

Américo Luís Carvalho Fernandes

EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO
Uma perspectiva histórica

Dissertação submetida à Universidade Portucalense Infante D. Henrique para
cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em
Matemática/Educação

Trabalho realizado sob a orientação do Prof. Doutor António Machado Moura



UNIVERSIDADE PORTUCALENSE

UNIVERSIDADE PORTUCALENSE

DEPARTAMENTO DE INOVAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Setembro 2009

EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO

Uma perspectiva histórica

Resumo:

A evolução do conceito de número, objecto do interesse do autor pela importância da sua abordagem no exercício da docência no Ensino Básico e Secundário, é apresentada numa perspectiva histórica e evolutiva, desde os processos de contagem oral, passando pela representação concreta e pela representação simbólica dos números em diferentes sistemas e bases, que são sumariamente descritas. O aparecimento de números cuja origem é associada a problemas de medida é tratado antes do cálculo, descrevendo-se, de seguida, a evolução dos processos de cálculo aritmético até ao aparecimento do cálculo escrito tradicional, salientando-se o papel do aparecimento do zero e da sua aceitação como número, bem como da formalização das regras de operação com números negativos nesse processo. É referido o surgimento da Álgebra como processo de formalização de problemas com números e apresentada uma perspectiva da evolução moderna dos números e da ciência dos números, com as tentativas de fundamentar neles toda a Matemática; apresenta-se a evolução das abordagens de fundamentação e de rigor inspiradas na axiomática da Geometria e o aparente ascendente da Álgebra sobre a Geometria com a criação da Geometria Algébrica ou Analítica. O aparecimento da Análise Infinitesimal, aceite porque funcionava bem apesar de toda a crítica, obrigou a reflexão profunda sobre os alicerces do edifício científico da Matemática, aprofundando-se os argumentos para superar paradoxos e antigos medos do infinito e do infinitamente pequeno até se obter, numa sequência cronológica ilógica, as bases lógicas da Aritmética.

Esta evolução e a impossibilidade de construir um sistema logicamente sólido e irrefutável conduzem-nos a uma visão da actividade matemática como facto ligado a modos de raciocínio e argumentos acerca de ideias aliantes. Ao contrário do que é comum referir, a Matemática não é mais uma ciência exacta, mas “falível, corrigível e com significado”.

Em anexo, apresenta-se um conjunto de propostas de animação e actividades matemáticas relacionadas com a Idade Média, pensadas para um contexto de Feira Medieval que a Escola pretende realizar.

Evolution of the number concept, an historical perspective

ABSTRACT

The evolution of the number concept, subject of interest to the author by its importance in his activity as a teacher, is presented in an historical perspective: oral counting processes, symbolic representation, numbers to solve measure problems and questions related to arithmetic calculation procedures are referred, just to the discovery of traditional written calculation algorithms. The importance of zero and negative numbers in this process is discussed. It is also mentioned the origin of Algebra to formalize problems with numbers and the attempt to give to Arithmetic an axiomatic system of validation is presented, since its foundations were not effectively as solid as those of Geometry and a process of creation of algebraic geometry was running. Analysis, largely criticized, forced this way of rigor demand and the rigorous foundations of Arithmetic occurred in an illogical process, from the complex to the natural numbers. In this way, theories and arguments to overpass ancient fears and paradoxes were created, but conducting to a science that is no more an exact science: it's a fact, dealing with ways of reasoning and arguments about ideas and can fail and corrected.

As an annexe, a set of mathematics activities for the School's Medieval Fair is presented.

Índice

Introdução.....	8
1 - Números e contagem.....	12
1.1 - Uma pré-história do número?.....	13
1.2 – Representações “concretas” de números.....	13
1.3 – As origens do sistema de contagem com palavras	16
1.5 - Origens dos sistemas de registo codificado	17
1.6 – Diferentes sistemas, bases e símbolos: alguns exemplos	18
1.6.1 - O sistema sexagesimal da Babilónia.....	18
1.6.2 - O sistema egípcio	19
1.6.3– Hebreus e Gregos.....	20
1.6.4 – Os romanos.....	21
1.6.5 - Na China	21
1.6.6 – Na Índia, passando pela Arábia.....	21
2 - Números e Medição: as fracções.....	23
3 - Os números e o cálculo	29
3.1 – A primeira calculadora: 2 mãos, 10 dedos.	30
3.2- O cálculo à maneira egípcia	32
3.3 – Ábacos	32
3.4 – O cálculo escrito, a invenção do zero e dos números negativos.....	35
3.5 - Na China e na América.....	37
4 – Problemas com números. A Álgebra.....	39

5 - A construção de uma ciência baseada nos números.....	41
5.1 - A Escola Grega	41
5.2 – A escola de Alexandria.....	45
5.3 - Os árabes e a sua importância na história dos números.....	46
5.4 – O Renascimento e os números complexos.....	47
5.5 - Base da ciência Matemática: a geometria ou os números?.....	53
5.6- Newton, Leibnitz e os infinitésimos e infinitamente grandes	54
5.7 – Número, o que é?.....	55
6 – Complexos e Hipercomplexos.....	57
7 – A procura dos fundamentos	59
11 - Conclusão.....	61
Bibliografia.....	65
ANEXO	66

