada jogador: duas azuis e duas vermelhas. Na figura seguinte indica-se a disposição inicial das peças no tabuleiro.

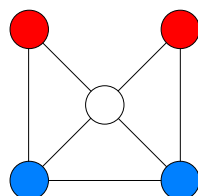


Figura 44

Sorteia-se qual dos jogadores começa a movimentar as suas peças e o objectivo é impedir qualquer movimento do adversário. Só pode estar uma peça em cada ponto. Não há capturas. Alternadamente, cada jogador desloca uma das suas peças para a

única casa livre do tabuleiro, seguindo as linhas. Vence quem conseguir bloquear o adversário impedindo-o de movimentar as suas peças.

Para futura referência neste trabalho vamos designar as casas por números:

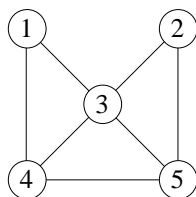


Figura 45

Não pretendemos fazer um desenho sempre que precisarmos de nos referir a uma dada disposição das peças no tabuleiro. Assim, vamos arranjar um simbolismo para representar qualquer configuração e que nos permita seguir o desenrolar do jogo. Podemos observar que basta indicar onde se encontram as peças vermelhas (por exemplo), qual a casa vazia e qual a cor do seguinte jogador a mover uma peça. Seja $I = \{1,2,3,4,5\}$. Um terno da forma $(\{a,b\},c,X)$, define completamente a situação do jogo, onde $\{a,b,c\} \subset I$, a e b indicam as casas ocupadas pelas peças vermelhas, c indica a casa vazia e $X \in \{A,V\}$, azul ou vermelho, indica a cor do próximo jogador. Por exemplo a configuração inicial, no caso de começarem a jogar as vermelhas, será $(\{1,2\},3,V)$. Podemos calcular quantas configurações existem. Como temos de escolher 2 casas, entre 5, para colocar as peças vermelhas, 1 casa entre as 3 restantes para deixar vazia e 1 jogador entre 2 possíveis, então o número total de configurações será $C_2^5 \times 3 \times 2 = 10 \times 3 \times 2 = 60$.

Pretendemos analisar matematicamente o desenrolar do jogo e, eventualmente, descobrir uma estratégia óptima que um jogador deva seguir para alcançar o objectivo do jogo e, para isso, vamos utilizar grafos. O próprio tabuleiro do jogo corresponde à representação visual que demos anteriormente de grafos mas com esse grafo apenas conseguiríamos retractor uma parte das regras do jogo, nomeadamente a aresta que une dois vértices, permitindo o deslocamento de uma peça entre duas casas. Para o nosso objectivo isto é muito pouco. O nosso grafo deve permitir transições entre configurações do jogo, levando assim a uma possível situação de vitória de um dos jogadores. Assim os vértices do nosso grafo seriam as configurações e as arestas uniriam duas configurações que possam suceder-se no desenrolar do jogo. Vimos que existem 60 configurações logo o nosso grafo teria 60 vértices. Este número já é suficientemente grande para exigir algoritmos e utilização do computador para resolver o problema. Como não é esse o objectivo deste trabalho

vamos procurar diminuir o número de vértices mas mantendo as características do problema. Podemos comparar, como exemplo, as duas configurações seguintes, supondo que jogam as vermelhas:

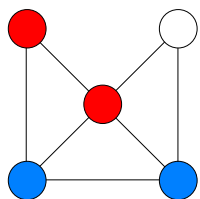


Figura 46

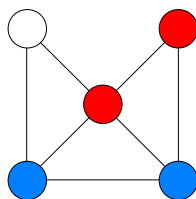


Figura 47

Analisar uma é exactamente o mesmo que analisar a outra e, os dois jogadores estão exactamente na mesma situação numa ou noutra. Isto acontece porque um dos desenhos corresponde a uma simetria (vertical) do outro. Todas as configurações onde isto aconteça podem ser consideradas como sendo a mesma e, deste modo, vamos diminuir o número de vértices. Esta situação de duas configurações diferentes corresponderem à mesma situação de jogo não existe sempre. De facto, só acontece quando a figura não é exactamente simétrica e isso passa-se quando a casa vazia não é a central, ou sendo, as vermelhas estão uma na linha de cima outra na linha de baixo. Então, das 60 configurações existem 4 que têm de ser consideradas separadamente mas as restantes 56 podem ser agrupadas duas a duas ficando portanto 28. Com as 4 anteriores conseguimos diminuir o número de vértices para 32.

No entanto, ainda podemos diminuir mais considerando outro caso. Suponhamos que jogam as vermelhas na figura da esquerda e as azuis na figura da direita:

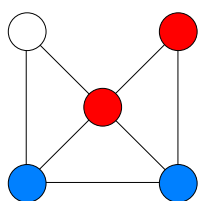


Figura 48

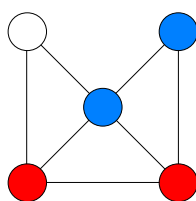


Figura 49

Em qualquer dos casos a única jogada possível corresponde a mudar a peça da casa central para a casa vazia. Será que podemos considerar estas duas situações como sendo a mesma? Deste modo perdemos, em todas as configurações, a identificação de quem joga. Mas será isso um problema? De facto não é mas não podemos tirar essa conclusão nesta fase do nosso raciocínio. Uma vez que as regras do jogo impõem que as vermelhas começam sempre nas casas 1 e 2, e a ausência de

ligação entre estas casas leva a que, no início, a situação das vermelhas e das azuis não é exactamente igual e deveremos analisar quatro questões em separado:

a) Existirá estratégia óptima para as vermelhas quando efectuem elas a primeira jogada?

b) Existirá estratégia óptima para as vermelhas quando efectuem as azuis a primeira jogada?

c) Existirá estratégia óptima para as azuis quando efectuem elas a primeira jogada?

d) Existirá estratégia óptima para as azuis quando efectuem as vermelhas a primeira jogada?

Do enunciado destas questões pode parecer que é um problema perder, em cada configuração, a noção de qual o próximo jogador a efectuar um movimento mas o que de facto vai acontecer é que vamos analisar duas situações ao mesmo tempo e a conclusão para as duas será a mesma. Então as 32 configurações referidas atrás reduzem-se a metade e teremos então um grafo com 16 vértices para analisar.

