ABÍLIO DE BESSA NUNES QUINTAS

A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS

Dissertação submetida à Universidade Portucalense Infante D. Henrique para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática/Educação

Trabalho realizado sob a orientação da Professora Doutora Ana Júlia Malheiro Viamonte Figueira Sousa

Universidade Portucalense Infante D. Henrique
Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia

2009

Declaração

Nome: Abílio de Bessa Nunes Quintas

Nº. do B. I.: 6281516 Tel/Telem.: 962857689 e-mail: abnquintas@yahoo.com.br

Curso de Pós-Graduação: Matemática/Educação

Mestrado □
Designação do mestrado: Matemática/Educação
Ano de conclusão: __-__-____

Título da tese / dissertação: A Aprendizagem da Matemática através dos Jogos

Orientador: Ana Júlia Malheiro Viamonte Figueira Sousa

Declaro, para os devidos efeitos, que concedo, gratuitamente, à Universidade Portucalense Infante D. Henrique, para além da livre utilização do título e do resumo por mim disponibilizados, autorização, para esta arquivar nos respectivos ficheiros e tornar acessível aos interessados, nomeadamente através do seu repositório institucional, o trabalho supra-identificado, nas condições abaixo indicadas:
[Assinalar as opções aplicáveis em 1 e 2]
1. Tipo de Divulgação:
□ **Total**.
□ **Parcial**.
2. Âmbito de Divulgação:
□ **Mundial (Internet aberta)**
□ **Intranet da Universidade Portucalense.**
□ **Internet, apenas a partir de □ 1 ano □ 2 anos □ 3 anos – até lá, apenas Intranet da UPT**

Advertência: O direito de autor da obra pertence ao criador intelectual, pelo que a subscrição desta declaração não implica a renúncia de propriedade dos respectivos direitos de autor ou o direito de a usar em trabalhos futuros, os quais são pertença do subscritor desta declaração.

Assinatura: ____

Porto, ____/____/____

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero expressar o meu agradecimento à Professora Doutora Ana Júlia Viamonte, pelo grande apoio e atenção prestado e ainda elevado sentido profissional.

Quero também agradecer à Escola E. B. 2,3 Maria Manuela Sá e respectivos professores, em especial à Cândida, Dinis, Edite, Paulo Rocha e Sílvia, pelo apoio e ajuda que deram.

Agradeço à Universidade Portucalense por me ter dado as condições para a realização do Mestrado.

Também quero agradecer à minha esposa e colega de profissão, Ana Cristina, por todo o apoio, carinho, incentivo e atenção prestada.

Quero ainda agradecer aos meus colegas e amigos Joaquim Góis e Victor Borlido por toda a ajuda concedida.

Também quero agradecer aos alunos, em especial aos da turma C do sexto ano de escolaridade com Currículo Específico Individual, que permitiram que este trabalho fosse realizado.

O meu muito obrigado a todos.

A Aprendizagem da Matemática através dos Jogos

Resumo

Os jogos matemáticos podem ser um recurso pedagógico importante para a aquisição das competências matemáticas nucleares e fundamentais para a vida do quotidiano. Através da utilização de jogos, os alunos são estimulados a utilizar o raciocínio, a capacidade de concentração e a criatividade na resolução de situações problemáticas. Esta dissertação pretende retratar o estudo efectuado sobre as vantagens/inconvenientes da utilização de jogos matemáticos como recurso didáctico na sala de aula, numa turma constituída por três alunos com Currículo Específico Individual.

Através da utilização dos jogos como recurso pedagógico-didáctico, procurou-se incutir nos alunos uma maior motivação para a aprendizagem da matemática, procurando também para isso criar maior empatia, desenvolver uma atitude mais positiva em relação à disciplina de Matemática, introduzir alterações de rotina na sala de aula, desenvolver o espírito de cooperação e de grupo, dar sequência às aprendizagens realizadas, desenvolver a capacidade de trabalhar autonomamente e ainda fomentar uma melhoria da auto-estima dos alunos.

As aulas ministradas não foram à base de jogos, sendo estes apenas utilizados quando se revelavam importantes para servirem como complemento, construção e compreensão de conhecimentos.

Para alicerçar a análise e aplicação destes recursos foram realizadas pesquisas sobre investigadores nesta área de conhecimento. Essas pesquisas relacionam-se com actividades práticas com utilização de jogos, efectivamente realizadas com alunos em situações de sala de aula e pesquisas sobre a componente psicológica, sociológica, e genética do jogo.

No final podemos constatar que os resultados foram positivos, pois os alunos atingiram os objectivos que estavam previamente definidos.

“Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente.”

Leibniz, 1715

Fig. 1 – Gottfried Wilhelm Leibniz [1]

[1] Figura retirada de [73] pág. 6

Abstract

The mathematical games can be an important pedagogical resource for the acquisition of nuclear and mathematical skills essential for everyday life. By using games, students are encouraged to use reasoning, the ability to focus and creativity in solving problematic situations. This thesis aims to portray the study on the advantages / disadvantages of the use of mathematical games as educational resource in the classroom, in a class consisting of three students with individual specific curriculum.

Through the use of games as pedagogical-didactic, we tried to instill in students a greater motivation for learning mathematics, for it also to create greater empathy, develop a more positive attitude towards Mathematics, changes in routine in the classroom, developing a spirit of cooperation and group taken up the learning that takes place, develop the ability to work independently and also foster improved self-esteem of students.

The classes taught were not based games, which are only used when it revealed to serve as important addition to building and understanding knowledge.

To support the analysis and application of these resources were carried out research on researchers in this field. These searches are related to practical activities using games, students with actual situations in the classroom and research on the psychological component, sociological, and genetics of the game.

At the end we can see that the results were positive, because students have achieved the objectives that were previously defined.

"There are men more intelligent than those who are capable of inventing games. This is where your spirit is manifest more freely. It would be desirable if there were a whole course of games treated mathematically. "

Leibniz, 1715

Sumário

Índice de figuras

Índice de figuras do Anexo I

1. Introdução

A utilização de jogos como recurso pedagógico na sala de aulas permite que os alunos adquiram e desenvolvam algumas competências sobretudo no campo da Matemática.

Os jogos utilizados em contexto de sala de aula procuram não só motivar os alunos para a importância da Escola nas suas vidas, mas também para ultrapassar dificuldades em diversas áreas da Matemática. Deste modo, embora os jogos procurem apresentar versatilidade em termos dos objectivos com que se revestem, é na componente da matemática que mais os interessa colocar. Assim, serão designados por jogos matemáticos, embora pudessem ser apelidados mais especificamente de jogos pedagógicos, uma vez que têm o objectivo de proporcionar uma melhor aprendizagem das diversas áreas da matemática, para as quais foram objecto, ou ainda poderiam ser chamados de jogos curriculares, por servirem de suporte ao currículo da disciplina. De qualquer forma, vai ser adoptado o conceito mais abrangente, ou seja, jogos matemáticos.

Segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico*, os objectivos gerais para a disciplina de Matemática são os seguintes:

Os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática;

Os alunos devem desenvolver uma compreensão da Matemática;

Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações;

Os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático;

Os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos;

Os alunos devem ser capazes de resolver problemas;

Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas;

Os alunos devem ser capazes de fazer Matemática de modo autónomo;

Os alunos devem ser capazes de apreciar a Matemática.[1]

[1] [57] págs. 4-7

Os alunos com Currículo Específico Individual têm muitas dificuldades em conseguir atingir alguns dos objectivos aqui definidos. Nesse sentido introduziram-se os jogos e procurou-se facilitar a aquisição das competências matemáticas necessárias através de uma selecção criteriosa dos jogos e de uma metodologia adequada para os alunos em questão.

Acreditamos que os resultados poderiam ser profícuos, tendo em conta a experiência adquirida ao longo do nosso percurso profissional como docentes, em que utilizamos jogos com alunos de diferentes anos de escolaridade, quer em contexto de sala de aulas, quer em ludotecas, ou ainda em laboratórios e clubes de matemática. Mas a crença sobre o papel importante que os jogos de natureza didáctica possuem, advém do facto de se ter pesquisado sobre investigações levadas a cabo por alguns investigadores sobre o papel dos jogos e consequentemente das actividades lúdicas na aprendizagem dos alunos em várias vertentes, como a pedagógica, sociológica, psicológica e ética.

É evidente que a selecção e utilização de jogos têm de obedecer a determinadas premissas, para que realmente possa contribuir para o desenvolvimento de determinadas facetas nos alunos, em especial e neste caso em que nos estamos a debruçar, do conhecimento matemático. Entre essas premissas destacam-se as seguintes:

<u>Estabelecimentos de regras</u> – As regras fazem parte da nossa vida. Estão ligadas ao desenvolvimento social, cultural e psicológico. A comunicação implica o conhecimento e utilização de regras. As regras podem ser mudadas desde que isso resulte numa simbiose, isto é, numa melhoria do jogo e da aprendizagem dos alunos. Como é referido por António Cabral, *"As regras são inerentes à busca do prazer e consistem em viabilizar o fim proposto da acção através de uma correcta utilização de meios. Digamos que o prazer é o objecto intrínseco do jogo; e a vitória o extrínseco; no fundo o mesmo objecto, conforme é visto do lado do sujeito ou da acção."*[2]

<u>Jogos com vários alunos</u> – Permitem o desenvolvimento cooperativo, discussão e debate. Estes factores enriquecem a socialização, a interacção e a comunicação. Também a competição sadia é importante e cria estímulos, dado que os alunos procuram vencer ou atingir os objectivos e para isso reflectem e concentram-se mais, procurando aperfeiçoar-se e desenvolver as capacidades de raciocínio e memorização.

[2] [12] pág. 99

Na opinião de Lia Sousa, a participação em jogos colectivos representa conquistas cognitivas, emocionais, morais e sociais para o estudante, e um estímulo para o desenvolvimento das suas competências matemáticas. No ambiente de jogo os alunos tornam-se capazes de criar e transformar. Além de ser um objecto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma actividade natural e contribui para o desenvolvimento do aluno. Isso tudo desperta o interesse do estudante, além de contribuir para a sua formação.[3]

<u>Seleccionar jogos independentes do factor sorte</u> – Os objectivos a atingir devem ser independentes da sorte ou azar, antes devem desenvolver raciocínios, estratégias e planos conducentes à estruturação ou construção de novos conhecimentos.

<u>Os jogos devem estar adaptados ao contexto</u> – Têm que ter em conta o perfil dos alunos, ano de escolaridade e os momentos do processo de ensino-aprendizagem.

<u>Registo do jogo</u> – É necessário registar os desenvolvimentos do jogo numa folha de registos para que se possa ter o seu histórico. A partir daí podem-se efectuar inferências, análise de erros e alterações a efectuar.

<u>Os jogos devem ser estudados antes de serem aplicados</u> – Deve ter-se em conta se o jogo responde aos objectivos que se pretendem atingir, isto é, ao conhecimento ou aprendizagem que os alunos vão adquirir. Ressalva-se que neste caso é sempre uma suposição, uma vez, que as situações que se deparam são desconhecidas à partida.

<u>Avaliação dos resultados</u> – É importante fazer uma retrospectiva da aplicabilidade do jogo em termos da adequação aos objectivos propostos.

A utilização de jogos de cariz matemático pode responder às três capacidades transversais que o *Programa de Matemática do Ensino Básico* preconiza e que são as seguintes:

"Resolução de problemas;
Raciocínio matemático;
Comunicação matemática."[4]

Os jogos estão em correspondência directa com o pensamento matemático. Em ambos temos regras, instruções, operações, definições e deduções.[5]

---

[3] [85] pág. 23

[4] [57] págs. 48-50

[5] [14]

O desenvolvimento deste trabalho incide sobre vários aspectos que se passam a indicar e a descrever:

Em primeiro lugar será abordada a utilização dos jogos no ensino da matemática. Neste capítulo descreve-se alguma história dos jogos matemáticos ao longo dos tempos, bem como o contributo de matemáticos na criação e aplicação dos jogos em diversos ramos da matemática. Também é dada relevância à importância e contributo dos jogos no ensino e a sua utilidade para a aprendizagem dos alunos, quer na matemática, quer noutras áreas da ciência. Os programas de Matemática indicam que a utilização de jogos na sala de aulas é um dos aspectos que se deve dar especial atenção. Seguidamente é feita uma abordagem sobre o jogo como actividade lúdica. Aqui realça-se o papel da componente genética, psicológica e sociológica nos jogos e os contributos de alguns autores ou investigadores como por exemplo Jean Piaget, António Cabral ou Àngel Alsina. Também será dado especial relevo à relação do jogo com o ensino específico da matemática, considerando diversas vertentes como por exemplo a comunicação, manipulação de objectos e materiais, desenvolvimento do raciocínio e analogia com a resolução de situações problemáticas. Neste capítulo será ainda considerada a utilização de jogos na prática pedagógica, aliando os jogos aos diferentes conteúdos programáticos abordados na sala de aula, conducentes à aquisição de competências matemáticas.

Em segundo lugar são abordados os objectivos e a importância deste trabalho tendo em conta as dificuldades, limitações e necessidades dos alunos da turma. Também se faz uma caracterização ou perfil destes alunos em termos de conhecimentos e aptidões matemáticas, bem como interesses e motivações pela vida escolar. Seguidamente pretende-se colocar a questão, a ser posteriormente investigada, e que pode ser sintetizada da seguinte forma: Qual a importância da utilização de jogos para o desenvolvimento das competências matemáticas essenciais para alunos com este perfil?

Em terceiro lugar, será referida e narrada a metodologia utilizada. Depois constará uma parte referente ao tipo, aplicação e análise dos jogos utilizados, bem como os motivos porque foram efectivamente estes os jogos seleccionados. Posteriormente será feita uma análise e descrição de cada um dos jogos, bem como a respectiva aplicação prática com os alunos, e, ainda, a avaliação, por parte destes, em relação a algumas questões previamente formuladas.

Por último, apresentam-se as conclusões resultantes deste estudo.

2. Os Jogos no Ensino da Matemática

2.1. Breve História dos Jogos Matemáticos

"*Os jogos são tão antigos como a humanidade. O acto de jogar desde sempre acompanhou a civilização. Em todas as civilizações encontramos uma prática lúdica. Os jogos constituem uma das facetas incontornáveis da cultura humana. ... As razões profundas que levam a que todas as civilizações desenvolvam jogos são ainda desconhecidas, mas é consensual o seu interesse cultural e educacional."*[1]

Seguramente na actualidade a concepção de jogos e a sua prática aumentaram exponencialmente. A importância dada aos jogos na actualidade, quer como estudo, quer como lazer, mais a aproximação dos povos devido ao desenvolvimento dos meios de comunicação de vária índole, entre os quais a Internet, permitiu esse aumento extraordinário. Dentro de um vasto conjunto de jogos, alguns deles têm subjacentes princípios e regras matemáticas. Aliás, alguns ramos da Matemática surgiram a partir da descoberta e análise de jogos. Já na Antiguidade, o Homem, utilizando pedras, se debruçava sobre jogos numéricos simples e padrões geométricos.[2]

"O jogo mais antigo para o qual se conhecem regras é o jogo de Ur, que floresceu na Mesopotâmia. Descoberto nos anos 20 do século passado, tratava-se de uma corrida entre dois oponentes. ... O primeiro a concluir o seu percurso seria o vencedor."[3] (ver fig. 2). Era constituído por um tabuleiro que continha dois percursos independentes, em que cada jogador possuía um conjunto de peças e utilizavam-se dados tetraédricos. O valor obtido pelo lançamento dos dados provavelmente decidia a extensão do percurso de cada movimento.

[1] [45] contracapa

[2] [29] pág. 4

[3] [45] pág. 12

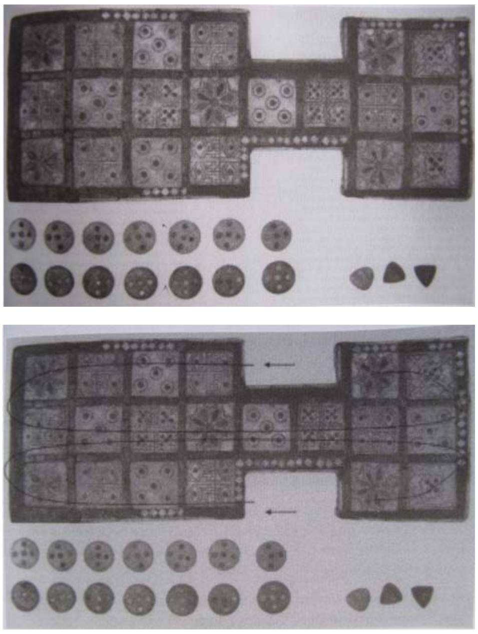


Fig. 2 – *Jogo de Ur*[4]

Arquimedes[5], considerado o maior matemático grego, expôs o chamado *Problema dos Bois*[6], referente à teoria dos números, que utiliza procedimentos rudimentares de álgebra, apoiando-se em actividades lúdicas. Este problema envolve oito incógnitas relacionadas por sete equações lineares e ainda duas condições adicionais que são as seguintes: A soma de um dos pares de incógnitas é um quadrado perfeito e a soma de outro par é um número triangular. Sem estas duas condições, os menores valores das incógnitas são números da classe dos milhões, enquanto considerando as condições, uma das incógnitas compreende mais de 206 500 dígitos.[7] Este problema é *"... muito complicado, de análise indeterminada e que pode ser interpretado como um problema que conduz a uma equação do tipo Pell:*

[4] Figura retirada de [45] pág. 13

[5] Arquimedes, matemático, físico e inventor grego nasceu em Siracusa (Sicília) em 287 A.C. Faleceu em 212 A.C. Foi educado em Alexandria e pensa-se que possivelmente fora aluno de Euclides. As principais obras de Arquimedes foram sobre: A esfera e o cilindro; os conóides e os esferóides; as espirais; a medida do círculo; a quadratura da parábola; o Arenário (contador de areia); o equilíbrio dos planos; os corpos flutuantes; o *Stomachion* (jogo geométrico); o problema dos bois, *in* [04].

[6] [29] pág. 4

[7] [05]

$t^2 - 4729494u^2 = 1$ *que é resolvida com números muito grandes.”*[8]

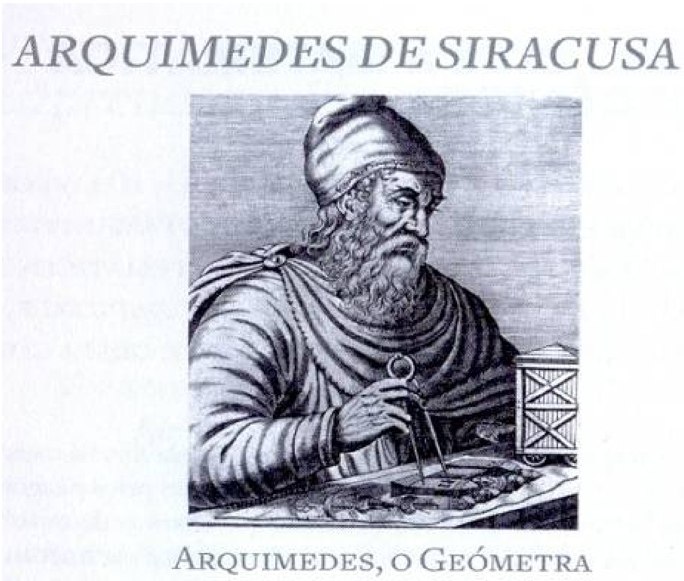


Fig. 3 – Arquimedes de Siracusa[9]

Ainda Arquimedes *“... descreveu um puzzle geométrico, o «Stomachion». Trata-se de um jogo da natureza dos «Tangram» (este também um «puzzle» geométrico chinês muito antigo), composto por catorze figuras planas que podem formar um quadrado.”*[10] (ver fig. 4). Das catorze peças existentes, dois pares são iguais (os números 5 e 7 aparecem repetidos). “*O nome Stomachion deriva da palavra grega para estômago. Embora muito provavelmente Arquimedes não tenha sido o inventor do «Stomachion», uma dúvida se levantou ao estudar o palimpsesto: O que este «puzzle» despertou no espírito de Arquimedes. Afinal o que é o «Stomachion»? Depois de traduzir e interpretar o Codex C, o investigador Reviel Netz afirma que ... Arquimedes queria ... responder a uma simples pergunta: De quantas formas diferentes se podem juntar as 14 peças do jogo de maneira a formar um quadrado.”*[11] A resolução da questão supracitada necessita da utilização de uma área da matemática chamada Combinatória.

---

[8] [87] pág. 95

[9] Figura retirada de [74] pág. 6

[10] [45] pág. 17

[11] [74] págs. 36- 37

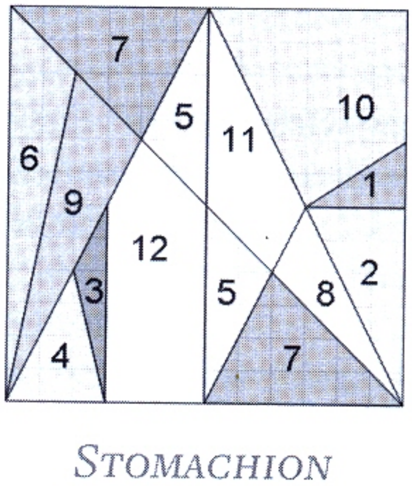


Fig. 4 – *Puzzle Stomachion*[12]

Além da obra "*Os Elementos"*, Euclides[13], talvez o primeiro grande pedagogo, escreveu outras, sendo uma designada por *Pseudaria (Livro de Falácias),* que se debruçava sobre enganos e dúvidas, mas de grande valor educativo em matemática. Uma dessas falácias reportava-se ao chamado *Paradoxo de Galileu* (também conhecido por *A roda de Aristóteles*) e que diz o seguinte:

"Consideremos dois círculos concêntricos. Suponhamos que o círculo maior completou uma volta, rolando sem escorregar, desde o ponto R até ao ponto S. A distância entre R e S é assim igual ao perímetro do círculo maior.

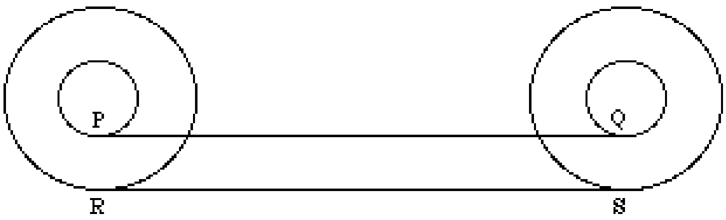


Fig. 5 – *Paradoxo de Galileu*[14]

[12] [74] pág. 35

[13] Euclides de Alexandria (330 A.C. — 260 A.C.) foi um professor, matemático e escritor, criador da geometria euclidiana. Foi o mais importante autor de matemática da Antiguidade greco-romana e talvez de todos os tempos, com *Stoichia* (*Os elementos*, 300 a.C.), no estilo livro de texto, uma obra em treze volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço. Escrita em grego, a obra cobria toda a aritmética, a álgebra e a geometria, conhecidas até então no mundo grego, reunindo o trabalho de seus predecessores, como Hipócrates e Eudóxio, e sistematizava todo o conhecimento geométrico dos antigos e intercalava os teoremas já conhecidos então com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado, *in* [20].

[14] Figura retirada de [48]

Mas o círculo menor, suposto colado ao círculo anterior, descreveu também uma volta. Assim a distância entre P e Q é igual ao perímetro do círculo menor. Uma vez que $\overline{PQ} = \overline{RS}$, *conclui-se que os perímetros dos dois círculos são iguais."*[15] (ver fig. 5).

Na Idade Média, o mercador, Leonardo de Pisa[16], desenvolveu uma matemática numérica com aplicação de actividades lúdicas, cujas técnicas foram aprendidas com os árabes, fruto das informações obtidas nas suas viagens pelo oriente.[17]

A *sucessão de Fibonacci* foi introduzida em *Liber Abbaci* (*Livro dos Cálculos*) e, mais tarde chamada de *números de Fibonacci,* em sua honra. A sucessão é a seguinte: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, (Isto é, cada termo da sucessão é obtido através da soma dos dois termos anteriores da sucessão). Esta sucessão surge em *Liber Abbaci* sob a forma de um problema que é o seguinte: *"Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados de uma parede. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida?"*[18] A resposta a este problema foi dada pelo próprio Fibonacci e é 377 (décimo quarto termo da sequência).

A *sucessão de* Fibonacci, além de poder ser utilizada para estudos sobre crescimento de populações de seres vivos, também pode ser aplicada a outros estudos como a *espiral de Fibonacci*. *"Este tipo de espiral aparece muitas vezes na natureza em flores, nas pinhas, nas garras dos animais, nos cornos dos animais, em algumas galáxias, etc."*[19]

[15] [48]

[16] Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa (1170 — 1250), também conhecido como Fibonacci após a sua morte, foi um matemático italiano, o primeiro grande matemático europeu depois da decadência helénica. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos árabes na Europa, *in* [38].
Fibonacci provou ainda "que as raízes da equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ não podem ser expressas através de irracionalidades euclidianas $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ (e portanto não podem ser construídas por meio de régua e compasso)." *in* [87], pág. 139.

[17] [29] pág. 4

[18] [81] pág. 23

[19] [81] pág. 28

Fig. 6 – Leonardo de Pisa (Fibonacci)[20]

O *Jogo do Moinho, também designado por Nine Men Morris,* (ver fig. 7), um jogo que antecedeu o conhecido *Jogo do Galo*, pertence a uma família de jogos chamados de alinhamento, e embora seja, *"Conhecido desde o Egipto antigo, só muito recentemente (1996), e através de uma análise computacional que envolveu o estudo de perto de 10 mil milhões de posições, se revelou empatado se os jogadores forem perfeitos. Praticou-se entre nós durante toda a época medieval."*[21]

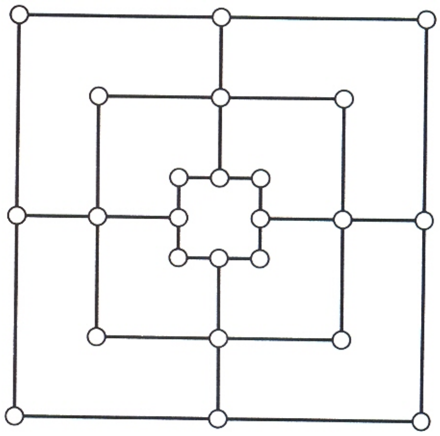


Fig. 7 – *Jogo do Moinho*[22]

Durante esta época, as classes cultas ocupavam-se de vários jogos. Alguns deles *"tiveram circulação muito restrita às universidades, conventos e outros meios onde se compreendiam as regras complicadas dos jogos, que utilizavam muitos conceitos difíceis, como o «Rithmomachia»* (ver fig. 8), *também conhecido por «Jogo dos*

[20] [61]

[21] [45] pág. 15

[22] Figura retirada de [45] pág. 16

Filósofos», que era um jogo de tabuleiro associado ao ensino da Aritmética de Boécio[23] (Anicius Mautius Severinus Boetius). *O «Rithmomachia» era um jogo pedagógico concebido para apreender bem certas relações numéricas, como as progressões. Ao conhecimento da aritmética atribuía-se um valor religioso e moral. Assim, o jogo dos filósofos foi componente importante da educação das classes eruditas."*[24]

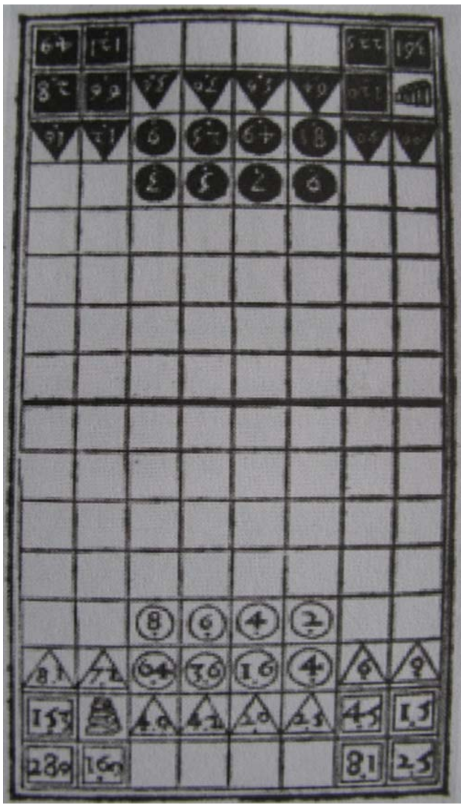


Fig. 8 – *Rithmomachia (Jogo dos Filósofos)* [25]

"… desde sempre, o homem quis descobrir a estratégia que lhe permitisse alcançar a vitória. Essa vontade legítima levava-o mesmo à descoberta de meios ilícitos, como sucedia com o emprego de dados falsos, no jogo de dados, havendo para esse truque penas pesadíssimas, que chegavam até à de morte (por D. Dinis, em 1304). Sabemos que o mestre de Avis (futuro Rei D. João I) *se serviu de um falso alarme para*

[23] (475 a 480 — Pavia, 524), Boécio, foi um filósofo, estadista e teólogo romano. Para além de obras de Filosofia, Boécio também traduziu, acrescentando-lhes muito do seu pensamento, textos gregos de carácter didáctico, cobrindo os tópicos do *Quadrivium*. Entre esses textos destacam-se os relativos aos campos da aritmética e da música, *in* [09].

[24] [45] pág. 19

[25] Figura retirada de [45] pág. 19

justificar morte do Conde de Andeiro e atrair a aclamação popular; e que o Condestável (D. Nuno Álvares Pereira)*, era exímio nas suas tácticas guerreiras, como a dos quatro azes, aberturas de fossos e covas de lobo e outras simulações."*[26]

Luca Pacioli[27] publicou em 1494 em Veneza, Itália, a primeira obra impressa que contém problemas de Análise Combinatória, chamada *"Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalità"* e em que estudou um problema que se tornou famoso como o *"Problema dos Pontos"*, que pode ser definido do seguinte modo: *"Dois jogadores disputavam um prémio que seria dado a quem primeiro fizesse seis pontos no jogo da «balla». Quando o primeiro jogador tinha cinco pontos e o segundo tinha três pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prémio?"*[28] A sua solução faz uma divisão proporcional à probabilidade de vitória de cada jogador. *"Assim, foi introduzida, de modo bastante intuitivo, a noção de esperança matemática, ou seja, o produto do ganho eventual pela probabilidade desse ganho."*[29] Pacioli também escreveu um livro sobre *Xadrez* chamado *De Ludo Scacchorum*. Grafou, ainda, uma obra chamada *De Viribus Quantitatis*, um livro de Matemática Recreativa. Neste livro, está descrito o mais antigo problema conhecido, relacionado com a família de jogos *Nim* e que pode ser assim referido: *"Um jogo entre dois adversários consiste em acrescentar, à vez, um número de feijões, de 1 a 6, a uma pilha inicialmente vazia. Ganha quem colocar o total em 30 feijões."*[30]

Os italianos quinhentistas foram os primeiros a fazerem cálculos probabilísticos. Precisando comparar frequências de ocorrências e estimar ganhos em jogos de azar, eles foram além da mera enumeração de possibilidades. Contudo, limitaram-se a resolver problemas concretos, pois ainda não havia produção de teoremas.[31]

---

[26] [12] pág. 161

[27] Luca Bartolomeo de Pacioli (Sansepolcro, 1445 — Sansepolcro, 19 de Junho de 1517) foi um monge franciscano e célebre matemático italiano. No ano de 1494 foi publicado em Veneza sua famosa obra *"Summa de Arithmetica, Geometria proportioni et propornalità"* (colecção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade), *in* [42].

[28] [64]

[29] [64]

[30] [77] pág.23

[31] [31]

Fig. 9 – Luca Pacioli[32]

No século XVI, Girolamo Cardano[33], *"... associado à descoberta da resolução da equação algébrica cúbica por meio de radicais, também se dedicou aos jogos."*[34] Escreveu um manual de jogo chamado, *"Liber de Ludo Aleae" (O Livro dos Jogos de Azar),* publicado em 1663, que se debruça sobre jogos de azar, sendo o precursor das probabilidades, mais tarde desenvolvido por Blaise Pascal e Fermat.

Fig. 10 – Girolamo Cardano[35]

Cardano era um apaixonado de jogos de azar. Neste tempo em que haviam duelos físicos, também existiam intelectuais, tendo alguns deles ficado para a posteridade como por exemplo entre Niccolo Fontana de Brescia, mais conhecido por

[32] Figura retirada de [42]

[33] Girolamo Cardano (Pavia, Itália, 24 de Setembro de 1501 — Roma, 21 de Setembro de 1576) foi um cientista, matemático, filósofo e médico. Na Matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas. Na Medicina foi o que primeiro descreveu clinicamente a febre tifóide. Em Física, escreveu sobre as diferenças entre energias eléctricas e magnéticas*, in* [26].

[34] [45] págs. 19-20

[35] Fotografia retirada de [25]

Tartaglia, (ainda alcunhado de *O Gago*) e Ludovico Ferrari, a respeito da resolução das equações de 3º grau.[36] A Cardano *"... se atribui também a criação de um «puzzle» de circulação universal, hoje conhecido por «anéis chineses».*"[37] (ver fig. 11).

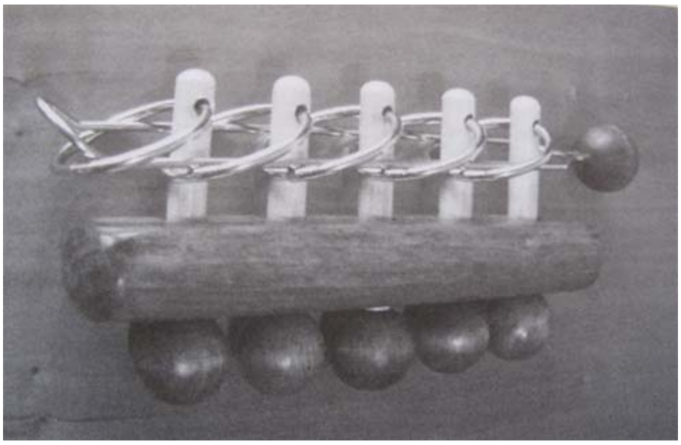


Fig.11 – *Anéis Chineses* (posição inicial)[38]

O processo de resolução deste *puzzle* é semelhante ao utilizado para as *Torres de Hanói* (págs. 34 e 35), isto é, através de *"... um conjunto de sub-resoluções progressivamente mais simples, em que cada sub-resolução é similar ao problema principal. Este facto indica-nos uma estrutura recursiva na resolução dos anéis chineses…"*[39]

Pascal[40] também se interessou por problemas matemáticos relacionados com jogos de dados. As suas pesquisas conduziram à formulação do cálculo das probabilidades que ele designou por *Geometria do acaso*. O chamado *triângulo de Pascal*, foi precisamente uma consequência de trabalhos de pesquisa sobre jogos de azar.

---

[36] [29] pág. 5

[37] [45] pág. 20

[38] Fotografia retirada de [77] pág. 34

[39] [77] pág. 38

[40] Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19 de Junho de 1623 - Paris, 19 de Agosto de 1662) foi um filósofo religioso, físico e matemático francês. Na Matemática, publicou o célebre *Traité du triangle arithmétique* (1654). Juntamente com Pierre de Fermat, estabeleceu as bases da teoria das probabilidades e da análise combinatória (1654), que o holandês Huygens ampliou posteriormente (1657). Entre 1658 e 1659, escreveu sobre o ciclóide e a sua utilização no cálculo do volume de sólidos, *in* [07].

Fig. 12 – Blaise Pascal[41]

Um dos problemas colocados a Pascal pelo chamado cavaleiro de Méré foi o seguinte:

"Jogando com um par de dados honestos, quantos lances são necessários para que tenhamos uma chance favorável (ou seja, de mais de 50%) de obtermos um duplo-seis, ao menos uma vez?"[42]

A solução proposta por Méré não funcionava na prática, porque obtinha constantes prejuízos e era a seguinte: Quando jogamos apenas um dado, temos 1/6 de hipóteses de obter 6, e como 3 x 1/6 = 3/6 = 1/2 = 50% e 4 x 1/6 = 4/6 = 2/3 ≈ 67%, observamos que precisamos de jogar o dado quatro vezes para ter mais de 50% de hipótese de obter pelo menos uma vez 6. Quando jogamos um par de dados, temos trinta e seis possibilidades, ou seja, seis vezes mais possibilidades de quando jogamos um único dado e consequentemente necessitamos de jogar o par de dados 6 x 4 = 24 vezes, para termos mais de 50% de hipótese de obtermos pelo menos uma vez dois 6. Pascal e Fermat encontraram a solução correcta, utilizando a enumeração combinatória das possibilidades de ocorrência de duplo 6, através da utilização do triângulo aritmético, já antes investigada por Tartaglia e mostrando que em vinte e quatro lances de um par de dados, a probabilidade de ocorrer pelo menos uma vez um duplo 6 é $1 - (35/36)^{24} =$ 49,14 %, ou seja uma situação desfavorável. Com o lançamento de vinte e cinco vezes um par de dados a probabilidade seria, $1 - (35/36)^{25}$ = 50,55 %, que é uma situação favorável. A perplexidade de Méré, devia-se ao facto que não perdia em apostas de quatro lances com um único dado, mas perdia nas de vinte e quatro lances de dois

[41] Fotografia retirada de [07]

[42] [31]

dados, devido ao raciocínio que usou para analisar as apostas com dois dados ter sido semelhante ao do caso de se jogar com um único dado.

Gottfried Wilhelm Leibniz[43] foi um grande produtor da actividade lúdica intelectual. Dizia ele: *"Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos matemáticos tratados matematicamente."*[44] Disse ainda Leibniz: "*O Homem atinge o máximo de engenho ao inventar jogos. A Leibniz atribui-se também o desenvolvimento da base de numeração binária."*[45] A utilização deste sistema de numeração é importante para a resolução de muitos problemas ligados à teoria dos jogos, de que é exemplo os jogos da família *Nim*. No século XVII, o estudo da análise combinatória era sobretudo aplicado para resolver probabilidades de jogos de azar.

Em 1735, Euler[46], dedicou-se ao estudo das *sete pontes de Königsberg*, (ver fig. 14) que consistia na possibilidade de atravessar uma única vez, cada uma das sete pontes existentes na cidade. A solução constituiu o começo de uma nova área da matemática, a teoria dos grafos e com ela da topologia em geral.[47] Ian Stewart escreveu o seguinte: *"Na cidade de Konisberg"*, *escreveu Euler, "existe uma ilha chamada Kneiphof, com dois braços do rio Pregel a contorná-la. Existem sete pontes. A questão consiste em saber se uma pessoa pode planear um trajecto, de tal modo que atravesse*

---

[43] Gottfried Wilhelm von Leibniz (Leipzig, 1 de Julho de 1646 — Hanôver, 14 de Novembro de 1716) foi um filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão. A ele é atribuída a criação do termo "função" (1694), que usou para descrever uma quantidade relacionada a uma curva, como, por exemplo, a inclinação ou um ponto qualquer situado nela. É creditado a Leibniz e a Newton o desenvolvimento do cálculo moderno, em particular o desenvolvimento da Integral e da Regra do Produto, *in* [27].

[44] [45] contracapa

[45] [73] pág. 13

[46] Leonhard Paul Euler (Basiléia, 15 de Abril de 1707 — São Petersburgo, 18 de Setembro de 1783) foi um matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Euler fez importantes descobertas em campos variados nos Cálculos e Grafos. Também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para as análises matemáticas, como a noção de uma função matemática, *in* [39].
Leonhard Euler, além da grande produção matemática (mais de meio milhar de livros e artigos), ainda nos brindou com uma fórmula unanimemente reconhecida pela sua estética e que é a seguinte:
$e^{i\pi}+1=0$, que relaciona cinco constantes da matemática: Os números irracionais e transcendentes *e* (*número de Neper* = 2,718281…) e *π* (razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência = 3,141592…), *i* (número complexo, correspondente à unidade imaginária $\sqrt{-1}$), *zero* (elemento neutro da adição e absorvente da multiplicação) e *1* (primeiro dos números naturais).

[47] [29] págs. 4-5

cada uma das pontes exactamente e apenas uma única vez."[48] *Euler resolveu o problema com o seguinte raciocínio: "Se se chega a uma terra por uma ponte, tem de se abandonar por outra, portanto haverá um número par de pontes em cada pedaço de terra firme. A não ser no local de partida e no de chegada de tal trajecto, onde haverá um número ímpar. ... todas as quatro regiões são servidas por um número ímpar de pontes, portanto o problema é impossível."*[49] Euler, além de demonstrar que não existia solução para o problema, descobriu condições gerais para a existência de soluções de qualquer problema do mesmo tipo.

Fig. 13 – Leonhard Euler[50]

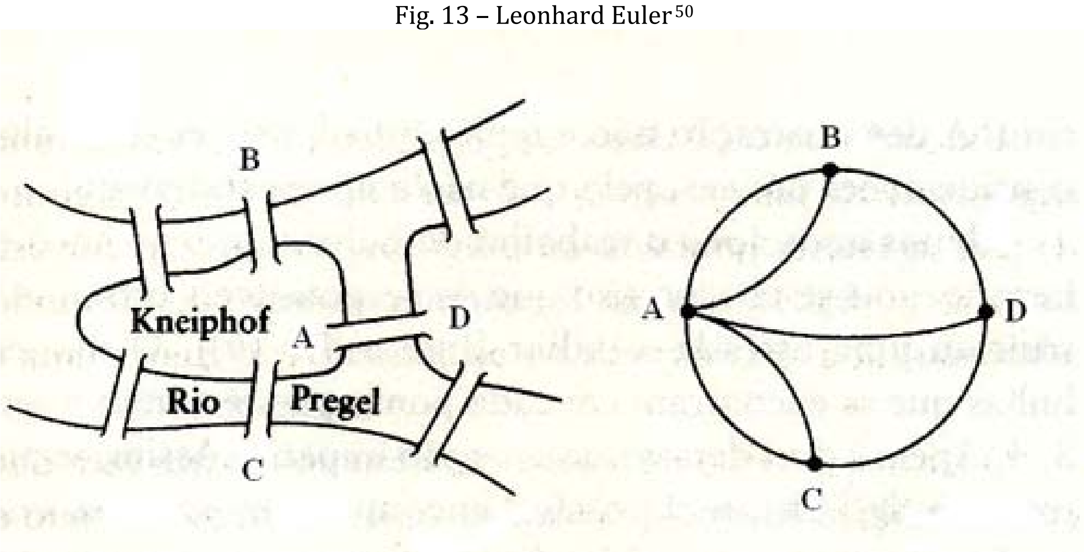


Fig. 14 – *As sete pontes de Königsberg* (planta e correspondente diagrama)[51]

[48] [86] pág. 66

[49] [80] pág. 21

[50] Figura retirada de [39]

[51] Figura retirada de [86] pág. 67

Leonhard Euler também se dedicou ao estudo do *Xadrez*, tendo estudado o percurso do cavalo sobre as 64 casas do tabuleiro. Este problema diz respeito à procura de um caminho hamiltoniano num tabuleiro de *Xadrez* (caminho que passa uma e uma só vez por cada uma das casas do tabuleiro). O cavalo de *Xadrez*, numa determinada casa do tabuleiro, pode deslocar-se no máximo para oito casas diferentes, fazendo um movimento em *L*. A questão colocada por Euler, foi a de saber se dado um tabuleiro $N \times N$ é possível, ou não, a um cavalo, partindo de uma casa 1, passar uma só vez por cada uma das restantes $N^2 - 1$ casas. Este problema tem sido estudado ao longo dos tempos. Sabe-se que para tabuleiros de dimensão $N \geq 5$, existem sempre muitas soluções.[52] Segue-se uma resposta possível para o tabuleiro de *Xadrez* convencional (8×8): (ver fig. 15).

1	42	37	44	25	4	15	18
38	55	40	3	14	17	24	5
41	2	43	36	45	26	19	16
56	39	54	13	48	35	6	23
63	12	57	46	61	22	27	20
58	53	62	49	34	47	30	7
11	64	51	60	9	32	21	28
52	59	10	33	50	29	8	31

Fig. 15 – Movimento do cavalo num tabuleiro de *Xadrez* (8 x 8 casas)[53]

"Conta-se que Euler foi desafiado com o seguinte problema: «Suponhamos que seis regimentos fornecem seis oficiais de patentes diferentes. Por exemplo, um general, um coronel, um capitão, um major, um tenente e um alferes. Será possível colocar os oficiais numa disposição quadrangular seis por seis, para que em cada linha e cada coluna não haja nenhuma repetição de patentes nem de regimentos?» Para atacar este problema, Euler foi conduzido ao conceito de Quadrado Latino. Um quadrado latino é um arranjo quadrangular de n^2*, objectos, onde cada linha e cada coluna contêm cada um dos n tipos diferentes* (ver fig. 16).

[52] [52]

[53] Figura retirada de [52]

A	B	C
C	A	B
B	C	A

A	C	D	B
C	A	B	D
D	B	A	C
B	D	C	A

Fig. 16 – Quadrados latinos

Os quadrados latinos são os antepassados remotos do popular Sudoku, onde se pretende construir um quadrado latino 9 x 9, usando os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, satisfazendo algumas condições suplementares.”[54]

“Grandes matemáticos têm sempre referido aquilo que devem a Euler. «Liser Euler», costumava dizer Laplace aos matemáticos mais jovens, «liser Euler, cést notre maître à tous».”[55]

Euler interessou-se pela teoria das probabilidades, uma vez que, na sua época existiam muitos jogos de lotarias.

Diz-se que William Hamilton[56] só recebeu directamente dinheiro por uma das suas publicações, que consistiu precisamente num jogo matemático, comercializado pelo mundo pelo nome de *“Viagem pelo Mundo”* (ver fig. 17). Este jogo consistia em passar por todos os vértices de um dodecaedro regular, vértices esses que representavam cidades e em que se podia apenas passar uma vez por cada vértice, circulando pelas arestas e voltando ao ponto de partida.[57] Este jogo *“estava relacionado com os circuitos hamiltonianos, conceito hoje básico da teoria dos grafos.”*[58] O conhecido *problema do caixeiro viajante*, também está relacionado com este conceito.

[54] [80] págs. 25-27

[55] [87] pág. 139

[56] William Rowan Hamilton (Dublin, 4 de Agosto de 1805 — Dublin, 2 de Setembro de 1865) foi um matemático, físico e astrónomo irlandês. Fez contribuições importantes no desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra. A sua descoberta mais importante em matemática é a dos quaterniões. Em física é muito conhecido pelo seu trabalho em mecânica analítica, que veio a ser influente nas áreas da mecânica quântica e da teoria quântica de campos. Em sua homenagem são designados os hamiltonianos, por ele inventados, *in* [94].

[57] [29] pág. 5

[58] [45] pág. 20

Fig. 17 – Jogo (*Viagem pelo Mundo*) [59]

Fig. 18 - William Hamilton [60]

Também Gauss[61] era um grande adepto de jogos, sobretudo de cartas e fazia o tratamento estatístico em relação às jogadas efectuadas. Propôs, em 1850, o chamado *problema das oito rainhas* que refere o seguinte:

"Encontrar uma disposição de N rainhas do jogo de Xadrez num tabuleiro de N x N, de tal modo que nenhuma rainha ataque as outras de acordo com as regras do jogo."[62]

---

[59] [93]

[60] Figura retirada de [95]

[61] Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de Abril de 1777 — Göttingen, 23 de Fevereiro de 1855) foi um matemático, astrónomo e físico alemão. Conhecido como *o príncipe dos matemáticos*, *in* [22].

Fig. 19 – Friedrich Gauss[63]

Edouard Lucas, matemático francês, inventou um jogo chamado *Torre de Hanói* (ver fig. 20) em 1883. *"O «puzzle» original era composto por oito discos de dimensões progressivamente menores e três colunas onde os discos podiam ser inseridos."*[64] Este jogo está relacionado com algumas áreas da matemática, algumas das quais de criação recente. Normalmente o *puzzle* deste jogo é composto por oito discos, mas pode ter mais ou menos discos, implicando deste modo, maior ou menor tempo dispendido na sua resolução, através da utilização de um raciocínio recursivo, isto é, através da decomposição de um problema em subproblemas similares mais simples e deste modo, mais fáceis de resolver.

As regras deste jogo são as seguintes: *"Inicialmente, os discos devem ser colocados na coluna da esquerda, começando pelo maior e terminando no menor, criando uma «torre» nessa coluna. O objectivo do «puzzle» é simples: deslocar a torre da coluna da esquerda para a coluna da direita. No entanto, ... existe um conjunto de restrições aos movimentos que poderemos realizar. ... só se move um disco de cada vez; um disco só se pode deslocar para uma coluna onde não haja discos menores que o próprio (não se podem criar torres invertidas) .... Não há restrição à movimentação de um qualquer disco para uma coluna que esteja vazia."*[65]

---

[62] [64]

[63] Figura retirada de [22]

[64] [79] pág. 32

[65] [79] págs. 29-30

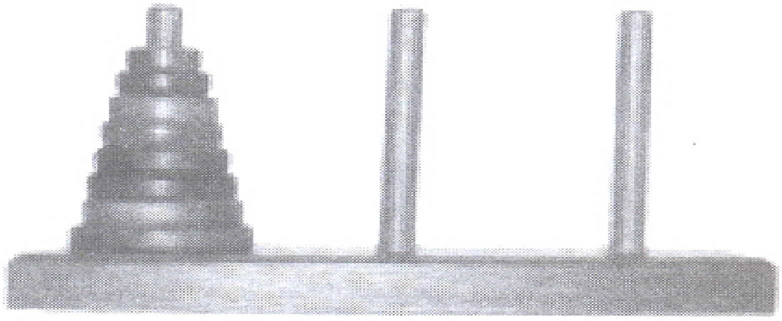


Fig. 20 – *As Torres de Hanói*[66]

"É possível determinar qual o número mínimo de movimentos para resolver um «puzzle» das Torres de Hanói com n discos. Vamos designar esse número, para n discos, por M_n. Seja o caso trivial n = 1. Nesta situação basta um movimento (mover o disco da coluna origem para a coluna destino). Assim $M_0 = 1$. No caso geral, com n> 1, podemos usar a resolução recursiva para obter M_n. A resolução de uma torre com n discos pode decompor-se em três passos: mover uma torre com n-1 discos, mover um disco e mover novamente uma torre com n-1 discos, ou seja:
$M_n = M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2xM_{n-1} + 1$

Adicionando o caso trivial obtemos as duas seguintes expressões:

$M_0 = 1$

$M_n = 2xM_{n-1} + 1$

Estas expressões, em Matemática, são designadas por relações de recorrência e denotam a existência de uma estrutura recursiva.

Assim:

$M_1 = 2xM_0 + 1 = 3$

$M_2 = 2xM_1 + 1 = 7$

$M_3 = 2xM_2 + 1 = 15$

$M_4 = 2xM_3 + 1 = 31$

$M_5 = 2xM_4 + 1 = 63$

$M_6 = 2xM_5 + 1 = 127$

(...)

[66] Figura retirada de [45] pág. 20

É possível encontrar uma expressão geral de M_n *sem ser recursiva:* $M_n = 2^n - 1$. *Ou seja, o número mínimo de movimentos para resolver este jogo é exponencialmente proporcional ao número inicial de discos.*
Uma das lendas associadas a este puzzle é a existência de um mosteiro budista, numa floresta escondida no Extremo Oriente, onde vários monges estariam a resolver um «puzzle» destes com 64 discos e, quando terminassem, o mundo acabaria. ... se os monges demorassem um segundo a mudar cada disco, ... demorariam $2^{64} - 1$ *segundos na sua resolução (por extenso, 18 446 744 073 709 551 615 segundos), ou seja, cerca de 585 000 000 000 de anos"*[67]*,* (Estima-se que a idade do Universo é de cerca de 15 000 000 000 de anos e a do Sistema Solar de 4 600 000 000 de anos).

David Hilbert[68] é responsável por um teorema ligado a jogos de dissecção e que diz o seguinte: dois polígonos com igual área admitem dissecções com o mesmo número de triângulos iguais.