Índice de Ilustrações

Fig. 1-“Tally stick”, figura de http://www.edge.org/3rd_culture/dyson08.1/dyson08.1_index.html	14
Fig. 2 – Quipu Inca – foto do Museu Larco – Lima –Perú –retirada de http://www.inkas.com/tours/lima/larco/museo_larco.html	15
Fig. 3- “Bulla” e “tokens” , imagem de http://www.earth-history.com/Sumer/Clay-tablets.htm	17
Fig. 4 –“Plimpton 322”- da coleção Plimpton da Universidade de Columbia, USA. Uma tabela matemática de ternos pitagóricos. Retirada de http://www.historyofscience.com/G2I/timeline/index.php/index.php?era=-8000	18
Fig. 5 Tabuada de multiplicação, de http://www.earth-history.com/Sumer/Clay-tablets.htm	18
Fig. 6- Parte do Papiro de Rhind – Retirada de http://www.egypte-ancienne.fr/papyrus_mathematiques.htm	19
Fig. 7 -Ilustração contida na “ <i>Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita</i> ”, de Luca Pacioli (1445-1509) de 1494 , figura retirada de http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2591&bodyId=3055	30
Fig. 8 – Mesa de cálculo de Salamis – figura de http://www.historyofscience.com/G2I/timeline/index.php/index.php?era=-300	33
Fig. 9 – Ábaco de bolso romano – Foto do Museo Nazionale Romano at Piazzale delle Terme, Rome, retirada de http://tertisco-alexandru.com/abacus_project.html	34
Fig. 10 – “Soan-Pan” chinês – Foto retirada de http://tertisco-alexandru.com/abacus_project.html	35
Fig. 11 – Arithmetica de Gregor Reisch, 1503. Simbolicamente, Boécio (algorista) compete com Pitágoras, (abacista) no cálculo aritmético. Figura retirada de http://www.mlahanas.de/Greeks/Counting.htm	49

Introdução

Estudar a evolução do conceito de número ao longo da história da humanidade é estudar boa parte da história da Matemática. Na origem desta ciência está o NÚMERO - o número inteiro criado pela necessidade da contagem, logo depois associado à “magnitude”, que davam sentido a uma muito antiga definição de Matemática: “ a ciência do número e da magnitude”.

A evolução do conceito de número tem sido estudada em diversos domínios:

- na Antropologia, que da observação e da análise dos relatos do modo de vida de tribos isoladas tenta perceber a evolução do conceito através da linguagem utilizada, da forma como é feita a contagem e dos símbolos utilizados. Estas análises permitem estabelecer paralelos com o que poderá ter acontecido na antiguidade.

- na Linguística, que procura encontrar a origem e a evolução dos termos usados na contagem, a sua permanência ao longo da história e as associações que explicam origens e percursos evolutivos comuns.

- pelos biólogos e cientistas da evolução da vida que procuram entender a extensão da capacidade de contagem de alguns animais e mesmo a possibilidade de realização de operações mentais.

- pelos psicólogos, nomeadamente os que se dedicam à psicologia infantil, que, com os cientistas da educação, procuram perceber a evolução da aprendizagem humana do conceito de número e, eventualmente, encontrar caminhos e processos de melhoria das aprendizagens.

Os vários caminhos de pesquisa têm pontos comuns e estabelecem-se relações entre as diversas teorias que eventualmente se completam. O que é maravilhoso é ver-se, a cada dia, retomar-se, em cada pessoa que cresce, uma evolução conceptual que partindo de uma base de “hardware biológico”, digamos assim, que será idêntico ao que era há centenas e

há milhares de anos, que será idêntico nos cinco continentes habitados e verificar que há evolução e progresso científico neste campo. A diversidade de tal evolução é condicionada, naturalmente, pela riqueza cultural do meio em que se realiza, pela possibilidade de potenciar as capacidades inatas dos mais dotados e por outras condicionantes, onde poderemos incluir a valorização da criatividade e da curiosidade humanas.

Os historiadores, nomeadamente os historiadores da ciência e particularmente os investigadores da história da Matemática, ao procurar descrever a evolução dos conceitos no contexto da evolução da própria ciência, abrem perspectivas relativamente à evolução futura. E ajudam a desenvolver a riqueza cultural do meio social onde se realiza a aprendizagem, com vista ao desenvolvimento pessoal dos indivíduos e da ciência em geral.

No caso particular da didáctica da Matemática, tem vindo a ser valorizada a introdução do enquadramento histórico das noções e das teorias e abordagens utilizadas como meio de melhoria dos processos de ensino e aprendizagem. Não se trata de reconstituir os todos os caminhos de aprendizagem numa perspectiva construtivista de que significativa é a aprendizagem que se descobre... Trata-se, isso sim, de enquadrar e relevar as respostas já dadas a questões que já têm por trás de si uma longa história de avanços e recuos, de abordagens conseguidas e de tentativas falhadas, de caminhos que se abriram para responder a questões em aberto em certas épocas e que podem, de novo, ser retomados em estádios muito mais avançados.

A dimensão histórica ajuda a abordar a Matemática como um processo contínuo de reflexão e desenvolvimento que se vem desenrolando ao longo do tempo e não, como porventura possa parecer, uma estrutura rígida e inabalável feita de verdade eterna, imutável e irrefutável. Pensar na Matemática como uma actividade intelectual mais do que como produto acabado significa pensar em problemas a serem resolvidos, pensar na importância das conjecturas e no valor da intuição. O aluno toma o papel do investigador. A história ajuda o professor a compreender as etapas do processo de aprendizagem e a propor problemas inspirados na história. A análise histórica pode ajudar o professor a compreender porque é que determinado conceito é difícil para os alunos e a descobrir a melhor estratégia de ensino e de desenvolvimento. O professor pode adoptar uma atitude construtiva em relação aos erros dos estudantes e pode abrir perspectivas para a variedade de respostas para um problema dado, interligando domínios (geometria, álgebra, análise...) e diferentes formas de pensar acerca de conceitos e ferramentas. O conhecimento da