Chegou a altura de definir rigorosamente o nosso material de trabalho. Seja $I = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{P}_2(I)$ o conjunto das partes de I com dois elementos, $J = \{A,V\}$, as cores dos jogadores, azul ou vermelho e $C = \{(\{a,b\},c,X) \in \mathcal{P}_2(I) \times I \times J : c \notin \{a,b\}\}$. Portanto C é o conjunto das 60 configurações possíveis tal como as definimos atrás. Consideremos ainda a seguinte permutação em I .

$$\begin{aligned}
 s: I &\rightarrow I \\
 1 &\mapsto 2 \\
 2 &\mapsto 1 \\
 3 &\mapsto 3 \\
 4 &\mapsto 5 \\
 5 &\mapsto 4
 \end{aligned}$$

Vamos definir agora em C uma relação binária que vamos designar por \mathcal{R} , e que seguidamente provaremos ser uma relação de equivalência. No entanto, para facilitar a análise posterior vamos definir mais quatro relações binárias em C . Definimos então que $(\{a,b\},c,X) \mathcal{R}_1 (\{x,y\},z,Y)$ quando $(\{x,y\} = \{a,b\} \wedge z = c \wedge Y = X)$. Definimos que $(\{a,b\},c,X) \mathcal{R}_2 (\{x,y\},z,Y)$ quando $(\{x,y\} = \{s(a),s(b)\} \wedge z = s(c) \wedge Y = X)$. Definimos que $(\{a,b\},c,X) \mathcal{R}_3 (\{x,y\},z,Y)$ quando $(\{x,y\} = I \setminus \{a,b,c\} \wedge z = c \wedge Y \neq X)$. Definimos que

$(\{a,b\},c,X) \mathcal{R}_4 (\{x,y\},z,Y)$ quando $(\{x,y\}=I \setminus \{s(a),s(b),s(c)\} \wedge z=s(c) \wedge Y \neq X)$. Por fim definimos, para $\alpha,\beta \in C$, $\alpha \mathcal{R} \beta$ quando $\alpha \mathcal{R}_1 \beta \vee \alpha \mathcal{R}_2 \beta \vee \alpha \mathcal{R}_3 \beta \vee \alpha \mathcal{R}_4 \beta$.

A definição desta relação merece comentários mais detalhados. Temos uma disjunção de quatro condições onde cada uma diz respeito a uma relação. A relação \mathcal{R}_1 aparece com o objectivo de relacionar qualquer configuração consigo própria.

A relação \mathcal{R}_2 aparece no sentido de relacionar duas configurações onde joga o mesmo jogador e a posição é simétrica, como acontece no exemplo da figura seguinte e que já foi apresentado anteriormente

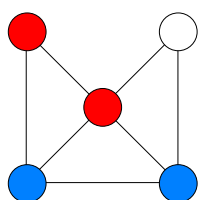


Figura 50

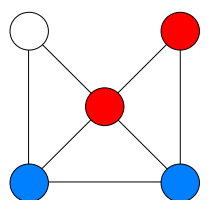


Figura 51

A relação \mathcal{R}_3 é no sentido de relacionar duas configurações onde as vermelhas, numa configuração, estão na mesma posição que as azuis, na outra configuração, a casa vazia seja a mesma em ambas as configurações e o jogador a fazer a próxima jogada seja diferente, como acontece no exemplo da figura seguinte e que já foi apresentado anteriormente

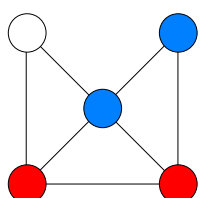


Figura 52

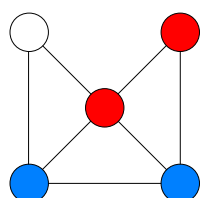


Figura 53

A relação \mathcal{R}_4 aparece como uma espécie de composição entre as duas relações \mathcal{R}_2 e \mathcal{R}_3 . O conceito de produto de relações binárias, que vamos definir seguidamente, permite formalizar o que estamos a dizer e será útil para demonstramos que \mathcal{R} é uma relação de equivalência. Sejam \mathcal{P} e \mathcal{Q} duas relações binárias em C . Definimos o produto das duas relações binárias como sendo uma nova relação binária em C , que denotaremos por $\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \mathcal{PQ}$, e é definida por $\alpha \mathcal{PQ} \gamma$ se e só se existe $\beta \in C$ tal que $\alpha \mathcal{P} \beta \wedge \beta \mathcal{Q} \gamma$. Esta operação produto é uma operação interna no conjunto

$R = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4\}$, isto é, (R, \times) tem estrutura de grupóide; esse facto será fundamental para provarmos que \mathcal{R} é transitiva e podemos ver na tabela de dupla entrada seguinte isso mesmo.

Tabela 3

	\mathcal{R}_1	\mathcal{R}_2	\mathcal{R}_3	\mathcal{R}_4
\mathcal{R}_1	\mathcal{R}_1	\mathcal{R}_2	\mathcal{R}_3	\mathcal{R}_4
\mathcal{R}_2	\mathcal{R}_2	\mathcal{R}_1	\mathcal{R}_4	\mathcal{R}_3
\mathcal{R}_3	\mathcal{R}_3	\mathcal{R}_4	\mathcal{R}_1	\mathcal{R}_2
\mathcal{R}_4	\mathcal{R}_4	\mathcal{R}_3	\mathcal{R}_2	\mathcal{R}_1

Temos $\{a, b\} = \{a, b\} \wedge c = c \wedge X = X$ logo $(\{a, b\}, c, X) \mathcal{R} (\{a, b\}, c, X)$ donde \mathcal{R} é reflexiva.

Suponhamos agora que $(\{a, b\}, c, X) \mathcal{R} (\{x, y\}, z, Y)$. Se temos $\{x, y\} = \{a, b\} \wedge z = c \wedge Y = X$ então também $\{a, b\} = \{x, y\} \wedge c = z \wedge X = Y$. Se temos $\{x, y\} = \{s(a), s(b)\} \wedge z = s(c) \wedge Y = X$ então também $\{a, b\} = \{s(x), s(y)\} \wedge c = s(z) \wedge X = Y$. Se temos $\{x, y\} = I \setminus \{a, b, c\} \wedge z = c \wedge Y \neq X$ então também $\{a, b\} = I \setminus \{x, y, z\} \wedge c = z \wedge X \neq Y$. Se temos $\{x, y\} = I \setminus \{s(a), s(b), s(c)\} \wedge z = s(c) \wedge Y \neq X$ então também temos $\{a, b\} = I \setminus \{s(x), s(y), s(z)\} \wedge c = s(z) \wedge X \neq Y$. Em qualquer dos casos temos $(\{x, y\}, z, Y) \mathcal{R} (\{a, b\}, c, X)$ logo \mathcal{R} é simétrica.

Suponhamos agora que, para $\alpha, \beta, \gamma \in C$ temos $\alpha \mathcal{R} \beta$ e $\beta \mathcal{R} \gamma$. Então, atendendo à nossa definição de \mathcal{R} existem $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tais que $\alpha \mathcal{R}_i \beta$ e $\beta \mathcal{R}_j \gamma$, donde $\alpha \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j \gamma$. Mas como (R, \times) é um grupóide então existe $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\mathcal{R}_i \mathcal{R}_j = \mathcal{R}_k$, logo $\alpha \mathcal{R}_k \gamma$ e consequentemente $\alpha \mathcal{R} \gamma$, ficando provada então a transitividade de \mathcal{R} .