Fig. 21 – David Hilbert[69]

Também Albert Einstein era um apaixonado por jogos de natureza matemática e até possuía uma boa parte da sua biblioteca dedicada a jogos matemáticos.[70]

[67] [79] págs. 41- 43

[68] David Hilbert (Königsberg, 23 de Janeiro de 1862 — Göttingen, 14 de Fevereiro de 1943) foi um matemático alemão. Hilbert é considerado como um dos maiores matemáticos do século XX. Devemos a ele principalmente a lista de 23 problemas, alguns dos quais não foram resolvidos até hoje, que ele apresentou em 1900 no Congresso Internacional de Matemática em Paris. As suas contribuições à Matemática são diversas : Consolidação da teoria dos invariantes, que foi o objecto de sua tese. Transformação da geometria euclidiana em axiomas, com uma visão mais formal que Euclides, para torná-la consistente, publicada no seu *Grundlagen der Geometrie* (*Bases de geometria*). Trabalhos sobre a teoria dos números algébricos, retomando e simplificando os trabalhos de Kummer, Kronecker, Dirichlet e Dedekind, e publicando-os no seu *Zahlbericht* (*Relatório sobre os números*). Criação dos espaços que levam seu nome, durante seus trabalhos em análise sobre as equações integrais. Contribuição para as formas quadráticas, bases matemáticas da teoria da relatividade de Albert Einstein, *in* [18].

[69] Figura retirada de [18]

[70] [29] pág. 6

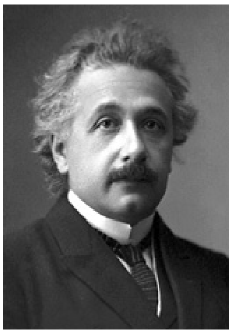


Fig. 22 – Albert Einstein[71]

"John von Newman (1903-1957)*, grande matemático húngaro, é considerado o «pai» da teoria dos jogos, tendo publicado em 1944, juntamente com Óscar Morgenstein a obra "Theory of Games and Economic Behaviour" (Teoria dos Jogos e Comportamento Económico), o que pode ter significado que a investigação matemática se encaminhou, nesse ramo, no sentido dos problemas económicos."*[72] Nesta obra são analisados jogos de estratégia, em particular um teorema designado *minimax*[73], que se debruça sobre a aplicação da matemática no comportamento económico.

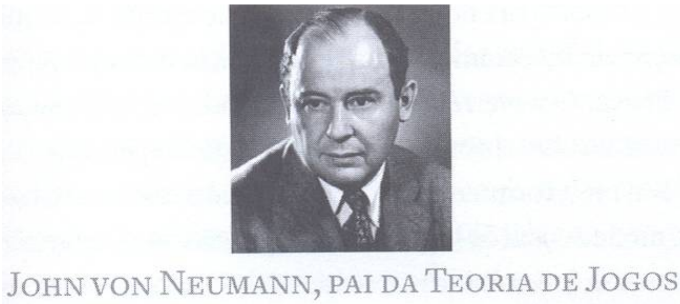


Fig. 23 – John Von Newmann[74]

---

[71] Albert Einstein (Ulm, 14 de Março de 1879 — Princeton, 18 de Abril de 1955) foi um físico alemão radicado nos Estados Unidos mais conhecido por desenvolver a teoria da relatividade. Recebeu o Nobel de Física de 1921 pela correcta explicação do efeito fotoeléctrico. Devido à formulação da teoria da relatividade Einstein tornou-se famoso mundialmente. Foi por exemplo eleito pela revista Time como a "Pessoa do Século". Em sua honra, foi atribuído o seu nome a uma unidade usada na fotoquímica, o *Einstein*, bem como a um elemento químico, o Einsténio, *in* [01].

[72] [12] pág. 161

[73] Teorema *minimax* – Num jogo de dois jogadores com soma zero, é racional para cada jogador escolher a estratégia que maximiza o seu ganho mínimo, ou, de forma equivalente, que minimiza o ganho máximo do outro. O par de estratégias tal que cada jogador maximiza seu *payoff* mínimo é a "solução" do jogo. Os jogos de soma zero são aqueles em que a soma dos payoffs dos jogadores é zero, ou seja, um jogador só pode ganhar se o outro perder, assim como no *póquer*, *xadrez*, entre outros. É a este tipo de jogo que se aplica o teorema *minimax*, *in* [90] pág. 6.

[74] [79] pág. 9

John Horton Conway, matemático inglês do século XX, nascido em 1937 foi um notável investigador de jogos. Analisou matematicamente o *Go*, um jogo de tabuleiro, de origem oriental, de regras muito simples, mas muito complexo. Os próprios computadores ainda não o jogam a um nível aceitável, ao contrário do que se passa com o *Xadrez*, por exemplo. "*O Go é um jogo tradicional do Oriente. Surgiu na China há mais de 2500 anos e foi introduzido no Japão em 800 d.C., sendo muito popular nos dois países. É um jogo de influência, com regras simples, mas de uma complexidade estratégica notável. Na antiguidade chegou a ser uma das quatro artes ensinada aos nobres chineses (as outras eram a música, a caligrafia e a pintura).*"[75]

Conway inventou um jogo, designado por *Jogo da Vida*. Ao contrário da maioria dos jogos, utilizados por um, dois ou mais jogadores, este jogo é muito singular, uma vez que participam zero jogadores. *"Neste jogo de Conway somente a configuração inicial depende do jogador, tudo o que se segue é automático. A acção desenrola-se num tabuleiro de Xadrez de dimensões arbitrariamente grandes. Cada célula (isto é, cada casa do tabuleiro) tem dois estados possíveis: viva e morta. ... Este jogo tornou-se mundialmente famoso mercê da coluna de Martin Gardner no Scientific American, em 1970. ... lançara uma nova área da matemática: os Autómatos Celulares, que são estruturas matemáticas úteis em simulações de processos físicos e biológicos e que, a um nível teórico, podem comportar-se como computadores."*[76] Este jogo foi criado de modo a reproduzir, através de regras simples, as alterações e mudanças em grupos de seres vivos, tendo aplicações em diversas áreas da ciência. As regras do jogo são muito simples e que se podem sintetizar do seguinte modo:

"- *Qualquer célula viva com menos de dois vizinhos vivos morre de solidão.*

- *Qualquer célula viva com mais de três vizinhos morre de superpopulação.*

- *Qualquer célula com exactamente três vizinhos torna-se uma célula viva.*

- *Qualquer célula com dois vizinhos vivos continua no mesmo estado para a próxima geração."*[77]

Este fenómeno pode ser transportado para a vida real. As populações de seres vivos, com um número reduzido de indivíduos, tendem a extinguir-se por dificuldades de reprodução ou de organização. Pelo contrário, quando existe superpopulação de uma

[75] [45] pág. 60

[76] [76] págs. 9-11

[77] [32]

determinada espécie, alguns indivíduos tendem a morrer por falta de alimento ou de território.

Conway inventou muitos outros jogos, tendo iniciado nos anos setenta do século XX, a Teoria dos Jogos Combinatórios.

Fig. 24 – John Horton Conway[78]

No jogo de *Xadrez,* por exemplo, a estratégia vai-se modificando consoante o que o adversário vai fazendo, mas mesmo assim existe um grande número de jogadas possíveis, isto é, um grande número de possibilidades. O matemático Hardy dizia o seguinte: *"…a diferença entre um teorema matemático e um problema de Xadrez reside somente na relevância de cada um. Nada os distingue, a não ser a importância das respectivas aplicações. Os jogos abstractos e a matemática pura são idênticos…"*[79]

O interesse dos matemáticos por muitos jogos, deve-se em parte aos conteúdos matemáticos que fazem parte de alguns deles e também da matemática poder possuir características lúdicas similares aos jogos. A descoberta e utilização de jogos contribuiu e contribui para o desenvolvimento da matemática, quer no aspecto científico, quer pedagógico, sendo também verdadeiro o fenómeno inverso. Este, ou outro tipo de conexão pode surgir mais ou menos afastado no tempo. Por exemplo consultando *o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, podemos ler o seguinte: "Embora alguns matemáticos célebres, como é o caso de Hardy, tenham declarado que a sua actividade não tem a mínima ligação com o real, na verdade, o estabelecimento de conexões faz parte integrante do trabalho matemático. Nalguns casos elas são evidentes, noutros estão de alguma forma ocultas, tendo por vezes demorado séculos a desvendar. Um dos exemplos mais célebres da*

[78] [37]

[79] [45] pág. 21

História da Matemática é o caso das cónicas. Estudadas na Antiga Grécia, essencialmente por Apolónio (260-190 a. C.), as cónicas eram curvas interessantes e belas mas «não serviam para nada», até que Kepler (1571-1630) as usou, vários séculos depois, para descrever as trajectórias dos corpos celestes. Actualmente as utilizações das cónicas são inúmeras".[80]

Os jogos estão relacionados com todas as áreas da matemática como a aritmética, lógica, álgebra, geometria ou probabilidades.

2.2. Importância dos Jogos no Ensino

Os jogos matemáticos podem ser um recurso pedagógico importante para a aquisição de competências matemáticas nucleares e fundamentais para a vida do quotidiano. Através da utilização de jogos, os alunos são estimulados a utilizar o raciocínio, a capacidade de concentração e a criatividade na resolução de situações problemáticas. Os jogos de natureza lúdica-manipulativa, são frequentemente motivo de interesse, paixão e motivação quer pelos profissionais da educação, quer pelos cidadãos em geral. Por este motivo alguns professores levam alguns jogos, sempre que possível e com o devido enquadramento curricular e programático, para a sala de aulas, implementam clubes, espaços ou laboratórios de matemática, concursos de jogos matemáticos e outros.

A Matemática, apesar de registar francas melhorias nos últimos tempos, ainda *"é a mais ignorada de todas as ciências."*[81] Ao contrário do tempo dos pitagóricos, em que só alguns tinham acesso ao saber matemático, uma vez que eram obrigados a guardar sigilo, a Matemática como importante ciência que é, deve ser partilhada por toda a gente e a melhor forma é que seja popularizada a partir da escola. A Matemática deve ser vista como uma ciência muito importante na formação integral dos cidadãos. Daí dever-se falar em matemática para todos.

Ian Stewart, numa conferência organizada pela Sociedade Inglesa para a Investigação sobre a Aprendizagem da Matemática *(The Britisch Society for Research*

[80] [58] pág. 127

[81] [62] pág. 75

into Learning Mathematics), dava algumas respostas em relação ao dever dos matemáticos popularizarem a Matemática: *"porque têm esse dever com a Humanidade; para encorajar as pessoas a estudar Matemática; para explicar ao mundo que a Matemática não é uma arte morta, que há coisas que acontecem na actualidade; porque é divertido. Alguns alunos e cidadãos em geral vêm a Matemática como uma área muito difícil e só compreensível para alguns."*[82]

Segundo João Pedro da Ponte "*Prevalece ainda uma forte representação social da Matemática como uma disciplina intrinsecamente difícil, para a qual apenas um número reduzido de pessoas têm «talento». Prevalece ainda a ideia que a Matemática se ensina por exposição do professor, como um produto acabado, levando ao abandono de toda a actividade investigativa."*[83] Segundo o mesmo autor, *"diversos estudos têm mostrado que são muito frequentes, entre os professores, concepções estáticas e elitistas sobre a Matemática e sobre os objectivos do seu ensino, pouco compatíveis com a ideia de uma educação matemática para todos."* [84]

Os alunos devem aprender Matemática, não com o sentido de efectuar cálculos ou utilizar fórmulas muitas vezes sem perceberem o sentido e a importância do que estão a utilizar ou para se ficar aprovado em exames, mas sim aprenderem Matemática para a vida, já que ela está relacionada com todos os aspectos da sociedade e é importante sob os aspectos profissionais ou recreativos. Muitas vezes os alunos são ensinados como se mais tarde fossem transmissores desses saberes, mas nem todos os que estudam Matemática vão ser matemáticos profissionais. Sendo o Universo uma construção matemática, poderá ser um pouco paradoxal que esta disciplina seja a que menos sucesso na Escola tem e, regra geral, também a mais desinteressante para os alunos. Para contrariar isso, o professor deverá trabalhar no sentido de haver uma mudança de mentalidade.

"Se as técnicas algorítmicas são importantes, deve-se evitar que elas sejam ensinadas como artes mágicas que funcionam sem se saber porquê; as técnicas devem surgir como corolário natural do entendimento do que está por detrás delas e nunca como coelhos tirados da cartola."[85] Como afirmava Morris Kline, *"a Matemática em*

[82] [62] pág. 78

[83] [54] pág. 10

[84] [54] pág. 35

[85] [54] pág. 40

si mesma é um esqueleto. A carne e o sangue consiste no que se faz com ela."[86] Para Sebastião e Silva, é essencial *"seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta*, *para desenvolver o sentido crítico é essencial encorajar no aluno a discussão livre e disciplinada, habituando-o a expor com calma e sem timidez os seus pontos de vista e a examinar serenamente e com interesse as opiniões dos outros"* e *"os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação."*[87] Daí a necessidade de nas escolas se criarem espaços matemáticos ou clubes para funcionarem como laboratórios de matemática, onde se podem fazer diversas experiências e ensaios. Deste modo, poder-se-á incutir uma filosofia de ensino que altere as concepções e práticas, *"marcadas por uma perspectiva estática e centrada no binómio exposição/exercícios"*[88] e também que o trabalho docente possa deixar de ser realizado essencialmente em função dos manuais escolares adoptados pela escola. Desta forma, os alunos podem e serão capazes de mais facilmente utilizarem adequadamente as ideias matemáticas na interpretação e resolução dos problemas do mundo real.

Os alunos sobre os quais se pretende fazer esta investigação nunca tiveram contacto com os jogos matemáticos que se pretendem utilizar e no 2º Ciclo trabalharam muito pouco com outros jogos matemáticos. Daí se procurar também popularizar os jogos matemáticos para estes alunos da Educação Especial. Os alunos que frequentam este tipo de ensino devem ter igual ou maior acesso à aprendizagem que os restantes estudantes. A Educação Especial não pode ser o parente pobre na nossa Escola, o que muitas vezes parece que se verifica.

No *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*, promovido pela Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto no ano lectivo 2007/08, abordaram-se conteúdos, planificação de aulas e metodologias de ensino da Matemática. Abordaram-se também os novos programas a entrar em vigor a partir do ano lectivo de 2009/2010 e um dos pontos a dar especial atenção é a implementação e utilização de jogos curriculares na compreensão

[86] [53] pág. 40

[87] [54] pág. 40

[88] [54] pág. 9

dos conteúdos a leccionar. Aliás, durante o programa os oito formandos e a formadora abordaram e utilizaram vários jogos matemáticos, alguns dos quais foram aplicados com alunos. Alguns jogos foram utilizados no grupo/turma, ou em aulas de apoio ou ainda no clube da Matemática. Alguns desses jogos foram muito motivadores e interessantes para os alunos, o que levou a uma melhor aprendizagem de conceitos e a um desenvolvimento de competências matemáticas, razão porque foram incluídos alguns deles na presente selecção.

Verifica-se um interesse dos alunos de muitas outras escolas em jogos matemáticos, e prova disso é a organização por parte da Associação *Ludos*, da Associação de Professores de Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática, do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, em que no presente ano lectivo se vai disputar o 4º campeonato. Pode verificar-se um número de adesão crescente de alunos e escolas ao longo dos tempos na participação desses campeonatos.

Os jogos que normalmente fazem parte do *Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos* são: *Pontos e Quadrados, Semáforo, Ouri, Hex* e *Amazonas,* alguns dirigidos ao 1º Ciclo do Ensino Básico, outros ao Segundo, outros ao Terceiro e outros jogos são dirigidos a alunos do Ensino Secundário. Estes são jogos de estratégia em que não existe informação escondida nem a utilização de elementos que favoreçam o factor sorte nas jogadas. Por este motivo, alguns autores consideram estes como jogos abstractos. Na Ludoteca da escola vários alunos têm treinado estes jogos que acham muito interessantes.

É um pensamento convergente a todos os professores de Matemática da Escola E. B. 2,3 Maria Manuela Sá, que os jogos matemáticos são de grande importância para a aprendizagem dos alunos e pelo seu prazer e motivação que despertam. Deste modo, existe dentro do *Plano Curricular de Agrupamento*, um conjunto de actividades, direccionado para a participação dos alunos em alguns jogos e outras actividades matemáticas. Para o ano lectivo 2008/2009, estão previstas algumas actividades no âmbito da Matemática, entre as quais as *Olimpíadas e Pré-olimpíadas*, *Jogo do 24*, *Tangran*, *Canguru* e *SuperTmatik*. Estas actividades estão devidamente enquadradas em diversos itens dos *Objectivos do Projecto Educativo* e das *Competências Gerais e Específicas* a adquirir pelos alunos. Contudo, normalmente estas actividades estão direccionadas à participação dos melhores alunos de cada turma.

Como se pretendia fazer investigação com alunos de Educação Especial e atendendo às características destes, achou-se interessante, e os alunos concordaram, que em algumas das aulas fossem utilizados jogos educativos conducentes à aprendizagem da Matemática. Uma segunda razão deveu-se ao facto destes alunos não terem muitas possibilidades de participar nas actividades supracitadas, em virtude de não conseguirem acompanhar os ritmos competitivos dos restantes colegas. Estas razões constituíram os pontos de partida para a escolha deste tema para dissertação.

Um dos primeiros jogos que foi apresentado à turma, logo no início do ano lectivo, foi o *Jogo do 15*, que consiste num quadrado mágico, contendo nove pequenos quadrados (*3x3*). Este jogo está descrito num antigo livro chinês, datado do período *Han*, chamado *Lo Shu (Livro do Rio)*, e está relacionado com mitos e lendas.[89] Em cada um dos pequenos quadrados irá ser colocado um número, de 1 a 9, de modo a não haver repetições de números. A soma de cada linha, coluna ou diagonal terá de ser 15. Existem oito combinações de três dígitos cuja soma é 15.

"O discernimento que resolve o jogo do quinze é a descoberta de que é matematicamente equivalente ao jogo do galo!"[90]

Existem oito combinações possíveis diferentes para este quadrado mágico (ver fig. 25). O número 5 tem que ficar, obrigatoriamente, no pequeno quadrado central. Os outros números podem variar de posicionamento.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Fig. 25 – Diferentes combinações do *Jogo do 15*

[89] [80] pág. 28

[90] [24] pág. 196

Este jogo despertou a curiosidade, interesse e envolvimento dos alunos. A partir daí, sempre que possível, eram utilizados jogos, no sentido de ajudar a desenvolver alguns conteúdos matemáticos.

Tal como era previsível, os alunos tiveram muitas dificuldades em conseguir encontrar a solução correcta. Só depois de múltiplas tentativas, um dos alunos chegou à solução acertada, através da estratégia de tentativa e erro. Perguntou-se seguidamente por que razão o número 5 tinha que ficar no centro do quadrado mágico. Diversas respostas surgiram, entre as quais esse número estar precisamente no meio entre 1 e 9. Nenhum dos alunos indicou que 5 é divisor de 15 ou 15 é múltiplo de 5. Depois de se ter referido isso, o mesmo aluno explicou que 5 vezes 3 é igual a 15. Foi-lhe pedido para explicar o raciocínio e o mesmo aluno referiu que o número 5 vezes os três quadrados de cada fila (coluna, linha ou diagonal, acrescentou o professor) dava o produto igual a 15. A explicação do aluno pareceu-nos bastante meritória. Este jogo é isomorfo ao popular *Jogo do Galo*, que quase todos os alunos gostam de jogar.

Este jogo, aparentemente simples, pode ser de uma grande utilidade, uma vez que os alunos e cidadãos em geral podem adaptar este jogo para outros com propriedades similares. Martin Gardner refere o seguinte: *"O conceito de isomorfismo (equivalência matemática) é um dos mais importantes na matemática. Há muitos casos em que um problema difícil pode ser mais facilmente resolvido através da sua transformação num problema isomórfico que já tenha sido resolvido."*[91]

Designamos este jogo por *Jogo do quinze*, embora exista efectivamente um jogo, chamado *Puzzle do 15*, inventado pelo matemático norte-americano Samuel Loyd, que se dedicou à matemática recreativa.

Fig. 26 – Samuel Loyd (1841-1911)[92]

[91] [24] pág. 197

[92] Figura retirada de [75] pág. 37

Este *puzzle* é bastante mais complexo que o anteriormente descrito e consiste numa placa com quinze quadrados, numerados de 1 a 15, móveis na vertical e horizontal, cujo movimento é garantido pela existência de um espaço vazio (ver fig. 27).

O objectivo consiste em ordenar os números, através de uma sequência de movimentos. Na sua versão original, os números aparecem no *puzzle* na ordem correcta, exceptuando os dois últimos números (14 e 15), que surgem trocados. Acresce dizer que o *puzzle*, tal como desta forma é apresentado, não é resolúvel.

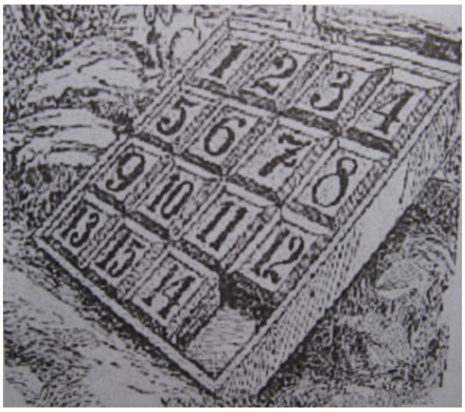


Fig. 27 – *Puzzle do 15*[93]

Após se terem diagnosticado as principais dificuldades dos alunos, chegou-se à conclusão que um ensino tradicional, mesmo com as obrigatórias adequações ou adaptações seria pouco profícuo e desinteressante para estes alunos.

A *Gestão do Programa* para o ano lectivo, bem como o *Programa Específico Individual (PEI)*, foi adaptado, tendo em conta o diagnóstico efectuado sobre os conhecimentos matemáticos dos alunos. A partir daqui reflectiu-se e pesquisou-se alguma literatura de forma a seleccionar alguns jogos adequados ao perfil destes alunos.

De seguida, procurou-se analisar as possíveis estratégias a aplicar, conducentes à aquisição de competências e consequentemente a metodologia envolvida.

Alguns jogos escolhidos foram mais simples, outros mais complexos, quer ao nível da compreensão das regras, da simplicidade do jogo propriamente dito, dos materiais a utilizar, ou da matemática utilizada de forma mais implícita ou explícita. Alguns jogos foram adaptados tendo em conta os pré-requisitos dos alunos e também os objectivos que se poderiam e desejariam alcançar.

[93] Figura retirada de [75] pág. 40

Pensou-se que para estes alunos seria motivador, interessante, proveitoso e envolvente abordar alguns conteúdos, recorrendo a jogos matemáticos, levando-os a adquirir uma melhor compreensão de conteúdos programáticos e consequentemente a obter algumas competências matemáticas importantes para a vida. Estas competências matemáticas devem integrar atitudes, capacidades e conhecimentos que os alunos devem apreender, desenvolver e aplicar. Como é referido no caderno, *Competências essenciais no Ensino Básico*, *" ... competência matemática .... Está, pois, estritamente associada a um saber em acção, a uma cultura geral que se pretenda geradora de uma postura para uma aprendizagem ao longo da vida. Deste modo, a noção de competência matemática procura introduzir uma visão holística e integradora da cultura matemática em que todos os alunos devem participar.... A competência matemática situa-se para além dos conhecimentos, constrói-se numa prática social complexa a que lhe estão associadas determinadas capacidades e disposições que lhe conferem sentido. Assim, ser-se matematicamente competente na realização de determinada tarefa implica ter não só os conhecimentos necessários, como a capacidade para os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição para fazê-lo efectivamente".*[94]

Uma competência a ser estimulada seria a comunicação, já que as actividades a realizar estavam pensadas para isso. No *Currículo Nacional do Ensino Básico*, pode ler--se: *"Nos diversos tipos de experiências vividas pelos alunos, devem ser considerados aspectos transversais da aprendizagem da matemática, nomeadamente:*
A comunicação inclui a leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos de matemática, sobre a matemática ou em que haja informação matemática. Na comunicação oral, são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo, assim como a compreensão de pequenas exposições do professor. O rigor da linguagem, assim como o formalismo, devem corresponder a uma necessidade sentida e não a uma imposição arbitrária."[95] Também no *Programa de Matemática do Ensino Básico*, no que diz respeito às competências transversais a desenvolver, relativamente às indicações metodológicas, podemos ler o seguinte: *"Comunicação matemática. Para desenvolverem esta capacidade, os alunos têm que adquirir e usar a termi-*

[94] [51] págs. 36-37

[95] [17] pág.70

nologia e a simbologia apropriadas, através de um envolvimento em situações de comunicação oral e escrita e em interacções de diferentes tipos — professor-aluno, aluno (s)-aluno (s).

Nestas situações, devem dispor de oportunidades frequentes para interpretar textos, apresentar ideias e colocar questões, expor dúvidas e dificuldades, pronunciar-se sobre os seus erros e os dos colegas, recorrendo tanto à linguagem natural como à linguagem matemática.

Embora a comunicação oral seja predominante na aula de Matemática, é necessário desenvolver a capacidade de comunicação escrita, nomeadamente, através da elaboração de relatórios de tarefas e pequenos textos, levando os alunos a expressar e representar as suas ideias, passando a informação de um tipo de representação para outro e usando de forma adequada a simbologia e a terminologia da Matemática.

A comunicação é uma parte essencial da actividade matemática dos alunos em aula, desempenhando um papel fundamental na aprendizagem da disciplina. A apresentação e avaliação de resultados, a expressão, a partilha e confronto de ideias e a explicitação de processos de raciocínio constituem oportunidades para a clarificação e desenvolvimento do pensamento e para a construção do conhecimento matemático."[96]

A utilização de recursos lúdico-manipulativos, que está subjacente à maioria dos jogos seleccionados, poderá conduzir mais facilmente à aquisição de competências matemáticas importantes.

A ideia de trabalhar com materiais concretos é importante para os alunos conseguirem, sempre que possível, chegar à abstracção.

Também a competição, factor inerente a quase todos os tipos de jogos, desde que sadia, poderá trazer mais-valias para a aprendizagem dos alunos, estimulando-os a esforçar-se ou estudar mais.

Segundo Lia Sousa, jogar pode tornar o aluno mais activo, possibilitando uma maior agilidade e criação de estratégias. Já o manuseamento de objectos facilita lidar com as abstracções matemáticas, presentes em alguns conteúdos, facilitando a interpretação de conceitos e colaborando com a não aprendizagem mecânica.[97]

---

[96] [56] pág. 48

[97] [85] pág. 21

Como refere Àngel Alsina, *"O ensino obrigatório em diversos países tem vindo a sofrer, nos últimos tempos, uma transformação que consiste em substituir paulatinamente um currículo organizado por conteúdos por um currículo organizado por competências. Muitos são os estudos e diversos os motivos que suscitaram essa mudança, mas um dos mais importantes talvez seja a necessidade de dotar os alunos de uma série de habilidades – mais do que conceitos dispersos – que lhes permitam sentir-se competentes, não só a nível académico, como sobretudo, na sua vida quotidiana."*[98] Diz ainda o mesmo autor, pág.5, *"... proporcionar aos profissionais uma série de recursos e actividades lúdico-manipulativas que permitam às crianças melhorar a aquisição de competências matemáticas e potenciar o grau de consciencialização dessas aquisições"*. Também sobre este assunto, é referido no *Currículo Nacional do Ensino Básico*: "*Os alunos devem, frequentemente ter a oportunidades de utilizar recursos de natureza diversa:*

Materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da actividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim".[99]

2.3. O jogo como actividade lúdica

Segundo Manfred Eigen (Prémio Nobel da Química em 1967) e Ruthild Winkler, referidos por António Cabral, *"O jogo é um fenómeno natural que desde o início tem guiado os destinos do mundo; ele manifesta-se nas formas que a matéria pode assumir na sua organização em estruturas vivas e no comportamento social dos seres humanos. A história dos jogos perde-se na origem dos tempos. A energia da «grande explosão inicial» pôs tudo em movimento, impulsionando a matéria para um grande remoinho. Forças reguladoras procuram contrariar essa tendência para a desordem e para o acaso. O seu resultado não foi contudo, a ordem rígida dos cristais,*

[98] [02] pág. 4

[99] [17] pág.71

mas sim a ordem dos seres vivos. Desde os tempos mais remotos que o acaso tem sido a contrapartida indispensável das forças reguladoras. O acaso e as regras são muitas vezes os elementos do jogo. O jogo começa entre as partículas elementares, os átomos e as moléculas, sendo hoje continuado pelas células do nosso cérebro".[100]

Diz ainda o mesmo autor (pág.161), *"Seja nos jogos tomados no sentido restrito, seja na guerra, na economia, na sociologia ou na política, a Teoria dos Jogos visa o estabelecimento de modelos formais que minimizem os efeitos do acaso e optimizem a estratégia".*

Para justificar o uso do jogo, partimos da conceptualização de diversos autores representativos. *Por exemplo, Piers e Erikson (1982), consideram que o jogo é uma actividade através da qual as crianças realizam um processo de adaptação à realidade. Na mesma linha, Bettlheim (1987), um dos psicólogos da infância mais importantes do nosso tempo definiu o jogo como uma actividade de conteúdo simbólico que as crianças utilizam para resolver, a um nível inconsciente, problemas que não podem solucionar na realidade; através do jogo, as crianças adquirem uma sensação de controlo que na realidade estão muito longe de poder alcançar".*[101] Ainda segundo Bettlheim, o jogo é um direito das crianças, uma vez que *"O mundo lúdico das crianças é tão real e importante para elas como é, para o adulto, o mundo do trabalho e, consequentemente, dever-se-á conceder-lhe a mesma dignidade".*[102]

Segundo Winicott, mencionado por Beatriz Caba, o jogo para a criança é uma actividade incerta que se desenvolve numa zona neutra, não é um lugar relacionado com a realidade psíquica interna nem com a realidade exterior, propícia à criatividade, onde não existe tempo nem espaço tal como os adultos o concebem. Refere também Beatriz Caba, que o jogo não está sujeito a regulações internas, ou seja, o mundo intuitivo, nem externas, caso das pressões do meio social. O alargamento das actividades lúdicas proporcionam que o indivíduo não utilize apenas o plano do pensamento racional, mas também possa efectuar acções mais complexas e completas, produto de uma actividade mental em que operam simultaneamente o mundo racional/objectivo e o mundo da intuição, imaginação e fantasia. Todas as teorias do jogo são atravessadas pela criatividade. Esta capacidade criadora centra-se inicialmente no jogo e depois desdobra-

[100] [12] pág. 158

[101] [02] págs. 5-6

[102] [02] pág. 7

-se, de forma directa ou indirecta, noutras actividades que permitem o desenvolvimento integral do indivíduo. O espaço do jogo, deverá ser um espaço onde se possa criar, pensar, conceptualizar, explorar, socializar e aprender a conviver com ideias diferentes. Biologicamente foi comprovado que durante o processo de jogo, o organismo produz endorfinas que geram defesas internas indispensáveis a uma vida saudável.[103]

O docente também pode actualizar as suas práticas pedagógicas, recorrendo a actividades lúdicas e formas de comunicação diferentes da pedagogia tradicional. Nos tempos actuais é importante haver uma pedagogia lúdica-criativa, pois é uma necessidade sócio-cultural. O docente tem a obrigação de facilitar a educação e a aprendizagem dos alunos, contribuindo para isso a utilização de actividades lúdicas.

Segundo Alsina, *"Há... ainda professores a quem surpreende o facto de se misturar a matemática, um corpo rígido, rigoroso e exacto, com a diversão e entretenimento que o jogo implica; mas ..., há cada vez mais profissionais que partilham a ideia de que se o jogo se utilizar de forma programada e sistemática poderá ajudar os alunos a interiorizar que, com uma metodologia expositiva e magistral, passariam com mais dificuldade."*[104] Ainda Winnicott (1971), *"observa que através do jogo se cria um espaço intermédio entre a realidade objectiva e a imaginária que permite realizar actividades que na realidade não se poderiam levar a cabo*, *ideia também compartilhada por Vigotsky (1995), que acrescenta que esse espaço supõe uma zona de desenvolvimento potencial da aprendizagem. Jogar, segundo este autor, promove o conhecimento dos objectos e do seu uso, o conhecimento de si próprio e também dos outros."*[105]

Àngel Alsina, partindo destes autores, refere o seguinte a respeito do jogo: *"... quer seja livre ou estruturado, é uma fase necessária, que faz a ponte entre a fantasia e a realidade e promove, por isso, em simultâneo, o desenvolvimento social e intelectual, numa fase eminentemente lúdica do desenvolvimento infantil."*[106] Inerentemente ao jogo, existe o próprio prazer de jogar, mas a sua utilização em contexto escolar, propicia a resolução de problemas, mobilizando para isso a utilização de processos ligados ao raciocínio mental.

---

[103] [11] págs. 7-8

[104] [02] pág. 6

[105] [02] pág. 6

[106] [02] pág. 6

Na opinião de António Júlio C. Sá *"... o jogo, o brincar ou brinquedo desempenha um papel fundamental na nossa aprendizagem. E negar o seu papel na Escola é talvez renegarmos o nosso percurso individual, a nossa própria história pessoal de aprendizagem desde que nascemos."*[107]

António Cabral refere o seguinte: *"Quanto à aprendizagem lúdica, julgamos ser necessário admitir um impulso especial, o impulso lúdico, mas ele precisa de condições afectivas, sociais e sensório-motoras para entrar em funcionamento."*[108]

Refere ainda o mesmo autor, págs. 9 e 10, que a aprendizagem lúdica necessita do chamado *"impulso lúdico* (característica inata), *que é uma fonte de energia que funciona como tendência para a reiteração de uma actividade sobre pressão afectiva. ... No jogo com adversário, o impulso lúdico combina-se e é reforçado por um impulso secundário – a aspiração à auto-realização. … O impulso lúdico não pode confundir-se com uma necessidade sensório-motora geral, segue-se, isso sim, antes a uma necessidade especial (neurogénica ...), que, implicando embora a percepção e o movimento, visa a repetição da actividade que foi tida como interessante e da qual se gostou"*. Deste modo dar um passo para a frente fornece um estímulo para o passo seguinte.

Para Sigmund Freud, o jogo é uma actividade agradável e pode considerar-se como o princípio do prazer, ou seja, o destinatário natural do jogo é o prazer.[109] António Cabral define jogo (pág. 193), *"... quer a nível humano, quer animal, como toda a actividade que tem como primeiro objectivo o prazer."* Diz ainda o mesmo autor (pág. 195), que, *"O jogo, di-lo bem a psicologia, é condição «sine qua non» do desenvolvimento infantil, mas é-o também de uma vida em busca de felicidade."* Refere ainda (pág. 68): *" ... não é somente como evasão do trabalho que o jogo deve ter tido, pois neste caso seriam o cansaço e a insatisfação a determiná-lo. Há mais, ...resume-se na energia desencadeada pelo impulso lúdico ..."*. Deste modo, sendo o jogo uma fonte de prazer, *"... quando se acha prazer em determinada actividade e esta se repete, pelo prazer, nasce o jogo. Se este continua a ser fonte de prazer, volta a repetir-se, o que, entre o mais, dá origem ao desenvolvimento e aperfeiçoamento. É a acomodação de*

[107] [66] pág.3

[108] [12] pág. 8

[109] [12] págs. 12-13

que fala Piaget"[110]. É essencial perceber e compreender como o jogo penetra e se relaciona nas actividades humanas. O jogo não é um fim em si mesmo, porque o indivíduo ao praticá-lo tem uma meta ou objectivo em vista.

Segundo Freud, citado por Beatriz Caba, jogo é uma actividade que permite reduzir tensões, nascidas da impossibilidade de realizar desejos.[111]

Segundo António Cabral, com base na língua grega podemos considerar algumas propriedades do jogo, *mimese* e *agon*. *"A mimese busca naturalmente o prazer (hedoné) e agon orienta-se prioritariamente para uma certa utilidade (ofélesis), através da vitória (niké). Mimese ... significa neste contexto imitação/repetição. Agon ... significa luta/competição. ... A mimese lúdica orienta-se para o prazer. ... O impulso lúdico é um impulso para o prazer mimético. Quem pratica o jogo repete e imita gestos e movimentos ... reais ou imaginários. Mas a mimese reforça-se na vitória, quer medial (durante o jogo), num lance bem sucedido), quer final. Se a mimese tem carácter conservador o Agon proporciona já a acção criativa, pois visa a realização de um projecto, através da destruição de um impedimento."*[112] Acrescenta ainda o autor, (pág.194), que "*A actividade lúdica, ainda que se não baste a si própria enquanto actividade, visto orientar-se para um fim que é o prazer, tem por este facto uma motivação própria: o impulso lúdico. Tal impulso realiza-se através de dois meios fundamentais: a mimese (imitação) e o agon (competição)."* E refere ainda na mesma página: *"Se a imitação é de certa maneira um elemento conservador (não tão conservador como em outras actividades, pois o jogo afirma-se na criatividade), a competição visa sempre dialecticamente algo e novo, ... porque ela é um dos motores da vida e da história, é necessário reconhecer a sua importância, mesmo pedagógica."*

Ainda António Cabral, (pág. 79), expõe o seguinte: *"Embora a palavra jogo provenha de jocus (latim), as formas latinas que traduzem a ideia de jogo, na acepção actualmente mais generalizada (divertimento mais ou menos competitivo), são ludus, lusus e lusio, sendo ludus a palavra corrente a qual assumia outros significados…."*

Na Idade Média, a palavra «jogo», tinha como primeiro objectivo o divertimento. Por este motivo, refere António Cabral*, do latim,* a palavra *"... jogo vem*

[110] [12] pág. 22

[111] [11] pág. 7

[112] [12] págs. 91-92

de «jocus» e não de «ludus» – de «jocus» pelo divertimento que proporciona e pela graça que contém. No jogo, o «ludus» completa-se com o «jocus». Dizia Cícero: «Ut at ludem et jocum facti ludus». E Tito Lívio fazia igualmente a associação: «ludus» et «jocus». ... Daí que a escola se designasse principalmente de «ludus»: «ludus discendi» (de aprender, de estudo), «ludus litterarius» (onde se ensinam as letras), «ludus saltatorius» (de dança), «Ludi magister» (mestre-escola).”[113]

O mesmo autor refere ainda (pág. 96), que *“... o valor do jogo, sob o ponto de vista humano, está na razão directa da comunicação com o outro. A actividade lúdica, bem o sabemos do desenvolvimento infantil, é um dos melhores meios de socialização e convivência”*. O jogo implica comunicação, já que há mensagens, quer seja um jogo individual ou não. Todo o jogo tem as suas regras que são adoptadas ou impostas como linha directriz de conduta.

Para Jean Piaget, citado por António Cabral (pág. 159), *“As estruturas, ... podem ser formais, quando reguladas por um teórico (construção abstracta), e reais, se reguladas por si ou auto-reguladas (construção genética). O jogo é fruto de uma construção genética.”*

Eigen e Winkler referem a respeito do jogo o seguinte: *“O jogo é um fenómeno natural, que desde o início tem guiado os destinos do mundo; ele manifesta-se nas formas que a matéria pode assumir na sua organização em estruturas vivas e no comportamento social dos seres humanos.”* [114]

Segundo António Júlio César de Sá, *“...a actividade lúdica está no centro de muitas ideias sobre o desenvolvimento psicológico, intelectual, emocional ou social do ser humano.”*[115]

Segundo Miguel de Gúzman, na matemática está inerente a ideia de jogo, uma vez que este, também, pode possuir regras claras e bem definidas, bem como movimentos semelhantes a um tipo de análise intelectual análogos ao raciocínio matemático. Os diferentes conteúdos da matemática têm as suas peças, os objectos de que se ocupa, bem determinados através das suas diferentes definições teóricas. Ao longo do tempo, muitos dos grandes matemáticos observavam, participavam e

[113] [12] pág. 85

[114] [12] pág. 158

[115] [66] pág. 3

organizavam jogos, o que muitas vezes contribuiu para o aparecimento de novas áreas da matemática nos campos científico e pedagógico.[116]

A combinatória é um dos núcleos basilares dos jogos. Para Martin Gardner, "*A análise combinatória consiste no estudo de maneiras de agrupar os elementos de conjuntos sujeitos a várias regras específicas e no estudo das propriedades desses agrupamentos. ... os próprios números e o modo como são representados em notação posicional por dígitos dependem de regras combinatórias. Na verdade, todo o raciocínio dedutivo, quer na matemática, quer na lógica pura, lida com combinações de símbolos numa «cadeia», de acordo com as regras de um sistema que decide se a cadeia é uma proposição válida ou inválida. Foi por isso que Gottfried Leibniz, o «pai» da análise combinatória do séc. XVII, chamou à arte de raciocínio «ars combinatória».*"[117]

A teoria dos grafos aparece muito frequentemente na análise de jogos matemáticos. A sua génese está ligada ao problema das *pontes de Könisberg*. A teoria das probabilidades está intimamente ligada aos jogos de azar, a partir dos quais nasceu. A álgebra, geometria e teoria dos grupos também são aplicadas a actividades lúdicas.[118]

2.4. O jogo e o ensino da matemática

Alguns autores pensam que o jogo deveria ser integrado dentro dos conteúdos programáticos da Matemática, em virtude de ser um recurso indispensável no seu ensino. Por exemplo, Josefa Fernández Sucasa e M. Inês Rodríguez Vela referem o seguinte: A utilização de jogos no ensino da Matemática contribui para motivar os alunos, ajudar a descobrir conceitos e a desenvolver os conhecimentos adquiridos, assim como fomentar o engenho e a criatividade.[119]

---

[116] [29] pág. 3

[117] [24] págs. 15-16

[118] [29] págs. 4-5

[119] [88] contracapa

É evidente que a integração de jogos deve estar perfeitamente enquadrada na planificação anual da disciplina e não serem utilizados de forma avulsa e descontextualizadas das temáticas a leccionar. Logo deverá ser efectuada uma criteriosa selecção dos jogos a utilizar, definir perfeita e claramente os objectivos a alcançar com esses jogos, bem como fazer uma avaliação correcta, pré e pós utilização dos mesmos.

Na opinião de Àngel Alsina, *"...relativamente ao jogo nas aulas de Matemática, é que este recurso deve subordinar-se à Matemática e não o contrário."*[120] Assim sendo, na Matemática a aprendizagem pode acontecer utilizando jogos, ou de outra forma, os jogos são processos e não devem ser um produto final. Refere ainda que *"... o jogo é um recurso de aprendizagem no ensino da Matemática, pelo que, em contexto escolar, se deveria integrar dentro do próprio programa, de uma forma séria e rigorosa, planificando sessões de jogo: seleccionar os jogos que se pretende utilizar, definir objectivos a alcançar com os diferentes jogos utilizados, operacionalizar a avaliação das actividades lúdicas, etc."*.[121]

Àngel Alsina aponta os "*10 mandamentos do jogo na aula de Matemática*", a que também chama *"decálogo do jogo"* e que se passam a enumerar:

"1. *É a parte mais real da vida das crianças. Utilizando-o como recurso metodológico, transpõe-se a realidade das crianças para a escola e permite fazer-lhes ver a necessidade e a utilidade de aprender Matemática.*

2. *As actividades lúdicas são altamente motivadoras. Os alunos implicam-se muito nelas e levam-nas muito a sério.*

3. *Abrange diferentes tipos de conhecimentos, habilidades e atitudes acerca da Matemática.*

4. *Os alunos podem enfrentar novos conteúdos matemáticos sem medo do fracasso inicial.*

5. *Permite aprender a partir do próprio erro e a partir dos erros dos outros.*

6. *Respeita a diversidade dos alunos. Todos querem jogar, mas o que é mais significativo é que todos podem jogar em função das suas próprias capacidades.*

[120] [02] pág. 7

[121] [02] págs. 6-7

7. *Permite desenvolver processos psicológicos básicos necessários à aprendizagem da Matemática, tais como a atenção, a concentração, a percepção, a memória, a resolução de problemas e a procura de estratégias.*
8. *Facilita o processo de socialização e, ao mesmo tempo, o desenvolvimento da autonomia pessoal.*
9. *Os currículos actuais recomendam de forma directa para se ter em conta o aspecto lúdico da Matemática e a aproximação à realidade das crianças.*
10. *Promove e conduz, em muitas ocasiões, a uma aprendizagem significativa".*[122]

Dentro dos jogos matemáticos, para as crianças, devemos dar prioridade aos que utilizam tarefas manipulativas e experimentais, uma vez que este tipo de jogos conduz normalmente a uma maior interacção, ao nível de debates e discussões, e também partilha e cooperação, que se traduzem num enriquecimento de aquisição de aprendizagens. A médica e educadora italiana Maria Montessori (1870-1952), *in Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos*, afirmou, no início do século passado, que, *"a criança tem a inteligência na sua mão"*[123], ou seja, as crianças aprendem noções matemáticas ou outras a partir da manipulação e da experimentação com objectos. Na mesma obra, podemos constatar que Piaget e Inhelder (1975), pág.8, afirmaram que "*a criança aprende a partir da acção sobre os objectos"*, sobretudo na fase do desenvolvimento concreto, ou seja, as crianças têm necessidade de aprenderem a partir da acção. Tal como diz M. A. Canals (2001), *"Se soubermos propor a experimentação de forma adequada a cada idade e, a partir daí, fomentar o diálogo e a interacção necessários, o material, longe de ser um obstáculo que nos faz perder tempo e dificulta o salto para a abstracção, facilitará esse processo, porque facilitará a descoberta e tornará possível uma aprendizagem sólida e significativa."*[124]

Também na literatura poderemos observar alusões a esta situação: por exemplo José Saramago na sua obra literária "*A Caverna*", a determinada altura refere o seguinte: *"Para que o cérebro humano soubesse o que era uma pedra, foi necessário que os seus dedos a tocassem, sentissem a sua aspereza, o peso e a densidade, foi necessário que se*

[122] [02] página 7

[123] [02] pág. 8

[124] [02] pág. 8

ferissem com ela. Só muito tempo depois, o cérebro compreendeu que daquele pedaço de rocha se poderia fazer uma coisa a que se chamaria punhal."[125] Ainda este aspecto é verificado ao nível cinematográfico no filme de Stanley Kubrick, "*2001, Odisseia no Espaço*", em que é mostrado que um dos factores responsáveis pela evolução do Homem, aconteceu a partir do momento em que ele foi capaz de utilizar objectos com um fim específico. Assim, a evolução do indivíduo ao longo do seu crescimento, segue de certa forma a evolução da Humanidade ao longo dos tempos.

Desta forma, e como referem Piaget e Inhelder (1975) ou Kamii (1990), citados por Àngel Alsina, *"... a manipulação é um passo necessário e indispensável para a aquisição de competências matemáticas. No entanto, não é a manipulação em si o importante do ponto de vista da aprendizagem matemática. ..., é a acção mental que é estimulada quando as crianças têm a possibilidade de ter os objectos e os diferentes materiais nas suas mãos.... que só depois deste trabalho de manipulação de deverá passar a usar recursos progressivamente mais elaborados de representação matemática, tais como a representação gráfica ou o trabalho escrito com lápis e papel."* [126]

Assim, desta forma, e enquanto as crianças estão na fase das operações concretas, a utilização de material manipulativo contribui para um ensino mais enriquecedor em termos de aprendizagem, já que normalmente se utilizam estratégias e recursos diversificados.

No livro de *Didáctica da Matemática,* da Universidade Aberta, poderemos consultar uma definição de Reys (1971) sobre materiais manipuláveis e que diz o seguinte: *"... objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objectos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objectos que são usados para representar uma ideia."*[127]

Também no caderno *Competências essenciais no Ensino Básico*, é referido o seguinte: *"A utilização de materiais manipuláveis, ao longo de toda a escolaridade, como suporte ou ponto de partida em diversas tarefas escolares. Esta utilização não*

[125] [02] pág. 8

[126] [02] págs. 8-9

[127] [16] pág. 7

constitui um fim, mas um meio para o desenvolvimento da actividade intelectual dos alunos."[128]

No *Relatório Preliminar, Matemática 2001* também é mencionado o seguinte: *"A prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados, ... e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente materiais manipuláveis, calculadoras e computadores."*[129]

Normalmente a utilização deste tipo de materiais requer um grande envolvimento físico por parte dos estudantes, obrigando à utilização dos diferentes sentidos, promovendo, normalmente, um maior interesse e motivação pela Matemática. De qualquer forma, a utilização destes materiais não implica directamente que os alunos apreendam os conteúdos matemáticos, é também necessária uma preparação prévia e uma experimentação e exploração dos mesmos, de modo a se estabelecerem ligações entre a utilização de materiais e o ensino da Matemática. Deste modo, as actividades que utilizem materiais manipulativos a serem explorados, devem representar a apreensão dos conceitos matemáticos a atingir.

As actividades com este género de materiais podem promover a interacção dos alunos uns com os outros e com o professor, originando discussão, debate e partilha e permitem uma aprendizagem mais enriquecedora, pois esta é obtida a partir das próprias experiências dos alunos.

No Currículo Nacional do Ensino Básico é frisado que "… *todos os alunos devem ter oportunidade de se envolver em diversos tipos de experiências de aprendizagem."* De entre essas experiências de aprendizagem, destacam-se a utilização de materiais manipuláveis. *"Materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da actividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim."*[130]

[128] [51] pág. 23

[129] [28] pág. 42

[130] [17] pág. 71

Para Beatriz Caba, o jogo é para a criança a forma inata de explorar o mundo, de conectar-se com experiências sensoriais, objectos, pessoas e sentimentos. Os jogos são em si mesmos, exercícios criativos de solução de problemas. O professor deverá contribuir para que os alunos se sintam motivados a trabalhar num ambiente de confiança, segurança e alegria para que exista uma aprendizagem significativa. As experiências lúdicas e criativas na infância modelam a vida adulta, quer no trabalho, quer na vida pessoal e familiar, contribuindo para a sua formação integral. Quanto maiores e mais exploradas forem as experiências lúdicas, com certeza a aprendizagem será mais abrangente e maior será a capacidade de imaginar e criar.[131]

Investigações conduzidas por Jean Piaget *"... vieram mostrar que as crianças até à idade de onze ou doze anos, para chegarem a assimilar certas experiências e conhecimentos, necessitam de lidar, concretamente, com os objectos e de os manusear. Os manuseamentos operatórios prévios não devem, assim, ser relegados para o mero aspecto metodológico da motivação ou da alternância. Mas devem sim, ser considerados como elemento essencial, para a introdução do raciocínio matemático. Esta concepção baseia-se na ... tese de Piaget que "todo o pensamento é uma operação."*[132] Ainda segundo Jean Piaget, as crianças com menos de 11 ou 12 anos *"... sentem tanta dificuldade em resolver na escola problemas de aritmética, que no entanto incidem sobre operações bem conhecidas: se manipulassem os objectos, raciocinariam sem obstáculos, enquanto os mesmos raciocínios aparentes, mas exigidos no plano da linguagem e dos enunciados verbais, constituem de facto, outros raciocínios muito mais difíceis, porque ligados a simples hipóteses sem realidade efectiva. Ora, depois dos 11 ou 12 anos, o pensamento formal torna-se precisamente possível, isto é, as operações lógicas começam a ser transportadas do plano da manipulação concreta para o plano dos simples ideais, expressas numa linguagem qualquer (a linguagem das palavras ou dos símbolos matemáticos, etc.), mas sem o apoio da percepção, da experiência, nem sequer da crença."*[133]

Para o ensino da Matemática, devem encontrar-se "*manuseamentos, que sejam adequados e estimulantes para a inteligência. Isto significa que os manuseamentos não serão meros processos divertidos, ... Mas, ... ligando os objectos manuseados e o*

[131] [11] págs. 3-4

[132] [30] pág. 39

[133] [50] pág. 92

assunto dos manuseamentos – deverão apresentar componentes, relacionamentos ou sequências, que fundamentam a noção matemática. Deste modo, ligando a manipulação de objectos o assunto em estudo, facilitar-se-á a apreensão de relações ou sequências que fundamentem a noção matemática a adquirir."[134] Contudo, para que possa acontecer a compreensão do que foi efectuado é necessário que os alunos, depois de manipularem os objectos, descrevam e expliquem o que realmente fizeram ou, antes da manipulação, prevejam qual será o resultado desta. Assim sendo, a manipulação de objectos assume, a função de um controlo do decorrer das representações e processos de raciocínio.