evolução histórica dos conceitos matemáticos ajuda o professor a reflectir sobre a necessidade de dar tempo para o adequado desenvolvimento da compreensão Matemática: passaram-se séculos para que grandes pensadores integrassem de forma segura determinados conceitos no corpo de conhecimento matemático, pelo que não podemos exigir dos alunos imediata assimilação. E mesmo que os estudantes sejam, de alguma forma, conduzidos a construir o seu conhecimento matemático num caminho análogo ao do desenvolvimento histórico, isso não significa, necessariamente, que haja relação íntima entre a construção do estudante e a sequência histórica, visto haver grande diferença de condicionantes e os obstáculos a superar não são os mesmos. E, saber da existência de determinados obstáculos já constitui uma vantagem. Saber que grandes matemáticos cometeram erros e foram alvo de ataques e de incompreensões pode dar algum conforto ao aprendiz.

Por outro lado, o desenvolvimento individual no que respeita ao conhecimento da Matemática tem algum paralelo com o desenvolvimento histórico, pelo menos ao nível dos conhecimentos fundamentais e isso pode ser potenciado no caso de o professor conhecer a evolução histórica de tais conhecimentos. Por outro lado, a aprendizagem da Matemática, sendo “socialmente construída” ou socialmente mediada, é facilitada quando o aluno provém de meio social culturalmente e matematicamente rico e é dificultada quando o meio de origem contém factores sociais de “resistência” (aberta e franca ou apenas subtil e discreta) e de rejeição. A análise da evolução histórica de certos conceitos ou procedimentos pode ajudar a desenvolver as capacidades ou a superar as dificuldades, conforme os casos. Muitas das resistências que um educador matemático verifica existem não são consequência das dificuldades intrínsecas dos assuntos tratados mas da atitude perante eles. A perspectiva histórica pode ajudar o aluno a uma mudança na concepção que tem da disciplina e na sua atitude em relação a ela, procurando perceber as suas ferramentas, métodos e conceitos.

A evolução do conceito de número é uma ideia-chave do Programa do Ensino Básico, pretendendo-se, de acordo com o programa, promover a compreensão dos números e das operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo. No caso do Ensino Secundário o conjunto dos números reais é extensivamente tratado e são trabalhados os números complexos. Foi a necessidade de aprofundamento das raízes históricas do conteúdo destes temas que me levou a efectuar a pesquisa que deu origem a este trabalho. Sendo a pesquisa muito mais agradável do que a produção de texto, não

deixa de ser gratificante conseguir levar ao fim a tarefa, mau grado os erros e insuficiências que possa conter. E se este trabalho puder contribuir positivamente para uma melhoria nos domínios referidos, daremos por bem empregue o esforço dispendido na sua realização.

1 - Números e contagem

Deus criou os inteiros. (Leopold Kronecker, 1823-1891)

Não é possível estabelecer como e quando surgiu a necessidade de contar. Talvez os fenómenos naturais que se repetem ciclicamente tenham, por si mesmos, estimulado o sentido de contagem numa perspectiva de prever ou antever a sua realização. A sucessão dos dias e das noites, as fases da Lua, os ciclos das estações deverão ter dado origem a registos de contagem que terão precedido, eventualmente, outro tipo de registos relacionados com a propriedade (de cabeças de gado ou de outros bens) ou com o resultado de algum acontecimento. A contagem surge como uma necessidade, como resposta a um problema prático de percepção da realidade ou de comunicação.

Contamos usando palavras: contar é associar palavras de uma sequência abstracta pré-definida às coisas que contamos. Esta associação é uma relação um-a-um entre os elementos (objectos) do conjunto ordenado a contar e os elementos (as palavras) do conjunto ordenado das palavras que constituem o sistema de contagem.

Cada cultura tem definido o seu conjunto das palavras usado para efeitos de contagem e essa ferramenta encontra-se disponível de forma abstracta, para utilização com as entidades que alguém se proponha contar: são palavras usadas como etiquetas de posição das entidades a contar, de modo que a última etiqueta refira a “cardinalidade” ou o número de elementos do conjunto.

Um sistema de contagem baseado num conjunto de palavras tem, potencialmente, a possibilidade de contar para além do que é fisicamente possível contar: ele incorpora a ideia de progressão infinita (cada número tem um sucessor e esse sucessor é designado à custa do seu predecessor).

Esta ideia básica de contagem utiliza a noção de numeral para representação do número. Importa distinguir com clareza que numeral é qualquer tipo de representação do conceito (abstracto) de número; a representação escrita pode ser feita pelas palavras em extenso ou pela representação simbólica utilizando algarismos.

A análise da evolução dos sistemas de contagem e da representação simbólica do número é assunto da História e, pelo que se conhece, a história dos números enforma toda a história da civilização.

1.1 - Uma pré-história do número?

Karl Menninger (Menninger, 1969) refere testemunhos relativos a uma tribo sul-americana que não conhecia mais do que três palavras para os números e que, durante uma deslocação em massa por motivos de ausência de meios de subsistência, era capaz de detectar, num ápice, a ausência de um dos seus cães.

Ao nível mais fundamental, seja na evolução individual da criança, seja no que os historiadores e os linguistas nos permitem inferir do desenvolvimento das sociedades, existe uma consciência fundamental da oposição *eu – outros*, uma dicotomia *singular - plural*, a *unidade* face ao *muitos*. A criança pequena começa com essa distinção e estudos efectuados de há longos anos permitem assegurar que os animais o fazem também, de forma intuitiva.