Visto então que \mathcal{R} é uma relação de equivalência vamos definir o conjunto dos vértices, no nosso grafo, como sendo o conjunto das classes de equivalência de \mathcal{R} . Como representante de cada classe poderíamos escolher qualquer elemento dessa classe mas, para sistematizar, vamos escolher sempre um representante onde o próximo jogador a movimentar a peça seja V , o mínimo do conjunto das posições das peças vermelhas seja o menor e a posição da casa vazia seja a menor. Isso mesmo

fica claro na lista seguinte das 18 classes de equivalência, onde é já introduzida a nossa notação futura para os vértices do grafo.

$$\begin{aligned}
1 &= [(\{1,2\},3,V)] = \{(\{1,2\},3,V), (\{4,5\},3,A)\} \\
2 &= [(\{1,2\},4,V)] = \{(\{1,2\},4,V), (\{1,2\},5,V), (\{3,5\},4,A), (\{3,4\},5,A)\} \\
3 &= [(\{1,3\},2,V)] = \{(\{1,3\},2,V), (\{2,3\},1,V), (\{4,5\},2,A), (\{4,5\},1,A)\} \\
4 &= [(\{1,3\},4,V)] = \{(\{1,3\},4,V), (\{2,3\},5,V), (\{2,5\},4,A), (\{1,4\},5,A)\} \\
5 &= [(\{1,3\},5,V)] = \{(\{1,3\},5,V), (\{2,3\},4,V), (\{2,4\},5,A), (\{1,5\},4,A)\} \\
6 &= [(\{1,4\},2,V)] = \{(\{1,4\},2,V), (\{2,5\},1,V), (\{3,5\},2,A), (\{3,4\},1,A)\} \\
7 &= [(\{1,4\},3,V)] = \{(\{1,4\},3,V), (\{2,5\},3,V), (\{2,5\},3,A), (\{1,4\},3,A)\} \\
8 &= [(\{1,4\},5,V)] = \{(\{1,4\},5,V), (\{2,5\},4,V), (\{2,3\},5,A), (\{1,3\},4,A)\} \\
9 &= [(\{1,5\},2,V)] = \{(\{1,5\},2,V), (\{2,4\},1,V), (\{3,4\},2,A), (\{3,5\},1,A)\} \\
10 &= [(\{1,5\},3,V)] = \{(\{1,5\},3,V), (\{2,4\},3,V), (\{2,4\},3,A), (\{1,5\},3,A)\} \\
11 &= [(\{1,5\},4,V)] = \{(\{1,5\},4,V), (\{2,4\},5,V), (\{2,3\},4,A), (\{1,3\},5,A)\} \\
12 &= [(\{3,4\},1,V)] = \{(\{3,4\},1,V), (\{3,5\},2,V), (\{2,5\},1,A), (\{1,4\},2,A)\} \\
13 &= [(\{3,4\},2,V)] = \{(\{3,4\},2,V), (\{3,5\},1,V), (\{1,5\},2,A), (\{2,4\},1,A)\} \\
14 &= [(\{3,4\},5,V)] = \{(\{3,4\},5,V), (\{3,5\},4,V), (\{1,2\},5,A), (\{1,2\},4,A)\} \\
15 &= [(\{4,5\},1,V)] = \{(\{4,5\},1,V), (\{4,5\},2,V), (\{2,3\},1,A), (\{1,3\},2,A)\} \\
16 &= [(\{4,5\},3,V)] = \{(\{4,5\},3,V), (\{1,2\},3,A)\}
\end{aligned}$$

Fazemos então, no grafo, $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$ e o conjunto A das arestas será definido de modo que as classes de equivalência de duas configurações que possam suceder-se no desenrolar do jogo sejam adjacentes. Temos a seguinte representação pictórica do grafo.