Em "*Como Ensinar Matemática no Básico e no Secundário*", é exposto que: *" ... a partir da configuração exterior de um facto, podem surgir várias possibilidades de provocar o interesse dos alunos:*

a - Tornar o facto estético. A partir da representação figurativa ou gráfica dos elementos de um facto, um enunciado de um problema, uma via de uma solução, a própria solução, podem surgir impulsos fortes, que servirão de estímulo para o tratamento desse facto. Para tal, podem influir os seguintes factores:

- O uso da cor (o realce das partes importantes através da cor; o uso de cartões coloridos, na construção de modelos;...).

- A espécie de material, principalmente de material estruturado (facilidade de manuseamento, de suporte; ...).

b – Elaboração comprovativa de um facto.

... através de tentativas (de experiências e de erros) revela-se geralmente mais motivador para o aluno, do que um processo estritamente dedutivo. ....

c – Representação manuseável de factos.

De uma maneira geral, os alunos sentem-se fortemente atraídos pela possibilidade de poderem exercer manipulações sobre a estrutura de uma coisa. ...

d – Envolvimento de factos matemáticos, em situações de jogo.

... no ensino da Matemática, o significado didáctico do jogo, não reside apenas na força motivadora ...que apresenta. Em muitos casos, os comportamentos lúdicos revelam características, que são também próprias das formas superiores de raciocínio matemático. ... como fundamento do mais simples dos raciocínios, existe, sempre, a

[134] [30] pág. 39

seguinte estrutura: A princípio estabelecem-se convenções sobre conceitos e processos, dos quais – segundo regras lógicas – derivarão numerosas proposições isoladas, formulações de leis e de processos. Ora, também, para as regras do jogo se definem, de entrada, determinadas palavras e símbolos, aos quais o jogador se tem que submeter, rigorosamente. "[135]

Também na mesma obra, (págs. 88 e 89), é referido que a força motivadora dos jogos reside, na opinião de *"Hermann Maier e Walter Plössl, ... a partir de três importantes características, que, em si, actuam como motivadoras:*

"- Actividade (na maioria dos casos predominantemente sobre objectos, através de movimentos.

- Alegria (principalmente, vinda da estimulação ou da possibilidade de qualquer coisa nova).

- Sucesso (proveniente de se alcançar um efeito ou um resultado válidos, por si mesmos)."

Zoltan P. Dienes, citado em, *"Como Ensinar Matemática no Básico e Secundário"*, encara outra característica essencial do jogo: *"a possibilidade das crianças poderem, livremente falar sobre ele: sobre o que crêem ter sido feito ou descoberto."*[136]

Na mesma obra, M.Arndt, (págs. 88 e 89), indica várias componentes determinantes do sucesso dos jogos didácticos:

"1 – A escolha e disposições do material; estas devem permitir às crianças uma visualização clara e simples.

2- *O estímulo que devem dar à fantasia das crianças; não a devem restringir.*

3 – *A clareza das regras do jogo; cada criança deve conhecer com precisão as regras; dominá-las e depois respeitá-las.*

4 – *O estabelecimento das próprias regras do jogo; as crianças devem ser impelidas a combiná-las."*

Ainda no mesmo livro, Volker Hole (pág. 89), refere o seguinte: *"Assim, além do principal efeito – o motivador, que provém dos jogos apropriados – a criança deve atender às exigências que, também surgem, na axiomatização. Isto é:*

Deve cuidar de que as regras do jogo não se contradigam (→não contradição).

[135] [30] págs. 87-88

[136] [30] pág. 88

Deve reconhecer, muitas vezes, que uma certa regra pode vir a ser abolida, se ela for, por exemplo, o caso especial duma outra regra (→independência).

Deve verificar que muitos caminhos e efeitos não são permitidos, o que leva a criança a sentir-se tolhida. As regras do jogo devem então ser alteradas e completadas (→suficiência).”

É evidente que nem sempre na Matemática nos podemos socorrer da utilização de jogos, nem a Matemática se pode reduzir à utilização e aplicação de jogos, mas existe um manancial de jogos que os professores podem utilizar em diversos ramos da Matemática.

Josefa Fernández Sucasas e Maria Inês Rodríguez Vela, consideram que as matemáticas recreativas são actividades relacionadas com a Matemática e que têm um certo carácter lúdico. Dizem ainda, que uma pedagogia activa necessita continuamente do jogo, pois, este é uma das formas mais frequentemente utilizadas pelas crianças para se manifestar; é uma actividade mais próxima e mais espontânea do aluno, sendo uma via muito adequada ao desenvolvimento intelectual. Considera-se que os jogos podem contribuir para uma melhor formação dos alunos, porque os motivam especialmente, e porque, de um ponto de vista metodológico, ajudam a explicar os porquês de um conceito ou de um processo, e porque servem para adquirir as destrezas necessárias num determinado algoritmo, ou a descobrir a importância daquelas propriedades que, na maioria das ocasiões, ficam reduzidas a um nome que hoje se aprende e que amanhã se esquece e que não parecem necessárias.

Referem ainda as mesmas autoras, que no ensino da Matemática nos primeiros anos de escolaridade se dá uma grande ênfase a processos algorítmicos com a utilização de conjuntos finitos de passos e regras, que permitem a resolução de exercícios e problemas através de uma via mecânica e deste modo os alunos sentem-se incapazes de raciocinar, questionar e estabelecer analogias com outros problemas. Desta forma, gera--se por vezes aborrecimento, desinteresse e apatia pela Matemática. Orientando os processos algorítmicos, para que se adquiram destrezas através da implementação de jogos, em vez de contas ou simples expressões numéricas por exemplo, e motivando a comunicação do aluno para expressar os processos para resolver um jogo ou passatempo, desenvolve-se a expressão oral, assim como a reflexão, acerca do raciocínio utilizado para chegar às soluções. Com a utilização de jogos apropriados ao nível etário dos alunos e adaptados a um determinado conceito em questão, os alunos estudam, seguem estratégias de actuação e tomam decisões, contribuindo deste modo para relacionar a sua percepção com a acção. Desta forma, os jogos poderão, além de criar motivação nos alunos, descobrir conceitos, ou estruturar conhecimentos já anteriormente adquiridos.[137]

O objectivo da utilização dos jogos em sala de aula não deverá ser apenas um fim em si mesmo, mas também um processo para melhorar aprendizagens. Tal como refere Pirie (1987), *"o objectivo é a jornada, não o destino."*[138]

Não nos podemos esquecer que muitas das importantes teorias matemáticas surgiram a partir de jogos e passatempos, o que de certa forma confirma que os jogos fomentam e estimulam o desenvolvimento intelectual e a criatividade.

Para Miguel de Guzmán, a Matemática possui a sua componente lúdica e o jogo pode muitas vezes analisar-se através de instrumentos matemáticos. Contudo, normalmente, existem regras diferentes na abordagem do jogo em si e da Matemática. Enquanto no jogo se procura sobretudo a diversão, na Matemática, embora com a sua componente lúdica, procura-se intervir e explorar a sua realidade interna e o mundo exterior à própria Matemática que é explicada por ela própria. Contudo, com os alunos de mais tenra idade a introdução de jogos contribui para uma maior motivação, estímulo e paixão, visando em última análise a aprendizagem de conteúdos e princípios matemáticos.[139] No fundo, devemos transformar algo que à partida é interessante em algo que seja importante. Para isso é necessário aproveitar os estímulos e motivações que as actividades lúdicas possam ter na aprendizagem da Matemática. É desejável que os professores, com um ambiente mais aberto e responsável, possam aprender a tirar proveito dos incentivos e motivações que o jogo pode ser capaz de incutir nos alunos. Refere ainda Miguel de Guzmán, que ao longo dos tempos, terão sido várias as tentativas de introduzir na sistemática da matemática muitos dos princípios que governam os jogos, para tornar mais claras as conexões entre jogos e a matemática.[140] O mesmo autor, frisa ainda, que podemos pensar que o aluno utiliza o jogo apenas como

[137] [88] págs. 11-12

[138] [55] pág. 1

[139] [29] pág. 7

[140] [29] pág. 7

passatempo e não tem o interesse necessário na aprendizagem matemática. Contudo, se seleccionarmos jogos para aplicarmos os conteúdos matemáticos que lhes estão subjacentes, e apropriados no tempo e no espaço, as actividades lúdicas poderão ir ao encontro dos objectivos que queremos atingir. Os jogos no ensino devem potenciar o desenvolvimento da heurística, ou seja, da descoberta. Desta forma, a resolução de problemas de natureza matemática irá aproveitar-se de uma selecção de jogos com interesse para a aprendizagem matemática.[141]

É necessário notar que a estrutura de muitos jogos é similar com a matemática, e, muitas vezes, tal como já foi referido, a história do aparecimento de alguns jogos confunde-se com a história da Matemática em algumas vertentes.

No ensino básico, mais que dar informação matemática ou de outras áreas aos alunos, é importante desenvolver capacidades, potencialidades e competências. Para isso é necessário estimular os alunos a adquirir essas características. Muitas vezes para se conseguir uma boa aprendizagem da Matemática, é preferível a selecção adequada de jogos, em que estejam subjacentes conteúdos matemáticos, do que a escolha dos conteúdos em si, já que na primeira forma poderemos obter um acréscimo motivacional. Desta forma, os alunos poderão observar e descobrir o prazer da matemática, em vez de continuarem a pensar que esta disciplina é desinteressante, pouco atraente e sobretudo muito complicada.

Nem todos os jogos que existem em livros ou revistas sobre matemática se podem utilizar de forma didáctica, já que muitas vezes não se prestam a uma aplicação de estratégias ou métodos que visem uma aprendizagem e aplicação a diversos ramos da matemática.

Segundo Polya, referido por Miguel de Guzmán (1984), existem similaridades entre a resolução de problemas matemáticos e a resolução de jogos, sendo indicadas algumas técnicas, atitudes, hábitos e directrizes heurísticas baseadas em jogos. Estas directrizes poderão ser resumidas da seguinte forma:

- Antes de se fazer, tentar entender. Devemos estudar todas as partes constitutivas do jogo, quer em termos de regras, de funcionamento e de objectivos.
- Estudar uma estratégia ou um plano de resolução. Devemos construir planos para resolver ou construir o jogo. Procurar similitudes com outros jogos mais simples que

[141] [29] págs. 10-11

conheçamos e que sabemos resolver, construir ou usar a mesma forma de proceder. Tentar, numa primeira fase, resolver as partes mais fáceis. Tentar resolver da frente para trás e também se possível transportar para outros jogos, encontrar outras pistas que conduzam ao mesmo resultado ou solução, e procurar uma lógica para a existência das regras dadas e não de outras.

- Verificar se a estratégia leva ao final. Deve-se planear bem a estratégia. Ordenar e sistematizar as ideias contidas na estratégia. Se a estratégia conduzir a situações complicadas ou sem solução, colocar em prática uma estratégia alternativa.
- Analisar o resultado obtido. Não considerar o problema resolvido depois de obtida a solução. Perceber a razão por que a estratégia deu resultado. Procurar outra estratégia ou solução mais simples. Procurar, à luz da solução, o lugar que ocupam as condições e as regras do jogo. Verificar se outros jogos, aparentemente semelhantes, funcionam com os mesmos princípios e regras.[142]

Em "*Estratégias e Métodos de Resolução de Problemas em Matemática*", é referido o seguinte: *"A estratégia da eliminação é frequentemente usada na vida quotidiana. Deve elaborar-se uma lista e, com base nas informações apresentadas no problema, eliminar soluções propostas que se verifica serem impossíveis."*[143] Na mesma obra, pág. 56, Reeves (1987), refere que *"... uma lista de todas as possibilidades facilita, de modo que nenhuma solução potencial seja negligenciada. Quando se selecciona uma estratégia na resolução de problemas, está a usar-se o processo de eliminação. O raciocínio lógico é também uma estratégia frequentemente usada na resolução de problemas e que implica a eliminação de alternativas."* Nos jogos, com as situações problemáticas que os implicam, também é necessário usar como recurso processos de eliminação no sentido de se utilizar as estratégias que concorram para um maior sucesso, isto é, a obtenção de vitória ou a consecução de um objectivo.

[142] [29] págs. 12-13

[143] [41] pág. 56

2.5. A utilização dos jogos matemáticos e a prática pedagógica

Os jogos a utilizar com os alunos da turma, visarão proporcionar a aquisição e desenvolvimento de competências matemáticas, e outras de âmbito mais geral e transversal a várias disciplinas.

Estas competências matemáticas enquadram-se no raciocínio lógico-matemático, números e operações, formas geométricas e localização no espaço, medidas e probabilidades e estatística.

Uma das prioridades que se reveste a utilização de jogos de natureza pedagógica, na sala de aulas, é o desenvolvimento do raciocínio matemático. *"O raciocínio lógico-matemático inclui as capacidades de identificar, relacionar e operar e fornece as bases necessárias para se poder adquirir os conhecimentos matemáticos (Canals, 1992). Permite desenvolver competências relativas à capacidade de resolver situações novas, para as quais não se conhece de antemão um processo mecânico de resolução, pelo que pode, portanto, considerar-se que se relaciona com todos os outros blocos da Matemática (Alsina e Canals, 2000)."*[144]

Os números e operações constituem sem dúvida uma das temáticas mais importantes na Matemática na educação básica, e como consequência disso, é a unidade mais extensa do programa de Matemática do ensino básico. Como refere Àngel Alsina, *"... constitui uma parte de referência e suporte para os restantes."*[145] Todas as outras unidades programáticas têm ligações com esta unidade. Segundo o mesmo autor, as crianças, a partir das competências adquiridas nesta unidade, poderão entender as diferentes representações de número e comparar relações entre números, de forma a adquirir a noção de número, quer dizer, *"... a capacidade de aplicar bons raciocínios quantitativos em contextos reais (Alsina, 2001)."*[146]

As formas geométricas e localização no espaço incluem, *"... o conjunto de conhecimentos e de capacidades relativos ao domínio do espaço e que se referem à posição (orientação e organização espacial), às formas e ainda às transformações de posição e forma. Está especialmente relacionado com o bloco dos números e operações*

---

[144] [02] pág. 11

[145] [02] pág. 31

[146] [02] pág. 31

e, sobretudo, com o das medidas. Ao mesmo tempo, mantém vínculos muito estreitos com o desenvolvimento da psicomotricidade e da expressão plástica (Alsina e Canals, 2000).”[147] É um tema de natureza interdisciplinar e transdisciplinar. Dentro desta área deverá dar-se importância à análise das características e propriedades das formas geométricas; descrever relações espaciais, usando sistemas de coordenadas; aplicar transformações e usar a simetria para analisar situações matemáticas; usar a visualização e o raciocínio espacial.

Relativamente às medidas, há a considerar os conceitos de comprimento, área, volume, massa, capacidade e tempo. Estes itens, segundo Alsina e Canals (2000), estão muito relacionados com as unidades referentes à *“... geometria, como conhecimento do espaço, e com os números e operações, como meio para fazer o cálculo das medidas e expressar os resultados. Ao mesmo tempo tem uma grande conexão com o conhecimento do meio natural, do qual é uma base indispensável.”*[148] É necessário no ensino básico os alunos adquirirem competências ao nível da compreensão das diferentes medidas e relacioná-las sempre que possível. O ábaco é um excelente instrumento para os alunos compararem unidades de medida de comprimento, de massa ou de capacidade do Sistema Métrico Decimal. Àngel Alsina refere o seguinte: *“As unidades de medida de comprimento do Sistema Métrico Decimal são constituídas pelos múltiplos e os submúltiplos do metro. Estas unidades baseiam-se num sistema decimal, por isso aumentam e diminuem de 10 em 10, quer dizer, 1 unidade de uma ordem vale 10 unidades da ordem inferior. Isto significa que poderás usar o ábaco para passar de umas unidades para outras.”*[149]

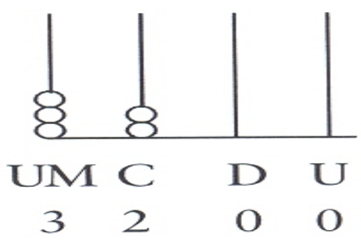


Fig. 28 – Ábaco[150]

[147] [02] pág. 67

[148] [02] pág. 97

[149] [02] pág. 108

[150] Figura retirada de [02] pág. 59

A estatística e probabilidades *"Relaciona-se com o bloco temático das medidas, no que respeita ao uso de unidade e de técnicas …, e com o bloco dos números, no que se refere ao seu conteúdo predominantemente numérico."*[151] É muito importante a recolha e organização de dados, assim como compreender e aplicar conceitos básicos probabilísticos, através da experimentação de fenómenos aleatórios. Segundo Batanero (1998), este tipo de experimentação *"... proporciona uma experiência difícil de adquirir na relação empírica com a realidade. ... se nos números e nas operações ou na geometria os alunos podem explorar materiais manipulativos concretos (réguas, ábacos, etc.), isto não é possível no caso dos fenómenos aleatórios, devido ao seu carácter irreversível: uma vez obtido um resultado aleatório, não é possível voltar ao estado inicial com a certeza de que ele se repita."*[152]

O estudo, o conhecimento e a compreensão de alguma teoria relacionada com as probabilidades são na nossa vivência do quotidiano, e hoje em dia, mais indispensáveis do que nunca. É de primordial importância, tais são as solicitações que recaem sobre nós, como por exemplo através dos meios de comunicação social, estarmos informados ou sabermos proteger-nos em relação a determinadas situações e mesmo pressões e para isso é necessário compreender algumas noções de probabilidade. A teoria das probabilidades é uma das bases das ciências físicas, sociais e humanas. Quase em todas as decisões que tomamos, no nosso dia-a-dia, está implícita a aplicação de probabilidades, como acontecimento *provável, possível*, *impossível* ou *certo*, embora Richard P. Feynman, *(A Teoria do Jogo, pág. 102)* "*…após uma experiência para medir a reflexão parcial da luz e reparando no comportamento estranho dos fotões"*, *refira o seguinte*: *"A natureza só nos permite calcular probabilidades."*[153] Mais adiante, na pág. 164 da mesma obra, é referido o seguinte: "*Desde que Heisenberg instalou o princípio da incerteza no seio das partículas elementares da matéria, a ciência assume-se como «previsão» e move-se no terreno das probabilidades. Só no plano macroscópico podemos esperar um comportamento que obedece a leis. No limite oposto dos pequenos números impera o «acaso»."*

"A teoria das probabilidades tornou-se tão essencial em todos os ramos da ciência, não só nas ciências físicas, mas também nas ciências biológicas e sociais, que

---

[151] [02] pág. 135

[152] [02] pág. 137

[153] [12] pág. 102

se pode prever com alguma segurança que desempenhará um papel cada vez mais importante no ensino da matemática nos primeiros anos de escolaridade. O bispo Joseph Butler e outros antes dele (Cícero, para apenas citar um) foram ao ponto de afirmar que ela é mesmo o princípio norteador da vida. De manhã à noite fazemos milhares de pequenas apostas inconscientes sobre resultados prováveis. E, se a mecânica quântica é a última palavra em física, o substrato de todas as leis fundamentais da Natureza é sem dúvida, o puro acaso."[154]

Por exemplo, ao efectuarmos uma viagem de avião, sabemos que é muito provável que não ocorra nenhum acidente, e por esse motivo, a maior parte das pessoas talvez não tenha medo de andar de avião. Nesta e noutras situações, regemos as nossas decisões tendo em conta as teorias probabilísticas. Como refere Martin Gardner, muitas pessoas não entendem, ou têm dificuldades em compreender, que *"... a probabilidade de um acontecimento independente não seja influenciada pela proximidade relativamente a acontecimentos independentes do mesmo tipo."*[155] Refere ainda o mesmo autor, dois casos paradigmáticos. Durante a Primeira Guerra Mundial, muitos soldados procuravam crateras de bombardeamentos recentes para se esconderem. Acreditavam que nas crateras mais antigas o risco era superior, uma vez que esses locais não eram atingidos há muito tempo e havia maior probabilidade de serem atingidos. Outro exemplo refere-se a um indivíduo que viajava frequentemente de avião e tinha receio que algum passageiro levasse a bordo uma bomba pronta a explodir. Deste modo, também levava uma bomba, desactivada, acreditando que era altamente improvável outro passageiro também levar uma bomba no interior do avião. É evidente que em ambos os casos existe independência de acontecimentos, isto é, um acontecimento não determina o acontecimento posterior. Também existem casos aparentemente simples do quotidiano que nos poderão levar a alguns equívocos. Sabemos que a probabilidade de sair *coroa* num lançamento de uma moeda não viciada é de 50 %. Também sabemos que a probabilidade poderá ser considerada o limite da frequência relativa ao fim de um grande número de experiências e a interpretação frequencista de probabilidade é dada por $P(A) = \lim_{n \to \infty} fn(A)$, sendo *P(A)* a probabilidade do resultado *A* e *n* o número de experiências efectuadas. Se efectuarmos dez lançamentos, é perfeitamente lógico que saia cinco vezes *coroa* e cinco vezes *cara*. Contudo, a frequência com que qualquer das

[154] [23] pág. 129

[155] [23] pág. 133

faces da moeda sai, não é o único factor que pode determinar a falsidade da moeda ou o seu modo de lançamento. Também a sequência com que os lados da moeda surgem é um factor a ter em conta. Por exemplo se sair a seguinte sequência: *Cara, Coroa, Cara, Coroa, Cara, Coroa, Cara, Coroa, Cara, Coroa* ou *Cara, Cara, Cara, Cara, Cara, Coroa, Coroa, Coroa, Cora, Coroa*, pode indiciar que a moeda é viciada, embora neste caso a frequência absoluta seja um número relativamente baixo. Mas o mesmo tipo de padrões para uma frequência mais elevada sugeria obviamente viciação da moeda.

"As questões relacionadas com probabilidades surgem, de acordo com Laplace (matemático do séc. XVIII), porque em parte conhecemos as coisas e em parte somos ignorantes. Este facto conduziu Laplace à sua famosa declaração que resume a interpretação do materialismo mecanicista do séc. XVIII:

«Uma inteligência que, num dado momento, conhecesse todas as forças que dominam a natureza e as respectivas posições dos seres que a compõem e, além disso, fosse suficientemente grande para submeter esses dados à análise, abrangeria na mesma fórmula os movimentos dos corpos maiores do universo e aqueles do átomo mais pequeno: nada seria incerto e o futuro, assim como o presente, surgiriam aos seus olhos. O pensamento humano oferece um débil esboço desta inteligência na perfeição que tem sido capaz de dar à astronomia»."[156]

Casos similares são muito frequentes nas nossas escolas, isto é, muitos alunos têm dificuldade em compreender estes conceitos e por isso é importante terem, dentro da educação matemática, uma educação probabilística.

Paralelamente às competências estritamente matemáticas, há a considerar aspectos transversais a várias áreas e /ou disciplinas, sendo de destacar a comunicação. No Currículo Nacional do Ensino Básico pode ler-se: *"A comunicação inclui a leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos de matemática, sobre a matemática ou em que haja informação matemática. Na comunicação oral, são importantes as experiências de argumentação e discussão em grande ou pequeno grupo, assim como a compreensão de pequenas exposições do professor. O rigor da linguagem, assim como o formalismo, devem corresponder a uma necessidade sentida e não a uma imposição arbitrária."*[157]

---

[156] [86] pág. 220

[157] [16] pág. 70

O Programa de Matemática do Ensino Básico do Ministério da Educação preconiza:

"Os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros. Isto é, devem ser capazes de:
Interpretar enunciados matemáticos formulados oralmente e por escrito.
Usar a linguagem matemática para expressar as ideias matemáticas com precisão.
Descrever e explicar, oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos que utilizam e os resultados a que chegam.
Argumentar e discutir as argumentações de outros; organizar e clarificar o seu pensamento matemático através da comunicação.
Os alunos devem ser capazes de, oralmente e por escrito, descrever a sua compreensão matemática, os procedimentos matemáticos que utilizam, e explicar a sua argumentação, o seu trabalho e o seu raciocínio, bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida por diversos meios. Estas capacidades desenvolvem-se comunicando por uma variedade de formas e reflectindo sobre processo de comunicação."[158]

Tal como é referido por Sebastião e Silva, cit. Castelnuovo (1982), *"Chegou-se a fazer crescer os rapazes numa planície matemática esterilizada e esterilizadora, capaz de sufocar qualquer objecção, qualquer diálogo. Porque se quisermos que o ensino da Matemática seja autenticamente vivo e fecundo, devemos apresentar uma ciência que se faz e não uma ciência já feita".*[159] Desta forma, valorizando a comunicação na sala de aula, cria-se interacção entre todos os intervenientes permitindo deste modo atingir diversas facetas da Matemática. Diferentes metodologias na abordagem, explicitação e resolução de exercícios ou problemas por diferentes alunos, podem valorizar a aula e alargar as capacidades e conhecimento de cada aluno. Comunicar uma ideia ou raciocínio, exige organização ao nível do nosso pensamento. Assim sendo, uma boa comunicação contribui para uma melhor aprendizagem, uma vez que proporciona aos alunos o contacto com o essencial da Matemática, bem como um melhor ensino por parte do professor, devido ao facto de identificar indicadores sobre a evolução da aquisição, compreensão e aplicação de conteúdos. Tal como refere Lampert

[158] [56] pág. 5

[159] [08] pág. 59

(2001), *"As tentativas de comunicar um raciocínio pessoal proporcionam oportunidades para uma compreensão mais profunda da Matemática."*[160]

Também no caderno *"Competências essenciais no Ensino Básico-Visões Multidisciplinares*, pode ler-se *" ... o papel da comunicação matemática, ..., e que se traduz na leitura, interpretação e escrita de textos de matemática. Também está presente na comunicação oral, quando os alunos têm de discutir e argumentar, explicitando os seus raciocínios, e ainda quando têm de compreender as explicações do professor. A linguagem e a comunicação ajudam os alunos a organizarem o seu pensamento, a integrar compreensões e a desenvolver conceitos matemáticos."*[161]

Os jogos matemáticos, desde que bem contextualizados, podem permitir, através do desenvolvimento do raciocínio, adquirir e assimilar conceitos em várias vertentes da Matemática. Também o desenvolvimento da capacidade crítica e espírito colaborativo é estimulado, muito contribuindo para isso as interacções que se estabelecem durante a abordagem, realização, conclusões e avaliação dos jogos utilizados. O professor deverá adaptar a sua prática pedagógica, tendo em conta a utilização de pedagogias lúdico-criativas, com consequente alteração do tipo e formas de comunicação estabelecido no ambiente escolar.

Segundo Júlia Borin (1996), *"Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem."*[162]

António Cabral refere que *"... o valor do jogo, sob o ponto de vista humano, está na razão directa da comunicação com o outro. A actividade lúdica, bem o sabemos do desenvolvimento infantil, é um dos melhores meios de socialização e convivência."*[163] Diz ainda o mesmo autor (pág.189): *" ... a forma de comunicação é*

[160] [08] pág. 62

[161] [51] pág. 23

[162] [63] pág. 3

[163] [12] pág. 96

complexa. Todo o jogo implica sempre o outro, aquele a quem o prazer é disputado, mesmo que se trate de um jogo a sós, em que o eu se desdobra no eu-outro, passando este a adversário."

Através da utilização de jogos de natureza pedagógica decorrem processos de vários níveis que permitem o desenvolvimento integral do aluno tais como:

Prazer – O jogo está normalmente associado como fonte de prazer.

Interacção – Os jogos em grupo estimulam a interacção e relacionamento entre pares.

Cooperação – Os jogos em grupo desenvolvem o espírito cooperativo em torno de objectivos comuns.

Iniciativa – O jogo proporciona o espírito de iniciativa privilegiando uma postura activa.

Imaginação – A imaginação e a criatividade são normalmente pilares essenciais para um bom desempenho.

Comunicação – Em qualquer jogo de grupo a comunicação é estimulada, quer no papel de emissor, quer no de receptor.

Pesquisa – O jogo estimula o espírito e capacidade de pesquisa com o objectivo de desenvolver conhecimentos e competências.

Memória – O jogo desenvolve a capacidade de memorização, seja de regras, estratégias ou outras.

Raciocínio lógico – Alguns jogos contribuem efectivamente para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio.

Competição – Normalmente os jogos incentivam a competição em busca da vitória ou de uma posição de superioridade.

Autonomia – O jogo desenvolve a autonomia, quer em termos cognitivos, quer afectivos.

Socialização – O jogo desenvolve o relacionamento entre pares.

Estratégias – No jogo buscam-se estratégias conducentes a atingirem os objectivos.

Discussão – A discussão e debate permitem *feed-back* com consequente aprendizagem e aperfeiçoamento de competências.

Ética – Os jogos podem contribuir para o desenvolvimento de uma cultura de respeito recíproco e ética.

A maioria destes processos está presente, e estes estão interligados, durante a realização de um jogo. Todos estes processos enriquecem a capacidade pensante dos alunos, estimulando e desenvolvendo o conhecimento matemático e outras aptidões. A aprendizagem através de jogos pode ser muito significativa e estruturante, uma vez que a resolução dos problemas inerentes ao jogo obrigam a reflectir antes, durante e após a sua realização, e este factor pode ter uma relevância acrescida. Como é mencionado no caderno *Competências essenciais no Ensino Básico-Visões Multidisciplinares*, *"Os jogos, particularmente os de estratégia, de observação e de memorização, ...permitem o desenvolvimento de capacidades matemáticas e competências sociais."*[164] A importância da utilização de jogos também é destacada, como experiência de aprendizagem, no *Currículo Nacional do Ensino Básico*: *"O jogo é um tipo de actividade que alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica. Os jogos de equipa podem ainda favorecer o trabalho cooperativo. A prática de jogos, em particular dos jogos de estratégia, de observação e de memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social. Há jogos em todas as culturas e a matemática desenvolveu muito conhecimento a partir deles. Além disso, um jogo pode ser um ponto de partida para uma actividade de investigação ou de um projecto."*[165]

[164] [51] pág. 23

[165] [17] pág. 68

3. Os Jogos no Ensino da Matemática: um caso de estudo

3.1. Objectivos e importância do trabalho

Teresa Vergani refere o seguinte:

"Em educação matemática, existem duas tendências principais que orientam a quase totalidade das actividades práticas actualmente propostas aos alunos, a nível de atitudes motivantes. A primeira corrente de motivação opta pela matematização de situações concretas reais, privilegiando o carácter pragmático das aplicações na vida quotidiana. A segunda corrente de motivação opta pelas situações lúdicas, privilegiando o valor do carácter não utilitário da imaginação matematizante; preocupa-se menos com o interesse prático imediato das actividades propostas de que com a experiência da gratuitidade como fonte de prazer."[1]

Atendendo às características dos alunos, em estudo, procurou-se conciliar na prática pedagógica estas duas tendências ou visões de modo a responder às necessidades, dificuldades e interesses dos mesmos. Deste modo, e simultaneamente com o emprego de outras estratégias conducentes à apropriação de determinados conceitos e competências matemáticas, a utilização de determinado tipo de jogos, adaptados ao perfil e interesse dos alunos, poderia conduzir aos objectivos planificados e propostos. Esses jogos não foram todos predeterminados, mas foram obedecendo a critérios que tiveram em conta a necessidade de ao longo do tempo os alunos deles necessitarem, para ultrapassarem dificuldades de aprendizagem em diversas áreas da matemática ou noutros campos do conhecimento. A partir da avaliação das dificuldades e necessidades feita aos alunos, quer através de testes de diagnóstico, planificação a médio e longo prazo, programas educativos individuais, planos e relatórios elaborados por professores, psicólogos e outras entidades, procurou-se focalizar esses jogos de modo a resolver ou ultrapassar algumas dessas dificuldades ou necessidades.

[1] [92] pág. 125

3.2. Perfil dos alunos

A investigação incidiu sobre três alunos da Educação Especial do 6º ano da Escola E. B. 2,3 Maria Manuela Sá em S. Mamede de Infesta, Concelho de Matosinhos. Os alunos têm 12, 13 e 14 anos de idade (1 de Setembro de 2008), dois alunos são do sexo masculino com 13 e 14 anos de idade e um é do sexo feminino com 12 anos de idade. Estes alunos estão integrados na turma, composta por 20 alunos, em algumas disciplinas, onde possuem o mesmo currículo que os restantes alunos da turma, e noutras, como é o caso de Matemática Funcional, em que não estão integrados na turma e têm um *Currículo Específico Individual (CEI)*. Na disciplina de Matemática, esta turma tem semanalmente 180 minutos de aulas, distribuídos por dois blocos de noventa minutos.

Estes alunos manifestam grandes dificuldades de aprendizagem em várias disciplinas. Essas dificuldades reflectem-se, sobretudo, em termos da Língua Portuguesa ao nível da leitura e interpretação de questões, comunicação de forma adequada, vocabulário reduzido, imensos erros ortográficos e de sintaxe. Estes factores, previsivelmente, reflectem-se em todas as outras áreas disciplinares, incluindo obviamente a Matemática, em que manifestam também grandes dificuldades em utilizar as operações básicas, leitura e representação de números inteiros e decimais, cálculo mental e escrito e consequentemente na resolução de problemas e ainda fraca autonomia na realização de tarefas e actividades. Os três alunos da turma trabalham a Matemática muito ao nível das operações concretas, com grandes dificuldades ao nível do raciocínio abstracto. Dois destes alunos manifestam ainda fraca motivação e mobilização para a aquisição de saberes matemáticos, pouca organização, baixa auto-estima e ausência total de métodos e hábitos de trabalho. Também as expectativas destes alunos em relação à Matemática não eram muito altas, já que achavam a disciplina muito difícil e não encontravam muitas razões para a sua utilização prática no quotidiano.

Os alunos no item referente à aplicação e análise dos jogos utilizados serão denominados sempre através da nomenclatura A1, A2 e A3.

Fig. 29 – Escola E. B. 2,3 Maria Manuela Sá (S. Mamede de Infesta)

3.3. Questão a investigar

Atendendo ao perfil dos alunos da turma, a compreensão de algumas competências matemáticas prioritárias, deveria passar pela utilização de alguns jogos matemáticos, sobretudo aqueles em que se empreguem materiais manipulativos. Este tipo de abordagem permite uma maior envolvência dos alunos, uma participação mais activa, estimulando a comunicação matemática. Também os conhecimentos matemáticos anteriores que os alunos possuíam, poderiam ser maximizados neste tipo de aulas.

Para colocar em prática determinados tipo de jogos e extrair deles algo positivo a vários níveis, seria necessário determinar o conhecimento matemático que os alunos tinham para corresponderem às expectativas. Deste modo, foi necessário seleccionar estratégias, de forma que os alunos participassem, compreendessem, desenvolvessem e aplicassem os conhecimentos adquiridos.

Posto isto, a questão que poderia ser desenvolvida foi a seguinte: Qual a importância da utilização de jogos para o desenvolvimento das competências matemáticas essenciais para alunos com este perfil?

3.4. Metodologia a utilizar

Na procura de estimular a motivação, interesse e aprendizagem de matemática por parte deste grupo específico de alunos com características muito peculiares, a utilização de jogos na sala de aula como recurso didáctico poderia concorrer para a obtenção de algum sucesso. A versatilidade em termos da selecção de jogos, bem como a consecução de objectivos em termos das unidades temáticas da Matemática, é uma característica a ter em conta. A utilização de jogos pode possibilitar a melhoria da comunicação e expressão entre os alunos e o professor. Para que a aprendizagem seja estimulada e para que os alunos sintam algum prazer no trabalho, a metodologia a adoptar deve ser uma metodologia activa de tipo qualitativa. Esta metodologia deve contemplar um reforço positivo sempre que se considere oportuno; elogio perante a persistência na realização das tarefas; estruturação das tarefas a desenvolver e um acompanhamento constante e individualizado; jogos diversificados quer em termos de materiais a utilizar, quer em termos dos objectivos a atingir; jogos que estimulem a capacidade de concentração, memorização, atenção e comunicação; tarefas que apelem ao concreto, como meio de aquisição de novos conceitos.

Devido à grande proximidade entre professor e alunos, em virtude do reduzido número destes, aquele acaba por ter um conhecimento profundo dos alunos em relação aos saberes e capacidades matemáticas ou outras e também às suas limitações, o que permite seguir uma metodologia de trabalho activa.

Esta estratégia sendo activa, significa que abre a possibilidade aos alunos de se exprimirem, maximizarem as suas capacidades, estimular o pensamento crítico e construírem o seu próprio conhecimento a partir dos requisitos que possuem. Deste modo, o professor pode investigar e pesquisar a evolução do conhecimento que os alunos vão construindo, também em interacção, através da comunicação e cooperação partilhada.

No início do ano lectivo foi elaborado um teste de diagnóstico, para aquilatar os conhecimentos dos alunos em relação a conteúdos e competências julgadas necessárias a serem adquiridas. Essas competências abarcavam a comunicação matemática, raciocínio matemático e resolução de problemas nos domínios temáticos de *Números e Cálculo*, *Geometria* e *Estatística*. Os resultados obtidos pelos alunos foram relativamente fracos, com excepção do aluno A1 que revelou um conhecimento razoável relativamente ao tema *Números e Cálculo*. A partir daí procurou-se seleccionar jogos adequados aos alunos que despertassem o interesse e motivação e pudessem de algum modo colmatar as lacunas observadas.

A metodologia a utilizar, durante a realização dos jogos, englobava as seguintes estratégias de intervenção:

- Fazer uma avaliação do jogo utilizado, isto é, verificar se se cumpriram as expectativas criadas, quer em relação ao professor, quer aos alunos, em termos de aprendizagens geradas ou consolidadas. Para isso é importante observar as estratégias adoptadas pelos alunos, apresentação de soluções, motivação e desejo de aprender mais, bem-estar na sala de aula, debate, discussão e propostas.
- O professor pode e deve, sempre que possível, colocar questões, mas não cortar o raciocínio e a comunicação dos alunos. Também deve fazer um reforço positivo, ou até elogio, sempre que se considere oportuno de modo a motivar os alunos para os objectivos que se pretendem alcançar.
- Quando os alunos não conseguirem ultrapassar as suas dificuldades, o professor deve prestar o devido acompanhamento e ajuda para que não se perca o interesse e para que o jogo continue a ser uma actividade de permanente desafio.

O ensino da Matemática, a exemplo das outras ciências, artes ou letras, vai-se modificando ao longo dos tempos, consequência do desenvolvimento social, cultural e tecnológico, exigindo do professor novas metodologias, de forma a ultrapassar dificuldades e conduzindo a uma melhor compreensão e construção de estratégias, competências e conhecimentos por parte dos alunos.

Deste modo, o professor deve procurar estratégias e metodologias que permitam aos alunos desenvolver a autoconfiança, a capacidade de organização, concentração e atenção, bem como a socialização, cooperação e ainda o espírito crítico.

No *Programa de Matemática do Ensino Básico*, é referido que *"é de primordial importância*:

Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos de:

Autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização;

À-vontade e segurança em lidar com situações que envolvam Matemática na vida escolar, corrente, ou profissional;

Interesse pela Matemática e em partilhar aspectos da sua experiência nesta ciência.
Compreensão da Matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua História;
Capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico;
Capacidade de apreciar aspectos estéticos da Matemática."[2]

Embora a aplicação dos jogos de natureza matemática, não seja de modo algum a única forma de ensinar e consequentemente de aprender matemática, podem dar um contributo importante para um melhor ensino e aprendizagem.

Miguel de Guzmán (1986), refere a importância e o sentido que os jogos têm na educação matemática: *"O interesse dos jogos na educação não é apenas divertir, mas sim extrair dessa actividade materiais suficientes para gerar interesse e conhecimentos, e fazer com que os estudantes pensem com maior motivação".*[3]

3.5. Tipo, aplicação e análise dos jogos utilizados

Tendo em conta as características dos alunos, a selecção dos diferentes tipos de jogos a utilizar teria de ir ao encontro das suas necessidades, quer em termos da simplicidade versus complexidade dos jogos em si, quer em termos do desenvolvimento de competências e aprendizagem de conteúdos.

Deste modo, procurou-se dentro do possível, integrar alguma versatilidade para que os alunos sentissem motivação e atracção pelos jogos, bem como, responder de alguma maneira às diversas lacunas existentes.

Existem jogos com complexidade estratégica muito baixa, como é o caso de um dos jogos utilizados e em seguida descritos que é o *Jogo do 31*. Este jogo, depois de se saber a estratégia, o jogador que inicia o jogo, ganha. O popular *Jogo do Galo*, também tem uma complexidade estratégica muito baixa, uma vez que é fácil criar uma estratégia que assegure pelo menos o empate. Provavelmente este jogo está relacionado com o

[2] [56] pág. 3

[3] [14] pág. 3

facto de se utilizar uma estratégia que faz lembrar o pé de um galo. "*O «Jogo do Galo» é muitas vezes usado como exercício de programação para estudantes de informática. Não considerando simetrias, existem apenas 26 830 jogos diferentes*"[4]. O máximo de jogadas possíveis é nove, o que é um número baixo relativamente a outros tipos de jogos.

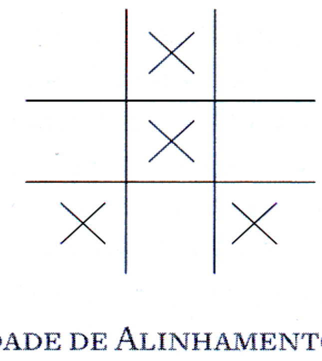


Fig. 30 – *Jogo do Galo*[5]

O *Xadrez* ou o *Go*, por exemplo, têm uma profundidade estratégica elevada, uma vez que o número de sequências possíveis é muito elevado.

Alguns dos jogos utilizados são relativamente simples, outros mais complexos. Nos jogos de maior complexidade, quer em termos de regras, quer em termos de resolução, procuraram-se utilizar versões mais simplificadas de forma a serem mais acessíveis para o perfil dos alunos. A simplicidade de um jogo para o professor, não o será para os alunos, e também o grau de dificuldade obviamente varia de aluno para aluno. O que interessa é que o jogo seja adequado para o aluno, isto é, que contribua efectivamente para uma aprendizagem significativa.

Nenhum dos jogos utilizados foi inventado pelo professor ou pelos alunos. Alguns dos jogos existem nas livrarias e noutras fontes e são muito utilizados nas escolas e também muito praticados na própria *Internet*, caso do *Jogo do 24*, *SuperTmatik*, *Nim*, *Semáforo*, *Ouri* e *Hex*. Estes três últimos, segundo a definição de João Pedro Neto e Jorge Nuno Silva, designam-se por jogos de informação perfeita ou jogos abstractos, uma vez que não possuem algum factor ligado à sorte e também não

[4] [78] pág. 33

[5] Figura retirada de [78] pág. 33

têm qualquer informação escondida.[6] Estes jogos, embora não estejam ligados a aspectos específicos das unidades de matemática, leccionados aos alunos alvo, são importantes, uma vez que podem permitir um bom desenvolvimento da capacidade de raciocínio lógico, aspecto sobremaneira importante na aprendizagem matemática. Outros jogos foram objecto de pesquisa em livros editados pela Associação de Professores de Matemática, caso dos jogos: *À Roda com os números*, *Jogo da estrela*, *Atirar ao alvo*, *Detective dos números*, *Grão a grão*, *Ge-Ó-Pá*, *É Esticá-lo*, *Ten points*. Alguns destes jogos foram utilizados com alunos em aulas de apoio no ano lectivo 2007/08 e numa Oficina de Formação correspondente à Acção de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2º Ciclo do Ensino Básico, ao abrigo do protocolo estabelecido entre o Ministério da Educação e a Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto. Esta Acção de Formação, visou a expectativa de criar melhores condições para o ensino e aprendizagem da Matemática e de valorizar as competências matemáticas destes professores. Uma das razões que nos levou a utilizar estes jogos com este grupo específico de alunos, foi sem dúvida, o grande interesse manifestado por alguns alunos no ano lectivo anterior. O jogo designado por *Condicionado*, foi retirado do livro de língua espanhola, *Juegos y Pasatiempos para la ensenanza de la matematica elemental*[7]. O nome do jogo não foi traduzido, e deste modo manteve o nome supracitado.

Alguns materiais necessários para os jogos foram construídos pelos alunos com a ajuda do professor da disciplina de Atelier Oficinal, caso do *Semáforo* e *Ouri* (tabuleiro e peças), *É Esticá-lo* e *Ge-Ó-Pá* (*geoplano*). Desta forma, os alunos sentiram-se mais motivados para a participação nos jogos, já que além de participarem no próprio jogo, também o sentiram em parte como obra sua. Também trouxeram de casa alguns materiais para o jogo do *Ouri* e nas aulas de Matemática desenharam e construíram peças para o jogo do *Hex* e ainda planificaram e construíram cubos, que funcionaram como dados, para alguns dos jogos utilizados. Em alguns jogos, também as próprias regras foram adaptadas a partir das originais, por propostas dos alunos, o que nem sempre é fácil para estes, já que se exige alguma complexidade organizativa e racional

[6] [45] pág. 11

[7] [88] págs. 112-113

para adaptar regras de modo a que o jogo mantenha ou melhore em termos funcionais, estruturais e motivacionais.

Em todos os jogos abordados e analisados neste trabalho, participaram os três alunos da turma. Os alunos praticaram alguns dos jogos aqui referidos, utilizando o computador. Pesquisaram-se sites e páginas da Internet onde existia o *Jogo do 24*, *Ouri*, *Semáforo*, *Hex* e *SuperTmatik*. Por vezes, utilizando ferramentas informáticas, era mais fácil jogar por uma questão ergonómica, caso por exemplo do *Ouri.* Com a utilização de material construído, de que é exemplo este último jogo, os alunos tinham dificuldades em manusear as peças.

Apesar de em alguns jogos nos termos baseado no livro "*A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*" de António Júlio César de Sá, no que concerne ao tipo, forma de abordagem e exploração dos jogos. Pensamos que é positivo a utilização destes jogos com alunos, uma vez que o importante é desenvolver aprendizagens nos alunos, seleccionando jogos interessantes e utilizando uma metodologia adequada, do que pretender ser original e os jogos não serem apropriados e consequentemente não permitirem uma aprendizagem significativa das noções e conteúdos matemáticos que se pretendem desenvolver.

Também se usou o programa informático *Mathi Math*, *National Library of Virtual Manipulatives*, constituído por vários itens ligados a *Números e Operações*, *Álgebra*, *Medidas* e *Probabilidades*, que contêm muitos jogos, alguns deles adequados ao interesse dos alunos e da disciplina. Também se utilizou o *site* *http://www.sc.didaxis.pt/nm/jogos.*htm, que contém jogos pedagógicos, interessantes e apelativos, como o por exemplo, *Jogo do 24*, *Torre de Hanói* e *Sudoku*. Ainda se utilizaram outros jogos, havendo a destacar o *Dominó*, na sua versão *por pontos*, também designado por *Belga*, em que o objectivo era conseguir obter números, cuja soma dos pontos, nas peças colocadas nas extremidades do jogo, fossem múltiplos de 5, ou seja, 5, 10, 15, 20, 25, 30 ou 35 (máximo possível). Qualquer outro valor, ou seja, não múltiplo de 5, acarretaria para o jogador a obtenção de zero pontos.

A data referida na apresentação de cada jogo é aquela que pode ser designada na sua vertente competitiva e também onde se fez uma análise mais elaborada da avaliação do jogo. Um determinado jogo pode ter sido abordado e praticado noutras ocasiões, anterior ou posteriormente à data indicada (ver anexo I).

3.5.1. Jogo do 24

Na sua versão mais simples, o *Jogo do 24*, é um jogo constituído por noventa e oito cartões, com duas faces, com quatro números inteiros de 1 a 9 em cada face. Usando os quatro números e utilizando as quatro operações básicas (+, -, x e :), o objectivo é obter o resultado de 24. Este jogo é muito apropriado para alunos do 2º ciclo (quinto e sexto ano de escolaridade). Existe também o *Jogo do 24 Avançado*, que é mais apropriado para alunos do 3º ciclo ou Secundário, já que integra outros números (não apenas do 1 ao 9) e outras operações, como por exemplo a potenciação e a radiciação, embora a finalidade seja a mesma, isto é, obter 24.

O objectivo principal do *Jogo do 24* é desenvolver nos alunos a capacidade de cálculo mental. Também podem ser trabalhados os conceitos de múltiplo e divisor, bem como as propriedades da adição e da multiplicação. No Programa de Matemática do Ensino Básico, relativamente ao tema *Números e Operações*, no que diz respeito ao 2º ciclo do Ensino Básico é referido o seguinte:

"No estudo das propriedades das operações, é de promover uma ligação estreita ao cálculo escrito, mental e com o auxílio da calculadora. Para o desenvolvimento do cálculo mental é importante procurar contextos e combinações numéricas que suscitem a estimação do resultado das operações envolvidas antes da realização do cálculo. É também de explorar a utilização da relação entre as operações e suas propriedades. O trabalho com o cálculo mental (exacto e aproximado) deve merecer uma grande atenção neste nível de ensino, dada a importância de um bom domínio a este nível por parte dos alunos para o desenvolvimento da sua autoconfiança e desembaraço essenciais para a resolução de problemas."[8]

O *Jogo do 24* foi inventado por Robert Sun em 1988, com o objectivo de demonstrar que, *"... a Matemática pode ser poderosa, aliciante, e acima de tudo divertida."*[9]

[8] [57] pág. 35

[9] [91] pág. 1

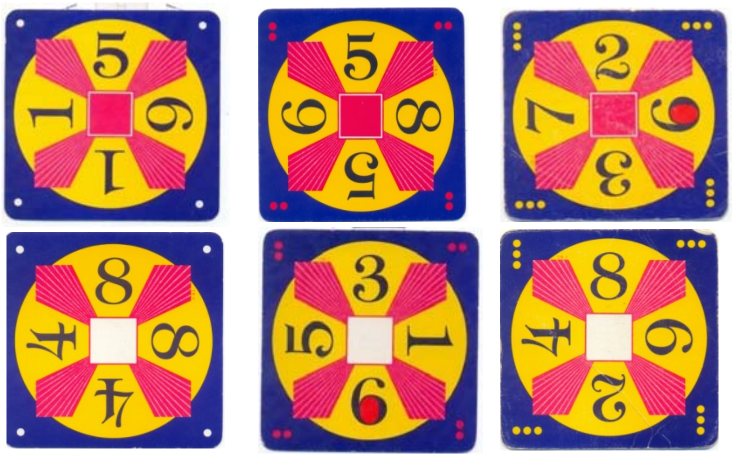


Fig. 31 – Três cartões do *Jogo do 24*

Número de alunos por jogo: Três.

Objectivo do jogo: Utilizando os 4 números do cartão e empregando as operações fundamentais conseguir obter o número 24 (ver anexo I).

Material utilizado: Três cartões do *Jogo do 24* de diferente grau de dificuldade.

Conceitos matemáticos em estudo: Desenvolver o cálculo mental, utilizando as operações fundamentais.

Duração do jogo: Trinta minutos. Para a resolução de cada partida foram dados três minutos. A duração do jogo contemplou também a explicação das regras, bem como a explicação dos alunos de como chegaram ao resultado.

Data da utilização do jogo: 17 de Outubro de 2008. Em datas posteriores este jogo foi também utilizado, sobretudo no início de algumas aulas, servindo para estimular e desenvolver o cálculo mental.

3.5.2. SuperTmatik

Este jogo é constituído por um conjunto de 53 cartas. É um jogo que existe à venda em livrarias. Na face de cada carta existem dez expressões numéricas, numeradas de A até J e indicadas, aparentemente, por ordem crescente de dificuldade. No verso de cada carta existem as soluções, *Super-Letra* ou *Super-Estrela* e *Roleta*. Esta selecciona as operações a resolver pelos jogadores em cada jogada. Podem jogar dois jogadores ou duas equipas.