Talvez mais do que isso, como faz o pássaro, a quem foi retirado um ovo do ninho, que vai de imediato repor. Poderá haver como que um sentimento cinestésico de ausência de algo em relação a um padrão.

Muitos animais possuem, de algum modo, esse sentido de número: de forma rudimentar distinguem quantidades concretas. Mas podem, ainda discernir sobre a comparação entre quantidades (Ifrah, 1994).

1.2 – Representações “concretas” de números

A comunicação não verbal usada quando falha a comunicação verbal entre povos de língua diversa utilizou, desde sempre (podemos imaginar) uma ferramenta ligada com a ideia de número: os dedos da mão humana. Para além das situações de ajuda à contagem e ao cálculo, a utilização de sinais codificados dos dedos das duas mãos para a representação do número foi muito vulgarizada e manteve-se em uso, em certas civilizações, até épocas recentes.

A outro nível de necessidade de fixação de informação, pequenos entalhes em diversos suportes foram usados como registo numérico desde muito cedo na história da humanidade. Uma descoberta arqueológica dos anos setenta do século vinte, um osso de babuíno, é considerada o artefacto matemático mais antigo da humanidade (35 000 anos AC), antecipando em alguns milhares de anos o já anteriormente conhecido osso de lobo encontrado na Checoslováquia em 1937; neste, verifica-se a existência de 55 entalhes, parte dos quais agrupados de cinco em cinco. Um outro osso, conhecido por “Osso de Ishango”, cuja datação remete para 20 000 anos a.C. permite supor a possibilidade de ser originário de uma civilização com algum conhecimento matemático, visto poder significar mais do que um simples registo numérico.

Parece possível concluir que os registos numéricos do tipo dos referidos anteciparam em muito o aparecimento da escrita.

Os registos numéricos por entalhe em pedaços de madeira foram utilizados durante milénios como forma de registo de números relacionados com transacções comerciais e respectivos débitos e créditos. O Tesouro Britânico usou os “Exchequer Tallies” até ao século XIX, praticamente sem alterações desde o século XII (Menninger, 1969). Georges Ifrah refere ter ainda visto este tipo de registo em uso numa padaria rural francesa cerca de 1970 (Ifrah, 1994).

É interessante observar a existência de outros registos de tipo concreto, digamos assim, que revelam a imaginação da espécie humana: os Quipus, registos numéricos em cordas usados pela civilização Inca na América do Sul e testemunhados pelos invasores espanhóis. Trata-se de um processo de registo à base de nós feitos em cordas coloridas e agrupadas de várias maneiras a intervalos regulares. Este sistema permitia o registo de dados numéricos relativos a variadas circunstâncias, normalmente com intuito contabilístico ou de censo populacional, usando códigos de cores que podiam,

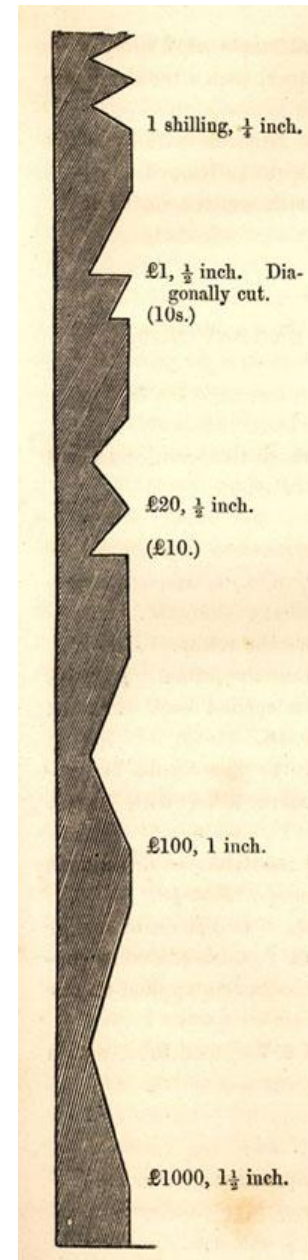


Fig. 1-“Tally stick”, figura de http://www.edge.org/3rd_culture/dysong08.1/dysong08.1_index.html

eventualmente, não ter um significado concreto mas referir-se a uma ideia (Ifrah, 1994). O sistema de contagem utilizado era um sistema decimal e a existência de uma rede de oficiais permitia, com eficiência, fazer chegar à capital do império informações detalhadas dos censos populacionais, da produção agrícola, etc. A simplicidade e eficiência do sistema permitiu que perdurasse em certas zonas do Perú e da Bolívia pelo menos até ao século XIX. E ainda hoje, refere Ifrah, um sistema derivado do Quipu, o Chimpu é usado pelos nativos na Bolívia e no Perú.

Os registos numéricos dos Quipus feitos em cordas com nós podiam, eventualmente, permitir alguma liberdade na utilização da simbologia das cores para representar o objecto da contagem. Os entalhes não permitem tal facilidade. A necessidade de registo e controle de quantidade (o que é o mesmo que o controle da riqueza de uma comunidade) e da respectiva evolução levaram a humanidade à utilização de outros artifícios para o efeito. As pequenas pedras, cálculos na designação latina (e ainda actual, quando se fala de pedras nos rins...) foram sempre usadas na



Fig. 2 – Quipu Inca – foto do Museu Larco – Lima –Perú –retirada de http://www.inkas.com/tours/lima/larco/museo_larco.html

aprendizagem da contagem e na aritmética fundamental: daí a palavra calcular, que em diversas línguas provem da mesma raiz.