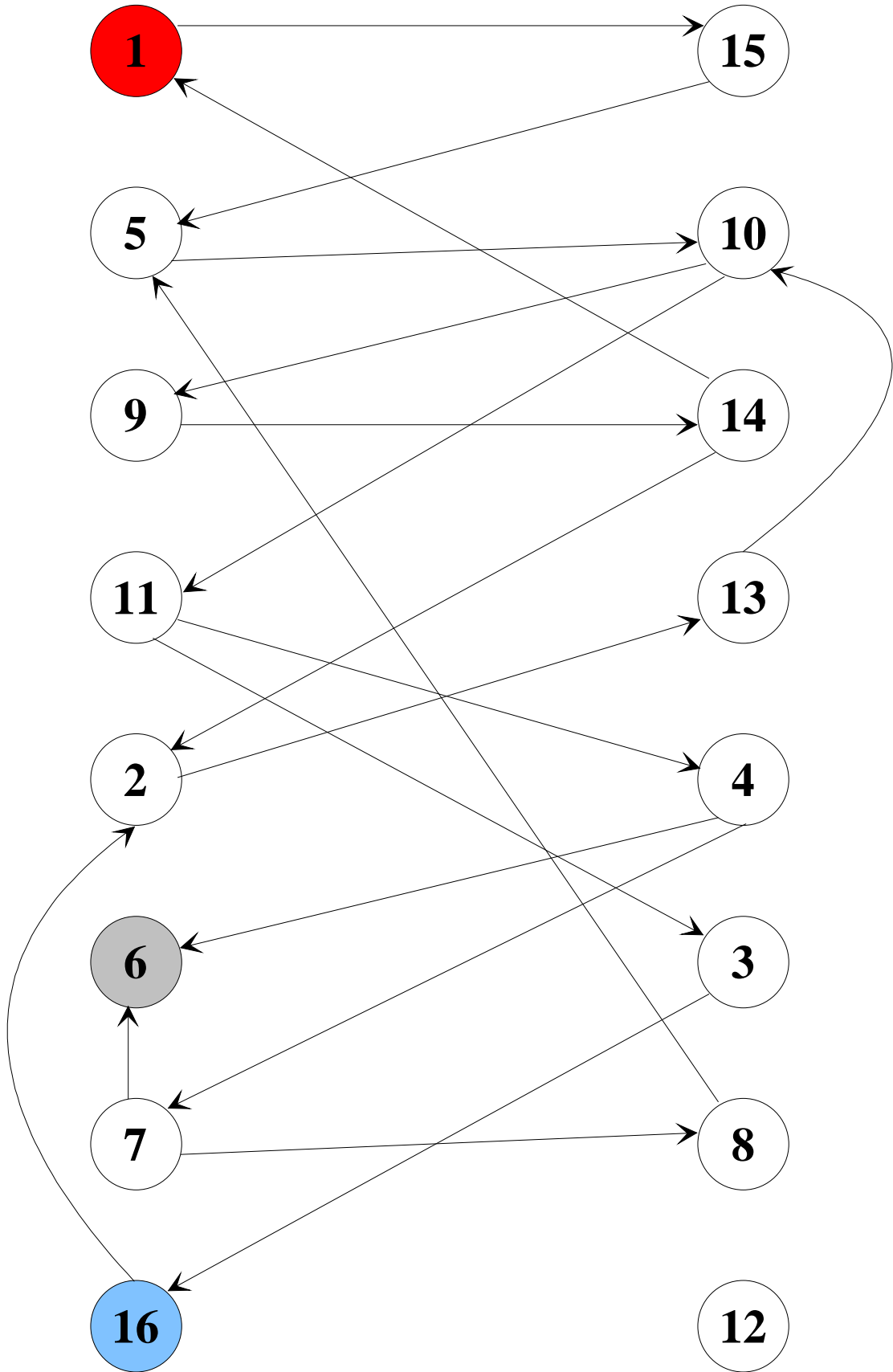


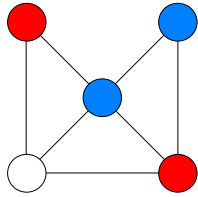
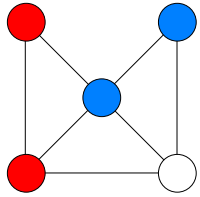
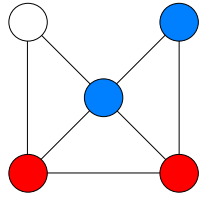
Figura 54

O vértice 1 aparece a vermelho pois esse será o vértice de partida caso joguem as vermelhas em primeiro lugar. O vértice 16 aparece a azul pois esse será o vértice de partida caso comecem as azuis. O vértice 6 aparece a cinzento pois esse será o vértice que marca o fim do jogo caso seja atingido.

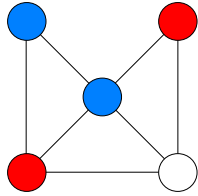
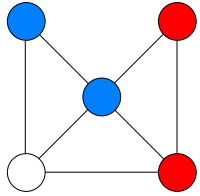
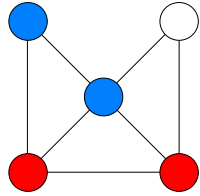
Por análise deste grafo podemos ver que um jogador, estando no vértice 4 ou no vértice 7, e sendo a sua vez de jogar, só terá que se deslocar para o vértice 6 e ganha no jogo. O nosso objectivo era apresentar a estratégia óptima para este jogo. Assim, a estratégia que cada jogador deve seguir é: «**estando no vértice 11 nunca deverá mover-se para o vértice 4, mas sim para o vértice 3**». Se ambos os jogadores seguirem esta estratégia então o jogo não terminará nunca. Portanto, qualquer jogador só chegará ao vértice 4 ou vértice 7 mediante um erro do adversário. Temos então um jogo onde a estratégia óptima conduz ao empate, empate esse que será decretado quando os jogadores estiverem cansados ou o decretarem mutuamente uma vez que as regras não estipulam um número limite de jogadas.

Notemos que, o vértice 11 corresponde às quatro seguintes situações de jogo:

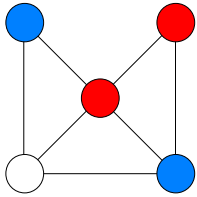
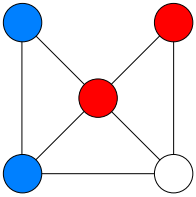
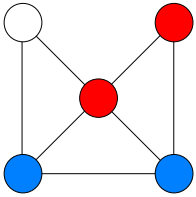
a) $(\{1,5\},4,V)$

Posição – jogam as Vermelhas	Jogada Errada das Vermelhas	Jogada Correcta das Vermelhas
 <p>Figura 55</p>	 <p>Figura 56</p>	 <p>Figura 57</p>

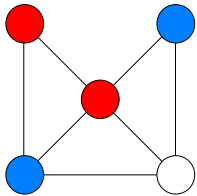
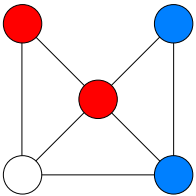
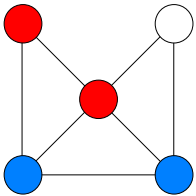
b) $(\{2,4\},5,V)$

Posição – jogam as Vermelhas	Jogada Errada das Vermelhas	Jogada Correcta das Vermelhas
 <p>Figura 58</p>	 <p>Figura 59</p>	 <p>Figura 60</p>

c) $(\{2,3\},4,A)$

Posição – jogam as Azuis	Jogada Errada das Azuis	Jogada Correcta das Azuis
 <p>Figura 61</p>	 <p>Figura 62</p>	 <p>Figura 63</p>

d) $(\{1,3\},5,A)$

Posição – jogam as Azuis	Jogada Errada das Azuis	Jogada Correcta das Azuis
 <p>Figura 64</p>	 <p>Figura 65</p>	 <p>Figura 66</p>

3.3. 4- Planificações do Cubo

Podemos levantar a questão: «Quantas planificações diferentes do cubo existem?». Vamos usar grafos para responder a esta questão.

Para fazer a construção do grafo que representa o cubo, a cada face do cubo vou corresponder a um vértice do grafo e os vértices vão estar unidos se as faces correspondentes estão unidas por uma aresta. Assim obtenho um grafo, como está ilustrado na figura seguinte.

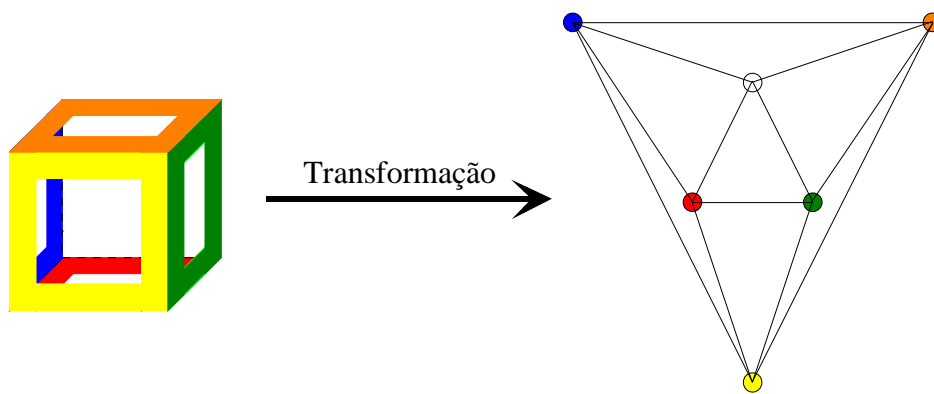


Figura 67

Depois de ter o cubo transformado num grafo, a próxima preocupação será como representar as planificações no grafo. Ora cada planificação do cubo deve corresponder a um subgrafo deste, pois o que vamos fazer é eliminar arestas para conseguir planificar. No entanto ao fazer esta eliminação temos de ter em atenção dois aspectos: temos de obter um grafo conexo (caso contrário, separávamos o cubo em vários “pedaços” deixando de ser uma planificação do cubo); e não pode ter ciclos (porque se por exemplo, três faces estivessem mutuamente unidas não era possível a planificação). Sabendo que grafos conexos acíclicos são árvores, o que se pretende é extrair do grafo inicial, subgrafos que sejam árvores e que passem por todos os vértices do grafo, ou seja, árvores com seis vértices. Existem seis árvores não isomorfas com seis vértices, como está ilustrado na figura abaixo.