1- Escolhe-se o nível (1, 2, 3, 4 ou 5);

2- Baralham-se as cartas;

3- Tira-se uma carta para cada jogador, não sendo permitido ver o seu verso até se dar as respostas;

4- Tira-se uma carta (*Carta Roleta*) e coloca-se na mesa com o verso virado para cima. Os jogadores resolvem, na sua carta, a expressão correspondente à letra indicada na *Roleta* para o nível de dificuldade escolhido;

5- Depois de se resolver a expressão numérica, diz-se *SuperT*- lê-se *SuperTê*, seguido do resultado e verifica-se se está certo (se o jogador acertar, fica com a sua carta e a carta do adversário é colocada em cima da *carta roleta*; se o jogador não acertar, perde a carta para o seu adversário que também fica com a sua carta não respondida);

6- Se os jogadores responderem quase em simultâneo, cada um verifica a sua resposta no verso e quem acertar fica com a sua carta; quem perder entrega-a ao adversário; se nenhum jogador acertar, ambos colocam a sua carta no monte roleta;

7- Volta-se ao passo 3, até um jogador ter em seu poder *Super-Letras* suficientes para escrever a palavra *SuperT* (as estrelas podem ser utilizadas para substituir qualquer *Super-Letra* - o jogador diz *Super* - está encontrado o vencedor.

Fig. 32 – Uma carta (frente e verso) do Jogo *SuperTmatik*

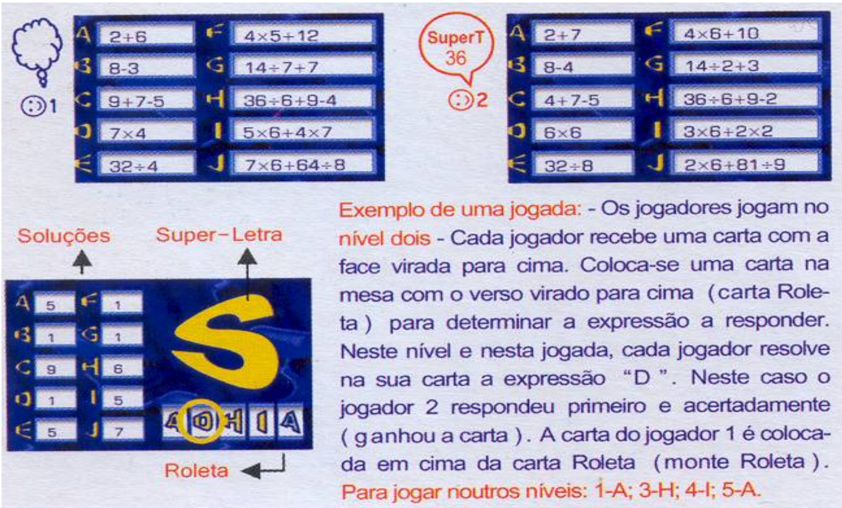


Fig.33 – Carta com instruções do Jogo *SuperTmatik*

Número de alunos por jogo: Três.

Objectivo do jogo: Completar a palavra *SuperT*, a partir da resolução de expressões numéricas, correspondendo cada expressão a uma letra (ver anexo I).

Material utilizado: Cinquenta e três cartas do jogo *SuperTmatik* dispostas em pilha.

Conceitos matemáticos em estudo: Desenvolver a capacidade de cálculo mental. Cálculo do valor de expressões numéricas. Também se pretende exercitar as capacidades de atenção, concentração e rapidez de cálculo.

Duração do jogo: O *SuperTmatik* utilizou-se numa aula de 45 minutos. Jogaram os três alunos individualmente. Para cada carta cada aluno dispunha de 30 segundos para resolver a respectiva expressão numérica.

Data da utilização do jogo: 24 de Outubro de 2008. Circunstancialmente, em datas posteriores, este jogo foi também utilizado.

3.5.3. Jogo do 31

Este jogo foi o único em que não se utilizou material concreto, isto é, não se usou qualquer material manipulativo.

Este jogo é de uma complexidade estratégica baixa, já que depois de ser calculada a estratégia vencedora, o seu interesse lúdico é pouco. Contudo é um jogo interessante do ponto de vista matemático.

Número de alunos por jogo: Dois, no sistema de um contra um. Os três alunos da turma participaram no jogo.
Regras a observar: O primeiro jogador pode escolher o número 1, 2 ou 3 e o adversário pode adicionar qualquer um dos três números inteiros seguintes, isto é, cada jogador pode acrescentar no mínimo uma unidade e no máximo três unidades.
Objectivo do jogo: O aluno que disser o número 31 perde o jogo (ver anexo I).
Material utilizado: Nenhum.
Conceitos matemáticos em estudo: Sequências de números, cálculo mental, padrões.
Duração do jogo: *O Jogo do 31* foi praticado durante uma aula de quarenta e cinco minutos.
Data da utilização do jogo: 5 de Dezembro de 2008.

No Programa de Matemática do Ensino Básico, 2º ciclo, no que concerne ao tema *Números e Operações*, pode ler-se o seguinte: *"A resolução de problemas que incluam a exploração de padrões numéricos e a investigação de regularidades numéricas constitui um aspecto central da didáctica dos números neste ciclo de ensino. Desta forma, o aluno tem possibilidades de ampliar o seu conhecimento dos números em situações que o levem a formular conjecturas e a testá-las, a conceber e usar estratégias e a discutir a sua adequação às situações que estão na sua origem. O trabalho com sequências numéricas, em que se pede a um aluno que continue ou invente sequências de números, estabelece uma ponte conceptual importante entre os três ciclos do ensino básico."*[10]

3.5.4. Nim

Este jogo, embora bem conhecido por muitos professores e alunos, foi retirado em termos de regras e análise teórica dos livros *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*[11] e

[10] [57] pág. 34

[11] [45] págs. 159-161

As Somas NIM + Jogo do "Ouri"[12]. Este jogo também foi utilizado com alunos por Lia Corrêa da Costa (S. Paulo, 2006)[13].

O *Nim* é um jogo combinatório imparcial, tratado na teoria elementar dos números, ligado a critérios de divisibilidade. *"Foi o primeiro jogo combinatório a ser tratado matematicamente, em 1902, pelo matemático Bouton."*[14] É considerado um jogo abstracto, uma vez, que o factor sorte não intervém (caso de cartas ou dados). Usam-se grupos de objectos em colunas, como por exemplo, pedras, palitos ou feijões.

<u>Número de alunos por jogo</u>: Participaram os três alunos da turma, no sistema de um contra um. Primeiro A2 competiu com A3, seguidamente A1 jogou contra A3 e finalmente A1 e A2.

<u>Regras a observar</u>: Dos dez feijões colocados em fila, em cada jogada cada aluno pode retirar 1, 2 ou 3 feijões.

<u>Objectivo do jogo</u>: O jogador que retirar o último feijão é o vencedor (ver anexo I).

<u>Material utilizado</u>: 10 feijões.

<u>Conceitos matemáticos em estudo</u>: Multiplicação e divisão, padrões.

<u>Duração do jogo</u>: *O Nim* foi praticado durante um bloco de noventa minutos e um tempo de quarenta e cinco minutos.

<u>Data da utilização do jogo</u>: 12 e 15 de Dezembro de 2008.

3.5.5 Condicionado

Pretendia-se com a utilização deste jogo o preenchimento de lacunas demonstradas pelos alunos em relação à leitura e representação de números e identificação de classes e ordens. Estes alunos demonstraram, quer no teste de diagnóstico, quer nas aulas, muitas fragilidades nestas áreas.

[12] [76] págs. 18-23

[13] [85] págs. 66-70

[14] [76] pág. 18

Este jogo foi retirado do livro *"Juegos y Pasatiempos para la ensenanza de la matematica elemental"*[15]. Em relação às regras, estas foram adaptadas aos alunos em questão.

Número de alunos por jogo: Participaram no jogo os três alunos em simultâneo.
Objectivo do jogo: Acertar no número a partir das informações fornecidas. Essas informações estão descritas numa ficha de trabalho (ver anexo I).
Material utilizado: Ficha de trabalho, papel e lápis.
Conceitos matemáticos em estudo: Representação de números inteiros, propriedades das operações básicas.
Duração do jogo: O jogo *Condicionado* foi praticado durante uma aula de noventa minutos, estando incluída a correcção da ficha de trabalho e a avaliação do jogo.
Data da utilização do jogo – 26 de Janeiro de 2009.

3.5.6. Detective dos números

No Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, promovido pela Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, no ano lectivo 2007/08, foi apresentado este jogo para posteriormente ser utilizado com alunos. O jogo foi retirado da *National Council of Teachers of Mathematics* (1993). *Quinto ano: Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Colecção de Adendas Anos de Escolaridade K6*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

Contudo foram introduzidas algumas alterações, já que, enquanto no jogo apresentado na referida obra, apenas se procurava representar números decimais entre zero e um, num segmento de recta, no jogo aplicado com os alunos utilizaram-se vários segmentos de recta, não apenas compreendidos entre zero e um.

A importância do jogo consiste em explorar as capacidades dos alunos na representação de números no contexto da recta numérica. Inclui-se o reconhecimento de

[15] [88] págs. 112-113

relações entre números que se podem apresentar na forma de inteiros ou decimais ou fracções.

Nesta turma, uma vez que os alunos ainda não tiveram contacto com fracções, apenas utilizaram números inteiros e decimais.

Estes alunos apresentam lacunas enormes neste campo, havendo ainda a acrescentar a dificuldade em compreender o conceito de número decimal e consequentemente em representá-lo nas suas diferentes aplicações.

Os alunos fazem o papel de detectives e devem descobrir quais são os números que devem ser colocados nas marcas de cada uma das rectas numéricas.

<u>Número de alunos por jogo:</u> Os três alunos jogaram individualmente e em simultâneo.

<u>Objectivo do jogo</u>: Colocar correctamente números inteiros ou decimais nas marcas existentes nas rectas numéricas (ver anexo I).

<u>Material utilizado</u>: Dez fitas a cada aluno, correspondentes a dez rectas numéricas e lápis.

<u>Conceitos matemáticos em estudo</u>: Representar números inteiros e decimais na recta numérica.

<u>Duração do jogo</u>: Um bloco de 90 minutos.

<u>Data da utilização do jogo</u>: 6 de Fevereiro de 2009.

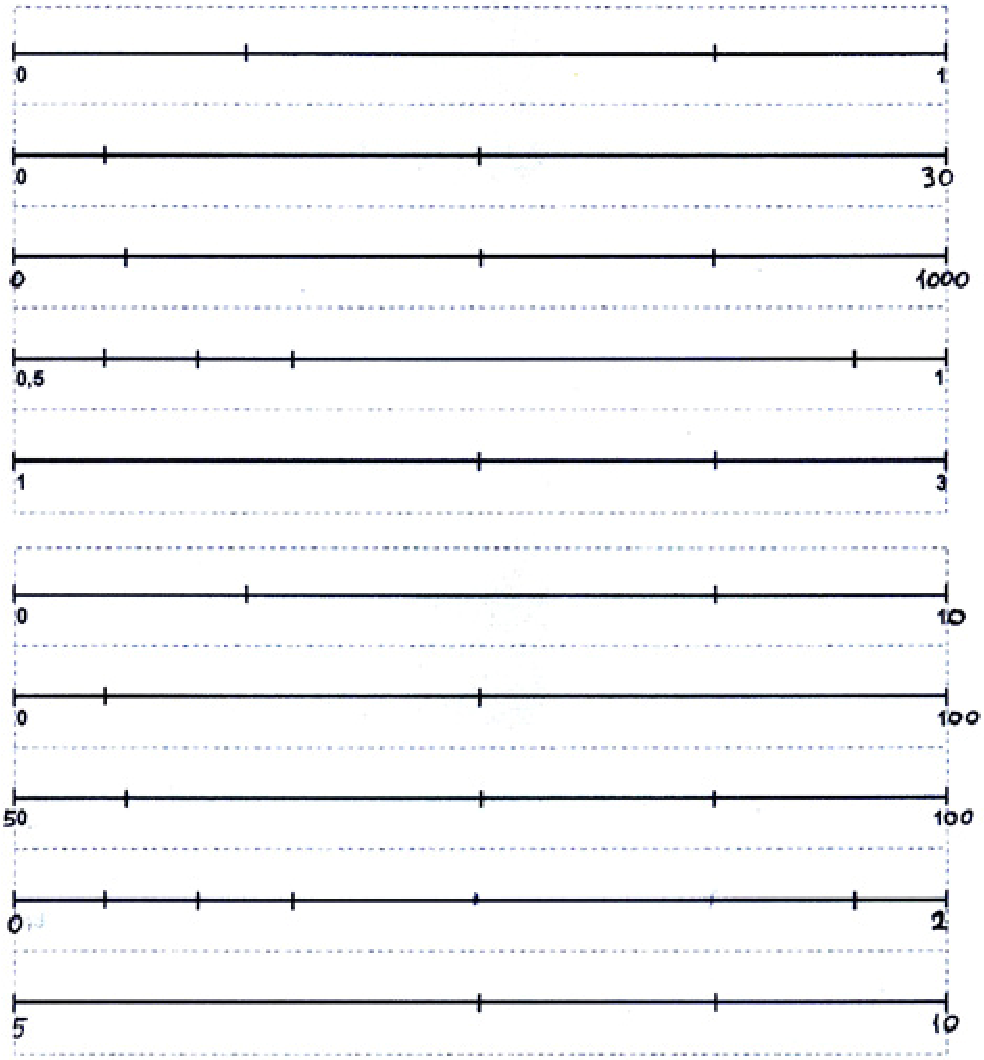


Fig. 34 – Rectas numéricas e respectivas marcas (Jogo *Detective dos números)*

3.5.7. Jogo da estrela

Este jogo foi apresentado no Programa de Formação Contínua de Matemática no ano lectivo 2007/08. Foi retirado da obra, *Jogos de matemática de 6º a 9º ano*. Porto Alegre: Artmed. Série cadernos do Mathema – Ensino Fundamental de Smoke K. Diniz e Milani, E (2207). Nos livros, *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo* de António J. C. de Sá e *Como abordar…a comunicação escrita na aula de matemática* de António J. C. de Sá e Maria da Graça Zenhas, é abordado e explorado um jogo designado por *Labirinto* que é idêntico, quer em termos de construção, quer em termos de objectivos, ao *Jogo da Estrela*.

<u>Número de alunos por jogo</u>: Jogaram dois jogadores de cada vez; A1 com A2, depois A2 com A3 e finalmente A1 com A3.

<u>Objectivo do jogo</u>: Iniciando o jogo na casa de *Partida*, o vencedor é o jogador que obtiver na sua máquina calculadora o número maior ao atingir o ponto de *Chegada*. Cada jogador começa com 100 pontos (ver anexo I).

<u>Material utilizado</u>: Um tabuleiro (folha *A4* contendo um desenho em forma de estrela, constituída por segmentos de recta contendo números e operações básicas), uma marca (peão de *Xadrez*) e duas máquinas calculadoras *Citizen ME-500*.

<u>Conceitos matemáticos em estudo</u>: Adição, subtracção, multiplicação e divisão com utilização da máquina calculadora. Estimativas.

<u>Duração do jogo</u>: Um bloco de 90 minutos e um tempo de 45 minutos

<u>Data da utilização do jogo</u>: 9 de Fevereiro de 2009 (45 minutos) e 13 de Fevereiro de 2009 (noventa minutos).

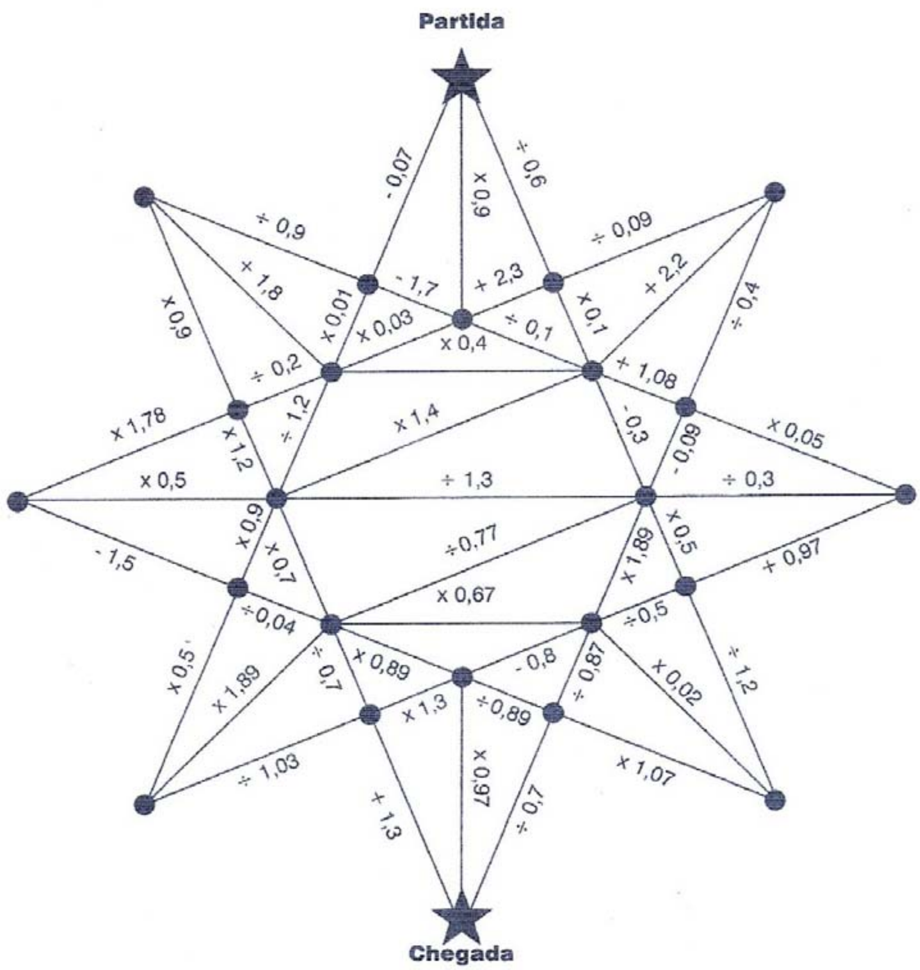


Fig. 35 – Tabuleiro do *Jogo da Estrela*

Acredita-se desenvolver nos alunos o sentido de número e sentido das operações, isto é, o sentido de número em termos de quantidade e prever o efeito das operações aplicadas sobre os números. Deste modo pretende-se que os alunos compreendam e apliquem convenientemente as operações fundamentais, sobretudo a multiplicação e a divisão. Por vezes, os alunos manifestam dificuldades e não compreendem o facto de na divisão poder acontecer que o quociente seja maior que o divisor, ou que o produto, obtido na multiplicação, seja menor que qualquer um dos factores. É mais importante saber o que é a divisão (ou multiplicação), do que saber propriamente dividir (ou multiplicar), ou seja, antes de se saber aplicar os algoritmos é necessário compreender o significado das operações.

A utilização de máquinas calculadoras também é um aspecto importante a considerar em múltiplas facetas conducentes à aprendizagem. No Programa de Matemática do Ensino Básico, para o 2º ciclo, no que diz respeito ao tema *Números e Operações*, pode ler-se o seguinte: *"O cálculo apoiado pela calculadora permite a realização de experiências numéricas e o trabalho com situações reais que de outra forma, pela sua morosidade, seriam difíceis de concretizar. A calculadora pode, ainda, ser um recurso útil ao possibilitar a elaboração e análise de estratégias de cálculo mental que auxiliam na ampliação do conceito de número, na consolidação do significado das operações e no reconhecimento e aplicação das suas propriedades. É também um recurso que favorece o desenvolvimento e aperfeiçoamento da capacidade do aluno de estimar resultados, e auxilia na validação dos procedimentos utilizados."*[16]

3.5.8. Atirar ao alvo

Este jogo foi apresentado e utilizado no Programa de Formação Contínua em Matemática no ano lectivo 2007/08. Foi retirado da *National Council of Teachers of Mathematics* (1993). *Quinto ano: Normas para o Currículo e a avaliação em Matemática Escolar, Colecção de Adendas Anos de Escolaridade K6*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Tradução portuguesa da edição original de 1992), pág.13.

[16] [57] pág. 35

Embora esta turma seja do 6º ano de escolaridade, este jogo em princípio é adequado, uma vez que os alunos não frequentam o currículo normal e manifestam dificuldades de aprendizagem.

Neste jogo são utilizados três dados cúbicos, com um número em cada uma das seis faces, conforme a seguir se indica.

Dado 1 – 0; 1; 2; 3; 4; 5.

Dado 2 – 0; 1; 6; 7; 8; 9.

Dado 3 – 1; 1; 1; 10; 10; 10.

Os dados foram construídos pelos alunos, a partir da planificação de cubos, em folha de cartolina, cujas arestas têm 3 centímetros de comprimento.

Fig. 36 – Três dados em cartolina construídos pelos alunos (Jogo *Atirar ao alvo*)

Número de alunos por jogo: Os três alunos jogaram individualmente.

Objectivo do jogo: Acertar num número previamente escolhido (*número alvo),* ou obter um valor aproximado desse número, através do cálculo de expressões numéricas, cujos números foram obtidos a partir do lançamento dos três dados (ver anexo I).

Material utilizado: três dados cúbicos e uma folha de registos para cada aluno.

Conceitos matemáticos em estudo: Desenvolver a capacidade de cálculo escrito e mental. Estimativas.

Duração do jogo: Um bloco de 90 minutos e um tempo de 45 minutos.

Data da utilização do jogo: 2 de Março de 2009 (45 minutos) e 6 de Março (90 minutos).

3.5.9. Grão a grão

Este jogo foi retirado do livro, *"Como abordar… a comunicação escrita na aula de matemática (2004) "*[17]. Os objectivos do jogo são desenvolver nos alunos o sentido de número, a capacidade de estimar comprimentos, usar instrumentos de medição (neste caso a régua graduada) e também obterem um conhecimento mais aprofundado a respeito da representação, ordenação e comparação de números inteiros e decimais. Segundo Pérez (1997), os erros mais frequentes relacionados com o uso desta representação são os seguintes:

"1- da leitura e da escrita (ex.: associar trinta e sete milésimas a 37 000);

2- da utilização do erro (ex. interpretar 0,036 como 36 ou distinguir 1,27 de 1,270);

3- da ordenação de números (ex. ordenar os números considerando a parte decimal como um número inteiro, como acontece no seguinte exemplo: 4,05< 4,5 < 4,15)".[18]

FOLHA DE REGISTOS

JOGO: Grão a grão

Nome: ______________________ N.º ___ Turma: ___ Data: __/__/__

Jogadas	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
Número decimal pedido					
Número com mais uma décima					
Número com menos uma décima					
Valor marcado com o grão de arroz					
Pontuação					
Pontuação final:					

Fig. 37 – Folha individual de registos (Jogo *Grão a Grão*)[19]

[17] [65] págs. 166-172

[18] [65] pág. 169

[19] [65] pág. 168

Número de alunos por jogo: Três.

Objectivo do jogo: Colocar um grão de arroz num segmento de recta compreendido entre zero e um, com um erro inferior a uma décima, a partir de um número previamente sorteado. O vencedor do jogo é o que tiver mais pontos ao fim de cinco jogadas (ver anexo I).

Material utilizado: O material utilizado foi um tabuleiro, um grão de arroz, uma régua graduada, uma folha de registos e um saco com números decimais compreendidos entre 0 e 1.

Conceitos matemáticos em estudo: Comparação e ordenação de números inteiros e decimais; estimativas de comprimentos.

Duração do jogo: Um bloco de 90 minutos.

Data da utilização do jogo: 23 de Março de 2009.

3.5.10. É esticá-lo

O jogo foi retirado da obra, *"Como abordar .... A comunicação escrita na aula de matemática"*[20]. Também está descrito na obra *"A Aprendizagem da Matemática e o Jogo"*[21] de António J. C. de Sá. Este jogo tem como objectivos a compreensão e aplicação de diversas noções e propriedades dos quadriláteros, como lados e ângulos adjacentes e opostos; lados paralelos e perpendiculares; amplitudes e nomenclatura de ângulos; noção e representação de diagonais e de eixos de simetria, etc. O desenvolvimento de capacidades de visualização e de raciocínio espacial são aspectos a ter em conta para as aprendizagens dos alunos. Além destes aspectos, e tal como referem A. Sá e M. Zenhas, *"É também um excelente exercício de visualização espacial, pois os alunos têm que manipular mentalmente as imagens para evoluir de uns quadriláteros para outros. Para os ajudar nessa tarefa, têm o geoplano, onde podem testar as suas conjecturas. A folha de registo assume um papel importante, pois, frequentemente, os alunos, no decurso do estudo da nova figura, esquecem a figura de partida. A consulta da folha de registo permite-lhes controlar a situação."*[22]

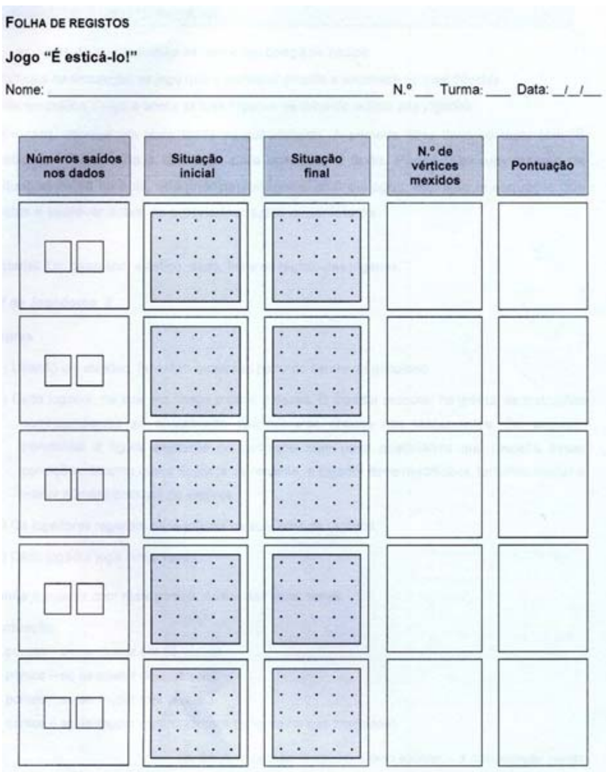
[20] [65] págs. 187-189

[21] [66] págs. 92-99

[22] [65] pág. 190

Utilizaram-se *geoplanos* existentes no laboratório de matemática. Também foi construído um *geoplano* pelos alunos com o auxílio do professor na disciplina de Atelier Oficinal. Este *geoplano* não foi utilizado pelos alunos, uma vez que, na altura em que foi aplicado este jogo, ainda não tinha sido terminada a sua construção. Os materiais usados na sua construção foram madeira e pequenos pregos, cuja distância entre si é de 2 cm (idêntica à dos *geoplanos* existentes no laboratório de matemática).

Fig. 38 – Construindo um quadrilátero (Jogo *É Esticá-lo*)



FOLHA DE REGISTOS

Jogo "É esticá-lo!"

Nome: ______________________ N.º __ Turma: ___ Data: _/_/__

Números saídos nos dados	Situação inicial	Situação final	N.º de vértices mexidos	Pontuação

Fig. 39 – Folha individual de registos (Jogo *É Esticá-lo*)[23]

[23] Figura retirada de [66] anexos

Número de alunos por jogo: Três.

Objectivo do jogo: Construir no *geoplano* um quadrilátero, a partir de outro já previamente existente, de acordo com a grelha de instruções, mudando o mínimo de vértices possíveis. Cada jogador efectua cinco jogadas. O vencedor será o jogador que consiga obter mais pontos ao fim da partida (ver anexo I).

Material utilizado: *Um geoplano*, elásticos, grelha de dupla entrada com instruções, dois dados e uma folha de registos das jogadas efectuadas por cada um dos alunos.

Conceitos matemáticos em estudo: Estudo, reconhecimento e aplicação das propriedades dos quadriláteros.

Duração do jogo: Um bloco de 90 minutos e um tempo de 45 minutos.

Data da utilização do jogo: 20 e 24 de Abril de 2009.

3.5.11. Ge-Ó-Pá

Este jogo também foi apresentado no Programa de Formação Contínua de Matemática no ano lectivo 2007/08. O jogo foi baseado a partir da obra, *"Como abordar… a comunicação escrita na aula de matemática"*[24].

As aprendizagens propostas para este jogo centram-se na aquisição, desenvolvimento e aperfeiçoamento do conceito de unidade de medida e também na aprendizagem dos conceitos de perímetro e área. Paralelamente procura-se que os alunos destrincem os conceitos de perímetro e área, já que eles estão em confronto aquando da abordagem e desenvolvimento do jogo. Ainda o melhoramento do raciocínio espacial é um importante aspecto a considerar.

Este jogo também está descrito no livro "*A Aprendizagem da Matemática e o Jogo"*[25]. O autor aplicou este jogo com duas turmas do 5º ano de escolaridade, tendo concluído que os resultados foram meritórios, uma vez que os alunos clarificaram e suplantaram algumas dificuldades que tinham entre os conceitos de perímetro e área.

[24] [65] págs. 179-185

[25] [66] págs. 72-79

Fig. 40 – Baralho de cartas com instruções e roleta (Jogo *Ge-Ó-Pá*)

Número alunos por jogo: Três (dois de cada vez).
Objectivo do jogo: Construir figuras no *geoplano* de acordo com as instruções dadas pelas cartas. Ganha o jogo quem tiver maior pontuação, depois de todas as cartas terem sido utilizadas (ver anexo I).
Material utilizado: Um *geoplano*, um elástico, uma roleta triangular, um conjunto de cartas com instruções e uma folha de registos para cada aluno.
Conceitos matemáticos em estudo: Perímetro e área de uma figura.
Duração do jogo: Um bloco de 90 minutos e um tempo de 45 minutos.
Data da utilização do jogo: 11 e 15 de Maio de 2009.

3.5.12. Ten points

Este jogo foi retirado do livro *"A Aprendizagem da Matemática e o Jogo"*[26].

O objectivo deste jogo é permitir aos alunos a aquisição, compreensão e aplicação de noções ligadas às probabilidades. Também se pretende obter uma análise crítica ao jogo, quer em termos de processo, isto é, em relação às regras de pontuação elaboradas, quer em termos de produto, ou seja, os resultados finais obtidos.

Os dados foram construídos pelos alunos, a partir da planificação de cubos em folha de cartolina, cujas arestas têm 3 centímetros de comprimento.

[26] [66] págs. 117-119

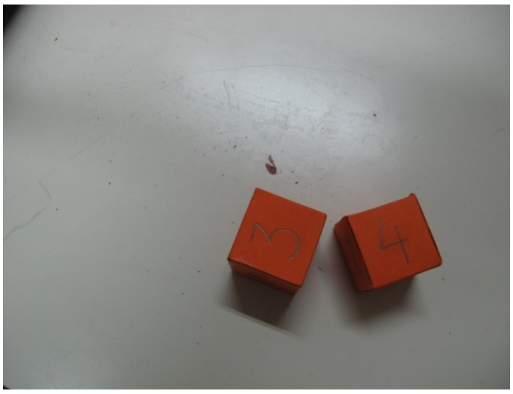


Fig. 41 – Dois dados em cartolina construídos pelos alunos (Jogo *Ten points*)

Folha de Registos

1º jogo	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?
Jogador	10										
Adversário	10										

2º jogo	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?
Jogador	10										
Adversário	10										

3º jogo	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?
Jogador	10										
Adversário	10										

4º jogo	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?
Jogador	10										
Adversário	10										

5º jogo	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?	Sim ou não?
Jogador	10										
Adversário	10										

Fig. 42 – Folha de registos (Jogo *Ten Points*) [27]

<u>Número alunos por jogo</u>: Três (dois de cada vez por partida).

<u>Objectivo do jogo</u>: O concorrente com maior número de pontos, ao fim de dez lançamentos dos dois dados, é o vencedor. Cada jogador inicia o jogo com 10 pontos. Se a soma do valor obtido pelo lançamento dos dois dados for 7, o jogador recebe três pontos do adversário; caso contrário perde um ponto para o adversário (ver anexo I).

[27] Figura retirada de [66] anexos

Material utilizado: Dois dados e uma ficha de registos.

Conceitos matemáticos em estudo: Noção de probabilidade.

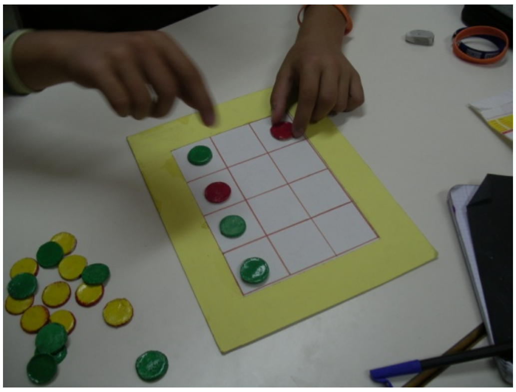
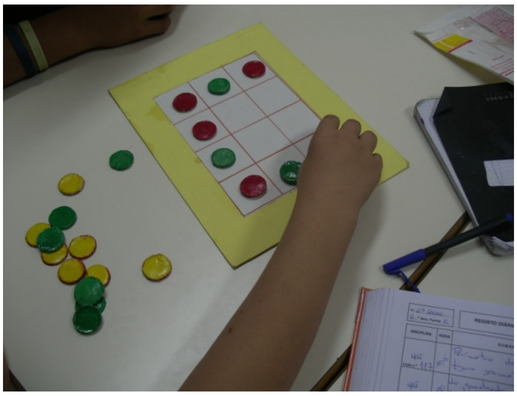
Duração do jogo: Um bloco de 90 minutos.

Data da utilização do jogo: 22 de Maio de 2009.

3.5.13. Semáforo

Os jogos, *Semáforo*, *Hex* e *Ouri*, não foram enquadrados especificamente em nenhum dos conteúdos leccionados no decorrer do ano lectivo vigente. Utilizaram-se estes jogos, porque outros alunos do meio escolar os praticam amiudadamente e são atractivos e motivadores. Estes jogos são disputados num tabuleiro (tal como o *Xadrez* ou as *Damas* por exemplo) e são designados por jogos abstractos ou de informação perfeita, tal como alguns jogos aqui explorados como o *Nim* ou o *Jogo do 31*, em virtude de não intervir o factor sorte (por exemplo, se utiliza dados), nem terem informação escondida (por exemplo a *Batalha Naval*)[28]. Também desenvolvem o raciocínio lógico e estratégico e vários conceitos matemáticos.

O jogo do *Semáforo* foi inventado por Alan Parr em 1998, com o nome original de *Traffic Lights*[29]. Embora aparentemente parecido com o popular *Jogo do Galo*, é mais complexo do que este, pois exige maior precisão de cálculo e raciocínio matemático, uma vez que as combinações possíveis são muito mais elevadas.

Figs. 43 e 44 – Dois alunos jogando *Semáforo*

[28] [45] pág. 11

[29] [71] pág. 1

Número de alunos por jogo: Três (dois de cada vez).

Objectivo do jogo: O jogador que primeiro conseguir obter numa fila, (horizontal, vertical ou diagonal), três peças da mesma cor é o vencedor (ver anexo I).

Material utilizado: Tabuleiro rectangular constituído por doze quadrados (4 por 3) e peças de forma circular com três cores diferentes: 12 verdes, 12 amarelas e 12 vermelhas (estas duas últimas com uma face de cada cor).

Conceitos matemáticos em estudo: Raciocínio lógico, simetria.

Duração do jogo: Um tempo de quarenta e cinco minutos.

Data da utilização do jogo: 25 de Maio 2009.

3.5.14. Hex

O *Hex* foi inventado em 1942 pelo matemático e poeta dinamarquês Piet Hein, sob o nome de *Polígono* e de forma independente em 1948 pelo norte-americano John Nash[30] (Prémio Nobel da Economia em 1994). No entanto foi Martin Gardner quem o tornou mais conhecido nas colunas da revista *Scientific American*[31].

Nos anos cinquenta, este jogo tornou-se muito popular, uma vez que jornais e revistas publicavam problemas de *Hex*, tal como hoje em dia se publicam problemas de *Xadrez*, *Damas* ou *Sudoku*.

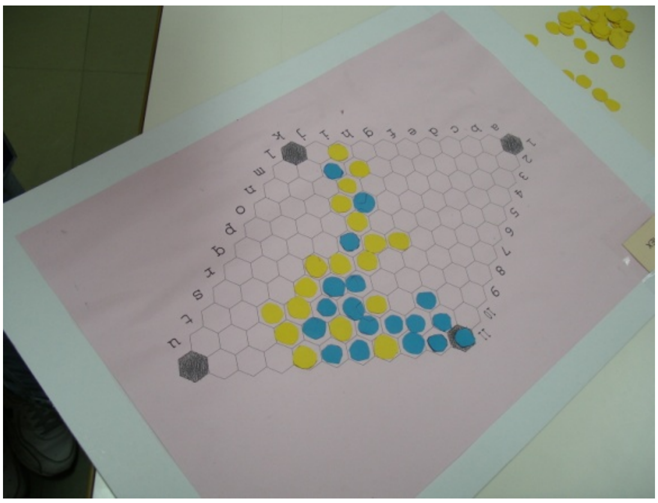


Fig. 45 – Jogo do *Hex* concluído

[30] [40]

[31] [45] pág. 90

As peças foram construídas pelos alunos na aula anterior, utilizando folhas de cartolina de cores amarela e azul. As peças têm a forma circular, e para isso os alunos utilizaram moedas de 1 cêntimo para circunscrever as peças.

Pretendia-se com a utilização deste jogo desenvolver nos alunos a capacidade de raciocínio lógico bem como o estudo e caracterização das propriedades de figuras geométricas. Também o conhecimento e compreensão dos pontos cardeais, embora funcionando como uma questão lateral, era um aspecto importante a considerar.

Número de alunos por jogo: Três (dois de cada vez).
Objectivo do jogo: O primeiro jogador a ligar com peças da mesma cor dois lados opostos do tabuleiro é o vencedor (ver anexo I).
Material utilizado: Um tabuleiro em forma de losango constituído por 121 casas hexagonais, 120 peças circulares (60 azuis e 60 amarelas).
Conceitos matemáticos em estudo: raciocínio lógico, propriedades de figuras geométricas.
Duração do jogo: Um bloco de noventa minutos, tendo parte desse período sido utilizado para a leitura e explicação das regras.
Data da utilização do jogo: 29 de Maio 2009.

3.5.15. Ouri

O *Ouri* pertence a uma família de jogos de tabuleiro designados por *Mancala*. *"O nome «Mancala» acredita-se que é originário da palavra árabe «naqala» que significa «mover» e esta família de jogos, composta por centenas de variações e cuja origem é milenar, estende-se das Caraíbas até á Indonésia. No caso do «Ouri», ele é tradicionalmente jogado na África Ocidental (por exemplo, no Senegal, no Mali ou em Cabo Verde) e em parte das Caraíbas. Por isso, o «Ouri» pode ser encontrado sob vários nomes, como «Wari», «Awari», «Aware», Awele» ou «Oware»."*[32] Pensa-se que tenha sido inventado pelos egípcios e levado mais tarde para a Ásia e África Subsariana. No séc. XVI, chegou à América, levado pelos escravos negros. Normalmente é praticado por dois jogadores, mas existem variantes em que é jogado por mais pessoas.

[32] [76] pág. 34

Fig. 46 – Jogo do *Ouri*

Os alunos, na disciplina de Atelier Oficinal, com o auxílio do professor construíram em grés e barro, tabuleiros e peças para o jogo. Os alunos trouxeram, por iniciativa própria, um depósito em papel reciclado com uma dúzia de orifícios, que correspondia a armazenagem de ovos e que serviu como tabuleiro e pequenos bugalhos de carvalho a utilizar como peças.

Os jogos efectuados na sua componente competitiva tiveram a duração de noventa minutos (dois tempos de 45 minutos em dois dias diferentes), incluindo a explicitação das regras. O objectivo do jogo foi desenvolver nos alunos a capacidade de raciocínio lógico e o cálculo, bem como estimular a capacidade de previsão e antecipação de resultados.

<u>Número de alunos por jogo</u>: Três (dois de cada vez).

<u>Objectivo do jogo</u>: O primeiro jogador a recolher no mínimo vinte e cinco peças (em 48) é o vencedor (ver anexo I).

<u>Material utilizado</u>: Um tabuleiro com catorze buracos (doze como casas de jogo e os dois restantes onde se depositam as peças ganhas). Quarenta e oito peças com a forma esférica.

<u>Conceitos matemáticos em estudo</u>: Raciocínio lógico. Cálculo mental.

<u>Duração do jogo</u>: Dois tempos de 45 minutos cada.

<u>Data da utilização do jogo</u>: 5 e 15 de Junho de 2009.

3.5.16. Avaliação dos jogos realizados

Foi elaborado um inquérito (ver anexo II), para cada um dos quinze jogos utilizados. Dos jogos previstos e planeados, o único jogo que não foi aplicado, por manifesta falta de tempo e oportunidade, designa-se por *À Roda com os números*.

Para a elaboração do inquérito foram consultados alguns livros e trabalhos de investigação e retirados alguns pontos com interesse e que se adequassem ao trabalho pretendido. Dentro dessa pesquisa, foi dada especial relevância a inquéritos produzidos por António Júlio César de Sá, descritos no livro *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*[33], editado pela Associação de Professores de Matemática.

As questões introduzidas nos inquéritos foram idênticas para todos os jogos aplicados. As respostas aos inquéritos foram efectuadas no final da realização de cada jogo, embora algumas das vezes isso acontecesse só na aula seguinte. Como as aulas de Matemática com a turma se processavam à 2ª feira e 6ª feira, muitas vezes passava demasiado tempo entre a realização do jogo e a respectiva avaliação, o que era contraproducente, mas não se encontrou outra alternativa possível.

Pela análise dos quadros, no que concerne à primeira questão, verificou-se que, aparentemente todos os alunos perceberam as regras dos jogos. Em relação à segunda questão, o aluno A1, não gostou do *SuperTmatik* e do *Hex*, enquanto o aluno A2 acrescentou o jogo *Atirar ao alvo*. Por sua vez o aluno A3, apenas não gostou de praticar o *Jogo do 24*. A razão principal para os alunos não gostarem de praticar um determinado jogo, é muitas vezes justificada por não se terem divertido a jogar. No que diz respeito à terceira questão, os benefícios e interesse da utilização e prática de cada jogo estão sensivelmente na razão directa do número de opções seleccionadas. Relativamente à última questão, talvez por coerência, os jogos que os alunos não gostaram, não deveriam ser praticados mais vezes (ver Anexo II).

Alguns dos jogos utilizados contribuíram mais para fortificarem as capacidades e competências dos alunos do que outros. O *Jogo do 24*, *SuperTmatik*, *Jogo da estrela*, *Atirar ao alvo* e *Ge-Ó-Pá*, revelaram-se nestes aspectos mais profícuos. Pelo contrário, os jogos *Then points* e *Detective dos números*, conduziram a aprendizagens relativamente mais fracas em virtude de dificuldades inerentes aos jogos e também falta de preparação dos alunos para os abordarem e trabalharem com relevância. O jogo do

[33] [66] anexos

Ouri também não proporcionou a aquisição de aprendizagens aos alunos na plenitude do pretendido, em virtude de apenas ter sido aplicado no final do ano lectivo e consequentemente, o tempo utilizado ter sido relativamente diminuto. Vistos à distância e ao tempo em que se está a efectuar esta avaliação, a utilização de alguns jogos menos versáteis em termos de conteúdos abordados e com regras mais claras e simples, poderia conduzir a uma melhor assimilação de conhecimentos por parte dos alunos.

4. Conclusão

O principal objectivo deste trabalho foi tentar analisar o impacto da utilização de jogos com uma forte componente matemática, no ensino desta disciplina a alunos com necessidades educativas especiais. O adjectivo forte referido na frase anterior não significa objectivamente uma matemática mais complexa ou mais difícil, mas tão-somente como a base para a aplicação e resolução dos jogos aplicados. Deste modo, o jogo pode ser um factor motivacional para a aprendizagem matemática, isto é, através da inclusão de jogos, pretende-se incrementar nos alunos um maior gosto e interesse pela matemática, visando em última análise proporcionar aos alunos mais e melhores competências matemáticas.

Procurou-se com a aplicação de jogos matemáticos, levar os alunos a compreenderem melhor determinados conteúdos e dotá-los das competências matemáticas necessárias para uma melhor abordagem da matemática e sobretudo de uma educação matemática para a vida. Tão importante como combater a ausência de conhecimento relativamente à leitura, interpretação e comunicação correcta da nossa língua, é sem dúvida também a leitura, interpretação e comunicação dessa linguagem universal que é a matemática.

Atendendo ao perfil dos alunos em estudo, e no sentido de também propiciar neles alguma diversão e criar melhor auto-estima, a utilização de alguns dos jogos ministrados serviu como um "rebuçado" para atrair o interesse dos alunos para a aprendizagem da matemática.

A abordagem do ensino da matemática introduzindo jogos, quer como estratégia de aprendizagem, quer como recurso didáctico, propiciou um clima muito favorável à aprendizagem. Nestas situações, normalmente a envolvência e participação do aluno na realização das tarefas propostas é mais activa. Também a comunicação, que pode ser escrita ou verbal, foi estimulada e a interacção aluno-aluno, aluno-professor e professor-aluno e foi ampliada. Como consequência dos factos expostos, a aquisição de conceitos matemáticos por parte dos alunos, revelou-se mais significativa. A avaliação dos jogos por parte dos alunos, nos parâmetros que foram indicados, revela isso mesmo, pese embora alguma aleatoriedade ou incompreensão de alguns itens no preenchimento da ficha de avaliação de cada jogo.

Alguns dos jogos exigiam maior participação verbal, uma vez que potenciavam o diálogo amiudadas vezes. Noutros jogos, embora com uma componente de participação oral importante, outras formas de participação também eram relevantes.

A construção, por parte dos alunos, de materiais para alguns jogos, quer nas aulas de Matemática, quer na disciplina de Atelier Oficinal, bem como algumas ideias quer em termos de regras, quer em termos de materiais a utilizar também foi importante, tendo os alunos interiorizado uma responsabilidade acrescida e sentindo que não só a realização dos jogos, mas também a sua construção, é algo da sua autoria. Este trabalho interdisciplinar também enriqueceu os alunos e ao mesmo tempo pode promover uma cultura importante na escola, uma vez que as diferentes disciplinas não podem funcionar como compartimentos estanques, mas sim em interacção umas com as outras, de modo a obter-se um melhor apoio, um trabalho mais rentável e uma melhor aprendizagem por parte dos alunos. A utilização da interdisciplinaridade pode potenciar saberes em várias vertentes do ensino básico.

Os alunos, pese embora as suas dificuldades, o seu escalão etário e o nível de escolaridade, não se debruçaram no trabalho apenas com o intuito de diversão e entretenimento, mas procuraram melhorar os seus conhecimentos matemáticos, embora também alicerçados pela vertente competitiva. As características dos alunos eram obviamente diferentes. O aluno A1 era muito esforçado, perseverante e concentrado na realização das tarefas. Este aluno possuía um espírito cooperativo e altruísta. Tinha menor dificuldade no cálculo escrito que no mental. O aluno A2 era na generalidade das aprendizagens o que apresentava maiores dificuldades. Contudo, por vezes surpreendentemente, demonstrava bons rasgos em termos de raciocínio lógico. Por vezes mostrava baixos índices de concentração e de empenho. O aluno A3 era relativamente rápido no cálculo mental e raciocínio lógico. Possuía pouco espírito colectivo, sendo muito individualista. Era muito impulsivo e altamente interessado ou desistente, consoante as tarefas lhe eram do agrado ou não.

Este trabalho foi sobretudo desenvolvido para os alunos-alvo. A ideia é que eles seriam os principais beneficiários, uma vez que tomando em consideração as suas dificuldades, procurou-se amenizá-las seguindo estratégias e utilizando-se recursos julgados apropriados. Em princípio tais objectivos foram alcançados, quer através da observação, análise e avaliação do professor, quer da avaliação feita pelos próprios alunos. Aqui duas considerações ou interrogações se podem colocar: a primeira tem a ver com o tipo e número de jogos utilizados. Em relação a este último ponto, a questão temporal e a compreensão e adaptação a cada jogo são determinantes. Em relação ao primeiro ponto, podiam-se procurar outro tipo de jogos, mais aliciantes, mais motivadores, melhor adaptados a conteúdos matemáticos, mais interactivos ou mais ligados ao quotidiano. Contudo, e similarmente, como quando uma casa está construída é que se detectam os erros, aqui a situação é análoga. Além disso, através do erro pode-se melhorar e evoluir. A segunda consideração ou interrogação tem a ver com a própria utilização de jogos. Neste caso, ninguém pode garantir que não seria mais profícuo e positivo para os alunos em termos de aprendizagem matemática, se não se recorresse a esta densidade, em termos de número de jogos. A resposta terá que ser a mesma em relação ao ponto anterior.

Embora os jogos utilizados tivessem alguma diversidade na sua ligação com os conteúdos matemáticos, alguns temas foram explorados em excesso, enquanto outros primaram pela deficiência. Contudo, procurou-se seleccionar os jogos de acordo com as dificuldades reveladas pelos alunos, com a acessibilidade em adquirir os materiais e com a disponibilidade temporal.

A utilização de jogos em sala de aula também tem desvantagens que se prendem sobretudo com o elevado tempo gasto. Este tempo dispendido reflecte-se em termos da selecção, organização e construção de jogos à partida motivadores, interessantes e promotores de aprendizagem matemática; na elaboração e explicação de regras que sejam simples, claras, compreensíveis e funcionais; na prática do jogo propriamente dito; na avaliação dos jogos. Por mais simples e melhor preparados que os jogos sejam, existem sempre alguns imponderáveis que fazem com que o tempo utilizado seja maior que o planificado. Deste modo, é exigido muito tempo para a planificação dos jogos e a sua aplicação em contexto de sala de aula. Muitas vezes também, um determinado jogo não vai de encontro ao plano elaborado em termos da aprendizagem e das competências que se previam que os alunos iriam melhorar ou alcançar.

O número de jogos utilizado foi relativamente elevado e abarcaram várias áreas da matemática. Os jogos utilizados enquadraram-se sobretudo nos temas *Números e Operações* e *Geometria e Medida*. Dentro do tema *Números e Operações*, procurou-se desenvolver nos alunos o cálculo mental e escrito, estimativas, bem como estimular o uso da calculadora. Relativamente a *Geometria e Medida* procurou-se intensificar experiências com medição, desenvolvimento e aplicação dos conceitos de perímetro e área, recorrendo a instrumentos de medida e materiais manipuláveis. A utilização de alguns jogos permitiu a exploração muito rudimentar de algumas áreas não contempladas na Gestão do Programa, caso dos números inteiros negativos ou simetria.

Além dos jogos aqui abordados, tratados e desenvolvidos, houve outros que não foram tão escalpelizados, estudados e trabalhados e desta forma, praticamente não foram mencionados. Com turmas constituídas por 20 ou mais alunos, o efeito pode não ser o mesmo, uma vez que, os alunos podem dispersar-se mais, não existir tanto domínio das situações, haver mais dificuldades em gerir a aula, maior dificuldade no controle e coordenação de tempos e consequentemente maiores dificuldades em aplicar o plano de aula previamente estabelecido. Também é evidente que se os três alunos estivessem inseridos na disciplina de Matemática, numa turma normal, constituída por 20 ou mais alunos, a sua aprendizagem iria ser muito inferior. Os alunos com estas características necessitam de um acompanhamento de proximidade, para que todas as dúvidas possam ser de imediato escalpelizadas e também que possam manter uma boa concentração, bem como a possibilidade de terem uma participação muito mais activa.

Outro factor que muitas vezes torna alguns jogos difíceis de aplicar, é que eles podem implicar versatilidade e variedade de conteúdos, que impeçam os alunos de conseguirem uma aprendizagem significativa e o tempo utilizado na planificação e prática do jogo não seja devidamente aproveitado.