Essas pequenas pedras, que por comodidade designaremos a seguir por *contas* não resolveram, de forma prática a questão da representação de grandes quantidades. Um primeiro passo na evolução, utilizando uma base de contagem, foi a atribuição de um valor convencional de diferente ordem ou grandeza a pedras de diferentes tamanhos. Para superar as dificuldades práticas do sistema, relativamente à identificação das diferenças e à disponibilidade de quantidades de elementos diferentes na forma e /ou no tamanho, recorreu-se, na Mesopotâmia, à terra moldável, a argila, possibilitando o fabrico de pequenos símbolos de contagem de forma regular, anteriores à invenção da escrita e dos numerais escritos (Ifrah, 1994).

Numa primeira fase, referenciado desde o IX ao VII milénio A.C. na Mesopotâmia, tais *contas* de argila seriam figurativas, pretendendo, supõe-se, representar o objecto da contagem, com se fossem uma espécie de pictogramas tridimensionais (Ifrah, 1994). Muitas dessas *contas*, correspondendo a épocas não anteriores ao IV milénio A.C., foram encontradas dentro de pequenas bolas esféricas, ocas, com formato de ovos, onde foram colocadas e depois fechadas com uma tampa, o que permitia uma melhoria na segurança da informação, pela permanência do conjunto. Os historiadores apresentam estes pequenos objectos como pictogramas tridimensionais de produtos específicos, usados contabilisticamente em transacções comerciais. Estas *contas* simbolizavam os próprios objectos que contavam.

1.3 – As origens do sistema de contagem com palavras

A ideia de *plural* versus *singular*, associada à possibilidade de identificação de objectos em pares (duas mãos, dois olhos, dois pés...) terá levado à consolidação de um conceito que, de um ponto de vista linguístico, pode ter paralelo na relação eu – tu. A partir deste conceito poderá ter-se iniciado um estímulo adequado para a emergência de um conceito de palavra-número, criando-se a linguagem de base para aplicação à unidade, para o par e para mais que duas unidades.

A ter sido assim, a primeira barreira conceptual, linguística e de representação seria o número três, inicialmente assimilado a *muitos*. A escrita dos Egípcios e dos Chineses perpetuou este estágio conceptual mais antigo de três, sinónimo de muitos, representando três vezes o símbolo correspondente a determinado conceito para transmitir, precisamente, a ideia de plural. O mesmo autor refere uma tribo que contando de dois em dois com as palavras disponíveis “urapun, okasa, okasa urapun, okasa okasa,..., que nos espanta contando para além do dois, sem ser capaz de contar até três...” (Menninger, 1969, p. 17)

Por outro lado, a permanência de modos de conjugação (masculino, feminino e singular, plural) em várias línguas de origem Indo-Europeia, das palavras usadas para a unidade e o par, reflectem essa mesma ideia de “barreira conceptual” do três.

Acrescente-se a dificuldade (em termos linguísticos) de lidar com o “um”, (numeral ou artigo), provavelmente resultante de não ter sido, o “um”, desde a antiguidade,

considerado verdadeiramente um número... A definição aristotélica em vigor na Europa medieval, de acordo com Isidoro de Sevilha (560 – 636) é disso testemunha "*O um, que é princípio dos números, opõe-se à multitudine, que é o número, como medida em relação ao medido. Pois o um tem o carácter de primeira medida, e o número é multitudine medida pelo um, como fica claro pela Metafísica de Aristóteles*"

Um outro ponto de reflexão sobre a “demora”, em termos de evolução da humanidade, na conceptualização de um sistema de numeração é a permanência de distintos termos (em variadas línguas) para referir pares de determinados objectos ou animais: parilha (de cavalos), junta (de bois), casal (referido a diversos animais), par (de botas).

Deverá ter, portanto, ocorrido uma evolução de um código falado, inicialmente constituído por palavras directamente relacionadas com a coisa contada, que evoluindo num sentido de progressiva abstracção e correspondente perda de significado concreto, passou a referir-se à característica comum dos conjuntos em que é possível estabelecer correspondências elemento a elemento.

1.5 - Origens dos sistemas de registo codificado

Os sistemas de registo codificado dos números associados à contagem são muito provavelmente anteriores e precursores dos sistemas de escrita.

Ifrah (Ifrah, 1994) sugere que os numerais escritos sumérios têm origem num anterior sistema de contagem de tipo concreto, utilizando *contas*¹ identificáveis de um ponto de vista de forma-valor que a escrita procura reproduzir. A

utilização das bolas de argila (*bulla*) perfuradas contendo as *contas* correspondentes às quantidades estabelecidas num determinado contrato conduziu à exigência de um resumo

exterior do conteúdo da bola, um conjunto de símbolos gráficos permitindo uma leitura exterior das quantidades em causa...



Fig. 3- “Bulla” e “tokens” , imagem de <http://www.earth-history.com/Sumer/Clay-tablets.htm>

¹ A palavra usada no texto inglês é *token*.

A fase evolutiva seguinte é o uso de placas de argila onde os registos substituem as bolas de argila e o seu conteúdo, tornados redundantes visto que o registo exterior da bola pode ser feito numa placa, numa primeira fase registrando ainda na placa as imagens das *contas* do conteúdo da bola.

O registo de quantidades em placas de argila não continha informação senão das quantidades em causa, independentemente do que era contabilizado. Só mais tarde começa um processo de escrita descritivo completo que incorpora os registos numéricos referidos.