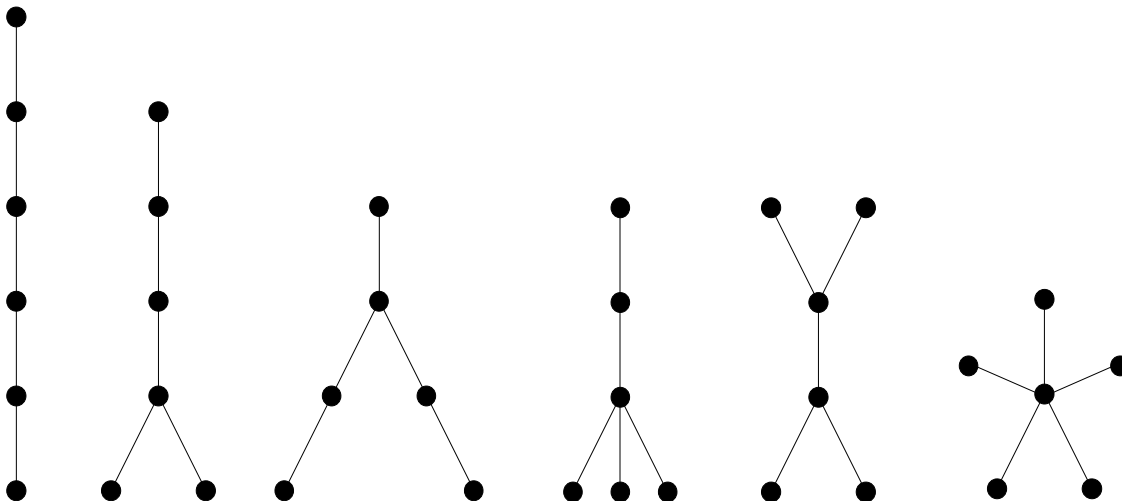


Figura 68

O passo seguinte é percorrer todos os casos e construir todas as planificações possíveis.

Vou dizer que dois vértices são opostos quando correspondem a faces opostas no cubo quando este está construído. Vou usar v' para designar o vértice oposto ao vértice v .

3.3.1. 1º Caso:

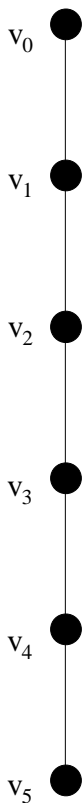
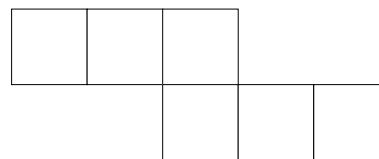


Figura 69

Neste primeiro caso a minha árvore é um caminho que passa por todos os vértices. Vou designar esse caminho por $v_0v_1v_2v_3v_4v_5$, chamar vértice inicial a v_0 e vértice final a v_5 . Seja k_i o comprimento do único caminho que une o vértice v_i ao seu oposto.

a) Se $k_0 = 2$ então $v_0' = v_2$. Ora, $v_5' \neq v_4$ porque está unido com ele, $v_5' \neq v_2$ pois $v_0' = v_2$ e o oposto é único, e pelo mesmo motivo $v_5' \neq v_0$. Temos ainda que $v_5' \neq v_1$ pois nesse caso obrigatoriamente v_3 e v_4 seriam opostos o que não pode acontecer pois estão unidos. Então, necessariamente, $v_5' = v_3$ donde $k_5 = 2$. Ora, se dois vértices são opostos e distam dois um do outro então, na planificação, estarão alinhados um com o outro e terão um terceiro vértice pelo meio. Como há dois pares de vértices nestas condições então esta primeira situação conduz à planificação:



b) Se $k_0 = 3$ então $v_0' = v_3$. Ora, $v_5' \neq v_4$ porque está unido com ele, $v_5' \neq v_3$ pois $v_0' = v_3$, e pelo mesmo motivo $v_5' \neq v_0$. Duas situações podem então acontecer. O oposto de $v_5' = v_2$ ou $v_5' = v_1$.

b.1) Se $v_5' = v_2$ então $k_5 = 3$. Temos então que o oposto de $v_4' = v_1$. Vemos então que, nesta situação, não há dois vértices opostos que distem 2, logo não pode haver três vértices alinhados. Então esta situação conduz à planificação:

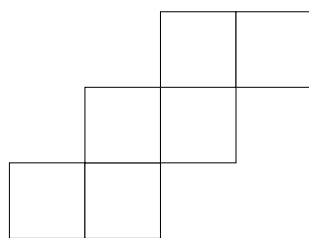


Figura 70

b.2) Se $v_5' = v_1$ então $k_5 = 4$. Temos então que $v_4' = v_2$. Estes dois últimos oposto distam dois um do outro logo, na planificação, estão alinhados com um vértice entre eles. Então esta situação conduz à planificação:

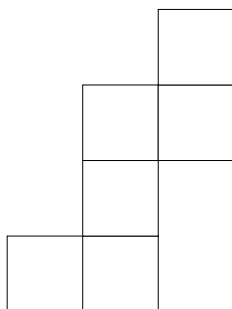


Figura 71

c) Se $k_0 = 4$ então $v_0' = v_4$. Ora, $v_5' \neq v_4$ pois $v_0' = v_4$ e o oposto é único, e pelo mesmo motivo $v_5' \neq v_0$. Temos ainda que $v_5' \neq v_3$ pois nesse caso obrigatoriamente v_1 e v_2 seriam opostos o que não pode acontecer pois estão unidos. Do mesmo modo v_1 não é o oposto de v_3 pois nesse caso obrigatoriamente v_2 e v_3 seriam opostos o que não pode acontecer pois estão unidos. Então, necessariamente, $v_5 = v_2$ donde $k_5 = 3$. Claro que esta situação conduz à mesma planificação em que $k_0 = 3$ e $k_5 = 4$ pois a planificação não mudaria pelo facto de «percorrer» o caminho no sentido contrário.