Ao introduzir alguns destes jogos, poderia considerar-se uma aposta bastante arriscada, uma vez, que, são aparentemente difíceis de trabalhar e sobretudo complicados atendendo ao perfil destes alunos e ao seu enquadramento na Educação Especial. Contudo, e embora estes alunos possuam este estatuto, globalmente conseguiram obter aprendizagens significativas e enriquecedoras e ficaram a gostar mais de matemática.

Não foi efectuada uma análise ou estudo comparativo com outro grupo de alunos ou turma que servisse como padrão ou modelo, atendendo ao carácter e perfil muito específico destes alunos. Também, não foi possível comparar com outro grupo de alunos com características semelhantes, em que as estratégias e recursos fossem substancialmente diferentes, no sentido de verificar ou aferir a apreensão e domínio de algumas competências matemáticas.

Em termos de aproveitamento escolar, os resultados foram positivos. O aluno A1 obteve melhores resultados que os restantes colegas de turma em virtude de ter atingido com alguma distinção os objectivos propostos. Esses objectivos centraram-se em termos de *Domínios* e *Competências* em relação à *aquisição*, *compreensão* e *aplicação*, enquanto relativamente a *Atitudes* e *Valores* relevaram a *participação*, *responsabilidade* e *autonomia*. Os níveis atribuídos na generalidade das disciplinas, incluindo Matemática, foram de cariz qualitativo.

Na análise dos jogos praticados, possivelmente, foram mencionados mais os acertos e estratégias correctamente utilizadas pelos alunos do que propriamente as lacunas e erros cometidos. Este facto terá a ver com o reforço, comunicação e valorização positiva dada aos alunos, em detrimento dos aspectos mais negativos demonstrados pelos alunos na realização dos trabalhos efectuados.

A planificação das unidades temáticas, com o consequente número de aulas previstas para cada um dos temas, implica que os professores para terem maior segurança no cumprimento dos programas, que são de carácter obrigatório, evitem "dispersar-se" e muitas vezes o que pode ser considerado facultativo fica um pouco marginalizado.

Por estes motivos, muitos professores evitam utilizar jogos na sala de aula, na sua componente lectiva. Relativamente à Educação Especial, como existe alguma autonomia em termos de planificação dos conteúdos, dirigidos especificamente a cada aluno, torna-se mais acessível a aplicação de jogos em contexto de sala de aula.

A bibliografia utilizada foi relativamente simples, com o recurso a legislação com alguma actualidade e também a livros de divulgação matemática. Também se recorreu a outras fontes, embora com menos relevância.

Por último e procurando responder à questão formulada: "*Qual a importância da utilização de jogos para o desenvolvimento das competências matemáticas essenciais para alunos com este perfil?* ", pode-se dizer que em termos globais, e para os alunos em questão, que a utilização de jogos se revelou positiva, uma vez que foram ao encontro do que *a priori* foi projectado, isto é, contribuíram para a aprendizagem matemática dos alunos. Além deste aspecto, que era o prioritário e que pretendia responder à questão posta, os jogos proporcionaram, também, nos alunos um maior interesse pela vida escolar e consequentemente um melhor aproveitamento. Entre esses aspectos podemos citar o incremento da comunicação, através de uma participação mais activa; planificação, construção e manipulação de materiais concretos, que os jogos normalmente solicitam; espírito de cooperação e partilha, bem como competição sadia que os jogos proporcionam.

A parte curricular do mestrado foi concluída no ano lectivo de 2003/2004. Só no presente ano lectivo foi elaborado este trabalho. Este longo espaço de tempo decorrido teve três razões ou três justificações fundamentais. A primeira está relacionada com a falta de tempo disponível para executar um trabalho que se julga com seriedade e algum interesse para a Escola. Em segundo lugar, leccionar a disciplina apropriada, Matemática, para executar esse trabalho, o que raramente aconteceu nestes últimos anos. Normalmente o horário contemplava sobretudo a disciplina de Ciências da Natureza e áreas curriculares não disciplinares. Em terceiro lugar, devido ao facto do tema, anteriormente sugerido ou proposto por outra orientadora, estar relacionado com a Combinatória, tema esse que embora tenha sido iniciado, se revelou pouco motivador e de difícil aplicação.

O trabalho nesta área foi sem dúvida mais interessante e mais do agrado nosso e dos alunos. Foi também um desafio, no sentido em que a reacção dos alunos podia não ser a mais acolhedora. O trabalho foi relativamente intensivo, sobretudo para os alunos, que revelaram seriedade e esforço na maior parte dos momentos. De qualquer forma, acredita-se que enriqueceram as suas capacidades e competências. Para isso também contribuiu, e de sobremaneira, o alto índice de assiduidade e pontualidade de todos os envolvidos.

Em termos de perspectivas futuras, era interessante dar sequência a este trabalho se tal se revelar possível. Dar sequência, não significa desenvolver um trabalho conducente à obtenção de um grau académico superior, porque embora importante, é claramente subalternizado pela essência do trabalho. Dar mais importância a uma prática pedagógica que contemple jogos educativos na disciplina de Matemática pode ser claramente positivo, não só para alunos da Educação Especial, que evidentemente revelam mais dificuldades, mas também para alunos que frequentam o currículo normal. Tendo em conta as especificidades de cada aluno ou de cada turma, a abordagem, o tipo de jogos seleccionados e exploração destes é que se pode determinar os objectivos a atingir.

A não permanência do docente na mesma escola, implica a não continuidade do trabalho que estava a ser realizado com estes alunos. Contudo, uma mudança de escola também poderá revelar aspectos positivos, já que pode permitir ao docente partilhar com outros alunos e professores os conhecimentos, fruto da experiência acumulada.

Vivemos numa época em que claramente a Educação é um dos pilares maiores da sociedade. Todos os elementos da comunidade educativa, alunos, professores, funcionários e encarregados de educação, têm uma importante missão a cumprir, que é elevar a Escola para patamares de excelência. A obrigação do professor do ensino básico é contribuir para a formação do aluno em diversas valências. A sociedade, onde se inclui a comunidade educativa, está em permanente mutação. O papel do Professor modifica-se ao longo do tempo e o seu trabalho e responsabilidade é cada vez maior, porque a sociedade no seu todo assim o exige. Para isso é necessária uma actualização, pesquisa e construção permanente do conhecimento e de metodologias de ensino-aprendizagem adaptadas às realidades do espaço e do tempo.

Este trabalho ficará no Centro de Recursos Educativos da Escola, para que eventualmente possa vir, também, a ser colocado em prática por outros professores e alunos.

Bibliografia

01 - *Albert Einstein.* (s.d.). Obtido em 27 de 9 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein.

02 - Alsina, À. (2004). *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos.* Porto: Porto Editora.

03 - Alves, P., & Vaz, C. (s.d.). *A vida de Leonard Euler.* Obtido em 17 de 7 de 2009, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/biografia.htm.

04 - *Arquimedes.* (s.d.). Obtido em 14 de 7 de 2009, de http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/biografia-de-arquimedes/biografia-de-arquimedes.php.

05 - *Arquimedes.* (1 de 2003). Obtido em 14 de 7 de 2009, de http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/arquimedes.html.

06 - Berloquin, P. 100 Jogos Lógicos – Colecção Jogo, Logo Existo. Lisboa: Público Gradiva.

07 - *Blaise Pascal.* (s.d.). Obtido em 17 de 07 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise Pascal.

08 - Boavida, A. M., Paiva, A. L., & outros. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

09 - *Boécio.* (s.d.). Obtido em 19 de 07 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Boécio.

10 - Brochetto, N., Avrela, J., & Barison, D. B. (s.d.). *Probabilidade e Estatística.* Obtido em 27 de 04 de 2009, de http://ucsnews.ucs.br/ccet/deme/emsoares/inipes/prob/.

11 - Caba, B. (05 de 2004). *De Jugar con el Arte al Arte de Jugar … Un proceso lúdico creativo.* Obtido em 29 de 01 de 2009, de http://www.educared.org.ar/vicaria/adjuntos/caba.pdf.

12 - Cabral, A. (1990). *Teoria do Jogo - Colecção Pedagogia.* Lisboa: Editorial Notícias.

13 - Carvalho, A., Diogo, F., & outros. (2000). *O Professor e o Currículo – O ensino e a aprendizagem da Matemática, Livro do Professor.* Porto: Edições ASA.

14 - Chiesa, A. (2008). *www.escolalasalle.com.br/documentos_pdf.* Obtido em 14 de 2 de 2009

15 - Colledge, T. (1992). *Pascal's Triangle, A teacher's guide with blackline masters.* Inglaterra: Tarquin Publications.

16 - Conceição, M. A., Almeida, M. G., & outros. Manipulação de Materiais – Matemática 5º Ano, 2º Ciclo do Ensino Básico. Perafita, Porto: Areal Editores.

17 - *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais, Ministério da Educação – Departamento de Educação Básica.* (2001). Obtido em 25 de 3 de 2009, de http://esna.ccbi.com.pt/file.php/1/LivroCompetenciasEssenciais.pdf.

18 - *David Hilbert.* (s.d.). Obtido em 17 de 7 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert.

19 - *Desenvolvimento do Pensamento Matemático - Ouri.* (s.d.). Obtido em 16 de 02 de 2009, de http://ouri.ccems.pt/jogo/Ouri1.htm.

20 - *Euclides.* (s.d.). Obtido em 14 de 7 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides.

21 - Expresso, J. (2008). *TRAIN your brain, exercite a mente* . Barcelona, Espanha: Editorial Sol 90.

22 - *Friedrich Gauss.* (s.d.). Obtido em 17 de 7 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.

23 - Gardner, M. (2008). *Ah, Apanhei-te! – Colecção Biblioteca Desafios Matemáticos.* Espanha: RBA Coleccionables.

24 - Gardner, M. (2003). *Ah, Descobri! – Colecção O Prazer da Matemática* (2ª ed.). Lisboa: Gradiva.

25 - *Girolamo Cardano.* (s.d.). Obtido em 5 de 8 de 2009, de http://www.summagallicana.it/lessico/c/Cardano.

26 - *Girolamo Cardano.* (s.d.). Obtido em 17 de 07 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano.

27 - *Gottfried Leibniz.* (s.d.). Obtido em 17 de 7 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz.

28 - Guimarães, H. M., Abrantes, P., & outros. (1998). *Matemática 2001 – Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática, Relatório preliminar, Março 1998.* Associação de Professores de Matemática.

29 - Guzmán, M. d. (9 de 1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza.* Obtido em 25 de 10 de 2008, de http://www.sectormatematica.cl/articulos/juegosmaten.pdf.

30 - Hole, V. (1977). *Como Ensinar Matemática no Básico e Secundário - Biblioteca do Educador Profissional* (6ª ed.). Lisboa: Livros Horizonte.

31 - *Início da matematização das probabilidades.* (2 de 2001). Obtido em 14 de 3 de 2009, de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html.

32 - *Jogo da Vida.* (s.d.). Obtido em 17 de 2 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_da_vida.

33 - *Jogo da Vida de John Conway.* (s.d.). Obtido em 7 de 3 de 2009, de http://pt.wikipedia.marcogomes.com/blog/2008/o-jogo-da-vida-de-john-conwaya.

34 - *Jogo Ouri.* (s.d.). Obtido em 22 de 06 de 2009, de www.coe08.uevora.pt/regras.pdf.

35 - *JOGOS - Jogo do 24.* (s.d.). Obtido em 8 de 01 de 2009, de http://www.sc.didaxis.pt/nm/jogos.htm.

36 - *Jogos Antigos.* (s.d.). Obtido em 1 de 6 de 2009, de http://www.jogosantigos.nom.br/mancala.asp.

37 - *John Conway.* (6 de 2004). Obtido em 15 de 2 de 2009, de http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians/Conway.html.

38 - *Leonardo Fibonacci.* (s.d.). Obtido em 14 de 7 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci.

39 - *Leonhard Euler.* (s.d.). Obtido em 17 de 07 de 2009 , de http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Eule.

40 - Linhares, A. (11 de 2000). *Breves notas sobre o Hex.* Obtido em 4 de 3 de 2009, de http://matematica2.no.sapo.pt/hexestrat/hexest.htm .

41 - Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e Métodos de Resolução de Problemas de Matemática - Colecções Cadernos do Criap.* Porto: ASA Editores.

42 - *Luca Pacioli.* (s.d.). Obtido em 17 de 7 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli.

43 - *Luca Pacioli.* (s.d.). Obtido em 27 de 4 de 2009, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/renascenca/pacioli.htm.

44 - *Mancala.* (s.d.). Obtido em 12 de 8 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Mancala.

45 - Neto, J. P., & Silva, J. N. (2004). *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos – O Prazer da Matemática* (1ª ed.). Lisboa: Gradiva.

46 - *Oware.* (s.d.). Obtido em 12 de 8 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Oware.

47 - Padmanabhan, T. (2000). *Após os Três Primeiros Minutos – A história do nosso Universo* (1ª ed.). Lisboa: Terramar.

48 - *Paradoxo de Galileu.* (6 de 1997). Obtido em 7 de 9 de 2009, de http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pseud/002.html.

49 - Parker, J. (1994). *Cross Numbers – A collection of 32 mathematical puzzles.* Inglaterra: Tarquin Publications.

50 - Piaget, J. (1978). *Seis Estudos de Psicologia – Universidade Moderna* (8ª ed.). Lisboa: Publicações D. Quixote.

51 - Pinto, P. F., Félix, N., & Cunha, I. M. (2001). *Competências essenciais no Ensino Básico – Visões multidisciplinares – Colecção Cadernos do Criap.* Porto: ASA Editores.

52 - Politécnico, U. d. (4 de 2002). *Cavaleiro de Euler.* Obtido em 17 de 7 de 2009, de http://cenpl02.dei.uc.pt/enunctarde/CEuler.htm.

53 - Ponte, J. P., & outros. (6 de 1997). *Diagnóstico e Propostas para a Matemática Escolar.* (M. d. Inovação, Ed.) Obtido em 14 de 11 de 2008, de http://www.portugaljovem.net/mariolima/educacao/referencias/mat_edu/diagnostico/index.htm.

54 - Ponte, J. P., & outros. (1997). *Diagnóstico e Propostas para a Matemática Escolar.* Obtido em 14 de 12 de 2008, de http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/diagnostico_propostas_mat.pdf.

55 - Ponte, J. P., & outros. (s.d.). *Histórias de Investigações Matemáticas – Investigações na Aula de Matemática.* Obtido em 18 de 1 de 2009, de http://viajarnamatematica.ese.ipp.pt/textos/experiencias/investigacao/investigacao_aula_matematica.pdf.

56 - Ponte, J. P., & outros. (s.d.). *Programa de Matemática do Ensino Básico-Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.* Obtido em 20 de 5 de 2009, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

57 - Ponte, J. P., & outros. (s.d.). *Reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico-Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de*

Desenvolvimento Curricular. Obtido em 20 de 5 de 2009, de http://www.dgidc.min-edu.pt/programa_matematica/ficheiros/Programa_Mat_Jul.pdf.

58 - Porto, E. S. (2006). *Cadernos Temáticos - Calculo Mental – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º Ciclo do Ensino Básico.* Porto: Gráfica Multitema.

59 - Porto, E. S. (2006). *Cadernos Temáticos - Problema, estratégias de resolução e avaliação – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º Ciclo do Ensino Básico.* Porto: Gráfica Multitema.

60 - Providência, N. B. (2001). *2 + 2 = 11 – Colecção O Prazer da Matemática* (1ª ed.). Lisboa: Gradiva.

61 - R.Knott, Quinney, D. A., & Maths, P. (9 de 1997). *The life and numbers of Fibonacci.* Obtido em 15 de 7 de 2009, de http://pass.maths.org.uk/issue3/fibonacci/index.html.

62 - Ralha, M. E. (1992). *Didáctica da Matemática – perspectivas gerais sobre educação matemática* (Vol. I). Lisboa: Universidade Aberta.

63 - Rodrigues, J. d., & Ricci, S. M. (11 de 2008). *Jogos Matemáticos como um recurso didático.* Obtido em 23 de 2 de 2009, de http://www.unimeo.com.br/artigos/artigos_pdf/2008/novembro/jogos+matematicos+como+um+recurso+didatico.pdf.

64 - Rosa, A. (s.d.). *Problema das oito raínhas.* Obtido em 17 de 7 de 2009, de http://www.inf.ufrgs.br/gppd/disc/cmp157/trabalhos/urcamp99-1/alexsand/LogicaRainha.html.

65 - Sá, A. C., & Zenhas, M. G. (2004). *Como abordar… a comunicação escrita na aula de matemática.* Perafita, Porto: Areal Editores.

66 - Sá, A. J. (1995). *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo* (1ª ed.). Associação de Professores de Matemática.

67 - Sá, A. J., & Faria, M. C. (2001). *Clube de Matemática, a aventura da descoberta – Colecção práticas pedagógicas* (3ª ed.). Porto: ASA Editores.

68 - Santana, P. O., & Ferreira, O. P. (s.d.). *Usando Jogos Para Ensinar Matemática.* Obtido em 7 de 1 de 2009, de http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/905-4.pdf.

69 - Santos, C. P. (s.d.). *Análise de um Problema de Hex.* Obtido em 3 de 3 de 2009, de http://ludicum.org/games/abstr/hex1/Hexdoc.

70 - Santos, C. P. (s.d.). *Análise de um Problema de Ouri.* Obtido em 3 de 03 de 2009 , de http://ludicum.org/games/abstr/ouri.

71 - Santos, C. P. (s.d.). *Análise de um Problema de Semáforo.* Obtido em 4 de 3 de 2009, de http://ludicum.org/games/abstr/sem.

72 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *A Álgebra + Jogo "Alquerque" – Colecção Jogos com História* (Vol. 9). Jornal Público e Revista Visão.

73 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *A Aritmética Binária + Jogo Asiático "Go" – Colecção Jogos com História* (Vol. 4). Jornal Público e Revista Visão.

74 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *A Geometria + Puzzle Stomachion – Colecção Jogos com História* (Vol. 6). Jornal Público e Revista Visão.

75 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *A Teoria de Grupos + O Puzzle do 15 – Colecção Jogos com História* (Vol. 8). Jornal Público e Revista Visão.

76 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *As Somas NIM + Jogo do "Ouri" – Colecção Jogos com História* (Vol. 3). Jornal Público e Revista Visão.

77 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *Matemática Recreativa + Puzzle Anéis Chineses – Colecção Jogos com História* (Vol. 7). Jornal Público e Revista Visão.

78 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *O Pentagrama + Puzzle "Pentalfa" – Colecção Jogos com História* (Vol. 2). Jornal Público e Revista Visão.

79 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *Os Fractais + Puzzle "Torres de Hanói" – Colecção Jogos com História* (Vol. 5). Jornal Público e Revista Visão.

80 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *Os Quadrados latinos + Jogo "Hexágono Mágico" – Colecção Jogos com História* (Vol. 10). Jornal Público e Revista Visão.

81 - Santos, C. P., Neto, J. P., & Silva, J. N. (2007). *Sucessão de Fibonacci + Puzzle "Missing Square" – Colecção Jogos com História* (Vol. 1). Jornal Público e Revista Visão.

82 - Serrazina, L., & Matos, J. M. (1988). *O Geoplano na Sala de Aula* (3ª ed.). Associação de Professores de Matemática.

83 - Sheppard, R., & Wilkinson, J. (1989). *The Strategy Games File – Mathematics Resources.* Inglaterra: Tarquin Publications.

84 - Silva, C. R. (1999). *Livro do Professor - O problema da semana e o gosto de aprender matemática - 2º Ciclo do Ensino Básico* (1ª ed.). Lisboa: Didáctica Editora.

85 - Sousa, L. C. (s.d.). *Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática - Uma Intervenção com Jogos nas Aulas de Reforço em Matemática.* Obtido em 17 de 10 de 2008, de http://200.136.79.4/mestrado/dissertacoes/Lia_Correa_da_Costa_Sousa.pdf.

86 - Stewart, I. (2007). *Jogos, Conjuntos e Matemática – Colecção Biblioteca Desafios Matemáticos.* Espanha: RBA Coleccionables.

87 - Struik, D. J. (1997). *História concisa das matemáticas - Colecção Ciência Aberta* (3ª ed.). Lisboa: Gradiva.

88 - Sucasas, J. F., & Vela, M. R. (1991). *Juegos y Pasatiempos para la enseñanza de la matematica elemental* (1ª ed.). León, Espanha: Editorial Síntesis.

89 - *SuperTmatik.* (2008). Obtido em 11 de 11 de 2008, de http://www.SuperTmatik.com.

90 - *Teorema minimax.* (2004). Obtido em 9 de 8 de 2009, de http://www1.eeg.uminho.pt/economia/caac/pagina%20pessoal/Disciplinas/Disciplinas%2004/jogos.pdf .

91 - Torres, D. F. (3 de 2004). *O Jogo do 24 – digressões com o Maple.* (U. D.Mat., Ed.) Obtido em 30 de 10 de 2008, de http://www2.mat.ua.pt/delfim/delfim/artigos/jogo24.pdf.

92 - Vergani, T. (1993). *Educação Matemática - um horizonte de possíveis sobre uma educação matemática viva e globalizante.* Lisboa: Universidade Aberta.

93 - *Viagem pelo Mundo.* (1998). Obtido em 1 de 9 de 2009, de http://www.prof2000.pt/users/miguel/grafos/joghami.htm.

94 - *William Hamilton.* (s.d.). Obtido em 7 de 9 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton.

95 - *William Hamilton.* (s.d.). Obtido em 7 de 9 de 2009, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:William_Rowan_Hamilton.

96 - Zawojewski, J. S. (1991). *Curriculum and Evaliuation Standards for School Mathematics.* Virgínia, EUA: National Council of Teachers of Mathematics.

Anexos I

Jogo do 24

Segundo Delfim Torres, *"dados os números 1, 3, 4 e 8, são possíveis quatro expressões não equivalentes com resultado 24. Se introduzirmos a notação X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 4 e X_4 = 8, as expressões-solução são:*

$X_4 + X_3 x (X_1 + X_2) = 8+4 x (1+3) = 24$

$X_4 : (X_3 : X_2 - X_1) = 8: (4:3-1) = 24$

$X_3 x (X_1 + X_4 - X_2) = 4 x (1 + 8 -3) = 24$

$(X_3 + X_4) x (X_2 - X_1) = (4+8) x (3-1) = 24$

... o número de soluções não varia se trocarmos a ordem com que indicamos os números: o jogo [1, 3, 4, 8] é precisamente o mesmo que o jogo [8, 4, 3, 1] ou qualquer uma das suas permutações.

O Maple faz parte de uma família de ambientes científicos apelidados de "Sistemas de Computação Algébrica"... Trata-se de uma ferramenta muito poderosa, que permite realizar uma miríade de cálculos simbólicos e numéricos."[1]

Existem 495 combinações possíveis de números de quatro algarismos de 1 a 9. A expressão geral para calcular todas as combinações possíveis no *Jogo do 24* é dada por:

C_n^{n+m-1}, sendo $n = 4$ e $m = 9$

$$C_4^{4+9-1} = C_4^{12} = \frac{12!}{(12-4)!x4!}$$

$$C_4^{12} = 495$$

Dos 495 quaternos, o *Jogo do 24* admite 404. *"Os 91 quaternos que não admitem solução são:*

1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1119, 1122, 1123, 1124, 1125, 1133, 1159, 1167, 1177, 1178, 1179, 1189, 1199, 1222, 1223, 1299, 1355, 1499, 1557, 1558, 1577, 1667, 1677, 1678, 1777, 1778, 1899, 1999, 2222, 2226, 2279, 2299, 2334, 2555, 2556, 2599, 2677, 2777, 2779, 2799, 2999, 3358, 3467, 3488, 3555, 3577, 4459, 4466, 4467,

[1] [91] págs. 1-2

4499, 4779, 4999, 5557, 5558, 5569, 5579, 5777, 5778, 5799, 5899, 5999, 6667, 6677, 6678, 6699, 6777, 6778, 6779, 6788, 6999, 7777, 7778, 7779, 7788, 7789, 7799, 7888, 7899, 7999, 8888, 8889, 8899, 8999, 9999.

O número 24 não foi escolhido, com toda a certeza, ao acaso por Robert Sun."[2] Este número tem oito divisores (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24). Ainda segundo Delfim Torres, a quantidade de divisores não é o único factor a ter em conta. Por exemplo, o número 60 tem doze divisores (1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60). De todos os números com três ou menos dígitos, o 60 é o que possui maior número de divisores. No entanto, para o *Jogo do 60* existem muito menos possibilidades de obter 60 do que no *Jogo do 24* obter 24. Existem 276 possibilidades apenas. Já o *Jogo do 6* admite mais possibilidades de que o *Jogo do 24*. No *Jogo do 6* existem 469 soluções em 495 possíveis quaternos, isto é, mais sessenta e cinco hipóteses que no *Jogo do 24*. Os 26 quaternos que não admitem solução são os seguintes: 1111, 1179, 1188, 1189, 1199, 1559, 1669, 1999, 3588, 3667, 4499, 4599, 4667, 4778, 5599, 5668, 5669, 5788, 6789, 7779, 7788, 7799, 7899, 8889, 8899, 9999. Contudo, e apesar de 6 ser divisor de 24, existem alguns quaternos que não têm solução 6 mas têm solução 24.

Outros possíveis jogos com bastantes soluções seriam o *Jogo do 8*, *Jogo do 12* e *Jogo do 18* por exemplo. O número 30 tem o mesmo número de divisores do número 24 (oito divisores), enquanto o número 36 tem nove divisores (1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36). O problema é que as possíveis configurações apenas admitem números inteiros de 1 a 9, e deste modo, o número de hipóteses é menor que no *Jogo do 24*.

Com o programa *Maple*, também poderemos verificar o número de combinações possíveis de um quaterno para obtermos o valor 24. Por exemplo, utilizando o quaterno (1, 3, 4, 8) obtemos as seguintes soluções:

((1 + 3) x 4) + 8 = 24

((1 + 8) - 3) x 4 = 24

(3 - 1) x (8 + 4) = 24

((3 + 1) x 4) + 8 = 24

((8 + 1) - 3) x 4 = 24

((8 - 3) + 1) x 4 = 24

(4 + 8) x (3 - 1) = 24

[2] [91] pág. 8

(8 + 4) x (3 - 1) = 24

4 x (1 - (3 - 8)) = 24

4 x (8 - (3 - 1)) = 24

8 + (4 x (1 + 3)) = 24

8 + (4 x (3 + 1)) = 24

Destas soluções, apenas existem quatro diferentes, uma vez que a maioria é repetida.

Os quaternos que têm mais soluções são os seguintes:

(1, 2, 4, 8) com catorze soluções e (1, 7, 8, 9) com quinze soluções.[3]

Este jogo é muito utilizado na escola, fazendo-se todos os anos o campeonato do *Jogo do 24*, aberto a alunos do 2º ciclo. Contudo, estes três alunos, além de nunca o haverem praticado, desconheciam completamente a existência deste jogo.

Utilizaram-se três cartões, ou seja seis jogos, uma vez que cada cartão, possui um jogo na frente e outro no verso. Usou-se um cartão de nível 1 (fácil), outro de nível 2 (nível médio) e ainda um cartão de nível 3 (difícil).

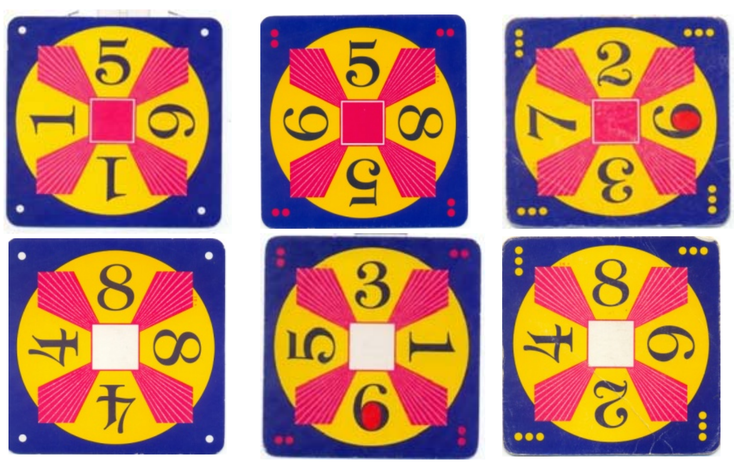


Fig. 1 – Três cartões do *Jogo do 24*

Antes de se dar início ao jogo, foram explicadas as regras do *Jogo do 24* e as normas a cumprir, de forma que os alunos pudessem participar de forma positiva. Escolheu-se um cartão e foi explicado o modo de resolução.

No primeiro jogo que continha os números 5, 6, 1, 1, o aluno A3 questionou se poderia utilizar a tabuada. Foi-lhe explicado que o objectivo era desenvolver o cálculo

[3] [91] págs. 8-11

mental e desta forma, não poderia utilizar esse meio auxiliar. Depois de alguns cálculos errados os alunos chegaram a conclusões correctas.

Todos os alunos conseguiram apresentar uma solução diferente. O aluno A1 apresentou a solução 5 - 1 = 4; 6 x 1= 6; 4 x 6 = 24. O aluno A3 apresentou a seguinte: 5-1= 4; 6 x 1 = 6; 6 x 4 = 24. O aluno A2 apresentou a seguinte solução: 5 -1 = 4; 4 x 6 = 24; 24 x 1 = 24. O aluno A2 referiu ainda que 24x1 é igual a 24, porque o 1 é o elemento neutro da multiplicação.

As soluções propostas por A1 e A3 são praticamente idênticas.

O aluno A2 referiu que 24x1=1x24, porque existia a propriedade comutativa, justificando (erradamente) *"porque a ordem das parcelas não interessa"*. O aluno A1 disse que 24x1=24, porque o 1 é o elemento neutro, justificando *"quer dizer que não muda o resultado da conta"*. O aluno A3 indicou que o elemento neutro da adição era o 1, que posteriormente corrigiu para zero, após um exemplo dado pelo professor.

Do segundo jogo faziam parte os números 4, 4, 8, 8.

O aluno A3, depois de pensar alto breves segundos, respondeu:

A3-Muito fácil. É só somar. 8+8+4+4.

O professor elogiou o aluno e referiu que também podia ser 4+4+8+8, ou outra ordem qualquer.

A3- Já sabemos isso.

Seguidamente passou-se para um cartão de nível 2. O primeiro jogo continha os números 1, 5, 3, 9.

O aluno A3, aparentemente e surpreendentemente parece que adquiriu uma mecanização repentina de resolução. Este aluno já tinha demonstrado, em outras ocasiões, que tinha um cálculo mental mais desenvolvido.

A3- 3x5 = 15; 15+9 = 24; 24x1 = 24.

O aluno A3, embora fizesse contagem com os dedos em 15+9 e 8+6 demonstrou uma rapidez assinalável.

O segundo jogo deste cartão era composto pelos números 5, 5, 6, 8.

A3- Soma-se tudo. 5+5=10; 8+6=14; 14+10=24. Agora parece tudo fácil.

Por último passou-se ao terceiro cartão de nível 3. O primeiro jogo era constituído pelos números 2, 3, 7, 9.

Os alunos não conseguiram encontrar a solução dentro do tempo previsto. Os cartões de nível 3, muitas vezes apenas têm uma única solução, ao contrário dos outros que possuem múltiplas soluções, ou uma solução muito evidente.

O professor apresentou aos alunos a solução seguinte: 9+7 = 16; 16x3 = 48; 48:2 = 24.

A2- 48:2 = 24?

A3- Sim, porque é metade.

O último jogo tinha os números 2, 4, 6, 8. Os alunos manifestaram muitas dificuldades, faziam cálculos, mas não atingiam a solução. Perto do final do tempo previsto, o aluno A3 deu a resposta.

A3- 4x8 = 32; 32-6 = 26; 26-2 = 24.

O jogo demorou mais que os 30 minutos previstos, devido às dificuldades manifestadas pelos alunos e pelo diálogo (construtivo) que se gerou.

Alguns cálculos efectuados pelos alunos, e que se encontram aqui indicados, demoraram algum tempo a serem realizados, ao contrário do que pode transparecer no relato aqui efectuado.

Os alunos gostaram do *Jogo do 24*. Paradoxalmente, o aluno A3 que tinha demonstrado maior facilidade na resolução dos problemas propostos, foi o que confessou ter menos prazer no jogo. A partir daqui em algumas aulas, logo no início, utilizava-se um cartão com o jogo. O objectivo era de servir para os alunos treinarem o cálculo mental, servindo como "aquecimento" para a aula. O jogo também serviu para os alunos desenvolverem o conhecimento e aplicação em relação aos múltiplos e divisores de um número, bem como em relação a algumas propriedades das operações básicas.

Os alunos A1 e A2 sentiram motivação e interesse por este jogo e por isso manifestam uma atitude muito positiva em relação a ele.

Verifica-se que os alunos têm mais facilidade quando a solução implica cálculos progressivamente crescentes, com a utilização da adição e da multiplicação. Quando a solução obriga a que se façam cálculos em que se tem que subtrair ou dividir as dificuldades são maiores, não só devido às operações em si, mas também devido aos cálculos implicarem uma diminuição do resultado seguido de um aumento ou vice-versa.

Para alunos de outros níveis de escolaridade mais avançada, pode-se utilizar o *Jogo do 24 Avançado*, cujo objectivo é o mesmo, mas utiliza também a potenciação, radiciação, numerais decimais, fracções e utilização de parêntesis.

SuperTmatik

As regras do jogo foram lidas e explicadas aos três alunos. Todas as dúvidas foram aparentemente clarificadas.

Os alunos, nas expressões correspondentes à letra *A* e *B*, respondiam com prontidão, sobretudo A3, já que são muito simples em que se utilizam apenas uma operação, a adição e subtracção, respectivamente. Para a letra *C*, os alunos também não tiveram dificuldades, pois só havia duas operações, a primeira de adição e a segunda de subtracção. A expressão correspondente à letra *D* era a multiplicação e aqui o aluno A2, manifestava algumas dificuldades. Quanto à letra *E*, a expressão assinalada corresponde à divisão. Neste caso, o aluno A3 era muito mais rápido, já que utilizava a operação inversa, (a multiplicação), que calculava com alguma facilidade, para chegar à solução. Por exemplo, 30:3, o aluno A3 rapidamente disse 10 e acrescentava 3 x10 = 30. Em relação às letras *F, G, H, I,* e *J*, a resolução das expressões numéricas eram mais complexas para estes alunos, motivo pelo qual, algumas das expressões não eram solucionadas dentro do tempo estipulado para a sua resolução. O aluno A3 demonstrou neste jogo maior à vontade e maior facilidade de cálculo pelo que foi o vencedor, na sequência do que já havia mostrado no *Jogo do 24*, em que é também testada a capacidade de cálculo mental.

Numa das cartas, correspondente à letra *H*, estava indicada a seguinte expressão numérica:

72: 9 + 9 - 3.

Os três alunos conseguiram encontrar a solução correcta, ou seja 14, pela ordem seguinte (A3, A2, A1).

Seguidamente utilizou-se outra carta, correspondente à letra J, composta pela seguinte expressão numérica: 6 x 6 + 35: 5.

A3- Posso utilizar a calculadora?

O professor referiu que a exemplo do *Jogo do 24*, aqui também ia ser testado o cálculo mental. Contudo, acedeu a que os alunos fizessem os cálculos no papel. Mesmo assim os alunos estavam com muitas dificuldades, tendo-lhes então sido permitido que utilizassem a máquina calculadora.

Os alunos do 2º ciclo usam normalmente a calculadora não científica, existente na escola, cuja marca é *Citizen ME-500*.

A1- Dá 14,2.

A3 e A2 chegaram ao mesmo resultado, ou seja, 14,2.

O professor informou os alunos que o resultado estava errado e pediu-lhes para fazer novamente os cálculos. Os alunos obtiveram o mesmo resultado, ou seja, 14,2.

O professor relembrou aos alunos que a multiplicação e a divisão têm prioridade em relação à adição.

A2- O que é que isso quer dizer?

O professor verbalizou que numa expressão numérica as operações multiplicação e divisão se efectuam em primeiro lugar e só depois a adição e a subtracção.

O professor forneceu ao aluno A3 uma máquina calculadora científica, embora antiga, de marca *Casio fx-3600P*. O aluno fez os cálculos e obteve como resultado 43.

A3- O resultado nesta máquina é 43.

A3- A diferença deve estar na máquina. Fazem as contas de maneira diferente e por isso o resultado também é diferente.

O professor propôs a análise a resolução da expressão numérica sem a ajuda da calculadora. Qual a primeira operação a efectuar?

A2- Multiplicação e divisão.

A1- Multiplicação, porque aparece em primeiro lugar. Depois a divisão. A última operação é a soma.

O professor corrigiu dizendo que era a adição.

A1- Dá mesmo 43. A outra máquina deu resultado errado.

A2- Para que temos estas máquinas?

O professor referiu que servem, por exemplo, para cálculos mais simples. Utilizam as operações consoante são digitadas e não obedecem à prioridade.

O tempo utilizado para este jogo prolongou-se para além do estipulado, devido a dificuldades manifestadas pelos alunos e também devido a factores não previstos que condicionaram o jogo, caso da maior exploração da máquina calculadora.

Os alunos mostraram grande dinamismo com a prática deste jogo. Acharam mais fácil que o *Jogo do 24*, pois tal como dizia o aluno A3 *"neste jogo (SuperTmatik) as contas já estão indicadas, enquanto no «Jogo do 24», não sabemos que contas havemos de fazer"*. Contudo os alunos A1 e A2, talvez funcionando como contraponto a A3 relativamente ao *Jogo do 24*, revelaram que não apreciaram o jogo.

Também a utilização de diferentes calculadoras, funcionando como questão lateral, permitiu ao alunos descobrirem particularidades interessantes do seu funcionamento e utilização, como por exemplo a existência de prioridade de umas operações matemáticas relativamente a outras.

Jogo do 31

As regras foram explicadas até que, aparentemente, todos os alunos as tivessem percebido.

Inicialmente jogou o aluno A3 com o A2, seguidamente o aluno A2 com o aluno A1 e por último o aluno A1 com o A3.

Os alunos tiveram muitas dificuldades em estabelecer um padrão que permitisse alcançar a vitória, já que na fase inicial iam dizendo os números de forma aleatória, embora cumprindo com excepção de A2, as regras estipuladas. A estratégia encontrada foi resolver a situação problemática partindo da frente para trás, ou seja, do fim para o princípio.

Depois de as regras terem sido novamente explicadas aos alunos, o professor jogou com o aluno A3. O aluno jogou em segundo lugar e perdeu. Os alunos A1 e A2 observavam sem questionar. Seguidamente o professor defrontou o aluno A1, tendo também o professor iniciado a partida. Nesta segunda partida, o aluno A1 percebeu que o professor ao dizer o número 30 automaticamente ganhava.

A1- O professor diz 30 e eu não tenho hipótese e perco. Só posso ficar com o 31.

O professor sugeriu a este aluno que arranjasse uma estratégia de forma a obter o número 30.

A1- Pois… Já percebi!

Depois de algumas tentativas, o aluno A1 disse que ganha quem disser 27, corrigido por A3, que referiu que quem disser 26 é que ganha, uma vez que o outro jogador tem que escolher 27, 28, ou 29. O aluno A1 referiu que, começando a pensar do fim para o princípio, seria a melhor forma de resolver o problema.

A conclusão a que chegaram os alunos, com o auxílio do professor, é que quem dissesse 22, 18, 14, 10, 6, 2 ganhava.

Seguidamente o professor questionou os alunos sobre quem teria vantagem em jogar primeiro. O aluno A3 disse que o primeiro jogador pode dizer 1, 2 ou 3. Então ganha o primeiro jogador, uma vez que o número 2 é uma das hipóteses a escolher.

Seguidamente o aluno A3 jogou com o aluno A2, tendo o primeiro iniciado a partida e ganho o jogo, utilizando as regras aprendidas.

A2- Agora começo eu.

O professor anuiu, mas informou que os alunos já conheciam a regra e que o mais importante tinha sido descobrir a estratégia que conduziu à vitória.

Seguidamente A2 jogou com A1 e finalmente A1 com A3, de forma que cada aluno jogasse alternadamente em primeiro e segundo lugar.

Na tabela seguinte estão indicados os resultados obtidos.

Alunos	Resultado
A3-A2	1-0
A2-A1	1-0
A1-A3	1-0

Conforme se verifica pelos resultados indicados na tabela, (a cada vitória era atribuído um ponto e zero pontos por cada derrota), o jogador que iniciou o jogo foi o vencedor, prova que percebeu perfeitamente a estratégia a utilizar.

Se em vez de "saltar" no máximo três números, fosse um número diferente, tudo teria que ser novamente debatido e explicado, pois dificilmente os alunos conseguiriam assimilar e adaptar-se à nova situação.

Segundo Carlos Alberto Lopes, *"A regularidade está na base de muito conhecimento científico. As teorias de Pascal e Fibonacci obedecem a padrões de regularidade (Reeves, 1987). ...A generalização deve ser conferida com base na informação e se possível fazer uma predição ou extensão dessa informação para confirmar a generalização. Um padrão é uma repetição regular e sistemática, que pode ser numérica, visual (formas, tamanhos, perspectivas) ou comportamental. Identificado o padrão, consegue-se prever os passos ou as etapas consequentes…. A procura de padrões, segundo Reeves (1987), deve ser incentivada nos graus de escolaridade primários, pois ajuda a desenvolver a observação e a intuição dos estudantes".*[4]

Os alunos acharam este jogo interessante. Queriam jogar mais. Contudo, o objectivo principal já estava concretizado, que era os alunos raciocinarem e encontrarem uma estratégia vencedora. Conseguiram encontrar padrões e regularidades. Isso foi conseguido pelos três alunos, embora ajudados pelo professor. Houve interacção entre

[4] [41] pág. 62

eles e espírito colaborativo. Em conjunto conseguiram encontrar soluções, que dificilmente sozinhos o conseguiriam.

Nim

As regras do jogo do Nim são as seguintes:

Participam dois jogadores que jogam alternadamente;

Joga-se com pilhas de feijões ou outros objectos;

Em cada posição, as jogadas permitidas aos jogadores são as mesmas;

Ganha o último a jogar, ou seja, o último a não dispor de um lance legal perde;

O primeiro jogador pode retirar objectos de uma coluna, no mínimo de 1 e no máximo de toda a coluna.

"Se o jogo envolver somente uma pilha de feijões, a caracterização é muito simples. Se a pilha não for vazia, o próximo jogador ganha, retirando todos os feijões. Se a coluna for vazia, o jogador anterior ganhou."[5]

Com uma coluna de objectos o jogo é o seguinte:[6]

Número de objectos	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	…
Tipo de posição	*P*	*N*	*N*	*N*	*N*	…

As posições *P* ou *P-posições* são posições que garantem a vitória no jogo de quem as deixa ao adversário. As posições *N* ou *N-posições* são as posições que dão a vitória ao jogador que efectua a jogada seguinte. *"As iniciais P e N são tradicionais na literatura especializada, e têm origem nas palavras inglesas «previous» (prévio) e «next» (seguinte)."*[7]

"Com duas pilhas, o jogo também não é difícil. Se as pilhas forem diferentes, o jogador seguinte iguala-as e, a partir daqui, copia a jogada do adversário. Por exemplo, se duas pilhas, com 4 e 6 feijões, forem representadas pelo par (4,6), então a boa jogada é para (4,4). A partir de então, o que um jogador fizer numa pilha, o

[5] [45] pág. 159

[6] [45] págs. 159-160

[7] [45] pág. 151

adversário faz na outra. Este tipo de estratégia, que replica as jogadas do adversário, é conhecida por «Tweedledum» e «Tweedledee».

A caracterização das posições do Nim com duas pilhas:

(n, m) é {P se n = m; N se $n \neq m$

No caso de três pilhas, a análise não é tão simples. Necessitamos de novos conceitos para determinar a estratégia óptima. A Soma-nim de dois números inteiros não negativos x, y obtém-se representando-os na base 2 e somando os respectivos coeficientes módulo 2 (isto é, 0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0) e representa-se por $x \oplus y$.

Determinemos por exemplo, $5 \oplus 7$. *Tem-se* $5 = 2^2 + 1$, $7 = 2^2 + 2 + 1$, *o que pode ser condensado para* (linguagem binária):

$5 = (101)_2 \quad 7 = (111)_2$.

Efectuando a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes, obtemos:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Portanto, como $(010)_2 = 2$, *tem-se que* $5 \oplus 7 = 2$.

A soma-nim goza de todas as boas seguintes propriedades:

Associativa: Tem-se $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

Comutativa: Tem-se $x \oplus y = y \oplus x$;

0 (zero) é neutro: $0 \oplus x = x$

Cada número é o seu próprio inverso: $x \oplus x = 0$

Transitividade: Se $x \oplus y = z \oplus y$, *então x = z.*

A importância desta soma-nim reside no facto de Bouton ter caracterizado as posições do jogo Nim geral em termos da soma-nim dos números de feijões nas diversas pilhas. Se representarmos a posição com n pilhas, com número de feijões $x_1, \ldots, x_n$ *por* $(x_1, \ldots, x_n)$, *temos o teorema de Bouton: A posição* $(x_1, \ldots, x_n$ *é uma posição P se, e só se,* $x_1, \oplus \ldots, \oplus x_n = 0$*”.* Este teorema inclui quaisquer números de pilhas.

Consideremos o jogo Nim com quatro pilhas (3, 5, 7, 9).

Determinemos $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9$. Como $3 = (11)_2$, $5 = (101)_2$, $7 = (111)_2$, $9 = (1001)_2$, temos portanto

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9 = 8$. Trata-se de uma posição N. A única jogada vencedora é a que retira 8 objectos à coluna com 9, porque $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 1 = 0$, como se pode verificar:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

”[8]

“O que Bouton mostrou foi que:
1- A posição final (ausência de feijões) tem soma-nim nula;
2- De uma posição com soma-nim diferente de zero é possível jogar para uma com soma-nim igual a zero;
3- De uma posição com soma-nim nula, todas as jogadas possíveis conduzem a posições com soma-nim diferente de zero.”[9]

Desta forma, a estratégia vencedora consiste em obrigar o adversário a jogar a partir de posições com *soma-nim* nula.

Existem muitos jogos que se baseiam nesta teoria; daí se poderem resumir a versões do jogo *Nim*. Desta forma, este jogo contribui para a formação do pensamento

[8] [45] págs. 159-160

[9] [76] pág. 23

matemático, em que os alunos adquirem processos de mecanização que permitem a generalização. Estes processos são válidos para outros jogos matemáticos, assim como para outras situações de vivência quotidiana.

Em matemática quando se descobre a solução de um determinado problema, acontece que muitos outros problemas se conseguem resolver. "*Por exemplo, quando foi demonstrado, em 1976, o famoso teorema das quatro cores*, (que diz que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa, de forma que países contíguos não sejam representados pela mesma cor), *demonstraram-se simultaneamente dezenas de outras conjecturas importantes, noutros ramos da matemática, que se sabia serem isomórficas do teorema das quatro cores."*[10]

O jogo do *Nim* é muito complexo para a situação em que foi, inicialmente, aplicada em contexto de sala de aula. Por isso, utilizou-se uma versão bastante mais simplificada, no sentido dos alunos aprenderem e perceberem alguns conceitos importantes. Estes alunos não têm, por exemplo, qualquer conhecimento sobre o sistema de numeração binário. Se se aumentasse a complexidade do jogo, quer em termos de quantidade de objectos (feijões), quer em termos do número de filas (mais que uma fila), a aprendizagem não ia ser mais significativa, em virtude dos alunos não conseguirem raciocinar e deste modo, não chegarem a qualquer solução ou conclusão. O que se verificaria, é que os alunos jogariam apenas o jogo pelo jogo, isto é, de forma aleatória e a produtividade matemática iria ser nula. Não foi uma perda de tempo. Foi uma tentativa de demonstrar que os alunos não conseguiam atingir outros patamares e desta forma simplificou-se a situação. A investigação e pesquisa não servem só para verificar que os alunos respondem sempre correctamente, mas também para aquilatarmos as suas falhas, erros, insuficiências e lacunas de modo a partir para outras situações mais simplificadas ou de ruptura. Para alunos que frequentam anos de escolaridade mais elevados, a versão mais generalizada pode ser perfeitamente utilizada.

Mesmo com uma fila de dez feijões, os alunos numa fase inicial, aparentemente, tiveram dificuldades em conseguir raciocinar de uma forma estruturada, que lhes permitisse ganhar, ou arranjar uma boa estratégia. Talvez o aluno A3 tenha compreendido melhor a estratégia e ganhou os dois jogos. Os alunos jogavam de forma muito rápida e dessa forma não raciocinavam sobre o jogo.

[10] [24] pág.198

Primeiro jogaram os alunos A2 e A3, seguidamente A1 e A3 e por último A1 e A2. Como um aluno não participava directamente no jogo, a sua missão era colocar os feijões sobre a mesa com distância estimada de 2 cm. O aluno A2 foi incumbido de realizar esta primeira tarefa e realmente estimou relativamente bem as distâncias. Nas partidas seguintes, os alunos A1 e A3 tiveram a tarefa facilitada neste campo.

Depois passou-se à segunda ronda, mas os alunos foram informados para se concentrarem mais de forma a poderem raciocinar melhor. Aí os alunos detiveram-se mais tempo em cada jogada, pensando alto, e procurando cooperar ao invés de pura e simplesmente competirem. Procuravam, em conjunto, qual a melhor estratégia conducente à vitória.

A sequência de jogos foi a mesma da anterior, ou seja, a primeira partida ocorreu entre A2 e A3.

Seguidamente cada aluno recebeu 10 feijões e procurava raciocinar qual a melhor estratégia para ganhar, sendo o primeiro a jogar. O aluno A2 disse: "*Eu acho que o primeiro a jogar não pode tirar 3 feijões senão perde; porque se tirar 3 feijões e o outro também tirar 3, ficam 4 feijões, logo o primeiro perde o jogo*". Depois dos três alunos se terem debruçado sobre o problema, o aluno A2 referiu que se o primeiro aluno tirar 2 feijões, ganha, em virtude de sobrarem 8 feijões. Depois de este aluno perder o seu raciocínio, foi ajudado por A3, dizendo este, que o primeiro tinha que deixar 4 feijões para o segundo jogador. Este último aluno referiu, ainda, que o primeiro jogador tinha que deixar sempre 4 feijões para o segundo. Então A2 disse que se o segundo retirar 1 feijão o segundo retira 3 e se o segundo retirar 3 feijões o primeiro retira 1.

Os alunos, com a ajuda do professor, também conseguiram chegar à conclusão que se o primeiro jogador tirar 1 feijão na jogada inicial perde. A partir daqui tentaram generalizar e encontrar um padrão que permitisse ao primeiro jogador ganhar. Assim, os alunos conseguiram arranjar uma regra que lhes permitiu ganhar neste jogo (ou perder, se o outro também soube usar essa regra).

A conclusão retirada foi que o primeiro jogador perderia, se o número inicial de feijões fosse um múltiplo de 4, ou seja, 4, 8, 12, 16, …

A3- Então é como no *Jogo do 31*. Quem souber a regra ganha.

Então o professor proferiu: *"Boa comparação. Muito bem. Sabendo a estratégia de um jogo, pode ser aplicada a outros jogos parecidos."*

Posteriormente decorreram as restantes partidas previstas, embora os alunos já soubessem mecanicamente a estratégia a utilizar, e deste modo jogaram muito rapidamente.

Seguidamente utilizou-se uma pequena variante, exceptuando o objectivo final do jogo, em que quem retirasse o último feijão perderia o jogo. Os alunos compreenderam a estratégia utilizada na variante anterior e tiveram mais facilidade em jogar.