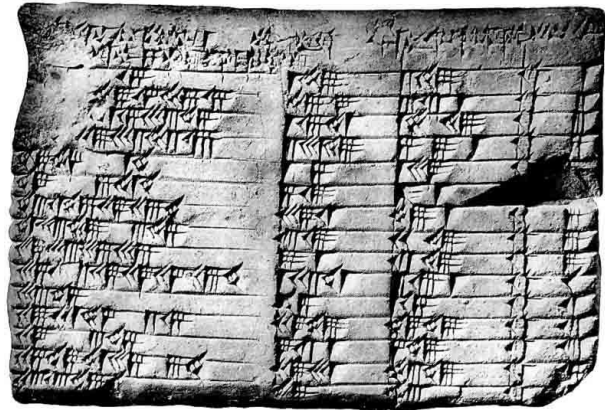


Fig. 4 –“Plimpton 322”- da coleção Plimpton da Univesidade de Columbia, USA. Uma tabela matemática de ternos pitagóricos. Retirada de <http://www.historyofscience.com/G2I/timeline/index.php/index.php?era=-8000>

1.6 – Diferentes sistemas, bases e símbolos: alguns exemplos

1.6.1 - O sistema sexagesimal da Babilónia

As fontes existentes relativas às várias civilizações que ocuparam a mesopotâmica região entre os rios Tigre e Eufrates são muitas e variadas (tabelas para cálculo, tabelas astronómicas, problemas, ...) e haverá ainda muito material arqueológico por estudar. Na Mesopotâmia “escrevia-se” em placas de argila que depois de secarem ao sol se revelavam um material muito duradouro, seguramente mais duradouro que os papiros em que escreveram os egípcios e outros...



Fig. 5 Tabuada de multiplicação, de <http://www.earth-history.com/Sumer/Clay-tablets.htm>

Algumas dessas placas de argila que foram exaustivamente estudadas, algumas muito conhecidas, como a Placa de Larsa, comprovaram a utilização, antes do final do terceiro milénio a.C.,

de um sistema de numeração posicional de base 60 e que, aparentemente, estaria ligado com o sistema de medidas. As exigências de comando e controle de um período de grande riqueza e de enorme fluxo de mercadorias exigia legiões de escribas para garantir a

organização de registos contabilísticos apurados, quer relativos às transacções quer relativos à gestão da armazenagem.

Há evidências de que, anteriormente, terá havido um sistema sexagesimal puro (Ifrah, 1994), visto que o sistema a que aludimos é misto, no sentido em que incorpora, de forma evidente, um sistema decimal de contagem. Assim, são usados apenas dois símbolos, a unidade e os dez. O sistema usa um princípio de repetição (adição) dentro das unidades e das dezenas e um princípio posicional para cada ordem da numeração sexagesimal. Não existe um símbolo para a ausência de valor em alguma das ordens do sistema (isto é, não há zero) e, como consequência podiam aparecer expressões ambíguas, só possíveis de perceber no contexto. Mais tarde ficou claro que a ausência de valor de alguma das ordens teria que ser representada de alguma maneira e partir de certa altura aparece a ideia do vazio (do zero!) concretizada como simples separador.

1.6.2 - O sistema egípcio

A civilização egípcia deixou monumentais vestígios e muitas fontes mas os documentos originais relacionados com a Matemática são muito poucos: os escribas usavam o papiro e, mesmo que não tivesse havido, como houve, ao longo da história, autênticos atentados à preservação de documentação antiga (a pilhagem da Biblioteca de Alexandria para aquecer os banhos e o incêndio da mesma são a prova...) seria difícil, devido às características do próprio material, que chegassem até nós em quantidade.



Fig. 6- Parte do Papiro de Rhind – Retirada de http://www.egypte-ancienne.fr/papyrus_mathematiques.htm

Extraordinário pode considerar-se o facto de um papiro de 5 metros de comprimento por 30 centímetros de largo tenha sido preservado e adquirido, em 1858, sem que se imaginasse o conteúdo, para ser estudado. E que a sua descodificação posterior tenha dado origem a parte bem significativa do conhecimento que temos da Matemática na civilização egípcia. (O advogado escocês A. Henry Rhind (1833 -1863) merece bem que o

papiro lhe promova o nome...). Outras fontes da Matemática do Egito antigo sobreviveram até aos nossos dias, como o “Rolo de Couro das Matemáticas Egípcias” e o “Papiro de Moscovo”... Por tais fontes podemos verificar que o sistema de numeração egípcio utiliza como símbolo para a unidade o pequeno traço vertical usado desde os primórdios da civilização, o qual repete para simbolizar os números até 9 e usa como símbolo da dezena a ferradura. Dentro das dezenas, repete-se o símbolo de forma idêntica, aparecendo símbolos novos a cada potência de 10: centenas, milhares, etc.

1.6.3– Hebreus e Gregos

A utilização prévia de um sistema de escrita já consolidado e com provas dadas para os registos de palavras poderá ter promovido a utilização, como numerais, dos mesmos símbolos utilizados na escrita. De facto, aparte utilizarem um sistema de numeração de base 10, os sistemas de registo dos números usados quer pelos gregos quer pelos hebreus, não revelam avanço substancial, podendo até argumentar-se que vão no sentido do aumento de complexidade: há necessidade de fixar um maior número de correspondências simbólicas com os números.

A utilização dos mesmos símbolos para a escrita das palavras e dos números terá tido como efeito secundário o surgimento de uma “pseudo-ciência” dos números que procurava explicar as relações entre números e as suas representações enquanto palavras... (Parece que gente tão insuspeita quanto Isaac Newton (1643-1727) ainda se dedicava a especulações deste tipo e, a cada passo, ouvimos falar de *cabalas* e outras ideias relacionadas com aquilo a que se chama Gematria... Embora à primeira vista pareça razoável pensar que a *mística números* ou *numerologia* pudesse ter origem na utilização dos símbolos fonéticos do alfabeto na escrita dos números, Ifrah põe-nos ao corrente de que em Susa e na Babilónia terá havido quem usasse os números de forma cifrada para a transposição de palavras, dando origem a um complexo simbolismo numerológico, usado, entre outros objectivos, como arte divinatória ou de predizer o futuro. (Ifrah, 1994)

1.6.4 – Os romanos

O sistema de numeração romano continua em uso nos tempos que correm, o que não deixa de ser um pequeno mistério. Mistério, no sentido em que não sendo adequado ao uso na maior parte das aplicações vulgares, continua a ser ensinado na escola...