d) Se $k_0 = 5$ então, $v_0' = v_5$. Então $k_5 = 5$. O oposto de $v_4' \neq v_1$ pois nesse caso v_2 e v_3 seriam opostos, o que não pode acontecer. Obviamente o oposto de v_4 só pode ser então v_2 e resultando daí que v_1 e v_3 são opostos. Temos então necessariamente os quatro vértices interiores (vértices de grau 2) do caminho alinhados e a planificação resultante é:

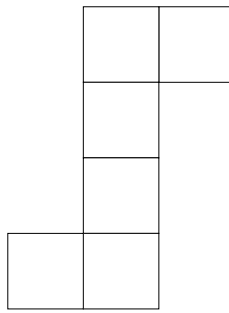
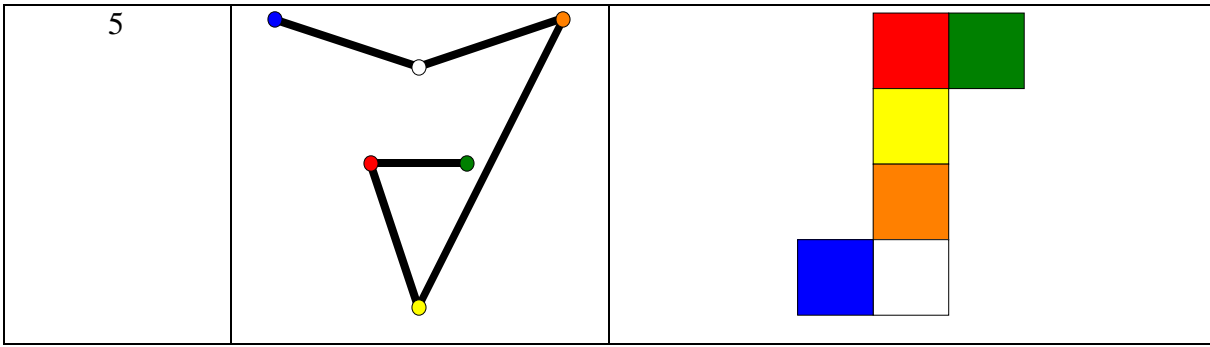


Figura 72

Resumindo,

Tabela 4

Comprimento do caminho	Subgrafo	Planificação
2		
3		
4		



3.3.2. 2º Caso:

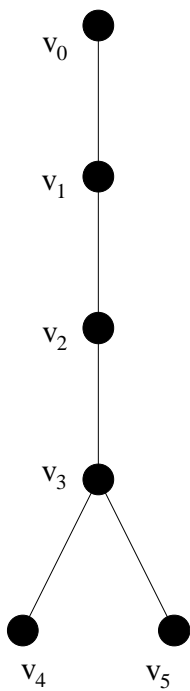


Figura 73

a) Se $k_0 = 2$ então $v_4' \neq v_1$, pois nesse caso $v_3' = v_5$ o que não pode acontecer. Então $v_4' = v_5$ e $k_4 = k_5 = 2$. Temos então a planificação

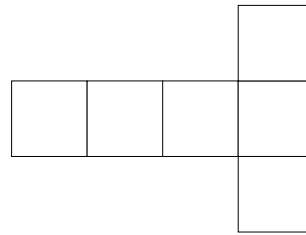


Figura 74

b) Se $k_0 = 3$ então $v_4' \neq v_5$ pois nesse caso teríamos $v_1' = v_2$. Então, ou $v_4' = v_1$ donde $v_5' = v_2$, ou $v_4' = v_2$ donde $v_5' = v_1$. Claro que estas duas situações são perfeitamente simétricas conduzindo à planificação:

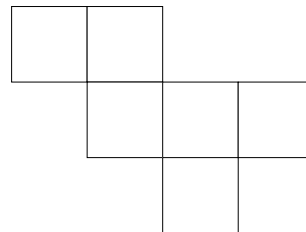


Figura 75

c) Se $k_0 = 4$ então $v_0' = v_4$ (ou v_5 mas é simétrica). Então $v_5' \neq v_1$ pois nesse caso $v_2' = v_2$. Vem então $k_0 = k_4 = 4$. Temos então a planificação:

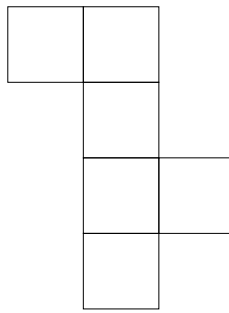


Figura 76

Então,

Tabela 5

Comprimento Do caminho	Subgrafo	Planificação
2		
3		
4		

3.3.3. 3º Caso:

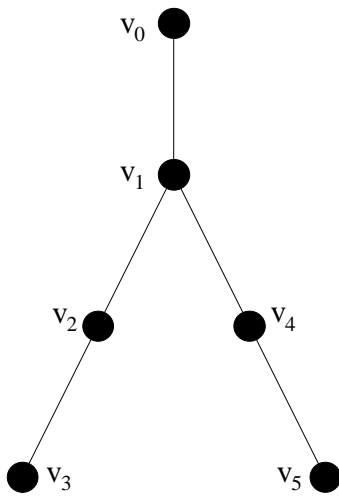


Figura 77

a) Se $k_0=2$ então $v_0'=v_2$ (ou v_4 mas é simétrica). Então $v_3' \neq v_1$ pois nesse caso teríamos $v_4'=v_5$ o que não pode acontecer, $v_3' \neq v_4$ pois nesse caso teríamos $v_4'=v_1$ o que não pode acontecer. Então $v_3'=v_4$ e $v_5'=v_1$, donde $k_3=3$ e $k_5=2$. Temos então a planificação:

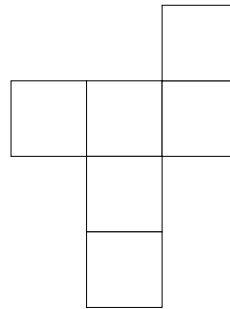


Figura 78

b) Se $k_0=3$ então $v_0'=v_3$ (ou v_5 mas é simétrica). Ora, $v_5' \neq v_4$, $v_5' \neq v_0$ e $v_5' \neq v_3$ por razões óbvias. Temos ainda $v_5' \neq v_2$ pois nesse caso teríamos $v_1'=v_4$ o que não pode acontecer. Então $v_5'=v_1$ donde $v_2'=v_4$ vindo $k_3=3$ e $k_5=2$. Temos então a planificação:

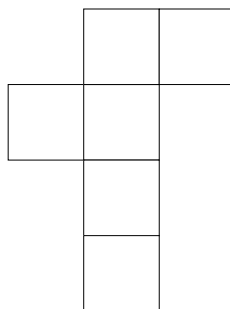
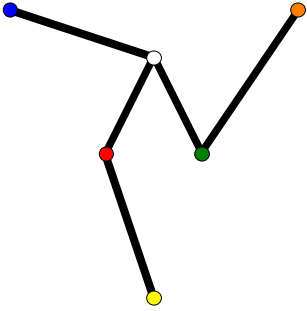
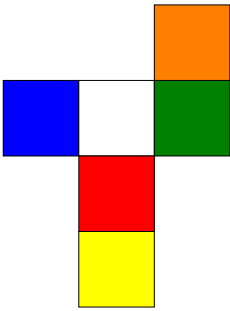
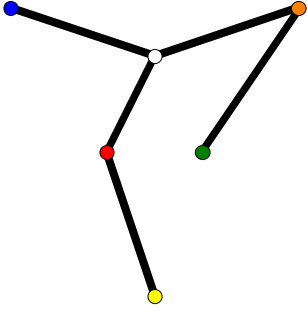
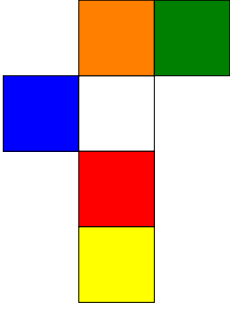


Figura 79

Esquemmatizando vem,

Tabela 6

Comprimento Do caminho	Subgrafo	Planificação
2		
3		

3.3.4. 4º Caso:

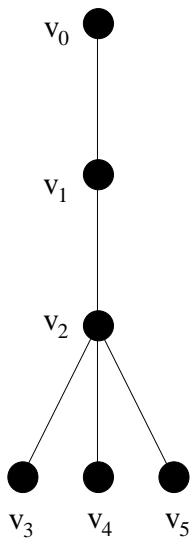
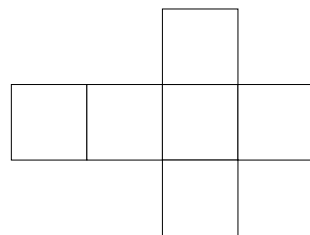


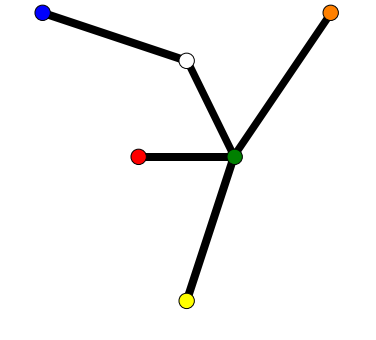
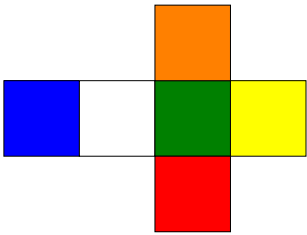
Figura 80

a) Se $k_0 = 2$ então $v_0' = v_2$. Então $v_1' = v_4$ e $v_3' = v_5$ (ou $v_1' = v_3$ e $v_4' = v_5$, ou ainda $v_1' = v_5$ e $v_3' = v_4$, mas claro que todas estas situações são simétricas). Então $k_3 = k_4 = k_5 = 2$ e temos a planificação:

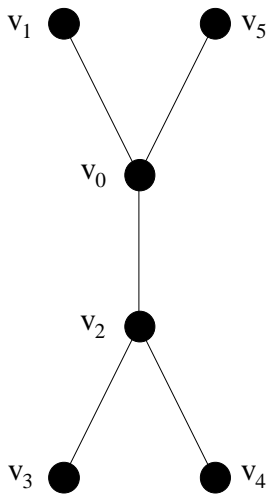


b) Se $k_0 = 3$ então $v_0' = v_3$ (ou v_4 , ou v_5 , mas simétricas). Então, claramente, $v_1' \neq v_0$ e $v_1' \neq v_2$. Temos ainda $v_1' \neq v_4$ pois nesse caso teríamos $v_2' = v_5$ o que não pode acontecer, e também $v_1' \neq v_5$ pois nesse caso teríamos $v_2' = v_4$ o que não pode acontecer. Então esta situação nunca acontece.

Obtemos,

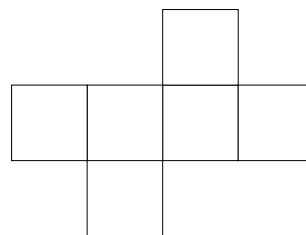
Comprimento Do caminho	Subgrafo	Planificação
2		

3.3.5. 5º Caso:



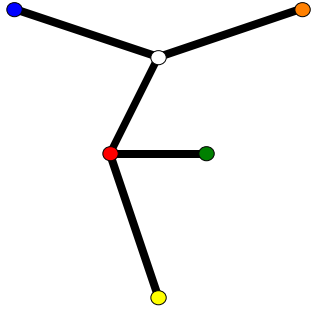
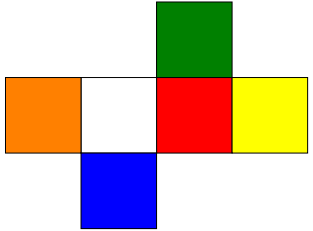
a) Se $k_0 = 2$ então temos duas situações a analisar:

a.1) Aqui supomos $v_0' = v_2$. Ora, $v_3' \neq v_4$ pois nesse caso teríamos $v_1' = v_5$, o que não pode acontecer. Vem então $v_3' = v_1$ ou $v_3' = v_5$. Note-se, no entanto, que estas duas situações são simétricas pois, se $v_3' = v_1$ vem $v_4' = v_5$ e se $v_3' = v_5$ vem $v_1' = v_1$. Basta então analisar quando $v_3' = v_1$ e $v_4' = v_5$. Temos aqui, além de $k_0 = 2$, $k_3 = 2$, $k_4 = k_5 = 3$. Temos então a planificação:

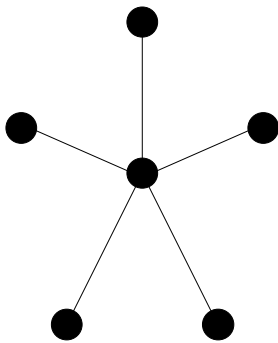


a.2) Aqui supomos $v_0' = v_5$. Nesta situação vem $v_3' \neq v_1$, $v_3' \neq v_2$ e $v_3' \neq v_4$. Logo nunca pode acontecer.

b) Suponhamos agora que $k_0=3$. Então $v_0'=v_3$ (ou v_4 mas simétrica). Então necessariamente $v_4'=v_1$ e $v_5'=v_2$, mas esta situação é perfeitamente simétrica a a.1). Aqui $k_0=3$, $k_3=3$, $k_4=2$ e $k_5=2$.

Comprimento Do caminho	Subgrafo	Planificação
2;3		

3.3.6. 6º Caso



Este caso não pode acontecer pois aqui existe um vértice de grau 5 e no grafo do cubo construído (em estudo) todos os vértices têm grau inferior a 5 (têm todos grau 4), logo qualquer seu subgrafo nunca poderá ter vértices de grau 5 (no máximo só poderia ter vértices de grau 4).