Embora na fase inicial o jogo tenha gerado muitas dificuldades e até alguma desmotivação, com o decorrer do tempo, os alunos começaram a demonstrar muito entusiasmo. Manuseando os materiais (neste caso os feijões), acaba por ser muito mais fácil efectuar os cálculos, do que numa situação em que não seja possível manusear objectos. Este jogo foi muito importante, já que obrigou os alunos a um bom esforço de concentração para utilizarem a capacidade de raciocínio lógico. O cálculo mental também é testado, e é importante sobretudo devido ao facto dos alunos manifestarem dificuldades nesta área. A descoberta de um padrão e analogias com outros jogos foi muito importante, assim como reconhecer regularidades e compreender relações.

Este jogo, embora possa ser explorado para alunos de nível de escolaridade mais elevado, já que pode emanar de uma complexidade matemática relativamente elevada, foi interessante para estes alunos. Neste caso não é importante uma aprendizagem que contemple muitas deduções, uma vez que estratégias, como por exemplo tentativa e erro, podem conduzir a aprendizagens significativas.

Ainda há a acrescentar o bom espírito de cooperação e entreajuda entre os três alunos e total ausência de conflitos.

Condicionado

As regras originais pressupunham que existiam duas equipas de quatro ou menos jogadores e que uma das equipas pensava num número e a outra ia tentar descobri-lo. Para isso eram dados um conjunto de condições com determinados requisitos tais como:

- Nenhuma condição pode ser supérflua, isto é, condição não necessária para a resolução do problema;
- A solução do problema tem que ser única;

- Não podem existir condições contraditórias.[11]

Os alunos colaboraram na adaptação destas regras para o jogo a utilizar na aula de 90 minutos.

Uma vez que os alunos manifestavam dificuldades em implementar as situações problemáticas a resolver, a recolha de dados foi obtida a partir do livro *"Juegos y Pasatiempos para la ensenanza de la matematica elemental"*, págs. 112 e 113, e cujas questões foram para aqui transportadas.

O sistema de pontuação foi única e exclusivamente planificado pelos alunos, depois de algum debate. O que à partida parece ser uma questão de pouca importância, revelou-se um parâmetro muito positivo, uma vez que aquela questão carece de uma análise cuidada, para haver alguma lógica e estruturação. Além disso permite aos alunos uma participação activa, reforçando a comunicação e incrementando o espírito cooperativo, pilares importantes na realização de jogos.

Seguidamente está apresentada a ficha de trabalho que serviu como suporte ao jogo.

Agrupamento Vertical de Escolas de S. Mamede de Infesta

Ano lectivo de 2008 / 2009

Jogo Condicionado

1)

Está compreendido entre 600 e 700.

Tem dois algarismos iguais.

O algarismo das centenas é igual à soma do algarismo das unidades com o das dezenas.

2)

Tem dois algarismos.

O algarismo das dezenas é o dobro do algarismo das unidades.

O algarismo das dezenas é igual ao das unidades mais um.

3)

[11] [88] pág. 111

a) Tem três algarismos.
b) Cada algarismo é o triplo do algarismo da ordem imediatamente superior.

4)
a) É um número par com três algarismos.
b) Cada um dos seus algarismos é o dobro do algarismo da ordem imediatamente inferior.

5)
a) É um número capicua com três algarismos.
b) É ímpar.
c) O algarismo das dezenas é maior do que três.
d) O algarismo das dezenas é a soma dos outros dois.

6)
a) É um número de quatro algarismos menor que 5000.
b) É par.
c) O algarismo das unidades de milhar é o dobro do das dezenas.
d) A soma dos seus algarismos é 11.
e) O algarismo das centenas é igual ao das unidades de milhar mais um.

Bom trabalho.
O prof. Abílio Quintas

O tempo estipulado para resolver cada questão foi de quatro minutos.

O primeiro jogador a solucionar o problema arrecada dez pontos.

As soluções apresentadas que não sejam consideradas válidas têm as seguintes penalizações:

Alíneas incorrectas	Penalização *(P)*
3	3 Pontos
2	2 Pontos
1	1 Ponto

Foi elaborado o quadro seguinte com as respostas e respectivas pontuações.

Alunos	**Questões**						**TOTAL**
	Questão1	Questão2	Questão3	Questão4	Questão5	Questão6	
A1	661 *P= -1* 665 *P= -1*	30 *P-2* 42 *P -1* **21** *(+10)*	144 *P= -1* 189 *P= -1* 135 *P= -1* **139** *(+10)*	262 *P= -1* 420 *P= -1* 422 *P= -1* 826 *P= -1*	979 *P= -1* 393 *P= -1*		*6* *Pontos*
A2	601 *P= -2*	40 *P -2* 41 *P -2* 12 *P -2*	147 *P= -1*	206 *P= -1*	949 *P= -1* 898 *P= -2* **363** *(+10)*		*- 3* *Pontos*
A3	650 *P= -2* 662 *P= -1* **633** *(+10)*	24 *P -2* 23 *P -2*	136 *P= -1*	222 *P= -1* 880 *P= -1* **842** *(+10)*	939 *P= -2*		*8* *Pontos*

Nota 1: A letra *P* significa penalização com os pontos correspondentes ao número de alíneas incorrectas para cada questão.
Nota 2: Os números indicados a negrito e sublinhado correspondem à resposta correcta.

Este jogo permitiu aos alunos melhorarem o seu desempenho em relação à representação, ordenação e comparação de números inteiros positivos, bem como em relação às propriedades das operações básicas e ainda os conceitos de múltiplo e divisor. Embora não estivesse previsto, aquando da programação do jogo, nem faz parte da *Planificação Anual*, inseriu-se o trabalho com números negativos.

Neste jogo, os alunos demonstraram uma forte componente competitiva e emocional, embora sadia, isto é, não criaram situações conflituosas. Contudo essa componente emocional tolheu um pouco a sua razão, uma vez que os alunos se precipitavam na tentativa de dar uma resposta correcta de uma forma muito rápida. Ora como diz o ditado *"Depressa e bem há pouco quem"*. De qualquer forma, a componente emocional também é importante na matemática e não apenas a componente racional.

Os alunos utilizaram papel e lápis para efectuarem os cálculos necessários para chegarem a conclusões. De cada vez que indicavam um número, este era registado no quadro pelo professor.

Em relação à sexta, e última questão, mais difícil, em virtude de exigir um raciocínio mais elaborado, os alunos não descobriram a solução (4520), embora tenham referido valores, uns com maior e outros com menor lógica.

Através dos exercícios 2 e 3 deu para verificar que os alunos, especialmente A2 e A3, não tinham um conhecimento completamente assimilado dos conceitos de dobro e triplo. Também confundiam os conceitos de classe e ordem, sobretudo A3, isto para além da própria interpretação das questões, onde os três alunos revelaram muitas dificuldades de compreensão.

Em termos globais este jogo foi muito profícuo para os alunos, uma vez que puderam melhorar os seus conhecimentos, como por exemplo na leitura e representação de números inteiros, classes e ordens, propriedades das operações básicas e desenvolver as destrezas em relação ao cálculo.

Detective dos números

Foram distribuídas dez fitas de papel a cada aluno, correspondentes a dez rectas numéricas, e onde em cada fita existiam de duas a quatro marcas, a cada uma das quais correspondia um número inteiro ou decimal. O número total de marcas é de vinte e seis. Se o aluno colocasse o número correcto, correspondente à respectiva marca, era-lhe atribuído um ponto. Se pelo contrário, o número fosse incorrecto, ou não fosse colocado qualquer número na marca, seriam atribuídos zero pontos.

Numa fase inicial, os alunos demonstraram uma reacção negativa em relação ao jogo, uma vez que revelavam dificuldades na resolução das situações problemáticas colocadas. Para contrariar algumas das dificuldades, foi facultada uma pista que consistia em os alunos pudessem dobrar as tiras de papel pelas marcas, com o objectivo de descobrir o número correspondente à respectiva marca.

Para a primeira recta numérica, constituída por um segmento compreendido entre *0* e *1*, era necessário determinar o valor de três marcas (*0,25; 0,5 e 0,75*). Os alunos tinham muitas dificuldades em estimar os números e a partir daí foi-lhes fornecida a pista supracitada, sem que antes os alunos tentassem descortinar as soluções.

O professor começou por questionar a que número correspondia a marca da esquerda

A3- É 0,5.

A1- Deve ser 0,1.

O professor interrompeu dizendo que estava errado, mas frisando também que esses alunos tinham proferido afirmações em parte acertadas, uma vez que mencionaram números menores do que 1.

A2- Posso utilizar a calculadora?

O professor deu o seu consentimento, mas alertou que a calculadora de nada serviria, se o aluno não pensasse antes que cálculo poderia efectuar.

Posto isto, o professor deu a pista no sentido dos alunos poderem descobrir mais facilmente descobrir a solução. *"Mas mesmo assim têm que pensar. São detectives de números"*.

A partir deste passo, os alunos trabalharam individualmente durante o tempo restante da aula.

De seguida estão indicadas as folhas de registos dos alunos A1, A2 e A3 pela ordem indicada.

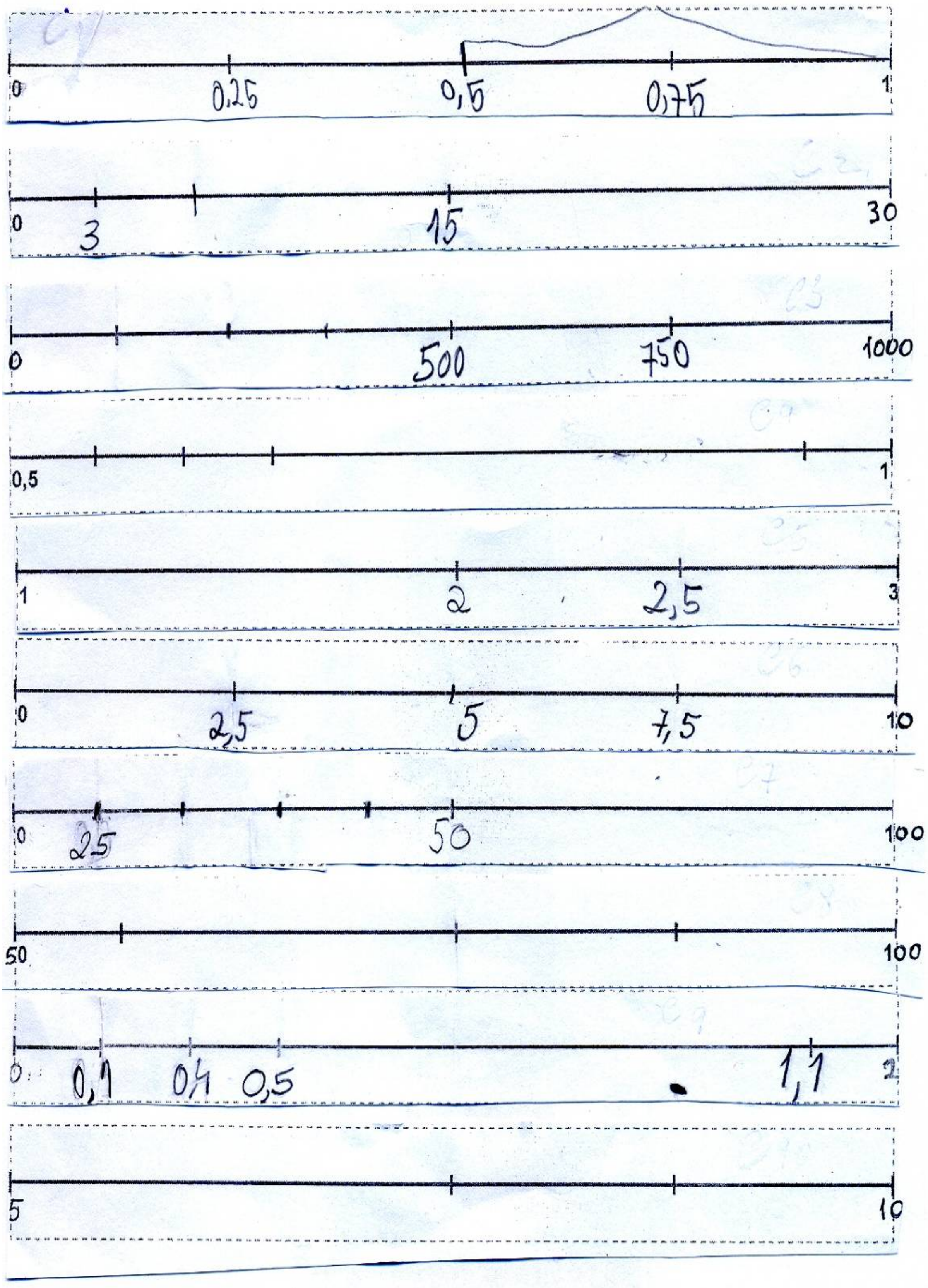


Fig. 2 – Folha de registos de A1 (Jogo *Detective dos números*)

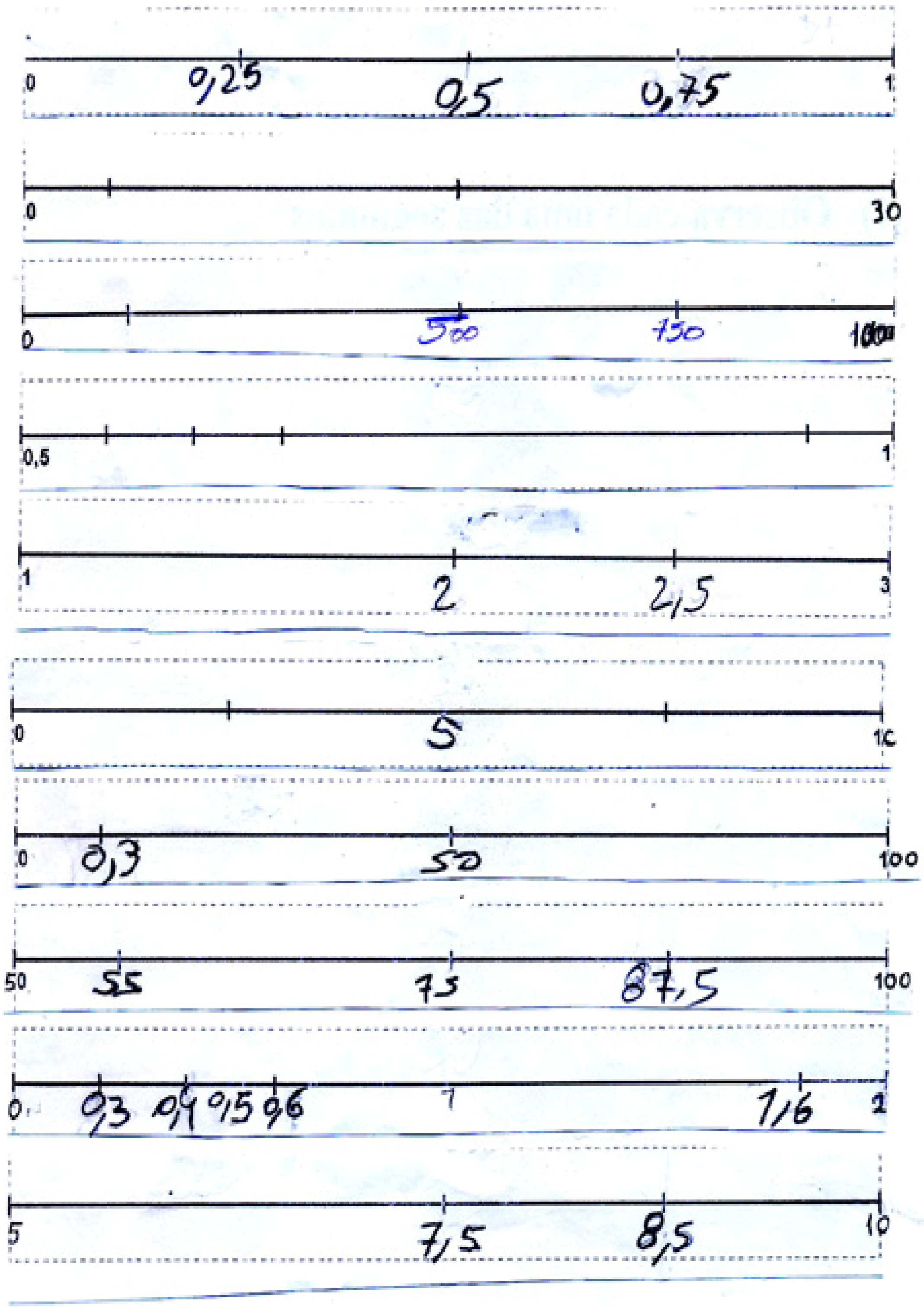


Fig. 3 – Folha de registos de A2 (Jogo *Detective dos números*)

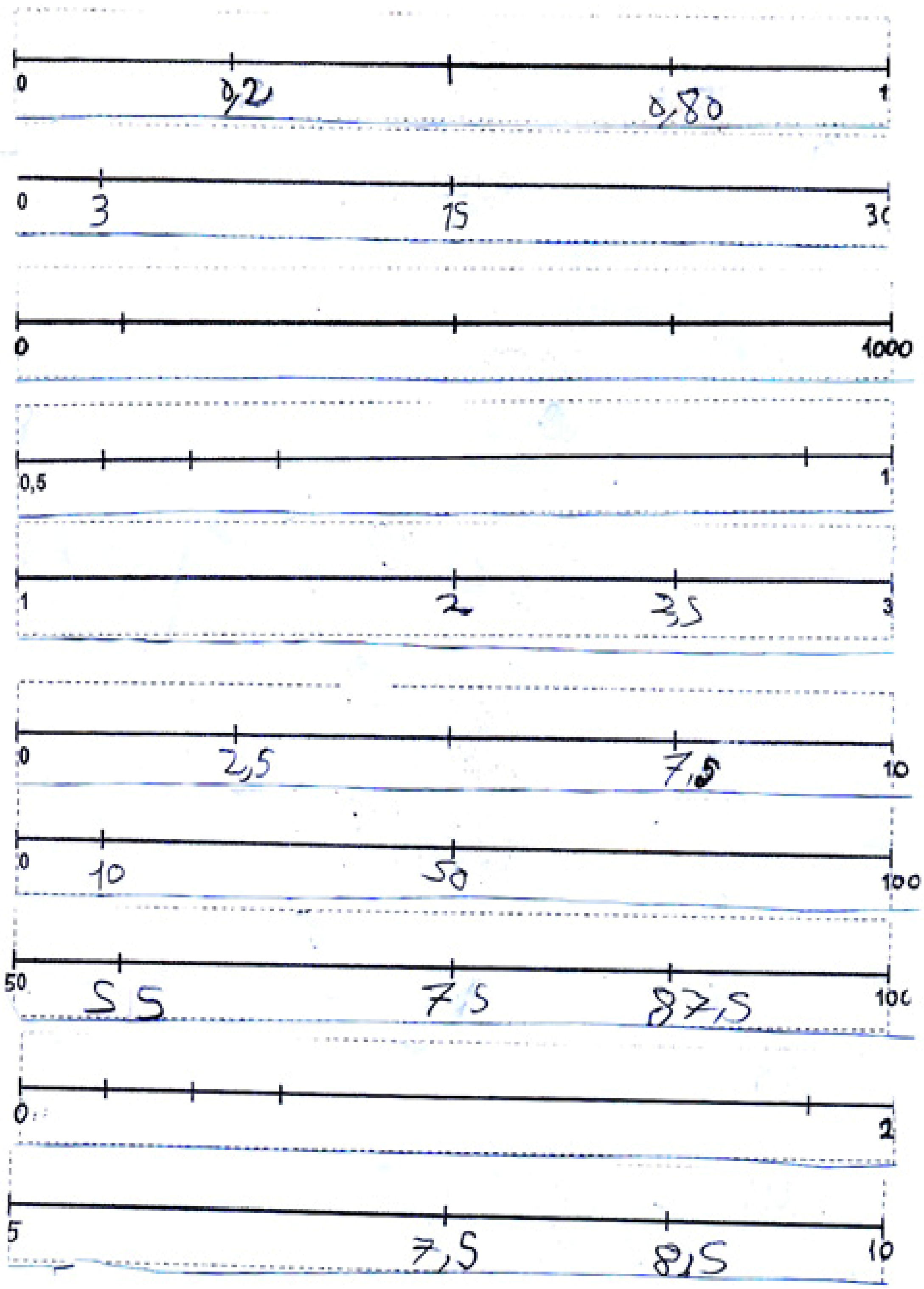


Fig. 4– Folha de registos de A3 (Jogo *Detective dos números*)

Os alunos manifestaram muitas dificuldades em determinar os valores correspondentes às marcas, sobretudo quando estas eram representadas por números decimais. Em várias marcas não foram representados os respectivos números, porque os alunos não os conseguiam representar, mas também por falta de tempo disponível. No quarto segmento de recta, nenhum dos alunos indicou qualquer número referente às respectivas marcas, devido ao maior grau de dificuldade em encontrar os respectivos valores.

De qualquer modo, este jogo serviu para os alunos assimilarem melhor a noção de número decimal e também compreenderem e representarem números inteiros e decimais num segmento de recta, o que em parte foi conseguido. Acresce dizer, que alguns números colocados nas marcas não estão correctos.

Os três alunos acharam que aprenderam matemática com o jogo, mas, talvez devido às enormes dificuldades encontradas na descoberta dos números, não acharam o jogo particularmente interessante.

Na tabela seguinte estão representadas as pontuações, parciais e totais, obtidas por cada aluno neste jogo.

Alunos	Segmentos de recta										Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A1	2	2	2	0	2	2	1	0	1	0	12 Pontos
A2	2	0	2	0	2	0	1	2	2	1	12 Pontos
A3	0	2	0	0	2	2	2	2	0	1	11 Pontos

Jogo da Estrela

O jogo da *Estrela* inicia-se colocando uma marca (peão de *Xadrez*) no local de *Partida*. Seguidamente, cada aluno introduz na máquina calculadora o número *100* (número de partida). O primeiro jogador escolhe um segmento de recta com um dos extremos na *Partida*, deslocando a marca para outro extremo do segmento de recta, efectuando na máquina calculadora a operação indicada. O segundo jogador procede de igual modo, partindo da nova posição da marca. O jogo desenrola-se assim sucessivamente. O percurso escolhido por qualquer um dos jogadores pode ser feito em qualquer direcção e sentido, podendo o mesmo segmento de recta ser usado mais do que uma vez, mas não em jogadas consecutivas.

O jogo acaba quando um dos jogadores alcança a posição de *Chegada*. Se os jogadores fizerem doze movimentos cada, termina o jogo, ainda que não tenham atingido o ponto de *Chegada*.

O vencedor do jogo é o jogador que obtiver na sua máquina calculadora o número maior, depois de efectuadas todas as operações indicadas nos segmentos de recta, desde a *Partida* até o jogo estar finalizado.

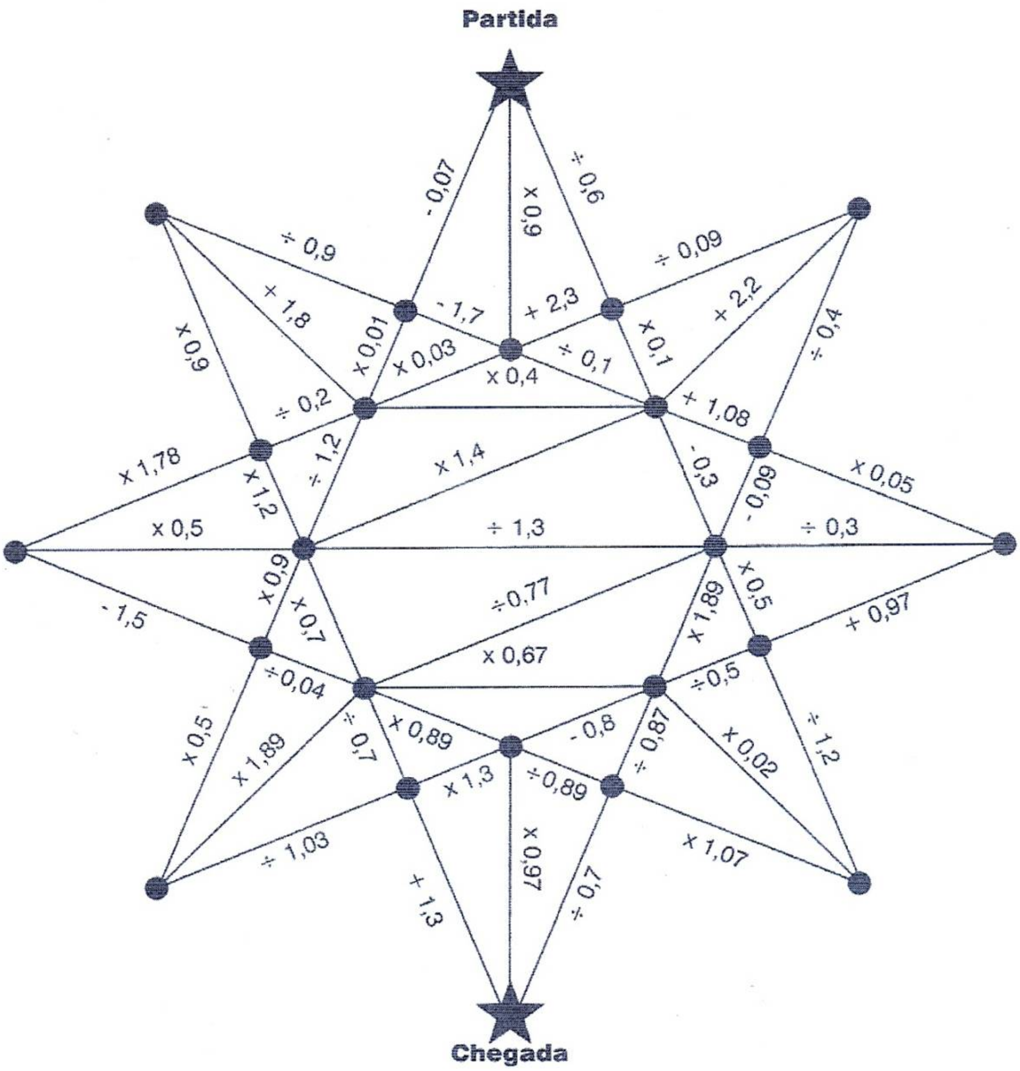


Fig. 5 – Tabuleiro do *Jogo da Estrela*

Antes foi proposta uma variante que consistiu no seguinte regulamento: Os três alunos jogaram individualmente (primeiro jogou A3, depois A2 e por fim A1). Colocaram na sua máquina calculadora o valor *100* e cada um dos alunos colocou a marca no local de *Partida*, percorrendo os segmentos de recta contíguos, determinando o seu próprio percurso, até atingir o ponto de *Chegada*. O vencedor foi aquele que obteve no final o número menor.

Desde o ponto *Partida* até ao ponto *Chegada*, os alunos tinham de percorrer no máximo uma dúzia de segmentos. Não era permitido efectuar qualquer comentário durante este jogo. As restantes regras seriam idênticas às referidas anteriormente para dois jogadores.

Os alunos utilizaram máquinas calculadoras não científicas, cuja marca é *Citizen ME-500*. Representa até um máximo de oito dígitos no visor. Este é o tipo de calculadoras utilizadas pelos alunos do 2º Ciclo na escola.

Este jogo decorreu num tempo lectivo, ou seja, quarenta e cinco minutos.

O aluno A3 escolheu as seguintes alternativas:

100 → –0,07 → –1,7 → x0,03→ x0,01→ – 1,7

O resultado final foi de – 1,670531.

O aluno A2 percorreu o caminho seguinte:

100→ :0,6→ :0,09→ +2,2→ :0,1→ –1,7→ x0,01→ :1,2→ x0,9→ :0,04→ x0,5→ :1,03→ +1,3

O resultado obtido foi de 1675,8222.

O aluno A1 escolheu o seguinte “itinerário”:

100 → -0,07 → x0,01→ : 1,2 → x0,9 → : 0,04 → : 0,7 → x0,97

O resultado final foi de 22,0675.

Os alunos manifestaram grandes dificuldades na multiplicação e divisão, sobretudo nesta, e quando o divisor é um número menor do que 1. O único aluno que aparentemente demonstrou alguns conhecimentos nesta área, e que os aplicou durante o jogo foi o aluno A2. Desconheciam que o quociente obtido ao dividir um número por um valor menor que a unidade era superior ao dividendo. Também desconheciam que na multiplicação, o produto obtido poderia ser menor que o multiplicando, desde que o multiplicador fosse menor do que a unidade. O aluno A3 com manifestas dificuldades nestas áreas jogou aparentemente de forma aleatória e obteve como resultado final um número inferior a zero.

Apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos, o jogo serviu também para aplicarem e aprofundarem os seus conhecimentos, hipoteticamente, adquiridos durante as aulas. Desta forma, os resultados obtidos pelos alunos A1 e A3 foram decepcionantes para os alunos e consequentemente para o professor.

Foi explicado aos alunos, de uma forma muito geral, os principais erros cometidos.

Na aula seguinte (passados quatro dias), decorreu o jogo entre dois jogadores durante um bloco de noventa minutos.

Primeiro jogou o aluno A1 com A2, tendo A1 iniciado a partida. Ambos ligaram a calculadora e colocaram o valor *100* no visor. Entre as três hipóteses possíveis (dividir por 0,6; multiplicar por 0,9 ou subtrair 0,07), o aluno optou por multiplicar por 0,9.

A1- Multipliquei por 0,9. Dá 90. Diminuiu o valor.

O aluno A2, partindo da marca anterior, dividiu 100 por 0,09.

A2- Que número grande (1111.1111)!

Seguidamente o aluno A1, entre três alternativas (dividir por 0,09; dividir por 0,4 ou adicionar 2,2), escolheu esta última opção.

A1- Somei 2,2. O número aumentou.

O aluno A2 deslocou a sua marca e adicionou 1,08.

A2- Aumentou muito pouco, mas é seguro. Se somar aumenta sempre.

A1- É o que vou fazer a partir de agora.

Os alunos sabiam que em qualquer situação, adicionando um número, o resultado aumentava sempre e utilizando a subtracção o resultado ficava menor. Não tinham segurança na utilização da multiplicação ou divisão, uma vez que o multiplicador ou divisor era sempre um número decimal e ainda algumas vezes menor do que 1.

Seguidamente deparou-se ao aluno A1 como hipóteses subtrair 0,09; multiplicar por 0,05 e dividir por 0,3. O aluno hesitou e escolheu multiplicar por 0,05.

A1- Acho que fiz mal. Dá um número muito pequenino.

O aluno A2, partindo da posição anterior, adicionou 0,97.

A2- Ficou quase na mesma. Não chega a um.

O aluno A1 dividiu por 0,5.

A1- Aumentou o valor.

A1- Aumentou para nove ponto vinte e dois.

O professor questionou o aluno se o número aumentou para o dobro, triplo ou quádruplo.

A1- Acho que é para o dobro. Mas não sei explicar porquê.

O aluno A2 dividiu o valor que tinha na calculadora (1113,1611) por 0,87. As outras possibilidades eram subtrair oito décimas, multiplicar por duas centésimas, multiplicar por 1,89 ou multiplicar por 0,67. Escolheu a segunda melhor opção.

A2- Aumentou para 1279 ponto dezasseis onze.

O professor comentou que a leitura não estava correcta e fez a devida correcção.

Seguidamente o aluno A1 dividiu por 0,89.

A1- Aumentou um pouco.

O professor concordou com a resposta do aluno.

No final do jogo foi feito um balanço e explicação as melhores e piores jogadas e explicar o aparecimento de determinados resultados.

Na tabela está indicado o "percurso" seguido pelos dois alunos.

A1	**A2**
100	100
X0,9	: 0,09
+2,2	+1,08
X0,05	+0,97
: 0,5	: 0,87
: 0,89	X1,3
+1,3	
11,659550	**1662,9094**

Fig. 6 – Registos de A1 e A2 (*Jogo da Estrela*)

O segundo jogo foi disputado entre os alunos A2 e A3. Novamente o aluno A2 saiu vencedor. O último jogo a desenrolar-se teve como participantes os alunos A1 e A3, tendo saído vencedor A1.

Nas tabelas seguintes estão descritos os valores obtidos.

A2	**A3**
100	100
: 0,6	X0,1
: 0,1	+2,3
: 0,09	: 0,4
+1,08	+2,2
: 0,09	+2,3
: 0,1	+1,08
: 0,4	: 0,09
+2,3	X0,03
: 1,2	: 1,3
: 0,3	+0,97
: 0,5	: 0,87
: 0,7	
40828,051	**11,822279**

A3	**A1**
100	100
: 0,6	: 0,09
+2,2	X1,4
X0,5	X1,78
X0,9	: 0,9
X0,01	+1,8
X0,9	X1,78
X0,5	: 1,2
: 0,2	X0,9
+1,8	: 0,2
X1,78	X0,5
X1,4	+1,08
: 0,4	+2,2
21,865898	**10277,250**

Figs. 7 e 8 – Folha de registos de A2/A3 e A3/A1 (*Jogo da Estrela*)

Neste último jogo não foi atingido o ponto *Chegada*, uma vez que ambos os alunos já tinham executado doze movimentos. Deste modo, nessa altura, o número indicado no visor da máquina calculadora seria o resultado final.

Neste jogo, comparativamente ao que os alunos actuaram individualmente, notou-se uma melhoria nas opções tomadas pelos alunos. O aluno A2, já demonstrou ser conhecedor de algumas noções sobre a multiplicação e divisão de números decimais. Este aluno também demonstrou alguma capacidade de fazer estimativas. Além disso, o aluno A2, conseguia arranjar estratégias no sentido de obter uma melhor *performance*, seguindo trajectos que levavam os seus adversários a reduzirem os valores numéricos. Os alunos A1 e A3, além de manifestarem pré-requisitos mais rudimentares nesta área, não compreenderam algumas das explicações dadas pelo professor no final da aula anterior, após a realização do jogo individual. Os alunos A1 e A3 acreditavam que a multiplicação, além da adição, obviamente, fazia sempre aumentar o resultado, enquanto a divisão (além da subtracção) o fazia diminuir.

A capacidade de fazer estimativas de resultados, envolvendo sobretudo a multiplicação e a divisão, é muito diminuta nestes alunos.

A utilização deste jogo revelou-se extremamente positiva, no sentido de serem suprimidas algumas lacunas na aprendizagem e aplicação das operações básicas. Para isso é necessário insistir nesta área. Noções como o dobro, e triplo por exemplo, estes (e outros) alunos não possuem de forma perfeitamente estruturada. A capacidade de estimar resultados também deve ser prioritária.

Através deste jogo também se aproveitou para aprofundar um pouco nos alunos as noções de ponto, recta, semi-recta e segmento de recta.

Na aula seguinte, o professor e os alunos debruçaram-se um pouco mais sobre este jogo, procurando optimizar os trajectos no sentido de obter o maior (ou menor) resultado possível.

Na obra, "*Como abordar… a comunicação escrita na aula de matemática"*[12], e no livro *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*[13], está descrito um jogo similar, em termos de forma, de regras e de objectivos, designado por *Labirinto*.

Os alunos A1 e A2 gostaram muito do jogo. O aluno A3 não o achou tão interessante, classificando-o como cansativo e um pouco confuso. Apesar disso, fez por escrito uma avaliação positiva do jogo.

Atirar ao alvo

Através deste jogo pretende-se que os alunos melhorem o seu cálculo mental e desenvolvam destrezas ao nível da compreensão, quer na leitura e escrita, quer na resolução de expressões numéricas.

Neste jogo os alunos A1, A2 e A3 jogam individualmente. Um aluno regista numa folha de papel um número menor do que 100. O número registado terá a designação de *número alvo*. Outro aluno lança os três dados e seguidamente os três alunos competem uns com os outros, tentando escrever expressões numéricas, utilizando os números obtidos, a partir das faces dos dados viradas para cima. O objectivo é o aluno escrever, numa folha de papel, o máximo possível de expressões numéricas cujo resultado seja o *número alvo*, ou obter um valor aproximado desse número.

[12] [65] págs. 173-179

[13] [66] págs. 49-54

Os alunos têm quatro minutos para escrever e resolver a maior quantidade possível de expressões numéricas, usando evidentemente apenas os três números que saíram no lançamento dos dados. Vamos imaginar que o *número alvo* escolhido é o 22. Por exemplo, se no lançamento dos dados saírem os números 2, 6 e 10, a expressão numérica 2 x 6 + 10 = 22 acerta, enquanto 6: 2 + 10 = 13, fica longe do *número alvo* e através da expressão 2 + 6 + 10 = 18, obtém-se um valor intermédio.

Nas expressões numéricas podem ser utilizadas as operações básicas, repetidas ou não, (adição, subtracção, multiplicação e divisão) e ainda parênteses. A solução encontrada pode ser um número inteiro ou decimal.

Ao fim do tempo regulamentar, os alunos lêem e escrevem no quadro as suas expressões numéricas e a respectiva solução, que previamente escreveram na folha de registos.

Seguidamente será a vez de outro aluno registar um número menor do que 100 numa folha de papel (*número alvo*), sendo outro a lançar os dados, tentando os três alunos escrever o máximo possível de expressões numéricas dentro do tempo limite. Por fim caberá ao terceiro aluno a escrita do *número alvo* e consequentemente outro aluno executa o lançamento dos dados, tendo os três alunos a missão de escrever as expressões numéricas.

O sistema de pontuação é o seguinte:

Resultado da expressão numérica	Pontuação obtida
a - Acerta no *número alvo*	10 pontos
b - Mais próxima do *número alvo*	5 pontos
c - Expressão numérica correcta *	1 ponto

* Considera-se a expressão numérica correcta, quando forem utilizados os três números que saíram nos dados com as duas operações respectivas e o resultado final certo.

<u>Nota1</u>: As pontuações correspondentes aos itens *a*, *b* e *c* são independentes umas das outras, isto é, são cumulativas.

<u>Nota2</u>: Não serão consideradas as diversas combinações relativamente a uma expressão numérica. Por exemplo: 1 + 5 + 8 = 14; 5 + 8 + 1 = 14; 8 + 5 + 1=14. Neste caso apenas uma expressão numérica é considerada.

Foram realizadas quatro partidas. A escolha do primeiro *número alvo* coube ao aluno A1. Este aluno escolheu o 40. O aluno A2 procedeu ao lançamento dos dados, tendo saído os números 3, 6 e 1. A selecção do segundo *número alvo* esteve a cargo de A2 e foi o 30, e os números que saíram nos dados, lançados por A3, foram 5, 8 e 1. O terceiro *número alvo*, escolhido por A3, foi o número 10, tendo A1 lançado os dados cujas faces superiores apresentaram os números, 2, 9 e 10. Na última partida, e por razões indicadas mais adiante, foi o professor que escolheu o *número alvo*, mas só após o lançamento dos dados, também lançados por este, cujas faces indicaram os números 3, 1 e 10.

Os alunos A2 e A3 tinham alguma vantagem sobre o aluno A1, uma vez que os dois primeiros, já conheciam e tinham praticado este jogo anteriormente, numa aula em que o aluno A1 não tinha estado presente.

No cômputo global, há a reter as seguintes situações:

Os alunos A1 e A2 escreveram muito mais expressões numéricas que o aluno A3.

O aluno A1, ao contrário dos restantes, procurava escrever as expressões numéricas e só depois calculava o resultado.

Os resultados obtidos pelos alunos eram sempre números inteiros. Esta curiosidade não tem nada de transcendente, uma vez que, os alunos evitavam utilizar a operação divisão, única forma de eventualmente o resultado ser um número decimal. Em poucas situações a operação divisão foi utilizada. Neste jogo, os alunos nunca conseguiram calcular o valor de uma expressão cujo resultado era um número decimal.

Notou-se uma grande dificuldade nos alunos em cumprir as regras de prioridade das operações, (multiplicação e divisão prioritárias em relação à adição e subtracção). Em algumas expressões numéricas, o resultado final era correcto, mas apenas por coincidência, ou porque os números e operações utilizadas assim o permitiram. Foi o caso da expressão 3 + 6:1, em que o aluno A1 explicou que adicionou 3 com 6 obtendo 9 e posteriormente dividiu por 1, cujo resultado final é 9. Independentemente de dar ou não prioridade à divisão em relação à adição, o valor obtido seria igualmente o 9.

Utilização nula de parênteses nas expressões numéricas. Esta situação iria criar mais dificuldades aos alunos na resolução das expressões.

Utilização do subtractivo maior que o aditivo, o que poderia implicar a obtenção de números negativos. Embora não fizesse parte da planificação foi dada aos alunos a noção dos números inteiros relativos, com consequente implicação da existência de números negativos. De qualquer forma, o resultado final obtido pelos alunos era sempre, às vezes erradamente, um número inteiro positivo.

Na última partida, foram lançados os dados e só depois foi escolhido o *número alvo* (a cargo do professor). Esta situação deveu-se ao facto de nos casos anteriores ser impossível acertar nesse número, uma vez que os números saídos nos dados não o permitiram. Então, para os alunos terem hipóteses de acertarem no *número alvo*, procedeu-se da forma anteriormente indicada e na realidade dois alunos, acertaram.
Na tabela seguinte está indicada a pontuação obtida pelos alunos.

	A1	A2	A3
1ª Partida	5	8	1
2ª Partida	9	9	8
3ª Partida	13	1	2
4ª Partida	13	14	1
Total	40 Pontos	32 Pontos	12 Pontos

O aluno A1, apesar de não ter praticado na aula anterior este jogo, conseguiu melhores resultados que os restantes alunos, em virtude de demonstrar melhor capacidade no cálculo escrito e sobretudo melhor organização, atenção, concentração e estratégia. Este aluno, porventura motivado pela excelente pontuação obtida avaliou muito mais positivamente o jogo do que os restantes colegas, particularmente A2, que referiu não ter apreciado o jogo, achando-o pouco interessante e pouco divertido. O aluno A3 obteve piores resultados relativamente aos restantes colegas. Este aluno demonstra em termos relativos um bom cálculo mental, mas pior a nível escrito.

Seguidamente estão representadas as partidas efectuadas pelos alunos A1, A2 e A3, seguindo precisamente esta ordem.

40 | 3 | 1 | 6 |

número alvo

3+1+6 = 10
6-3-1 = 2
1+6+3 = 10
3-6 : 1 = 3
6:1 - 3 = 3
6 : 3 : 1 = 2
3+6 : 1 = 9
1-6-3 = 8

30 | 1 | 5 | 8 |

número alvo

5+8+1 = 14
1 x 8 +5 = 13
1+ 8-5 = 4
8 x 1 x 5 = 40
5+1+8 = 14
5-8-1 = 4
8x5x1 = 40
1 x 5 : 8 =

10 | 9 | 10 | 2 |

número alvo

9+10+2 = 21
10+9 -2 = 17
9-2-10 = 3
10x2x9 = 180
9-10 x2 = 2
9-10+2 = 1
2-9+10 = 3
2x10-9 = 11
2-10x9 = 72
10-9+2 = 3
2-10+9 = 1

8 | 3 | 10 | 1 |

número alvo

10-3+1 = 8
10-1-3 = 6
3 x 10 x 1 = 30

Fig. 9 – Folha de registos de A1 (Jogo *Atirar ao alvo*)

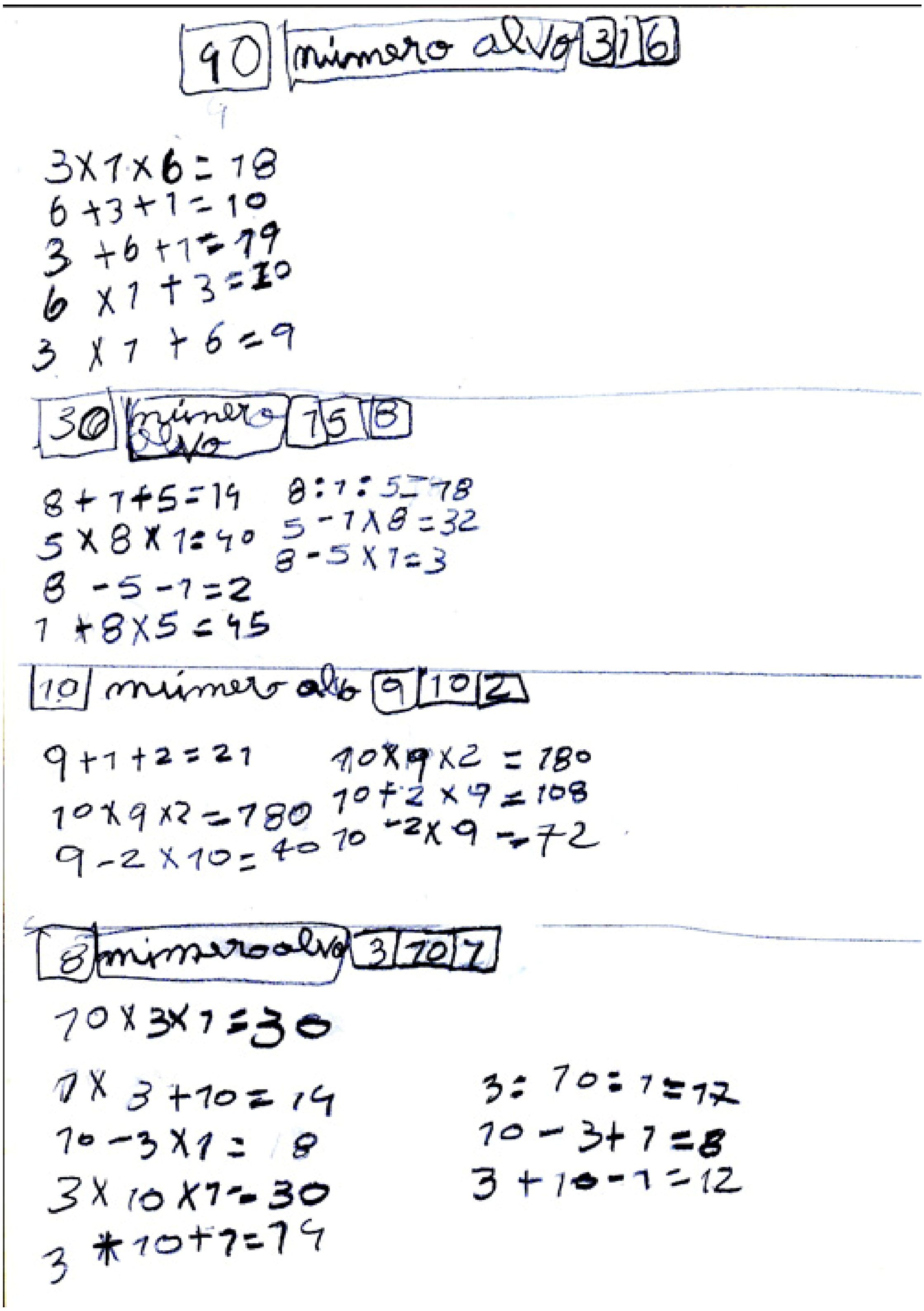


Fig. 10 – Folha de registos de A2 (Jogo *Atirar ao alvo*)

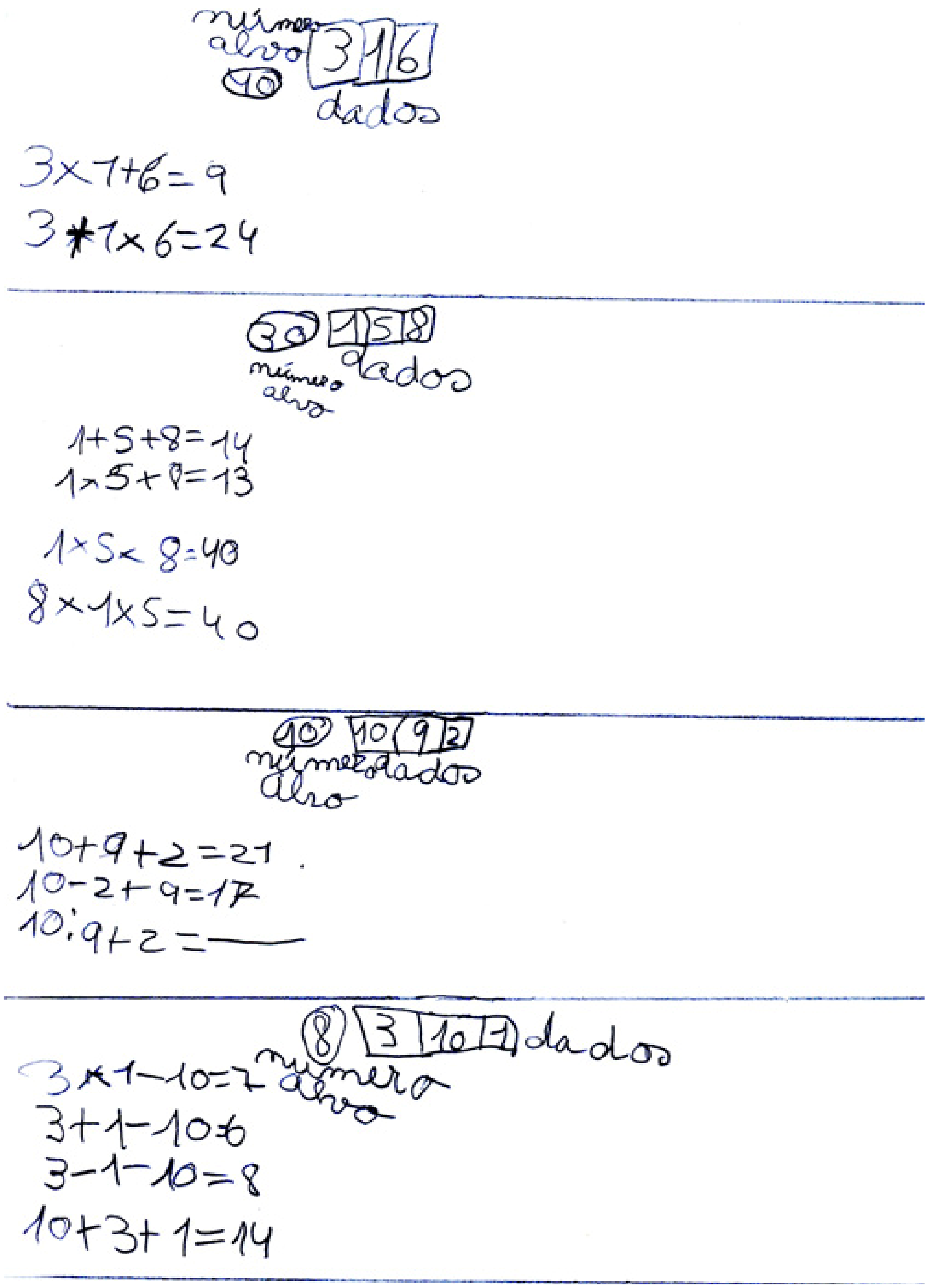


Fig. 11 – Folha de registos de A3 (Jogo *Atirar ao alvo*)

Grão a grão

São dois jogadores que disputam cada partida.

As regras são as seguintes:

1- Alternadamente, cada jogador retira, de um saco, um número decimal entre 0 (zero) e 1 (um), para o outro jogador localizar esse número.

2- O primeiro jogador estima a localização do número pedido, ao longo do segmento de recta, e coloca um grão de arroz como marca da sua estimativa.

3- Para verificar a exactidão da estimativa, o segundo jogador usa a régua graduada.

4- Se a estimativa está compreendida entre os números com mais ou menos uma décima do que o número pedido, o jogador que fez a estimativa ganha um ponto; em caso contrário não lhe é atribuído qualquer ponto.

5- Em seguida, os papéis dos jogadores trocam-se.

O vencedor do jogo é o que tiver mais pontos ao fim de dez jogadas.