O sistema de numeração romano é, originariamente, aditivo e não posicional, sendo o valor do número representado pela soma dos valores representados por cada uma das letras. Mais tarde, os romanos complicaram o sistema, introduzindo uma regra de acordo com a qual um símbolo colocado à esquerda de um símbolo de maior valor teria que ser subtraído daquele...

Os símbolos romanos, aparentemente relacionados com as letras do alfabeto romano, deverão ser antes considerados como evolução de formas mais antigas de registo de tipo concreto, entalhes em paus ou ossos. (Ibrah, 1994, p. 191).

1.6.5 - Na China

As mais antigas fontes reveladoras da existência de numerais chineses são os *Ossos do oráculo de Shang*, um conjunto de ossos e de carapaças de tartaruga, com inscrições gravadas, que remontam entre 1500 a 1200 a.C., em que é possível verificar que o sistema de representação dos números: trata-se de um sistema decimal, posicional, com 9 símbolos para as primeiras unidades e símbolos diferentes para as quatro primeiras potências naturais de 10. A unidade é representada por uma linha horizontal e a dezena por uma linha vertical. Este sistema de representação está intimamente ligado à utilização, para o cálculo, de pequenos cilindros, com os quais se replicava os números escritos.

Outros sistemas do Extremo - Oriente revelam influências chinesas.

1.6.6 – Na Índia, passando pela Arábia

O sistema de escrita de números que usamos actualmente e que se generalizou é originário da Índia e começou a ser divulgado na Europa no fim da Idade Média. É habitualmente referido como sendo árabe devido ao facto de ter sido introduzido na Europa através da civilização árabe.

Kline sugere que a Matemática Hindu é sucessora da Matemática grega, apesar de as proezas e desenvolvimentos daquela surgirem muitos séculos depois da influência desta (Kline, 1972). As fontes mais antigas estão associadas a textos sagrados e referem-se a construção de altares e de templos. É significativo e merece referência o facto de aparecerem, cerca do séc. III a.C. símbolos para números que apresentam um aspecto importante: nove símbolos distintos, um para cada número de 1 a 9.

O período áureo da Matemática Hindu situa-se entre 200 e 1200 d.C. Numa primeira parte deste período terá havido uma influência importante de Alexandria (relevando os aspectos práticos do uso dos números e dando a conhecer a Geometria grega). No que à Aritmética diz respeito parece ter havido um dom especial dos grandes matemáticos hindus para esta ciência, sem descontar possíveis influências da Babilónia e da China.

As motivações fundamentais relacionavam-se com a astronomia e é o reforço das motivações árabes a respeito da astronomia que vai proporcionar, mais tarde, um contacto próximo entre as duas civilizações e a divulgação dos processos hindus na escrita dos números e no seu uso no cálculo escrito, o que veio a produzir uma autêntica revolução na iletrada Europa do final da Idade Média.

Cerca do ano 600 d.C. a notação posicional de base 10 com 9 “figuras” e o símbolo zero tornou-se standard; e o zero, que até aqui fora, quando muito, um “marcador de lugar” passou a ter um estatuto de número.

2 - Números e Medição: as fracções

“As fracções são de longe os tópicos mais complexos estudados no ensino básico. A sua profundidade está a par de muitos tópicos universitários” (Aharoni, 2008)

As descrições sumárias que fizemos da evolução dos números e dos vários sistemas de registo não incluíram, deliberadamente, as fracções.

Um dos marcos fundamentais na história das ideias que foi estabelecido pela Matemática, na sequência da descoberta dos números, foi a medição. A medição utiliza o conceito de número, já consolidado, e amplia-o para comportar a contagem de quantidades não inteiras, através de sistemas de subdivisão da unidade de contagem que tomaram designações e representações diversas ao longo da história.

Numa primeira abordagem importa entender como evoluiu a ideia e a representação da fracção (como número ou não!) e as diversas formas conhecidas e correspondentes a origens e abordagens diferentes.

Assim e verificando que o sistema de notação posicional sexagesimal da Babilónia, estava em íntima relação com notações metrológicas, (“o sistema sexagesimal terá naturalmente aparecido para facilitar os cálculos com certas unidades de medidas de capacidade, de peso e de área” (Estrada, 2000, p. 71) é absolutamente extraordinário podermos verificar a permanência e a importância de concepções tão antigas na nossa vivência diária. Na verdade, no que respeita à divisão da hora e do grau em minutos e segundos, mantemos em vigor um sistema sexagesimal incrustado no sistema decimal dominante, que “controla” a parte inteira da medida assim como as fracções dos segundos, mas que mantém presente, no restante, o antiquíssimo sistema sexagesimal.

O desenvolvimento do comércio e da necessidade de controlar o processo de troca, a existência de cunhagem de moeda podem explicar o sistema de numeração babilónico, que usa o conceito valor posicional e apenas dois símbolos (para um e para dez), permite a extensão da referida base 60 para incluir fracções: de facto, trata-se de um sistema de escrita dos números em que a unidade está dividida em 60 partes, assim como cada uma

das sub-unidades seguintes, e deste modo as fracções “encaixam” directamente no sistema, sem necessidade de nova simbologia. Escreve-se, para a parte fraccionária, apenas os numeradores, sendo o denominador uma potência de 60, dependendo da posição. Basta colocar cada uma das partes na posição adequada e usar algum processo de separação entre a parte inteira e a parte fraccionária, para evitar confusão sobre a ordem de grandeza.