Sendo assim posso concluir que só existem 11 planificações diferentes do cubo.

Conclusão

Este trabalho começou com o claro propósito de utilizar Teoria de Grafos na análise, eventualmente na resolução, de determinados jogos. Assim foi adoptada a postura de, depois de colocado o problema procurar nos grafos a sua resolução. Acontece que, quase todos os principais conceitos definidos na Teoria de Grafos têm algum exemplo lúdico onde possam ser usados e os nossos exemplos de jogos acabam por percorrer esses mesmos conceitos:

- conectividade, isto é, existência de um caminho;
- grafos eulerianos, portanto a existência de trajectos que passem por todas as arestas;
- grafos hamiltonianos, portanto a existência de trajectos que passem por todos os vértices;
- coloração de grafos.

O estudo histórico feito foi deveras enriquecedor pois permitiu colmatar lacunas existentes antes da realização do trabalho. Se é verdade que alguns dos exemplos são tradicionais fazendo já parte da história como estando associados à Teoria de Grafos deu-nos especial satisfação conseguir descobrir a estratégia óptima para o jogo do Pong Hau Ki e a análise das planificações do cubo, pois à partida, não sabíamos se conseguiríamos utilizar com sucesso os grafos nesses casos.

A recolha de informação relativa à Teoria de Jogos tendo como objectivo uma aprendizagem focada em actividades lúdicas e proporcionando prazer foi também extremamente importante pois será certamente útil na actividade de professor de Matemática que sabe à partida que a maior parte dos alunos que vai encontrar não estão interessados em estudar. Não esperando certamente que a utilização destes tópicos vá resolver os problemas de insucesso na disciplina de Matemática, portanto, sem esperar milagres achamos, no entanto, que vale a pena investir e tentar cativar os alunos com a introdução de alguma actividade lúdica associada à aprendizagem.

Bibliografia

[BM] M. Barros; Tópicos de Matemática Discreta; Universidade Lusíada; Porto; 1998;

[BN] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson; Graph theory : 1736-1936; 1ª edição; Oxford University Press; Oxford; 1976;

[BJ] J. Bond; U. S. R. Murty; Graph Theory; The Macmillan Press, Lda; Hong Kong; 1978;

[BC] C. B. Boyer; História da Matemática; John Wiley & Sons, Inc; 1968; traduzido para Português pela Editora Edgard Blucher, Lda

[EL] L. Euler; Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis; pag. 128-140; Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae; 1736; traduzido para Português pelo Jornal de Mathematica Elementar nos nºs 4, 5 e 7.

[FR] R. Fiani; Teoria dos Jogos; Elsevier Editora; 2001;

[GM] M. Gardner; Ah, Descobri! - Jogos e diversões matemáticas.; tradução em Português da Gradiva Editora; Lisboa; 1990;

[MK] K. O. May; The Origin of the Four-Color Conjecture; Isis, Vol. 56, No. 3, pag. 346-348; The University of Chicago Press; 1965

[PT] T. Pappas; Fascínios da Matemática; 1989; tradução em Português da Gradiva Editora;

[PN] N. B. Providência; $2 + 2 = 11$; Gradiva Editora; Colecção O Prazer da Matemática; 2001;

[RJ] J. Rino; O Jogo, Interações e Matemática; Associação de Professores de Matemática; 2004

[SS] S. Silva; Teoria de Jogos na Biologia; Associação do Professores de Matemática; 2003;

[SP] P. D. Straffin; Game Theory and Strategy; 4ª edição; The Mathematical Association of America; Washington; 2002;

[SD] D. J. Struik; História Concisa da Matemática; 1992; tradução em Português da Gradiva;

[VA] A. Vandermonde; Remarques sur les problèmes de situation; pag. 566-574; Histoire de l'Académie des Sciences; Paris; 1771; tradução em Inglês da Oxford University Press;

[web]

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euler.html>

<http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/GraphTheory/MyGraphTheory/graphIntro.htm>

<http://www.nist.gov/dads/HTML/chinesePostman.html>

<http://www.ipv.pt/millennium/Millennium24/12.pdf>

http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/recursos_na_internet.htm

<http://www.uol.com.br/atlas>

Índice Remissivo

A

- Appel
 - Kenneth 27
- Aresta.. 19, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 52, 54, 58, 64, 65, 73, 78, 81, 82, 93
 - múltiplas 19, 30
- Arestas
 - adjacentes 30
- Atalho..... 30, 31, 51, 54
 - de Euler.....30, 31, 51

B

- Bernoulli
 - Daniel 15
 - Nicolas 15
- Birkhoff
 - George..... 26

C

- Caminho..... 11, 14, 19, 27, 28, 29, 30, 31, 49, 50, 51, 56, 57, 59, 83, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 93
 - de Hamilton 29, 31, 57, 59
- Cavalo de xadrez..... 20
- Ciclo31, 55, 56
- Circuito 30, 31
 - de Euler..... 30, 31
- Coloração
 - mapas 31
- Coloração própria 31

E

- Estratégia...35, 36, 38, 39, 43, 47, 58, 73, 74, 80, 93
- Estratégia.ótima 47, 58, 73, 74, 80, 93
- Euler
 - Leonard 14

F

- Franklin
 - Philip 27

G

- Grafo.... 12, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 77, 78, 80, 81, 82, 91
 - completo 29, 30
 - conexo 31, 82
 - contração 31
 - eliminação 31
 - euleriano 31
 - hamiltoniano..... 31, 55
 - simples 30, 32, 54
 - vazio..... 30
- Guthrie
 - Francis 25

H

- Haken
 - Wolfgang 27
- Hamilton
 - William..... 23, 55
- Heawood
 - Percy 25

I

- Icosian Game 23, 55
- Incidente 26, 30, 52
- Informação
 - imperfeita..... 36
 - perfeita 36, 38

J

- Jogo
 - objectivo 73
- Jogos
 - teoria 35, 37, 40
- Jogo-trabalho 34

K

- Kempe
 - Alfred 25
- Koenigsberg..... 5, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 25

L		V	
Lacete	30	Vandermonde	
N		Alexandre	20
Número cromático	32	Veblen	
P		Oswald	26
Passeio.....	13, 19, 30, 31, 58	Vértice .19, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 50, 51,	
fechado	30, 31	52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 64, 65, 66, 67,	
Polinómio		68, 69, 73, 74, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 91,	
cromático.....	27, 32, 64, 65	93	
Problema		grau	30, 52
caixeiro viajante	11, 29	Vértices	
carteiro chinês.....	28	adjacentes.....	30, 32
R		W	
Redutibilidade	27	Whitney	
T		Hassler	27
Teorema das quatro cores.....	25		