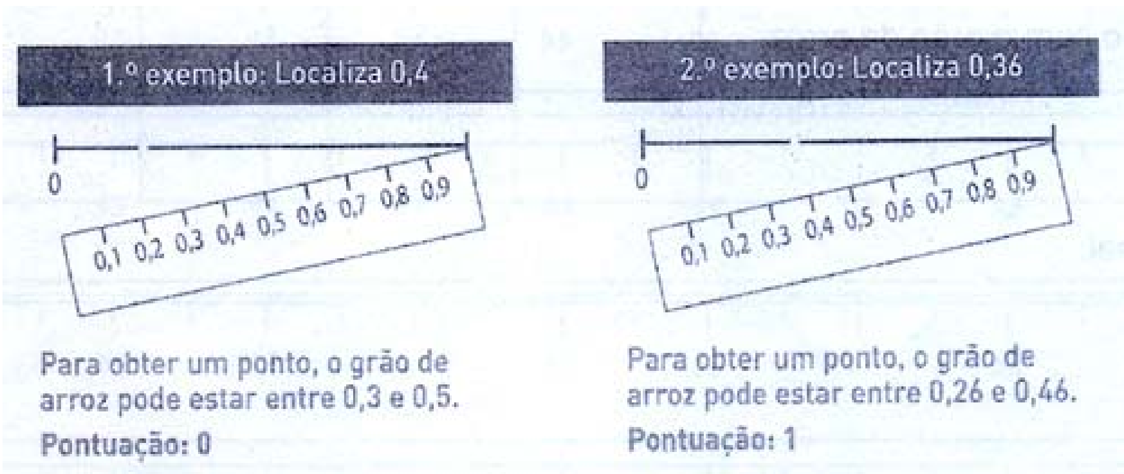


Fig. 12 – Uso da Régua Graduada (Jogo *Grão a Grão*)[14]

[14] Figura retirada de [65] pág. 167

Grão a grão

0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**
0,7	**0,8**	**0,9**			

0,05	**0,15**	**0,25**	**0,35**	**0,45**	**0,55**
0,65	**0,75**	**0,85**	**0,95**		

Fig. 13 – Números decimais entre zero e um (Jogo *Grão a Grão*)

Como a turma é constituída por três alunos, e para estarem em cada partida todos ocupados, o ponto número *3* das regras foi alterado e o aluno que não participa directamente no jogo tem a missão de verificar e decidir se a estimativa é correcta ou incorrecta. Para isso usou-se uma régua graduada, em papel, com cerca de 16 centímetros (com o mesmo comprimento do segmento de recta) e correspondente a uma unidade de medida.

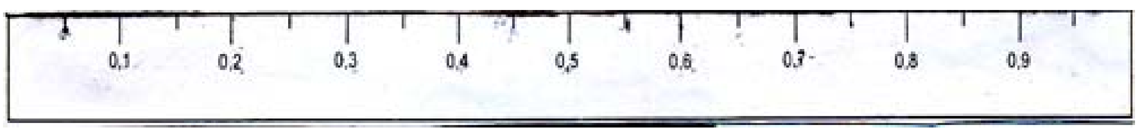


Fig. 14 – Régua Graduada (Jogo *Grão a Grão*)[15]

[15] Figura retirada de [65] pág. 167

Em vez de apurar o vencedor ao fim de 10 jogadas, como era necessário efectuar três partidas (A1 versus A2, A2-A3 e A2-A3), o vencedor seria encontrado ao fim de 5 jogadas, devido à não existência de tempo disponível.

Este jogo teve a duração de um bloco correspondente a noventa minutos.

Jogadas	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
Número decimal pedido	0,9	0,45	0,35	0,65	0,1
Número com mais uma décima	0,10	0,55	0,45	0,75	0,2
Número com menos uma décima	0,8	0,35	0,25	0,55	0,0
Valor marcado com o grão de arroz	0,7	0,62	0,24	0,65	0,07
Pontuação	0	0	0	1	1
Pontuação final: 2 PONTOS					

Fig. 15 – Folha de registos de A1 (Jogo *Grão a Grão*)

Jogadas	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
Número decimal pedido	0,7	0,5	0,4	0,55	0,6
Número com mais uma décima	0,8	0,6	0,5	0,65	0,7
Número com menos uma décima	0,6	0,4	0,3	0,45	0,5
Valor marcado com o grão de arroz	0,65	0,43	0,4	0,43	0,54
Pontuação	1	1	1	0	1
Pontuação final: 4 pontos					

Fig. 16 – Folha de registos de A2 (Jogo *Grão a Grão*)

Jogadas	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª
Número decimal pedido	0,2	0,25	0,05	0,3	0,8
Número com mais uma décima	0,3	0,35	0,15	0,4	0,9
Número com menos uma décima	0,1	0,15	0,05	0,2	0,7
Valor marcado com o grão de arroz	0,18	0,1	0,09	0,35	0,73
Pontuação	1	0	1	1	1
Pontuação final: 4 Pontos					

Fig. 17 – Folha de registos de A3 (Jogo *Grão a Grão*)

Os alunos A2 e A3, tiveram mais facilidade em encontrar a posição aproximada em que deveriam colocar o grão de arroz, e deste modo, obter mais estimativas correctas dos valores correspondentes aos números sorteados.

Um facto muito relevante e importante a reter aconteceu no primeiro número que saiu ao aluno A1, e que foi 0,9 (nove décimas). Este aluno colocou na folha de registos o *número com mais uma décima*, o valor de 0,10 (dez centésimas), em vez de 1,0 (dez décimas ou uma unidade). Os próprios colegas de turma também não sabiam a resposta correcta. Este erro, também acontece com alguma frequência com outros alunos do mesmo ano de escolaridade e com um currículo mais desenvolvido à disciplina de Matemática. Outro erro que surgiu passou-se com o aluno A3. O número decimal sorteado foi o 0,05 (cinco centésimas). O aluno escreveu correctamente o *número com mais uma décima*, ou seja 0,15 (quinze centésimas), mas não foi capaz, logicamente, de escrever o *número com menos uma décima*, tendo escrito novamente o mesmo valor, ou seja, 0,05.

Na generalidade e em quase todas as situações, os alunos indicaram correctamente o *número com mais uma décima* e o *número com menos uma décima*. Outra situação muito positiva que se verificou, foi o extremo rigor (e correcção) com que os alunos determinaram a posição, e consequente medida do grão de arroz na régua graduada. Estes factos, bastante positivos, também se devem ao facto de anteriormente os alunos haverem praticado o jogo *Detective dos números*, que possuía algumas semelhanças com este, já que era necessário determinar valores na recta numérica e a experiência adquirida, assim como algumas dúvidas, dissipadas posteriormente à realização daquele jogo, proporcionou aos alunos a aquisição de conhecimentos e capacidades que permitiram uma melhor *performance* neste jogo.

Tal como é referido em, *Como abordar… a comunicação escrita na aula de matemática*, *"É fundamental proporcionar aos alunos, actividades em que estes confrontem os conhecimentos que já têm sobre os números naturais, com os conhecimentos que vão adquirindo sobre os números decimais. É nestes confrontos que eles vão construindo novos saberes, ampliando os seus conhecimentos sobre o conceito de número".*[16]

[16] [65] pág. 169

Os alunos gostaram deste jogo, embora denotassem algum cansaço aquando da quinta e última ronda.

É esticá-lo

Os alunos, para este jogo e para o seguinte, *Ge-Ó-Pá*, utilizaram o *geoplano* existente na escola. Começaram nesta altura do ano a construir um, na disciplina de Atelier Oficinal, mas não o chegaram a usar, uma vez que o professor da disciplina queria que os alunos o construíssem com as medidas correctas e por esse motivo, no final do ano lectivo a sua construção ainda não estava concluída. Existem diversos tipos de *geoplano*. Segundo Lurdes Serrazina e José Manuel Matos, *"*O *geoplano mais* comum *é feito com uma base onde se espetam pregos. Consiste de uma placa de madeira e pregos dispostos de modo a formarem uma malha, que pode ter diversas texturas. É acompanhado por um conjunto de elásticos que vão poder permitir «desenhar». A construção do geoplano deve ser participada pelos alunos. Dependendo do nível etário, ela poderá constituir uma actividade interdisciplinar. Os geoplanos são um excelente meio para as crianças explorarem problemas geométricos, registando o seu trabalho no papel ponteado. …Uma das grandes vantagens do geoplano é a sua mobilidade, o que faz com que os alunos se habituem a ver as figuras em diversas posições. Outra das vantagens específicas do geoplano é que ao contrário da folha de papel, é um aparelho dinâmico, permitindo «desenhar» e «apagar» facilmente e possibilitando a aferição rápida de conjecturas."*[17] Também Àngel Alsina refere que, *"O geoplano é um recurso manipulativo muito útil, sobretudo para a análise de figuras geométricas: as propriedades de cada figura (número de lados, diagonais, etc.); as relações que se estabelecem entre as diferentes figuras (composição e decomposição, etc.); as relações espaciais, usando sobretudo sistemas de coordenadas (posição, distância, etc.); a aplicação de algumas transformações; etc."*[18] Igualmente no caderno *Manipulação de Materiais*, diz o seguinte: *"Através da manipulação de elásticos de diferentes cores é possível construir figuras geométricas. Podemos explorar situações*

[17] [82] pág. 13

[18] [02] pág. 70

que conduzam à definição de diferentes conceitos (polígono, perímetro, área, figuras equivalentes…”[19]

Os dados também foram construídos pelos alunos, a partir da planificação de dois cubos em folha de cartolina, cujas arestas têm 3 centímetros de comprimento. Na folha de registos, estão representadas partes de folhas de papel ponteado que representam a malha do *geoplano*, e onde, para cada problema, os alunos representam a situação inicial, “herdada” do colega e a situação final, ou seja, depois de construído um novo quadrilátero, a partir das instruções respectivas.

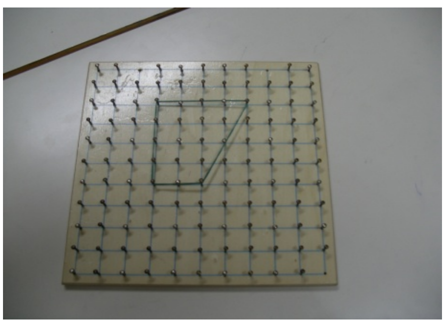
Jogaram os três alunos, seguindo a ordem seguinte: A1, A3, A2. A partir do quadrilátero construído por A1 (seguindo as respectivas instruções, dadas pelo tabela em consequência dos valores obtidos pelos lançamentos dos dados), o aluno A3 partia desse quadrilátero e construía outro, seguindo novamente as instruções e o aluno A2 procedia de igual forma. Depois novamente o aluno A1, A3 e assim sucessivamente.

Com o elástico, começa-se por se construir um quadrado no centro do *geoplano*.

Cada jogador, na sua vez, lança os dois dados uma vez (ou apenas um dado duas vezes). Seguidamente, procura na respectiva grelha, as instruções correspondentes ao cruzamento dos números obtidos, através dos lançamentos dos dados. Depois, modifica a figura existente no *geoplano*, num outro quadrilátero que respeite essas condições. Mesmo que a figura já as respeite, o jogador deve modificá-la, tentando mudar o menor número possível de vértices.

Os jogadores registam cada jogada efectuada na sua folha de registos. Cada partida é constituída por cinco jogadas de cada jogador.

O vencedor será o jogador que consiga obter mais pontos ao fim da partida.



Figs. 18 e 19 – Construindo quadriláteros no geoplano (Jogo *É Esticá-lo*)

O sistema de pontuação é o seguinte:

[19] [16] pág. 22

Pontuação	Número de alterações nos vértices do quadrilátero
Quatro pontos	Mudança de um só vértice.
Três pontos	Mudança de dois vértices.
Dois pontos	Mudança de três vértices.
Um ponto	Mudança de todos os vértices (quatro).

Fig. 20 – Sistema de pontuação (Jogo *É Esticá-lo*)[20]

Nota: No caso do quadrilátero construído não cumprir as instruções, indicadas na grelha de instruções, serão atribuídos zero pontos.

A grelha de dupla entrada é a seguinte:

1	Quatro ângulos rectos					
2	Um só par de lados opostos iguais	Nenhum par de lados paralelos ou iguais				
3	Nenhuma linha de simetria	Dois pares de lados paralelos	Dois ângulos opostos iguais			
4	Exactamente um par de lados paralelos	Uma diagonal como linha de simetria	Um ângulo maior que 180°	Um só ângulo recto		
5	Nenhum par de lados paralelos	Exactamente dois pares de ângulos opostos iguais	Todos os lados diferentes	Só dois lados consecutivos iguais	Exactamente dois ângulos rectos	
6	Dois pares de lados consecutivos iguais	Dois ângulos de amplitude superior a 90°	Os quatro lados iguais	Todos os ângulos diferentes	Uma diagonal divide a figura em duas partes iguais	Dois pares de lados opostos iguais
	1	2	3	4	5	6

Fig. 21 – Tabela de instruções (Jogo *É Esticá-lo*)[21]

[20] [66] anexos

[21] [66] anexos

As folhas de registos preenchidas pelos alunos, e a seguir representadas, estão pela ordem directa em que os jogaram, isto é, A1, A3,A2.

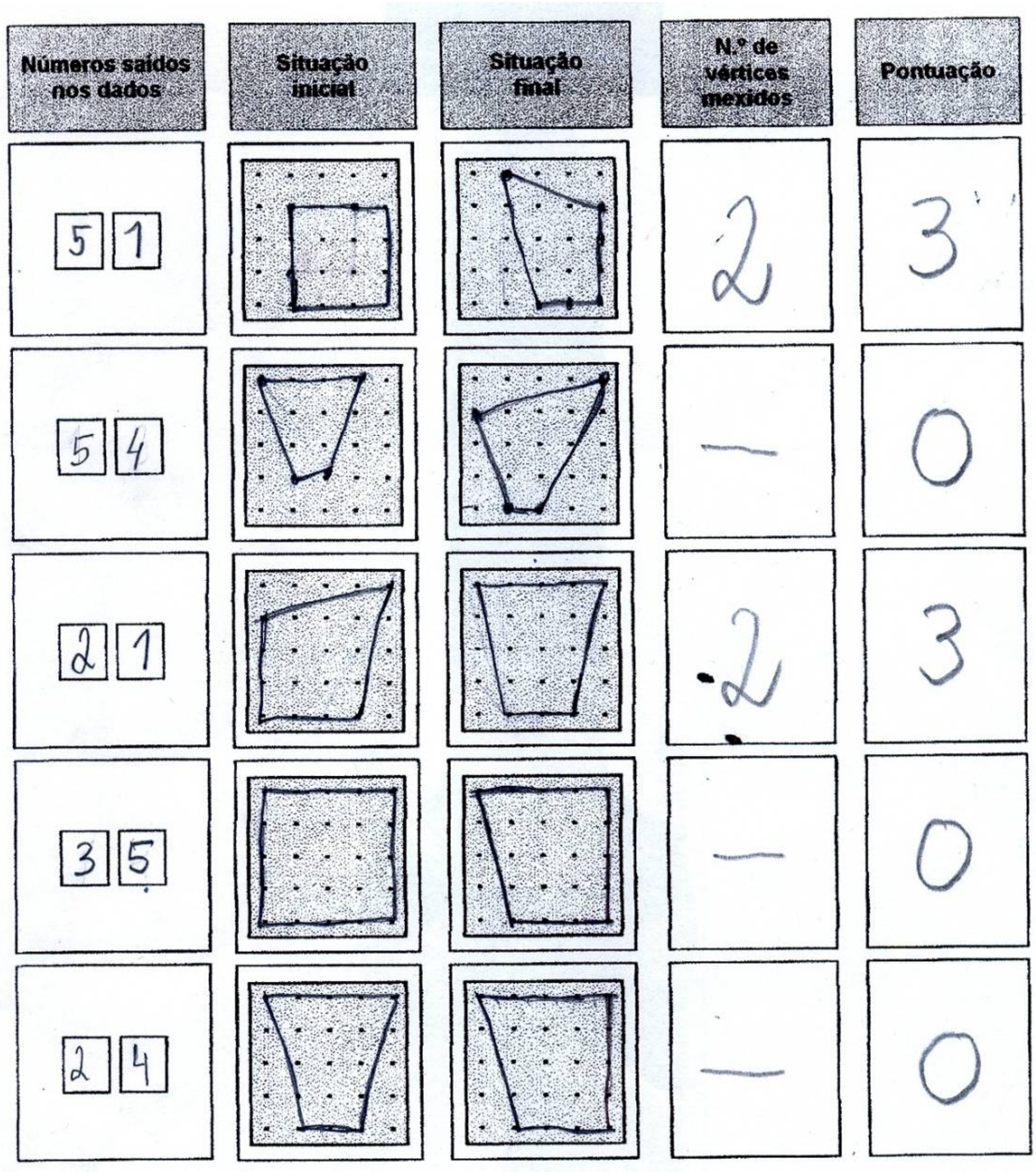


Fig. 22 – Folha de registos de A1 (Jogo *É Esticá-lo*)

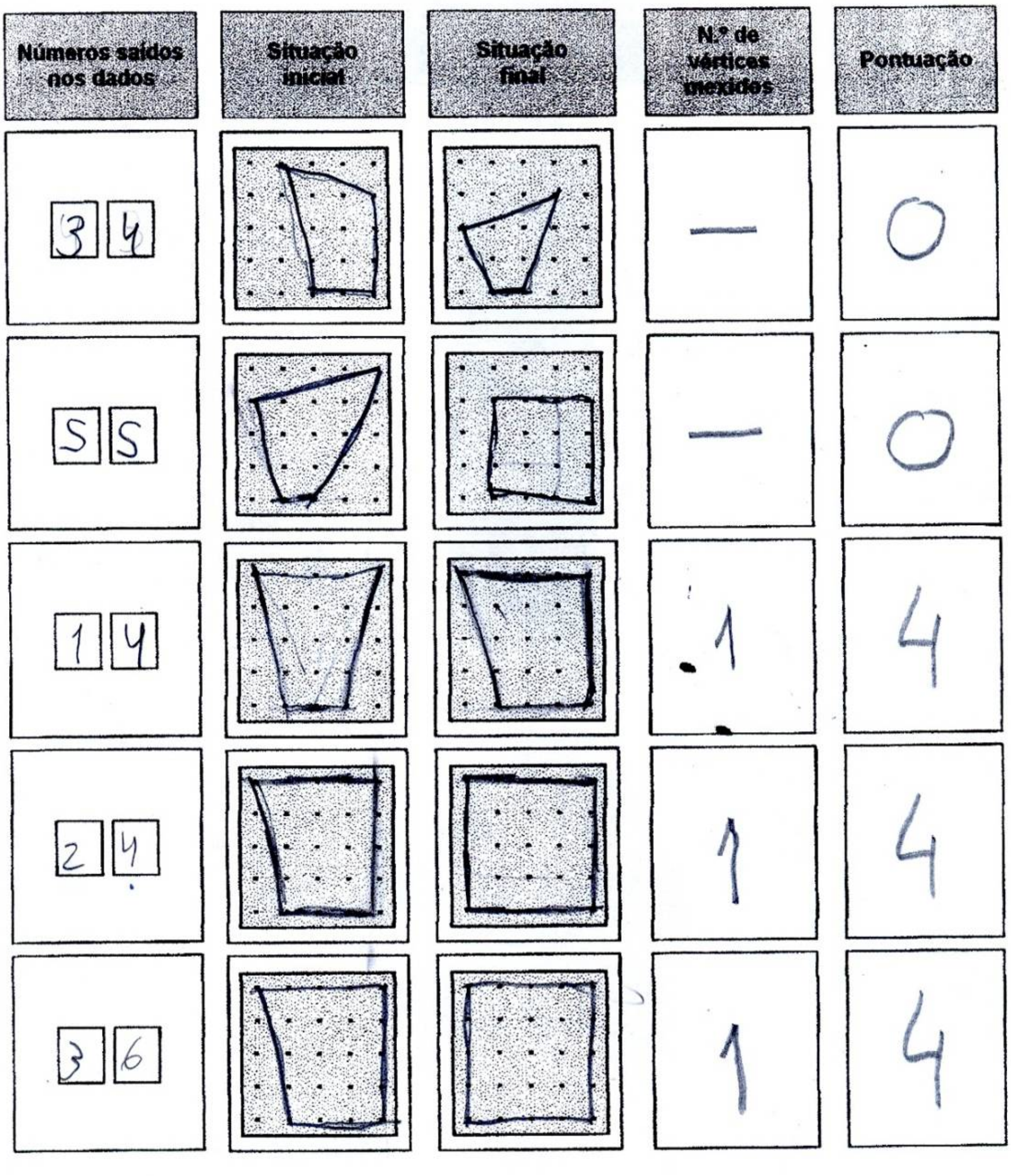


Fig. 23 – Folha de registos de A3 (Jogo *É Esticá-lo*)

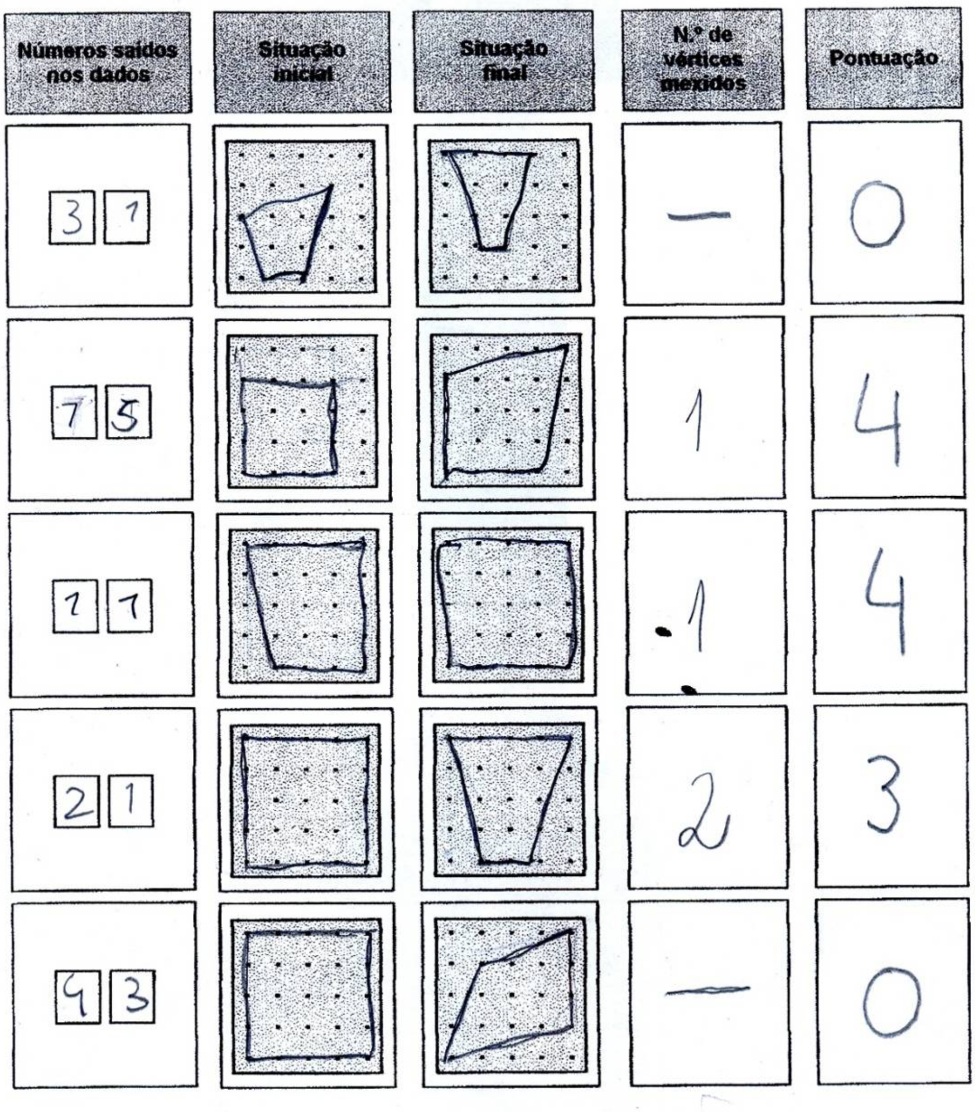


Fig. 24 – Folha de registos de A2 (Jogo *É Esticá-lo*)

No quadro seguinte estão representadas as pontuações, parciais e totais, obtidas por cada aluno neste jogo.

Alunos	**A1**	**A3**	**A2**
1ª Volta	3	0	0
2ª Volta	0	0	4
3ª Volta	3	4	4
4ª Volta	0	4	3
5ª Volta	0	4	0
Total (Pontos)	**6**	**12**	**11**

O aluno A1 mostrou mais dificuldades que os dois colegas de turma, como consequência de não ter assimilado convenientemente algumas noções e propriedades relacionadas com os quadriláteros. Por estes motivos, o aluno A1 obteve uma pontuação inferior aos restantes colegas. Na globalidade, os alunos tiveram algumas dificuldades em aplicar os conceitos de diagonal e sobretudo de simetria. Também o vocabulário existente na grelha de instruções se revelou por vezes um pouco difícil de compreender. As noções de paralelismo e perpendicularidade foram aparentemente bem compreendidas pelos alunos. Os alunos também conseguiram, sem grandes dificuldades, transpor os desenhos elaborados no *geoplano* para as folhas de registos.

Os alunos gostaram de praticar este jogo, denotando prazer, interesse e concentração. Também opinaram que este jogo contribuiu muito para a aprendizagem de matemática.

Em termos globais este jogo foi muito importante para os alunos assimilarem e aplicarem as noções pretendidas.

Ge-Ó-Pá

No livro *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*, estão descritas as regras do jogo, bem como orientações e sugestões para o professor poder utilizar, e que se passam a transcrever:

"Actividade – Jogo do Ge-Ó-Pá

Lê as regras do jogo.

Discute-as com o teu colega de equipa.

Participa na simulação do jogo que o professor propõe e esclarece as tuas dúvidas.

Põe em prática o jogo e anota as tuas jogadas na folha de registo das jogadas. Escreve um texto em forma de diálogo sobre alguma das situações, dificuldades ou problemas que aconteceram enquanto jogavas com o teu colega.

As personagens deverão ser: O Sr. Elástico, o Sr. Geoplano, o Sr. Perímetro, a D. Área, a D. Medida e a D. Roleta.

Material: Um geoplano, um elástico, uma roleta triangular e um conjunto de cartas com instruções para trabalhar com esse material.

Nº de jogadores: 2

Regras:

- *Um dos jogadores baralha as cartas e coloca-as num monte em cima da mesa com as instruções viradas para baixo.*
- *Para iniciar o jogo, os jogadores combinam entre si que é o primeiro a jogar.*
- *O primeiro jogador levanta a carta de cima do baralho, coloca-a em cima da mesa e faz, no geoplano, uma figura de acordo com as instruções, enquanto o outro jogador apenas observa.*
- *Concluída a execução da figura no geoplano, uma figura de acordo com as instruções escritas na parte inferior da carta, e desenha a figura na folha de registos.*
- *Em seguida, o segundo jogador utiliza a mesma carta e também segue as instruções, executando a figura no geoplano, mas não pode fazer um rectângulo ou quadrado igual ao do primeiro jogador. Também regista a sua pontuação e desenha a figura executada na sua folha de registos.*
- *Depois dos jogadores terem jogado com a mesma carta, o segundo jogador vira outra carta e é ele que inicia uma nova jogada, de acordo com as regras anteriores.*
- *O jogo termina quando todas as cartas tiverem sido viradas e as instruções executadas.*

Ganha o jogo quem tiver maior pontuação, depois de somarem os pontos obtidos em cada jogada.

Orientações e sugestões para o professor:

Ao longo dos anos, temos constatado que os alunos confundem os conceitos de perímetro e de área. Neste jogo, propõe-se que os alunos, na mesma jogada, façam dois rectângulos com a mesma medida (perímetro ou área, conforme a instrução da carta), com a condição de as figuras construídas pelos dois jogadores serem diferentes. A pontuação obtida também é calculada em função da medida do valor do perímetro ou da área. O conceito de unidade de medida também é igualmente trabalhado. Depois de resolvido, no geoplano, o problema posto pela carta, o aluno deve fazer o desenho no papel ponteado. Com a resolução das diversas situações problemáticas, recorrendo à manipulação de um elástico no geoplano e posterior desenho da solução encontrada na folha de registos, os alunos vivenciam situações de cálculo de perímetros e de áreas, visualizando-as em contextos diferentes. Este confronto simultâneo dos conceitos de *perímetro e de área, visualizado com recurso a materiais diversos, auxilia os alunos a clarificarem melhor as suas ideias.*

A utilização de materiais manipuláveis é muito importante, pois permite aos alunos uma atitude mais activa na resolução das actividades propostas. O geoplano é uma ferramenta poderosa na exploração de algumas ideias geométricas, pois permite ao aluno concretizar as suas conjecturas, evoluindo facilmente de umas figuras para outras.

Como em muitos outros jogos, apesar da simulação inicial e da discussão, alguns alunos não percebem logo totalmente todas as regras. As folhas de registo são, neste aspecto, um precioso auxiliar, porque tornam possível, por exemplo, observar se as figuras que estão desenhadas estão ou não de acordo com as instruções, se a pontuação está bem ou mal calculada ou, ainda, se os alunos utilizam na mesma jogada duas cartas em vez de uma. As folhas de registo permitem também verificar se os alunos calculam correctamente a medida do perímetro e da área.

Depois de os alunos terem jogado o jogo Ge-Ó-Pá, propõe-se a produção de um texto escrito, que consiste num diálogo entre os materiais utilizados e os conceitos. Este texto permite ao aluno reflectir sobre a actividade em que participou e escrever sobre a Matemática. Analisando os trabalhos escritos, o professor poderá aferir se persistem ou não ideias erradas em torno dos conceitos de perímetro e de área."[22]

[22] [65] págs. 179-180

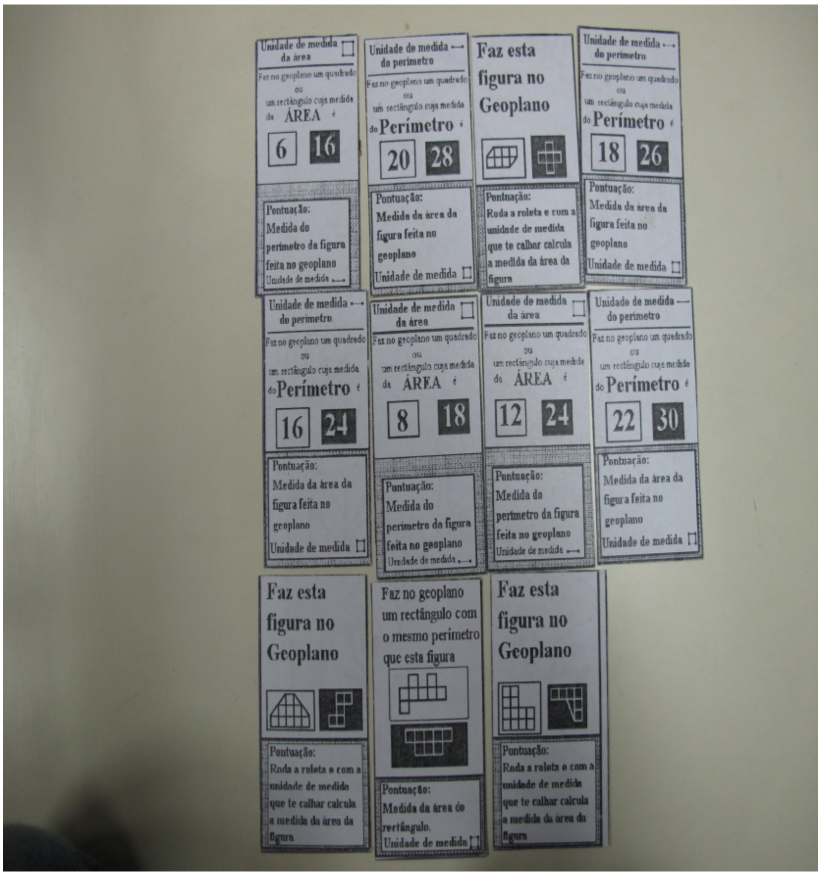


Fig. 25 – Cartas do jogo (*Ge-Ó-Pá*)[23]

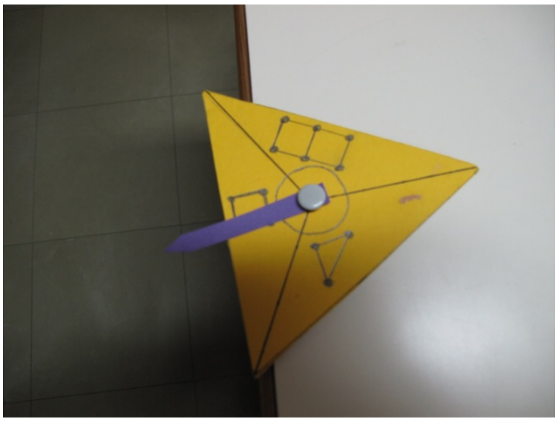


Fig. 26 – Roleta do jogo (*Ge-Ó-Pá*)[24]

Com os presentes alunos não foi solicitada a produção de textos escritos, uma vez que eles não possuíam capacidades para explanar e argumentar com correcção, coerência e clareza, um texto sobre os assuntos em questão. Todavia, para alunos com

[23] [66] anexos

[24] Construída pelos alunos a partir de [66] anexos

outro perfil, tal desiderato é claramente possível e é salutar incutir-lhes o interesse para efectivar análises e comentários.

Antes de praticarem o jogo, os alunos já haviam utilizado o *geoplano* em aulas anteriores, como por exemplo no jogo *É Esticá-lo*. Aquando da utilização do *Ge-Ó-Pá* muitas dúvidas já haviam sido dissipadas. Mas no primeiro contacto com o *geoplano*, em que resolveram uma ficha de trabalho numa aula anterior, existiram muitas dificuldades e insuficiências na compreensão e utilização de algumas noções, mas também alguns comentários interessantes.

Podemos de seguida rever algumas das situações observadas.

A1- Para achar o perímetro, contam-se os quadradinhos ou entre pregos?

A2- Contam-se as distâncias entre pregos.

O professor indicou para os alunos considerarem a medida entre dois pregos como uma unidade de perímetro, isto é, de valor 1.

A1- Não consigo fazer uma figura com perímetro 9. Acho que é impossível. Com 10 é mais fácil.

A2- Esta figura tem 9. Dá 9.

O professor questionou e atalhou: *"Como é que fizeste? A medida na diagonal é diferente de uma unidade. É um valor maior"*.

A2- Então é impossível.

Seguidamente, o professor solicitou aos alunos para construírem dois rectângulos diferentes com perímetro 16.

A1- Já fiz e têm ambos 16. São rectângulos. O A3 fez mal.

Porquê? Retorquiu o professor.

A1- Porque fez um rectângulo e um quadrado. Eram dois rectângulos.

O professor informou que o aluno A1 e A3 fizeram bem o exercício. Um quadrado é um rectângulo. Tem quatro ângulos rectos. Um rectângulo é que pode não ser um quadrado.

A1- Não percebi nada.

A2- Eu também não.

Na primeira aula em que se realizou o *Ge-Ó-Pá*, o aluno A2 não compareceu. Jogou A1 com A3, tendo este último conseguido obter uma melhor pontuação, sendo por consequência o vencedor. O aluno A3 demonstrou mais facilidade na resolução dos problemas colocados, uma vez que compreendeu mais facilmente a forma de obter melhor pontuação. Essa forma era a seguinte: Quando era dada a área, na carta de jogo, o aluno procurava construir uma figura mais esbelta para obter maior perímetro e quando era dado o perímetro procurava construir uma figura mais "quadrada", obtendo deste modo uma área maior. Os alunos utilizaram as primeiras nove cartas que saíram das onze existentes no baralho.

Na aula seguinte, com os três alunos da turma presentes, jogaram A1 e A2. Não houve necessidade de A3 jogar por duas razões fundamentais. A primeira, estava relacionada com o elevado período de tempo usado para a realização de cada partida, e a segunda em virtude do aluno A3 estar muito melhor preparado, a que acresce o facto de o número de cartas utilizado ser em número bastante limitado (11), e por essa razão o aluno A3 já sabia a estratégia a utilizar, isto é, tinha a estratégia mecanizada. No jogo entre A1 e A2, o aluno A1, seguiu a estratégia anteriormente utilizada pelo aluno A3 e conseguiu obter mais pontos que A2. Deste modo, o aluno A1 jogou com os dois outros alunos da turma, enquanto os alunos A2 e A3 jogaram apenas uma vez.

A exemplo do anterior jogo (*É Esticá-lo*), os alunos gostaram bastante deste jogo, especialmente A3. Também foi este aluno que conseguiu assimilar mais rapidamente algumas das noções que interessavam para o jogo. A opinião destes alunos sobre o interesse do jogo também varia muito, consoante os resultados finais que conseguem obter em termos de vitórias e não só sobre as aprendizagens conseguidas.

Seguidamente representam-se os registos elaborados pelos alunos em relação ao jogo *Ge-Ó-Pá*. Alguns registos efectuados pelos alunos estão errados, ou seja, não estão de acordo com as instruções. Os números indicados à esquerda de cada uma das figuras, desenhadas nas folhas de registos, correspondem exactamente à ordem de saída (aleatória) das cartas e não à ordem destas, indicada na figura 25.

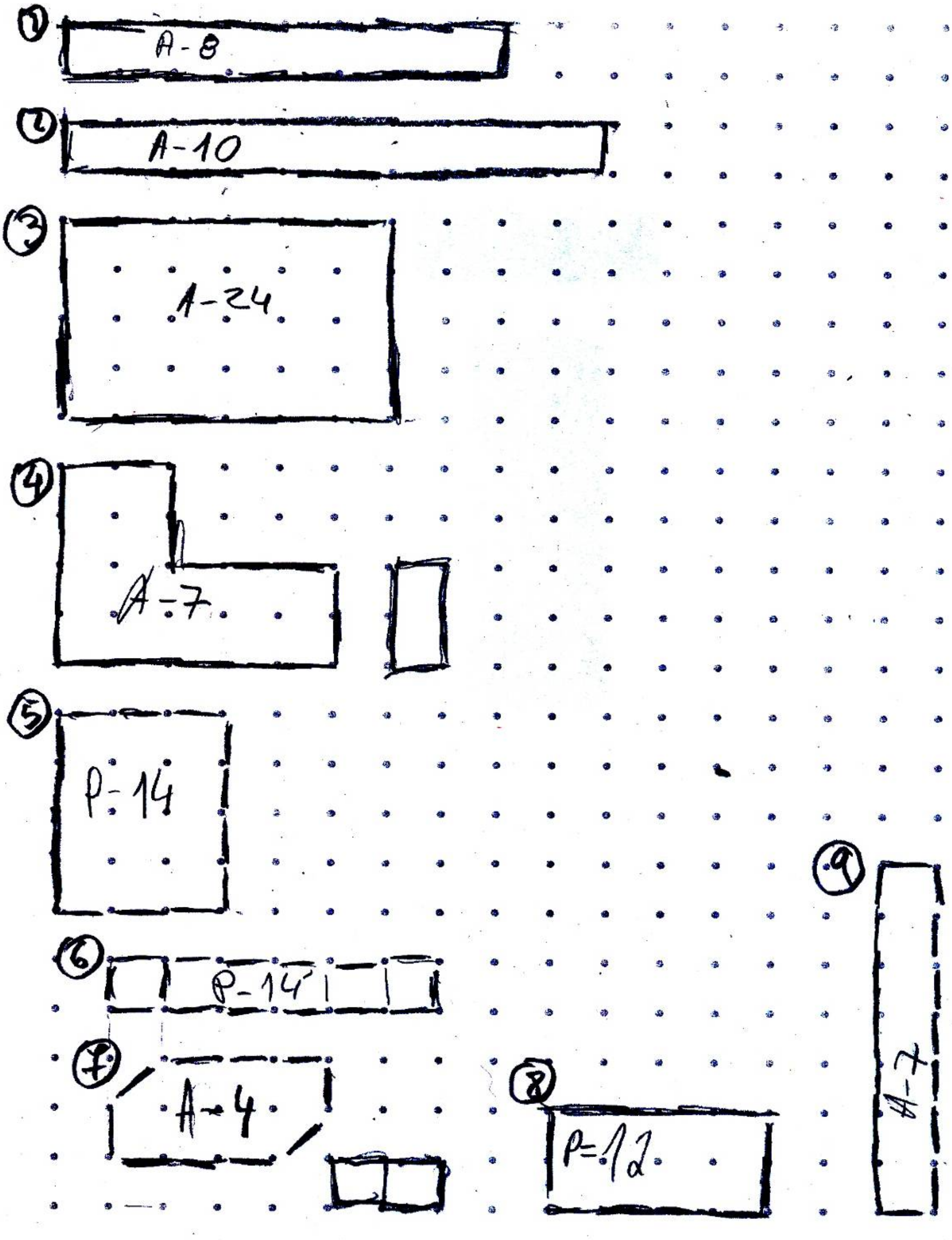


Fig. 27 – Folha de registos de A1 versus A3 (Jogo *Ge-Ó-Pá*)

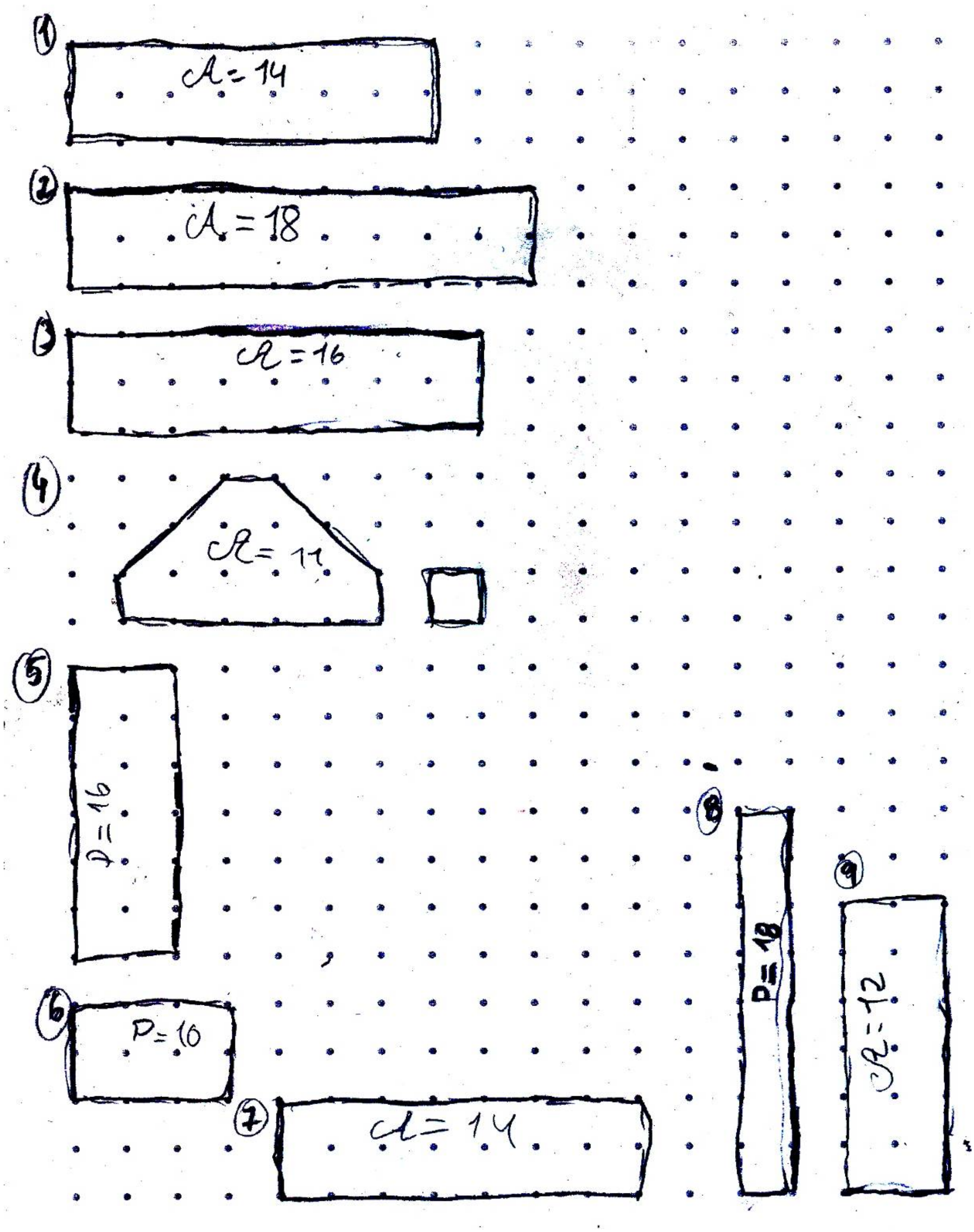


Fig. 28 – Folha de registos de A3 versus A1 (Jogo *Ge-Ó-Pá*)

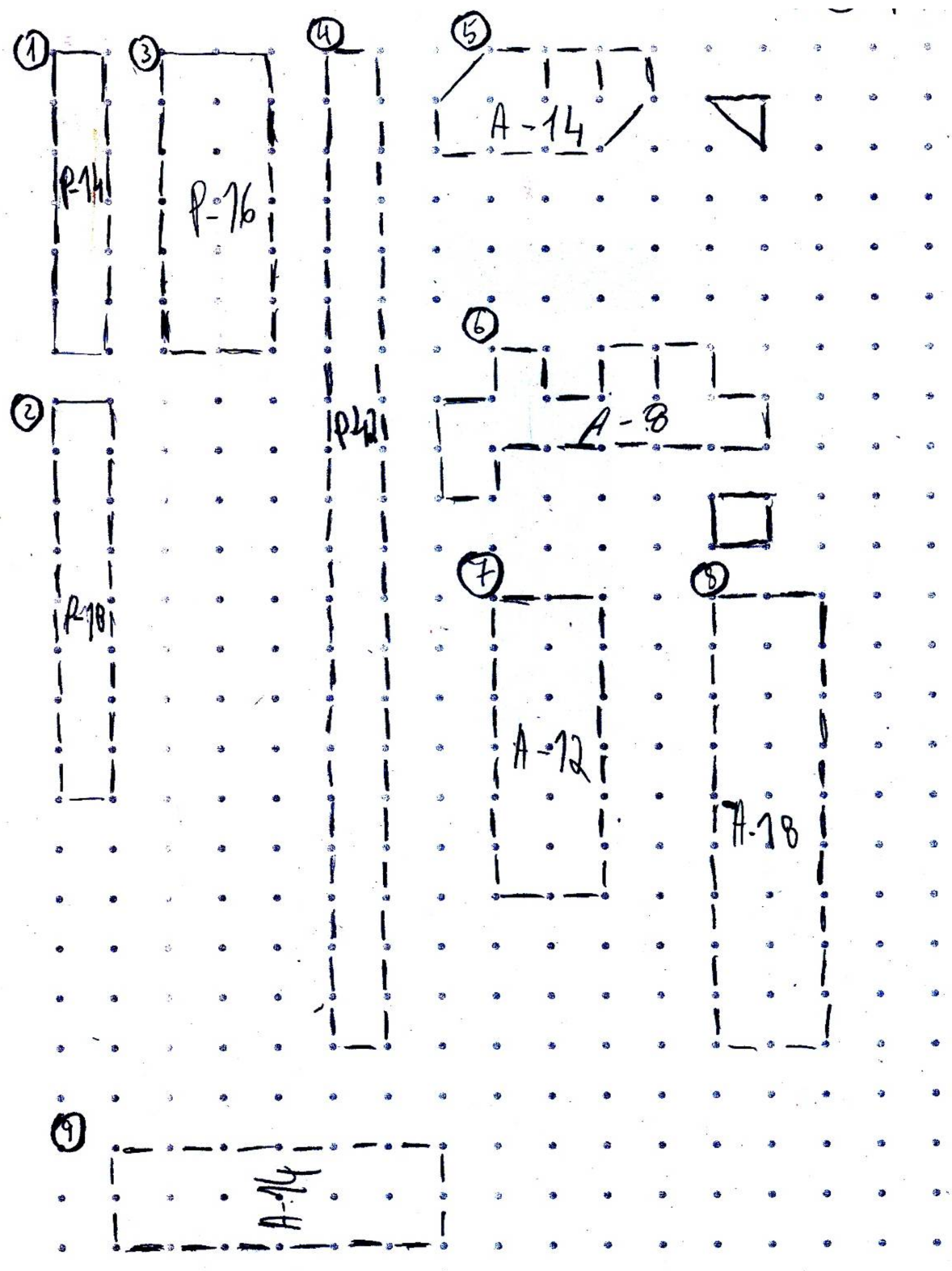


Fig. 29 – Folha de registos de A1 versus A2 (Jogo *Ge-Ó-Pá*)

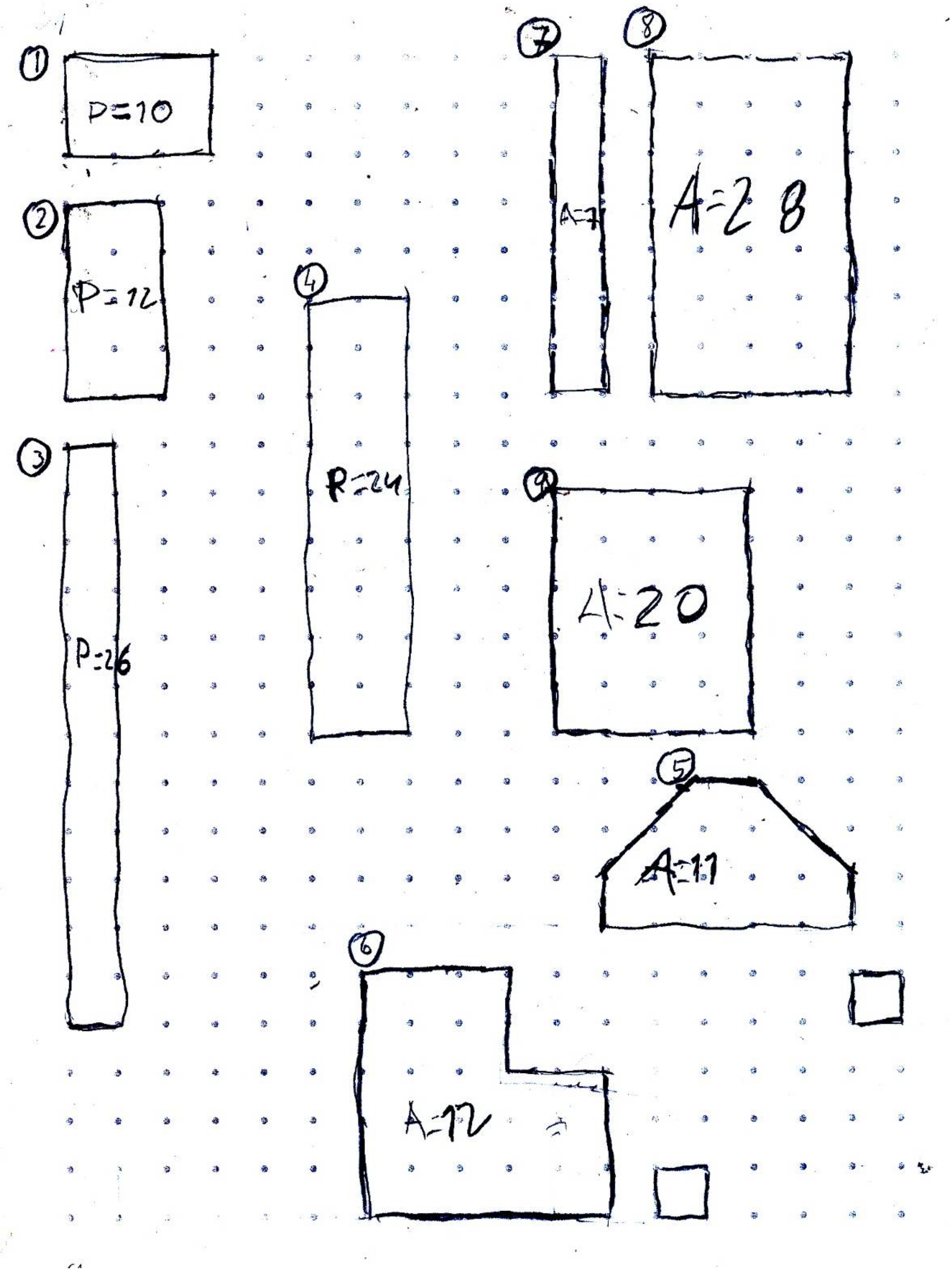


Fig. 30 – Folha de registos de A2 versus A1 (Jogo *Ge-Ó-Pá*)

Ten points

Participam dois jogadores em cada partida.
Primeiro jogaram A2 com A3; seguidamente A1 com A3 e por fim A1 jogou com A2. Um dos participantes no jogo é designado por *JOGADOR*, sendo o segundo concorrente designado por *ADVERSÁRIO*. Só o primeiro lança os dois dados.

Cada concorrente inicia o jogo com 10 pontos.

De cada vez que o *JOGADOR* ao lançar os dois dados obtiver a soma de 7 pontos, o *ADVERSÁRIO* transfere 3 pontos para o *JOGADOR*. De cada vez que o *JOGADOR* lançar os dados e obtiver uma soma diferente de 7 pontos, transfere para o *ADVERSÁRIO* um ponto.

A pontuação, consequência do resultado de cada lançamento, é registada numa folha de registos.

O concorrente com maior número de pontos, ao fim de dez lançamentos dos dois dados, é o vencedor. Se um dos participantes atingir pontuação nula ou negativa antes dos dez lançamentos, será vencedor o outro participante.

Na aula anterior à aplicação deste jogo, os alunos realizaram um conjunto de actividades, sob a forma de ficha de trabalho, a seguir indicadas e relacionadas com probabilidades. Estas actividades foram retiradas do livro, *"Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos."*[25] A primeira ficha foi realizada pelo aluno A1, a segunda por A2 e a terceira por A3.

Esta ficha de trabalho teve como objectivo diagnosticar conhecimentos e noções relativamente a alguns assuntos relacionados com probabilidades.

[25] [02] págs. 142-143

Ficha de trabalho realizada pelo aluno A1

Agrupamento Vertical de Escolas de S. Mamede de Infesta

Ano lectivo de 2008 / 2009

Os dados e as probabilidades

1 Pega num dado e lança-o 15 vezes. Marca com × o resultado de cada lançamento na tabela seguinte:

1					X										
2				X			X	X							
3						X				X					X
4		X									X				
5			X						X			X	X		
6	X													X	

Responde às perguntas:

– Que número te saiu mais vezes? 5

– Que número te saiu menos vezes? 1

– Julgas que é mais fácil que te saia algum dos resultados possíveis? não

– Achas que se voltasses a lançar 15 vezes o dado obterias os mesmos resultados? não

2 A partir de um dado convencional, pensa quais das seguintes situações são certas, possíveis ou impossíveis. Assinala-as com ×, como no exemplo.

Situação	Certa	Possível	Impossível
Que saia um 6.		×	
Que saia um número maior do que 6.			X
Que saia um número entre o 1 e o 6.		X	
Que saia um 10.			X
Que saia um 2 ou um 3.		X	
Que saia um número par.		X	

3 Tenta que te saia um 6 com o dado. Anota o número de vezes que lançaste o dado até te sair o 6. 5

Discute em grupo: Todos os alunos lançaram o mesmo número de vezes o dado até sair o 6? Porquê? não. podem sair mais números

4 Agora lança o dado 30 vezes e anota o número de vezes que te saiu cada número na primeira coluna da tabela. Depois, lança o dado 50 vezes e volta a anotar os resultados.

	30 vezes	50 vezes
1	8	12
2	7	9
3	5	13
4	2	4
5	5	7
6	3	5

Responde às seguintes perguntas:

– Obtiveste todos os resultados possíveis o mesmo número de vezes? não
– Qual foi o resultado mais frequente e o menos frequente ao lançar o dado 30 vezes? mais vezes foi o 1. Menos vezes 4
– E ao lançar o dado 50 vezes? mais vezes foi 1. Menos vezes 4
– A partir dos teus resultados, o que pensas ser mais provável: que numa partida de um jogo da glória te saia um 1 ou um 6? é o 1 porque é um Facil de sair.

Bom trabalho.

O prof. Abílio Quintas

Ficha de trabalho realizada pelo aluno A2

Agrupamento Vertical de Escolas de S. Mamede de Infesta

Ano lectivo de 2008 / 2009

Os dados e as probabilidades

1 Pega num dado e lança-o 15 vezes. Marca com × o resultado de cada lançamento na tabela seguinte:

1						X				X				X	X
2							X	X			X				
3	X		X												
4					X								X		
5				X					X			X			
6		X												X	

Responde às perguntas:

– Que número te saiu mais vezes? 7

– Que número te saiu menos vezes? 3, 4, 6

– Julgas que é mais fácil que te saia algum dos resultados possíveis? Acho que não

– Achas que se voltasses a lançar 15 vezes o dado obterias os mesmos resultados? não

2 A partir de um dado convencional, pensa quais das seguintes situações são certas, possíveis ou impossíveis. Assinala-as com ×, como no exemplo.

Situação	Certa	Possível	Impossível
Que saia um 6.		×	
Que saia um número maior do que 6.			X
Que saia um número entre o 1 e o 6.		X	
Que saia um 10.			X
Que saia um 2 ou um 3.		X	
Que saia um número par.		X	

3 Tenta que te saia um 6 com o dado. Anota o número de vezes que lançaste o dado até te sair o 6. 1

Discute em grupo: Todos os alunos lançaram o mesmo número de vezes o dado até sair o 6? Porquê? não. pudia sair oito

4 Agora lança o dado 30 vezes e anota o número de vezes que te saiu cada número na primeira coluna da tabela. Depois, lança o dado 50 vezes e volta a anotar os resultados.

	30 vezes	50 vezes
1	3	14
2	7	7
3	3	8
4	4	5
5	6	7
6	4	9

Responde às seguintes perguntas:

- Obtiveste todos os resultados possíveis o mesmo número de vezes? não
- Qual foi o resultado mais frequente e o menos frequente ao lançar o dado 30 vezes? mais 2 - menos 1, 3
- E ao lançar o dado 50 vezes? mais 1 - menos 4
- A partir dos teus resultados, o que pensas ser mais provável: que numa partida de um jogo da glória te saia um 1 ou um 6?

é igual

Bom trabalho.

O prof. Abílio Quintas

Ficha de trabalho realizada pelo aluno A3

Agrupamento Vertical de Escolas de S. Mamede de Infesta

Ano lectivo de 2008 / 2009

Os dados e as probabilidades

1 Pega num dado e lança-o 15 vezes. Marca com × o resultado de cada lançamento na tabela seguinte:

1														X	
2															
3	X					X				X					X
4		X			X		X		X						
5			X	X				X				X			
6											X		X		

Responde às perguntas:

– Que número te saiu mais vezes? 3, 4, 5
– Que número te saiu menos vezes? 2
– Julgas que é mais fácil que te saia algum dos resultados possíveis? Penso que não
– Achas que se voltasses a lançar 15 vezes o dado obterias os mesmos resultados? acho que não

2 A partir de um dado convencional, pensa quais das seguintes situações são certas, possíveis ou impossíveis. Assinala-as com ×, como no exemplo.

Situação	Certa	Possível	Impossível
Que saia um 6.		×	
Que saia um número maior do que 6.			X
Que saia um número entre o 1 e o 6.	X		
Que saia um 10.			X
Que saia um 2 ou um 3.		X	
Que saia um número par.		X	

3 Tenta que te saia um 6 com o dado. Anota o número de vezes que lançaste o dado até te sair o 6. 11

Discute em grupo: Todos os alunos lançaram o mesmo número de vezes o dado até sair o 6? Porquê? Não. É sorte.

4 Agora lança o dado 30 vezes e anota o número de vezes que te saiu cada número na primeira coluna da tabela. Depois, lança o dado 50 vezes e volta a anotar os resultados.

	30 vezes	50 vezes
1	5	10
2	13	11
3	4	5
4	3	10
5	1	7
6	7	7

Responde às seguintes perguntas:

– Obtiveste todos os resultados possíveis o mesmo número de vezes? não

– Qual foi o resultado mais frequente e o menos frequente ao lançar o dado 30 vezes? mais frequente 13. menos frequente 5.

– E ao lançar o dado 50 vezes? foi o dois mais vezes. menos vezes foi o 3.

– A partir dos teus resultados, o que pensas ser mais provável: que numa partida de um jogo da glória te saia um 1 ou um 6?

É o um porque 15 e o seis 14 vezes

Bom trabalho.

O prof. Abílio Quintas

Em termos globais, os alunos manifestaram algumas noções correctas sobre probabilidades. Na alínea referente à 2ª questão *"Que saia um número entre um e 6"*, apenas o aluno A3 seleccionou a alternativa correcta, ou seja *Certa*, ao contrário dos outros dois alunos que seleccionaram a opção *Possível*. Em relação à última alínea da 4ª pergunta, *"A partir dos teus resultados, o que pensas ser mais provável: que numa partida do jogo da glória te saia um 1 ou um 6?"*, o aluno A2 deu a resposta correcta, enquanto A1 e A3 referiram que havia mais possibilidades de sair o 1. Este último aluno referiu que o número 1 saiu 15 vezes, no conjunto dos lançamentos, enquanto o 6 saiu apenas 14 vezes. Provavelmente o aluno A3 não compreendeu devidamente a questão, uma vez que, a exemplo dos restantes alunos, manifesta grandes dificuldades de interpretação, assim como a grande quantidade de erros cometidos, quer ortográficos, quer de sintaxe. De qualquer forma, foram explicadas aos alunos os significados de alguns vocábulos existentes na ficha de trabalho.

Na aula seguinte, com duração de noventa minutos, os alunos praticaram o jogo *Ten points*.

Foram efectuadas seis partidas, utilizando todas as combinações possíveis entre os três alunos da turma, isto é, cada aluno jogou com os restantes colegas, quer na qualidade de *JOGADOR*, quer de *ADVERSÁRIO*.
Seguidamente apresenta-se a folha de registos preenchida pelos três alunos da turma.

Folha de Registos

1º jogo

	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não? S	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? S	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? S	Sim ou não? N
A2 Jogador	10	13	12	11	10	13	12	11	10	13	12
A3 Adversário	10	7	8	9	10	7	8	9	10	7	8

2º jogo

	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N
A3 Jogador	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A2 Adversário	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

3º jogo

	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não? N	Sim ou não? S	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N
A3 Jogador	10	9	12	11	10	9	8	7	6	5	4
A1 Adversário	10	11	10	11	12	13	14	15	16	17	18

4º jogo

	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? S	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? S
A1 Jogador	10	9	8	11	10	9	8	7	6	5	8
A3 Adversário	10	11	12	11	12	13	14	15	16	17	16

5º jogo

	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? S	Sim ou não? S	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N
A1 Jogador	10	9	8	7	6	9	12	11	10	9	8
A2 Adversário	10	11	12	13	14	13	12	13	14	15	16

6º jogo

	Lançamentos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
	Soma 7 ?	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? S	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N	Sim ou não? N
A1 Jogador	10	9	8	7	6	5	8	7	6	5	4
A2 Adversário	10	11	12	13	14	15	14	15	16	17	18

Fig. 31 – Folha de registos de A1/A2/A3 (Jogo *Ten Points*)

Pretendia-se que os alunos além de adquirirem alguns conceitos probabilísticos, fizessem uma análise crítica às regras de pontuação utilizadas. Quanto à vertente competitiva, isto é, à classificação obtida por cada um dos concorrentes, era um factor secundário, uma vez que apenas o factor sorte intervinha. De qualquer modo, os alunos também prestaram atenção a este factor e pretendiam obter um resultado vitorioso. Os resultados, obtidos através do lançamento dos dados, estiveram de acordo com as probabilidades, isto é, o *JOGADOR*, tinha menos hipótese de sair vencedor. Apenas na primeira partida este facto foi contrariado, tendo o *JOGADOR* vencido o *ADVERSÁRIO*, em virtude de em 10 rondas a soma do resultado dos lançamentos dos dados ter somado 7 em três ocasiões, o que ultrapassa largamente a média. Nas restantes cinco partidas o *ADVERSÁRIO* saiu vencedor.

Como sabemos, a probabilidade de obtenção de 7 pontos no lançamento de dois dados é de 6/36 ou seja 1/6, sendo 30/36, ou seja, 5/6 a probabilidade de obter uma soma diferente de 7, conforme se verifica na seguinte tabela de dupla entrada:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	**7**
2	3	4	5	6	**7**	8
3	4	5	6	**7**	8	9
4	5	6	**7**	8	9	10
5	6	**7**	8	9	10	11
6	**7**	8	9	10	11	12

Como o *JOGADOR* recebe 3 pontos no caso de obter soma 7 e perde 1 se a soma for diferente de 7, o *ADVERSÁRIO* tem probabilisticamente mais hipóteses de sair vencedor que o *JOGADOR*, uma vez que tem cinco vezes mais hipóteses de sair um resultado diferente de 7, ou seja, o *JOGADOR* tem 3/8 de hipóteses de ganhar, contra 5/8 do *ADVERSÁRIO.* Desta forma, para o jogo ser considerado justo, deveriam ser atribuídos 5 pontos ao *JOGADOR* em vez de 3 pontos.

Não se pretendia que os alunos determinassem a probabilidade de vitória quer do *JOGADOR*, quer do *ADVERSÁRIO*, uma vez que o nível dos seus conhecimentos nestas áreas não o permitia. Contudo era importante obter comentários à *priori*, durante o desenrolar do jogo e também à *posteriori* sobre os resultados que poderiam surgir e aconteceram. Os alunos, por unanimidade, comentaram que o jogo beneficiava o *"ADVERSÁRIO"*, mas só a partir de uma fase intermédia do jogo. Não conseguiram antecipar, previsivelmente, possíveis resultados.

Era importante a abordagem e aplicação de um jogo relacionado com as probabilidades, uma vez que estas estão muito relacionadas com o quotidiano e sem dúvida norteiam a nossa vida, já que normalmente determinam as nossas opções. De qualquer forma, este jogo talvez tenha sido uma má escolha em virtude de dois factores a considerar: muito monótono e também bastante difícil para os alunos desenvolverem algumas capacidades projectadas.

Numa feira popular, há uns tempos atrás, um feirante dispunha de um pequeno negócio que consistia no seguinte: Era proposto aos transeuntes, mediante o pagamento de uma determinada verba, a lançarem dois dados. Se o resultado do lançamento fosse 2 ou 12 pontos, o jogador recebia um rádio transístor. Se obtivesse 3, 4, 10 ou 11 pontos era atribuído um pequeno boneco de peluche. Se à soma dos números do lançamento correspondesse 5, 6, 7, 8 ou 9 pontos, o prémio era um balão. Deste modo o feirante mostrava que tinha conhecimentos probabilísticos e, em princípio, iria obter lucro com o negócio.

Os alunos A1 e A2 gostaram de praticar o jogo e acharam-no proveitoso. Já o aluno A3, apesar de ter dado alguma importância à realização do jogo e referir que o achou interessante, não demonstrou muita motivação no jogo, tendo inclusivamente exprimido na altura da explicação das regras que não queria participar.

Segue-se um comentário sobre o jogo por parte do aluno A1.

ESTE JOGO É INjusto para o "Jogador"
porque o 7 é difícil- de sair.
Porque os outros números saEM muito
mais vezes nos dados.

Semáforo

Material a utilizar: normalmente um tabuleiro rectangular constituído por doze quadrados (4 por 3) e peças com três cores diferentes: doze verdes, doze amarelas e doze vermelhas.

Regras do jogo: Os jogadores jogam alternadamente e colocam uma peça no interior de cada quadrado. Cada jogada pode ser feita de três modos possíveis: Ou se coloca uma peça de cor verde num quadrado vazio, ou se substitui uma peça verde que esteja colocada no tabuleiro por uma peça de cor amarela ou se substitui uma peça amarela que esteja colocada no tabuleiro por uma peça vermelha. Depois de colocada uma peça de cor vermelha, jamais poderá ser substituída por outra peça.

Objectivo do jogo: fazer uma fila (linha, coluna ou na diagonal) com três peças da mesma cor. Neste jogo não há possibilidade de haver empate.

Os alunos praticaram este jogo pela primeira vez durante um tempo de quarenta e cinco minutos. Posteriormente jogavam algumas vezes na parte final das aulas.

Fig. 32 – Jogando *Semáforo*

Os esquemas seguintes mostram um exemplo de uma partida de *Semáforo* e os raciocínios que se podem efectuar para tentar alcançar a vitória. Esses esquemas (figs. 33 e 34) e a respectiva explicação foram recolhidos a partir da obra, *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*[26].

"O seguinte diagrama mostra uma posição com três possibilidades de vitória imediata: 1. transformar a peça verde em a3", (cria uma linha vertical de três peças de cor amarela; *"2. transformar a peça amarela em d1"*, (cria uma linha diagonal de três

[26] [45] págs. 137-139

peças de cor vermelha; *"3. transformar a peça amarela em c3"*, (cria uma linha horizontal ou vertical de três peças de cor vermelha).

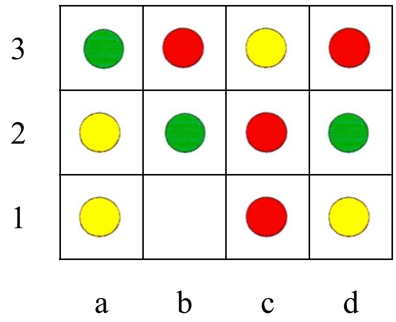


Fig. 33 – Três possibilidades de vitória (Jogo do *Semáforo*)[27]

<u>Nota</u>: Às peças amarelas corresponde a cor mais clara; às verdes a cor intermédia e às vermelhas a cor mais escura.

"O exemplo seguinte é de um fim de partida. Se analisarmos o tabuleiro, verificamos que já só restam duas jogadas antes de um jogador ser forçado a dar um três em linha ao adversário: 1. largar uma peça verde em b1; 2. transformar a peça verde em d2. Isto significa que o jogador seguinte já perdeu. Ao jogar numa dessas opções, o jogador seguinte joga na outra."

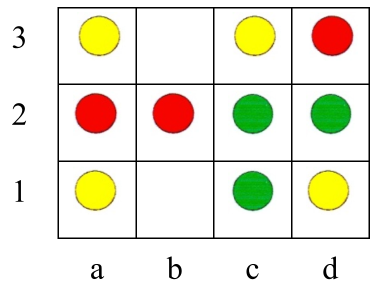


Fig. 34 – Fim de partida (Jogo do *Semáforo*)[28]

O número de movimentos neste jogo é limitado. A vitória (ou derrota) de um jogador depende de quantos movimentos disponíveis existirem. Se faltarem dois movimentos possíveis, o jogador que executa a jogada seguinte ganha. Generalizando, se faltar um número par de jogadas, o jogador seguinte ganha a partida. Se o número de

[27] Figura retirada de [45] pág. 138

[28] Figura retirada de [45] pág. 138

jogadas que faltam for ímpar, o jogador que executa a jogada seguinte perde. É evidente, que no início é muito difícil determinar as sequências e por este motivo na fase inicial, poderá ser jogado de forma um pouco aleatória e sem estratégia definida.

Este jogo possui regras muito simples, facilmente compreendidas e que os alunos do ensino básico gostam de jogar.

Uma variante muito mais simples e que poderá ser dada aos alunos como desafio é com a utilização de um tabuleiro com nove quadrados (*3 por 3*), semelhante ao do *Jogo do Galo*, mantendo as regras (ver fig. 35).

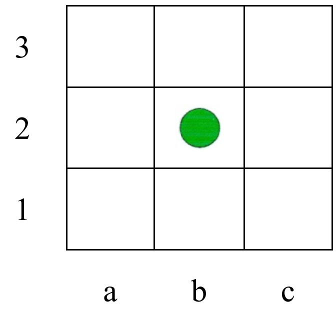


Fig. 35 – Tabuleiro com nove quadrados – *3 por 3* (Jogo do *Semáforo*)

Neste caso o jogador que executar o primeiro lance ganha, se jogar de forma correcta. Para isso deverá colocar a peça (verde) na casa central do tabuleiro. O adversário não pode colocar uma peça verde em qualquer outra casa do tabuleiro, sob pena de perder imediatamente. Terá antes que trocar essa peça verde, na casa central, por uma amarela. O primeiro jogador troca a peça amarela por uma vermelha. Seguidamente basta ao primeiro jogador colocar peças nas posições simétricas colocadas pelo segundo jogador, ficando este sem quaisquer possibilidades de alcançar a vitória.

Os alunos praticaram este jogo durante um tempo de 45 minutos, incluindo a explicação das respectivas regras, e jogaram noutras ocasiões sobretudo nos últimos minutos de algumas aulas. No quadro seguinte estão indicadas as partidas e respectivos resultados obtidos pelos alunos. O aluno indicado em primeiro lugar, em cada partida, foi o que efectuou o primeiro lance. O sorteio, através de lançamento de um dado, ditou o primeiro jogo entre A1 e A2. Posteriormente, o jogador que vencia continuava em prova. O vencedor do jogo alcança um ponto e o derrotado soma zero pontos. No *Semáforo* não existe a possibilidade de existir empate, isto é, ao fim de um maior ou menor número de lances um dos jogadores obtém a vitória. Nos quadros seguintes estão indicados os jogos efectuados pelos alunos e respectivos resultados parciais e globais.

Alunos	**Resultado**
A2-A1	1-0
A3-A2	0-1
A1-A2	0-1
A2-A3	1-0
A2-A1	0-1
A1-A3	1-0
A2-A1	1-0
A3-A2	0-1
A2-A1	0-1
A3-A1	1-0
A2-A3	1-0
A1-A2	0-1

Alunos	**Jogos**	**Vitórias**	**Derrotas**	**Pontuação**
A1	8	3	5	**3**
A2	10	8	2	**8**
A3	6	1	5	**1**

Através da análise do quadro verifica-se que o aluno A2, disputou mais jogos, como consequência do maior número de vitórias acumuladas.

Com o *Semáforo* não se pretendeu estudar e aplicar muitas considerações teóricas acerca deste jogo, como por exemplo se era vantajoso um jogador iniciar o jogo, ou ser o segundo a fazê-lo, ou ainda qual o número mínimo ou máximo de lances que obrigatoriamente conduzirá à vitória de um dos contendores. Algumas destas situações exigem alguma complexidade de raciocínio, que, obviamente estão fora do objecto de estudo. Mas numa fase relativamente adiantada de uma partida, os alunos, algumas vezes, sem existir uma evidência imediata, conseguiam descortinar se era possível, através de movimentos correctos, chegar à vitória, o que foi um factor extremamente importante para o interesse da aplicabilidade do jogo.

O desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático foi um das competências a serem promovidas com a aplicação deste jogo. Também o estudo e visualização de simetrias contribuíram para a importância da utilização do jogo. Em terceiro lugar, e não menos importante, o desenvolvimento das capacidades de atenção e concentração, sobretudo nestes alunos que possuem algum défice nestas áreas, também é de considerar.

Os alunos gostaram do jogo e manifestaram interesse em praticá-lo mais vezes. Numa fase inicial, o aluno A1, manifestou algumas reservas, uma vez que, não estava a compreender perfeitamente as regras do jogo, mas por fim foi dos mais entusiastas.

Hex

Para se praticar este jogo, utiliza-se um tabuleiro com a forma de um losango, constituído por casas hexagonais. Os quatro lados do losango tomam a designação de *Norte*, *Sul*, *Este* e *Oeste*. O *Hex* é disputado entre dois jogadores, que jogam alternadamente, e o objectivo é fazer uma *ponte* entre o *Norte* e o *Sul* para um jogador e *Este-Oeste* para o outro. Também são necessárias peças de cor diferentes para cada um dos jogadores (normalmente de cor azul e vermelha, ou brancas e negras). O primeiro a conseguir atingir esse objectivo é o vencedor. No *Hex* não há capturas, efectuando-se o preenchimento do tabuleiro com peças.

Normalmente o tabuleiro é constituído por 121 casas, ou seja, 11 X 11. O número máximo de jogadas possíveis é precisamente 121. Também existe uma versão mais simples que utiliza um tabuleiro de 7 por 7, ou seja com 49 casas.

Segundo David Gale, no *Hex*, existe sempre um vencedor, isto é, não há qualquer possibilidade do jogo ficar empatado.[29]

O primeiro a jogar, se utilizar a estratégia perfeita, ganha. Num tabuleiro de 7 por 7, isso é relativamente fácil de ser aplicado, uma vez que o tabuleiro é menor, logo o número de casas também é menor e consequentemente as hipóteses de erro, bem como uma certa mecanização do jogo, propicia uma vitória fácil para o primeiro jogador. Já num tabuleiro de 11 por 11, a estratégia vencedora é muito mais difícil de descortinar. Para contrariar a vantagem do jogador que inicia a partida, existe a chamada *regra do equilíbrio*, ou seja, aquando da primeira jogada, o segundo jogador pode optar por

[29] [45] pág. 91

trocar de cores, ficando com a peça que o primeiro jogador possuía. Desta forma, o primeiro jogador, ao colocar a sua primeira peça, terá que ter em conta que o adversário se aproprie da mesma peça e respectiva posição. Sem a *regra do equilíbrio*, John Nash prova a existência de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, através de uma demonstração por absurdo que é a seguinte: *"... nenhum jogo de Hex pode terminar empatado, logo, ou o primeiro ou o segundo jogador tem uma estratégia vencedora. Suponhamos que era o segundo jogador que, jogando perfeitamente, tem a vitória assegurada. Então o primeiro começa por jogar aleatoriamente, e encara-se como segundo jogador, roubando-lhe a estratégia vencedora que se supôs existir. Sempre que tiver de jogar onde, por acaso, já o tinha feito, torna a jogar à sorte… Assim, tem a vitória garantida, partindo do princípio de que há estratégia vencedora para o segundo. Resumindo: se admitirmos que o segundo jogador vai ganhar então… o primeiro ganha! Absurdo. Como alguém tem de dispor de uma estratégia vencedora, terá de ser o primeiro. Este argumento é agora clássico, e aplica-se a muitos jogos, tendo ficado conhecido por «argumento do roubo de estratégia»."*[30]

O *Hex* é considerado um jogo de conexão, já que cada jogador tem o objectivo de ligar dois lados opostos do tabuleiro, em forma de losango, através de um grupo, entendendo-se este, como *"um conjunto conexo de peças da mesma cor"*[31], (*in Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*). Nas págs. 91-93 deste livro são apresentados exemplos e estratégias de como estender um grupo. Não é boa estratégia colocar duas peças da mesma cor, consequentemente do mesmo jogador, em duas casas contíguas (ver figs. 36, 37 e 38).

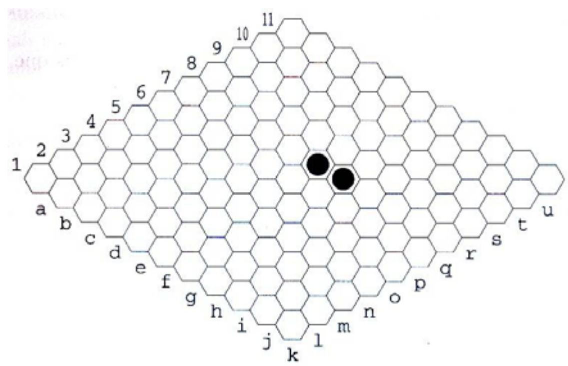


Fig. 36 – Casas contíguas (Jogo do *Hex*)[32]

[30] [45] pág. 91

[31] [45] pág. 90

[32] Imagem retirada de [45] pág. 90

"Aqui as peças em l7 e m7 estão demasiado perto uma da outra, contribuindo pouco para ligar as margens pretendidas. Por outro lado, uma extensão exagerada pode ser cortada pelo adversário.

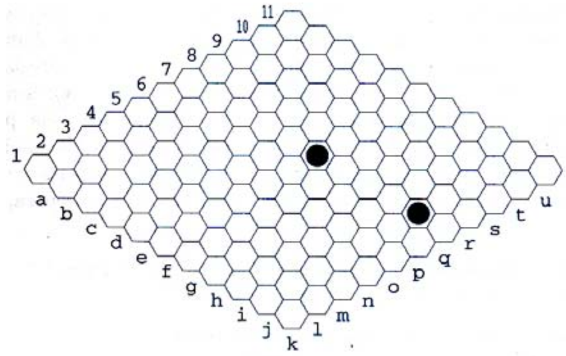


Fig. 37 – Estratégia (Jogo do *Hex*) [33]

Neste caso, as peças l7 e p7podem ser efectivamente separadas se as Brancas jogarem em n7.

Uma boa ligação, que não estende muito, mas é robusta, é a «ponte», que consiste em ter duas peças que partilhem a vizinhança de dois hexágonos:

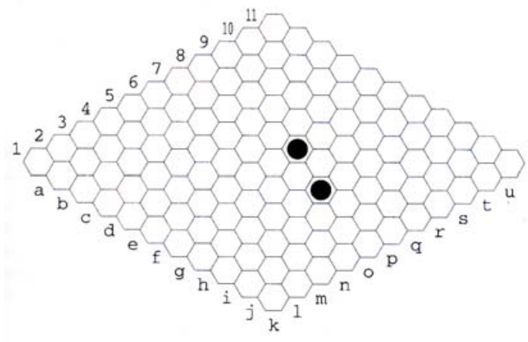


Fig. 38 – "Ponte" (Jogo do *Hex*) [34]

Aqui, se as Brancas tentarem cortar jogando em l6, as Negras respondem em m7, e se as Brancas jogarem em m7, as Negras respondem em l6. As duas peças negras podem, portanto considerar-se ligadas."

[33] Imagem retirada de [45] pág. 90

[34] Imagem retirada de [45] pág. 91

Por cada vitória obtida em cada partida, o jogador conseguia um ponto. Em caso de derrota eram atribuídos zero pontos.

Cada aluno efectuou duas partidas, uma contra cada um dos seus colegas, jogado alternadamente em primeiro lugar (peças azuis) e segundo (peças amarelas).
Os alunos definiram que não iriam aplicar a *regra do equilíbrio*. Foi uma medida acertada, pois também dificilmente iriam aproveitar devidamente essa regra, sobretudo por falta de conhecimentos e experiência acumulada.

Os resultados obtidos pelos alunos foram os seguintes:

Alunos	**Resultado**
A2-A1	1-0
A1-A2	0-1
A3-A1	1-0
A1-A3	1-0
A2-A3	0-1
A3-A2	1-0

Alunos	**Jogos**	**Vitórias**	**Derrotas**	**Pontuação**
A1	4	1	3	1
A2	4	2	2	2
A3	4	3	1	3

O aluno A3 percebeu mais facilmente algumas das estratégias conducentes à vitória e por esse motivo conquistou mais pontos.

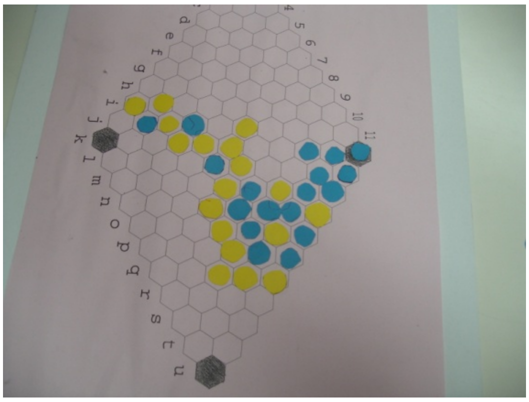


Fig. 39 – Partida concluída (Jogo do *Hex*)

Fig. 40 – Peças do Jogo do *Hex*

Para alunos pertencentes a escalões etários e de escolaridade mais avançados, o *Hex* permite desenvolver outro tipo de aprendizagens, como por exemplo a responder à questão: *se as células em vez de hexagonais fossem triangulares, quadradas ou pentagonais, a estratégia seria a mesma?*

Os alunos A1 e A2, ao contrário, do que se supunha, não acharam o jogo muito agradável, talvez por não terem assimilado suficientemente as regras, em virtude do curto tempo disponível para as explicar e tirar todas as dúvidas. Talvez devido ao modo aleatório como colocavam as peças no tabuleiro, sem conseguirem desenvolver e aplicar estratégias conducentes à vitória, tenha desmotivado e criado algum desinteresse nos dois alunos referidos. Apenas o aluno A3 achou o jogo interessante. De qualquer forma, aparentemente, o jogo serviu para os alunos compreenderem alguns conceitos e conhecimentos que o jogo pretendia fomentar.

Ouri

O *Ouri* é tradicionalmente praticado na África Ocidental, como por exemplo no país lusófono Cabo Verde.

"Para jogar «Ouri» é necessário um tabuleiro com 14 buracos, dois dos quais são designados por depósitos e é onde se guardam as capturas que ocorrem durante uma partida. Os restantes buracos (que designaremos por casas) estão divididos em duas filas de seis, cada uma pertencendo a um jogador."[35] Além do tabuleiro existem quarenta e oito peças idênticas em relação à cor, tamanho e forma, que podem ser

[35] [76] pág. 24

sementes ou pequenas pedras. Inicialmente, cada uma das doze casas contém quatro peças.

"*O «Ouri» é um jogo de captura. O objectivo do jogo é capturar mais de metade das peças. Quando isso ocorre, o jogo pode terminar de imediato com a vitória do jogador que conseguiu este objectivo. Como há 48 sementes no início, quem capturar 25 (ou mais) ganha a partida. Como o número de peças iniciais é par, é possível que o jogo termine num empate .... Os jogadores, ..., jogam alternadamente. Como decorre um semear? O jogador começa na casa à direita daquela que escolheu e coloca uma semente por cada casa no sentido contrário aos ponteiros do relógio. Se o jogador escolheu a sua casa mais à direita, a primeira casa que recebe uma semente é a casa do adversário imediatamente à frente (ou seja, a seguinte, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio).*"[36] O segundo jogador procede de igual forma.

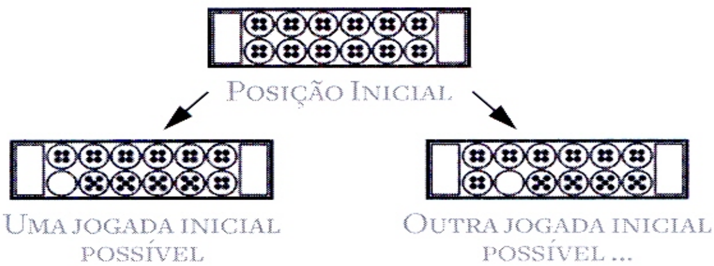


Fig. 41 – Jogo do *Ouri*[37]

Se uma casa tiver doze ou mais peças, o jogador não coloca qualquer peça na casa inicial (de onde partiu), saltando para as seguintes. Também se um jogador tiver na sua fila, casas com duas ou mais peças, não poderá jogar a partir de uma casa apenas com uma peça. Um jogador ao colocar a última peça numa casa do adversário e esta fique com duas ou três peças, todas essas peças são capturadas e colocadas no depósito do jogador que efectuou a jogada. Todas as casas anteriores à última (da fila do adversário), se também tiverem duas ou três peças, estas também são capturadas. Se um jogador não possuir peças em nenhuma casa da sua fila, o seu adversário terá que jogar de tal forma que coloque no mínimo uma peça na fila do jogador. Se tal não for possível, o jogador que tem peças na sua fila recolhe-as e o jogo termina, contando-se as peças que cada jogador possui no seu depósito e vencendo o jogador que possua maior quantidade de peças. Por vezes, pode acontecer, quando existem poucas peças, que uma

[36] [76] págs. 25-26

[37] Figura retirada de [76] pág. 46

determinada posição se repita ciclicamente, não havendo possibilidades de captura de peças. Neste caso, cada jogador recolhe as peças existentes na sua fila e o jogo considera-se terminado.

Segundo De Voogt, algumas versões do *Mancala* são mais complexas que o *Xadrez*, já que se neste uma peça é movida de cada vez, no Mancala podem ser movidas diversas peças de cada vez, modificando constantemente a configuração do tabuleiro. É um jogo que não depende do factor sorte, mas exclusivamente do raciocínio lógico e matemático.[38]

Embora seja um jogo muito antigo, o *Ouri* possui um componente de abstracção relativamente grande, podendo contribuir, mobilizar e motivar os alunos para aprendizagens matemáticas. A prática do *Ouri* permite desenvolver as capacidades de raciocínio, cálculo mental, concentração, estratégia e memorização, bem como o desenvolvimento pessoal e social.

"Em 2002, na Holanda, John Romein e Henri Bal, montaram 144 computadores em rede e criaram um sistema paralelo de computação muito poderoso com o objectivo de «resolver o Ouri». ... Para cada jogada que o primeiro jogador faça, o segundo jogador tem novamente um conjunto de opções e assim sucessivamente. ..., obteríamos o que se designa por árvore do jogo. ..., Romein e Bal fizeram os cálculos e chegaram à conclusão de que existem 889 063 398 406 (!) posições possíveis de distribuir as 48 sementes pelas 12 casas. ... O «Ouri» jogado de forma perfeita resulta sempre num empate (ou seja, 24 sementes para cada jogador)."[39]

O *Ouri* faz parte do grupo de jogos normalmente utilizados no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos. Na escola há vários alunos que o utilizam na Ludoteca. Foi experimentado na sala de aula e os alunos gostaram de o praticar. O jogo pode ser disputado recorrendo a alguns sites na *Internet*, quer na forma de jogador, versus computador ou entre dois jogadores. Os alunos gostam mais de praticar este jogo, recorrendo ao computador, talvez por uma questão ergonómica, uma vez que não dá muito jeito manusear as peças e estas visualizam-se menos utilizando-se o jogo construído. Também existe e pode ser adquirido no mercado, sendo o tabuleiro constituído por madeira e as peças constituídas por pequenas sementes.

---

[38] [36]

[39][76] págs. 46-48

Deste modo, como existiam algumas dificuldades em jogar com os materiais construídos, implicando alguma destreza motora, também se praticou o jogo através da *Internet*.[40]

No quadro seguinte estão indicados os jogos efectuados pelos alunos e respectivos resultados. Foi atribuído um ponto por vitória, zero pontos por derrota e 0,5 pontos por empate.

Alunos	**Resultado**
A2-A3	0-1
A3-A2	1-0
A1-A2	0,5-0,5
A2-A1	1-0
A1-A3	0-1
A3-A1	1-0

Como se pode verificar através do quadro, o aluno A3, obteve vitórias em todos os jogos efectuados. As razões para tal facto ter acontecido deveu-se à maior capacidade de concentração do aluno no jogo, bem como ao elevado interesse manifestado, que como consequência permitiu ao aluno efectuar cálculos matemáticos mais rigorosos e algum raciocínio preditivo.

Todos os alunos gostaram de praticar o jogo. Também disseram que gostavam de praticar o jogo mais vezes. Contudo, este jogo não foi praticado durante o tempo pretendido pelos alunos na sala de aula, uma vez que não houve disponibilidade de tempo para tal. O aluno A3 referiu que se utilizava neste jogo muita matemática. Contudo, os alunos gostaram mais de praticar o jogo utilizando suporte informático, do que com o jogo construído, pelos motivos já anteriormente aludidos.


Figs. 42 e 43 – Jogando o *Ouri*

[40] [19]

Anexos II

Inquérito – Avaliação efectuada pelos alunos

EB23MMS

Escola Básica 2º, 3º ciclos Mª Manuela Sá
S. Mamede de Infesta
Ano Lectivo 2008/2009

Nome do Jogo:
Data:

Avaliação efectuada pelos alunos

1) Percebeste as regras do jogo?

Sim ☐

Não ☐

Se respondeste Não indica as razões:
(escolhe uma ou mais opções)

- As regras eram muito confusas. ☐
- Tinha muitas regras. ☐
- Não gosto de ler as regras. ☐
- Gosto de começar logo a jogar. ☐
- Não tomei atenção à explicação das regras pelo professor. ☐
- As regras tinham muitos assuntos matemáticos que não percebia. ☐
- Outra razão ____.

2) Gostaste do jogo?

Sim ☐

Não ☐

Se respondeste Sim, indica as razões.
(escolhe uma ou mais opções)

- Aprendi matemática com este jogo. ☐
- Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo. ☐
- Percebi bem o jogo. ☐
- As regras eram fáceis de entender. ☐
- Porque me diverti a jogar ☐
- Outra razão ____.

Se respondeste Não, indica as razões.
(escolhe uma ou mais opções)

- Não aprendi matemática com este jogo. ☐
- Não gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo. ☐
- Não percebi o jogo. ☐
- As regras eram difíceis de entender. ☐
- Porque não me diverti a jogar. ☐
- Outra razão ____.

3) Para ti, a realização deste jogo contribuiu para
(escolhe uma ou mais opções):

- Maior aprendizagem de Matemática. ☐
- Maior interesse pela disciplina. ☐
- Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas. ☐
- Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina. ☐
- Outra razão ____.

4) Achas que deveríamos praticar mais vezes este jogo?

Sim ☐

Não ☐

Se respondeste Sim, indica porquê.

____

____.

Obrigado.

A avaliação efectuada pelos alunos para cada um dos jogos realizados e para cada questão está descrita nos quadros seguintes.

Aluno A1

Questão 1 Percebeste as regras do jogo?	Sim	Não
Jogo do 24	X	
SuperTmatik	X	
Jogo do 31	X	
Nim	X	
Condicionado	X	
Jogo da estrela	X	
Atirar ao alvo	X	
Detective dos números	X	
Grão a grão	X	
É esticá-lo	X	
Ge-Ó-Pá	X	
Ten points	X	
Semáforo	X	
Hex	X	
Ouri	X	

Questão 2- Gostaste do jogo?	Sim. Indica as razões.	Não. Indica as razões.
Jogo do 24	Aprendi matemática com este jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
SuperTmatik		Porque não me diverti a jogar.
Jogo do 31	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Nim	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Condicionado	Aprendi matemática com este jogo; Porque me diverti a jogar.	
Jogo da estrela	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Porque me diverti a jogar.	

Atirar ao alvo	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Porque me diverti a jogar.	
Detective dos números	Aprendi matemática com este jogo.	
Grão a grão	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; Porque me diverti a jogar.	
É esticá-lo	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Ge-Ó-Pá	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Ten points	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Porque me diverti a jogar.	
Semáforo	Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Hex		As regras eram difíceis de entender; Porque não me diverti a jogar.
Ouri	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; Porque me diverti a jogar.	

Questão 3- Para ti, a realização deste jogo contribui para:	
Jogo do 24	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
SuperTmatik	Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Jogo do 31	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Nim	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas;
Condicionado	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Jogo da estrela	Maior aprendizagem de Matemática; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Atirar ao alvo	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.

Detective dos números	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Grão a grão	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
É esticá-lo	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Ge-Ó-Pá	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Ten points	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas;
.Semáforo	Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
Hex	Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
Ouri	Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.

Questão 4- Achas que deveríamos praticar mais vezes este jogo?	Sim	Não
Jogo do 24	Gosto de jogar e aprender cálculo mental.	
SuperTmatik		X
Jogo do 31	É interessante. Fácil de jogar.	
Nim	É interessante.	
Condicionado	Aprende-se matemática.	
Jogo da estrela	Aprende-se a fazer contas.	
Atirar ao alvo	Aprende-se matemática.	
Detective dos números	É interessante.	
Grão a grão	É interessante.	
É esticá-lo	Aprende-se matemática. Desenvolve-se a inteligência.	
Ge-Ó-Pá	Aprendi sobre ares e perímetros.	
Ten points	Jogar com dados e fazer pontos.	
Semáforo	Desenvolve a inteligência.	
Hex		X
Ouri	É divertido.	

Aluno A2

Questão 1 Percebeste as regras do jogo?	Sim	Não
Jogo do 24	X	
SuperTmatik	X	
Jogo do 31	X	
Nim	X	
Condicionado	X	
Jogo da estrela	X	
Atirar ao alvo	X	
Detective dos números	X	
Grão a grão	X	
É esticá-lo	X	
Ge-Ó-Pá	X	
Ten points	X	
Semáforo	X	
Hex	X	
Ouri	X	

Questão 2- Gostaste do jogo?	Sim. Indica as razões.	Não. Indica as razões.
Jogo do 24	Aprendi matemática com este jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
SuperTmatik		As regras eram difíceis de entender; Porque não me diverti a jogar.
Jogo do 31	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Nim	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Condicionado	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; Porque me diverti a jogar.	
Jogo da estrela	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	

Atirar ao alvo		Porque não me diverti a jogar.
Detective dos números	Aprendi matemática com este jogo.	
Grão a grão	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo;	
É esticá-lo	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Ge-Ó-Pá	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Ten points	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Semáforo	As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Hex		Não aprendi matemática com este jogo; Porque não me diverti a jogar;
Ouri	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; Porque me diverti a jogar.	

Questão 3- Para ti, a realização deste jogo contribui para:	
Jogo do 24	Maior aprendizagem de Matemática; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
SuperTmatik	Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Jogo do 31	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Nim	Maior aprendizagem de Matemática; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas;
Condicionado	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdo da disciplina.
Jogo da estrela	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.

Atirar ao alvo	Maior aprendizagem de Matemática; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Detective dos números	Maior aprendizagem de Matemática; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Grão a grão	Maior aprendizagem de Matemática; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
É esticá-lo	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Ge-Ó-Pá	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Ten points	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas;
.Semáforo	Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
Hex	Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
Ouri	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas;

Questão 4- Achas que deveríamos praticar mais vezes este jogo?	Sim	Não
Jogo do 24	É interessante.	
SuperTmatik		X
Jogo do 31	Pensamos. Fazemos contas.	
Nim	As contas são fáceis.	
Condicionado	Gosto do jogo.	
Jogo da estrela	É interessante.	
Atirar ao alvo	É interessante.	
Detective dos números		X
Grão a grão	Para descobrir números.	
É esticá-lo	É interessante.	
Ge-Ó-Pá	Trabalhar com o geoplano.	
Ten points	É interessante. Fazer pontos.	
Semáforo	É interessante.	
Hex		X
Ouri	É engraçado.	

Aluno A3

Questão 1 Percebeste as regras do jogo?	Sim	Não
Jogo do 24	X	
SuperTmatik	X	
Jogo do 31	X	
Nim	X	
Condicionado	X	
Jogo da estrela	X	
Atirar ao alvo	X	
Detective dos números	X	
Grão a grão	X	
É esticá-lo	X	
Ge-Ó-Pá	X	
Ten points	X	
Semáforo	X	
Hex	X	
Ouri	X	

Questão 2- Gostaste do jogo?	Sim. Indica as razões.	Não. Indica as razões.
Jogo do 24		Não aprendi matemática com este jogo; Não gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Porque não me diverti a jogar.
SuperTmatik	Aprendi matemática com este jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Jogo do 31	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Nim	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Condicionado	Aprendi matemática com este jogo; Porque me diverti a jogar.	
Jogo da estrela	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	

Atirar ao alvo	Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Porque me diverti a jogar.	
Detective dos números	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo.	
Grão a grão	Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo.	
É esticá-lo	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Ge-Ó-Pá	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	
Ten points	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo.	
Semáforo	Percebi bem o jogo; Porque me diverti a jogar.	
Hex	Aprendi matemática com este jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender. Porque me diverti a jogar.	
Ouri	Aprendi matemática com este jogo; Gosto dos assuntos matemáticos tratados no jogo; Percebi bem o jogo; As regras eram fáceis de entender; Porque me diverti a jogar.	

Questão 3- Para ti, a realização deste jogo contribui para:	
Jogo do 24	
SuperTmatik	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Jogo do 31	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Nim	Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas;
Condicionado	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Jogo da estrela	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.

Atirar ao alvo	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Tirar dúvidas sobre o conteúdo das disciplinas.
Detective dos números	Maior aprendizagem de Matemática; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Grão a grão	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
É esticá-lo	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Ge-Ó-Pá	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas; Tirar dúvidas sobre conteúdos da disciplina.
Ten points	Maior aprendizagem de Matemática; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas;
.Semáforo	Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
Hex	Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.
Ouri	Maior aprendizagem de Matemática; Maior interesse pela disciplina; Fortalecer o convívio entre mim e os meus colegas.

Questão 4- Achas que deveríamos praticar mais vezes este jogo?	Sim	Não
Jogo do 24		X
SuperTmatik	Gosto de jogar e fazer frases. Ajuda nas contas.	
Jogo do 31	Cálculo mental.	
Nim	Ajuda a pensar.	
Condicionado	Escrever números.	
Jogo da estrela	Utiliza-se a calculadora.	
Atirar ao alvo	Ajuda a melhorar as contas.	
Detective dos números	Descobrir números.	
Grão a grão	Descobrir números.	
É esticá-lo	Trabalhar com elásticos e o geoplano.	
Ge-Ó-Pá	Aprender as áreas de figuras.	
Ten points	É interessante.	
Semáforo	É divertido.	
Hex	Aprende-se matemática. É divertido.	
Ouri	Joga-se no computador. Temos que fazer contas.	

Anexos III

Gestão do programa curricular

Agrupamento Vertical de Escolas de S. Mamede de Infesta Ano lectivo de 2008 / 2009		
	DISCIPLINA	Matemática
	PROFESSOR RESPONSÁVEL	Abílio Quintas
	ANO E TURMA	6º C (CEI)

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS	CONTEÚDOS	Nº DE AULAS	REFORMULAÇÃO
→ Ler, escrever, comparar e ordenar números inteiros e decimais. → Compreender e utilizar as propriedades das operações básicas. → Resolver problemas utilizando as 4 operações aritméticas. → Seleccionar e usar diferentes metodologias de cálculo: mental, papel e lápis e máquina calculadora. → Investigar, compreender e utilizar sequências com números inteiros. → Identificar e classificar polígonos e sólidos geométricos e compará-los com elementos existentes na natureza. → Desenhar planificações e construir modelos de sólidos geométricos (prismas e pirâmides). → Distinguir e compreender os conceitos de perímetro e área, bem como resolver problemas que envolvam áreas e perímetros. → Reconhecer divisores e múltiplos de um número natural. → Compreender e aplicar os conceitos de comprimento, capacidade e massa. → Resolver problemas que envolvam moedas e notas de euro. → Medir e estimar comprimentos. E trabalhar com valores aproximados sempre que se justifique. → Aplicar os termos provável, certo, impossível a situações concretas. Tirar conclusões de experiências simples relacionadas com probabilidades. → Ler e interpretar informação apresentada em tabelas e gráficos e organizar os dados na forma de tabelas de frequência absolutas, representando-as através de pictogramas e gráficos de barras.	1º Período		
	Números inteiros e decimais.	10	8
	Comparação e ordenação de números inteiros e decimais.	10	
	Adição e subtracção de números inteiros e decimais.	16	
	Multiplicação de números inteiros e decimais.	16	
	2º Período		
	Divisão com números inteiros e decimais.	16	
	Unidades de medida de comprimento, capacidade e massa. Moedas e notas de euro.	20	18
	Polígonos e sólidos geométricos.	10	
	3º Período		
	Perímetros. Áreas.	20	
	Probabilidades. Estatística: tabelas, gráficos e pictogramas.	10	
	Total	128	124

Períodos	Nº de aulas previstas	Nº de aulas dadas
1.º	52	50
2.º	46	44
3.º	30	30

ADAPTAÇÃO/ADEQUAÇÃO DO CURRÍCULO À TURMA:

Dificuldades Registadas		Estratégias de Ensino Diversificado
Turma (Geral)		
Casos Específicos		
N.E.E	Três alunos.	De acordo com as estratégias delineadas no seu Programa Educativo Individual.
Instrumentos / Processos de Avaliação a Privilegiar		
De acordo com o De. Lei nº 3 de 2008. Avaliação sistemática e contínua através da observação de comportamentos e aquisições. Valorização do empenho na realização das tarefas. Valorização do cumprimento de regras na sala de aula. Diversificação das actividades. Será prestado esclarecimento ao aluno durante a realização das tarefas e dos testes. Será dado aos alunos o tempo necessário para a realização das tarefas e dos testes. Actividades de carácter lúdico-manipulativo para o desenvolvimento de competências matemáticas.		

AVALIAÇÃO DA ADAPTAÇÃO RELATIVAMENTE À SUPERAÇÃO DAS DIFICULDADES:

	AVALIAÇÃO	ASPECTOS A REFORMULAR
1.º PERÍODO	De acordo com o estipulado no PEI.	
2.º PERÍODO	De acordo com o estipulado no PEI.	
3.º PERÍODO	De acordo com o estipulado no PEI.	