A designação de *minutos* e *segundos* para as unidades das ordens 60^{-1} e 60^{-2} deriva da tradução latina, correspondendo à palavra *minuta* o significado de *pequenas*, que ficou a usar-se para a primeira das partes pequenas e *secunda*, significando a segunda parte pequena, que tomou esta designação. Para maior precisão podiam ser ainda, eventualmente, utilizadas as partes terceira, quarta, etc². O sistema sexagesimal é um sistema de escrita dos números superior a todos os conhecidos (McLeish, 1991), que, combinando as suas características próprias com o uso de uma base 60 para pesos e medidas, só foi igualado há cerca de 200 anos com a adopção do sistema métrico decimal conjugado com a utilização de fracções decimais, inventadas por Simon Stevin (1548-1620) no século XVI. Ainda assim, como é fácil de prever, este sistema decimal actual conduz, inevitavelmente, a um maior número de situações de repetição infinita dos restos do que aquele. Por isso, o sistema decimal apresenta mais situações de imprecisão de medida que o sexagesimal.

O sistema sexagesimal em inteiros e fracções ainda foi usado por Copérnico (1473-1543) no séc. XVI e como vimos, na que respeita à parte fraccionária ainda persiste.

No que diz respeito a fracções, no antigo Egipto foi criado um processo muito diferente que exige uma interpretação diversa da forma como o problema da sub-divisão da unidade foi colocado: os egípcios antigos, na ausência de sistema de cunhagem de moeda e mantendo-se procedimentos de troca directa, terão tido condições para o desenvolvimento daquilo a que chamamos fracções unitárias.

Tais fracções terão surgido, no Egipto antigo, como consequência da necessidade da divisão de unidades concretas de bens de troca, a broa de pão ou o jarro de cerveja, de forma que se procedesse ao seu abastecimento de forma equitativa. Trata-se sempre de fracções cujo numerador é a unidade (fracções unitárias), escrevendo-se de forma

² Um astrónomo do Cairo, no séc. XV, calculou a divisão de $45^{\circ} 50'$ por $1^{\circ} 25'$ até à parte décima (Smith, History of Mathematics)

simplificada um pequeno ponto colocado por cima do “denominador”. Este ponto, que aparece na escrita hierática, é equivalente à “boca aberta” dos hieróglifos. É esta boca aberta deste tipo de escrita “solene” que sugere que na origem das fracções se encontram os problemas de divisão ou partilha da bebida e da comida. (McLeish, 1991).

O sistema de representação dos números egípcio (sem valor de posição, onde nem sequer é importante a posição porque há diferentes símbolos para unidades de diferentes ordem de grandeza), apresenta apenas um avanço relativamente ao sistema mesopotâmico: saber-se, inequivocamente, qual é a parte fraccionária.

As fracções unitárias dos egípcios antigos perduraram muito para além da civilização que as inventou, tendo sido usadas pelos matemáticos gregos da escola de Alexandria e aparecendo ainda na Europa nos séculos XIII e XIV.

A forma como os gregos representavam os números não era muito benéfica para a possibilidade de lidar com eles de forma prática, mesmo nas noções aritméticas básicas... Apesar disso, a escrita grega dos números perdurou na Europa até ao século X, altura em que foi suplantado pela escrita romana. (McLeish, 1991).

As razões (fracções) representadas de forma adaptada na complicada escrita de números usando 27 símbolos alfabéticos, não teriam feito história se tivessem ficado pela aplicação prática da “logística”, designação que corresponde à parte menos nobre, do ponto de vista helénico, do trabalho matemático, a qual pode ser entregue ao escravo letrado: o cálculo.

A Grécia recebeu grande influência da cultura babilónica no que respeita aos conhecimentos matemáticos e astronómicos e Pitágoras, (que se supõe ter viajado e estudado no Egipto e na Mesopotâmia), e seus seguidores imprimiram uma orientação muito especial na exploração científica do número. As fracções, designadas por razões, adquiriram estatuto quando os Pitagóricos estabeleceram que tudo é número, incluindo na sua definição de números os inteiros (os que hoje chamamos números naturais) e as razões entre números inteiros.

A importância dos números e das razões entre eles já não é só a relativa à resolução dos problemas relacionados com a medida, de interesse para a logística (a arte de calcular), mas refere-se também à medida dos comprimentos dos segmentos de recta, das áreas e das suas relações dum ponto de vista puramente intelectual.

As concepções pitagóricas relativas às proporções partiram da descoberta de que a harmonia musical está relacionada com a relação entre os comprimentos das cordas do instrumento utilizado. Há aqui uma relação geométrica entre segmentos de recta traduzida por uma relação entre os números que medem os comprimentos dos segmentos. A conclusão de que tudo é número obriga a aceitar a possibilidade de dois segmentos terem, relativamente a uma unidade de medida, uma tradução em números inteiros. Dito doutro modo, haverá sempre um segmento divisor comum (u) que permita exprimir ambos os segmentos como quantidades inteiras (m e n) de u.

A noção de máximo divisor comum, um conceito essencialmente numérico, aparece assim como uma noção geométrica. O matemático grego da época usa indistintamente as abordagens numérica ou geométrica na sua actividade de interesse puramente filosófico de procura da verdade, desligada de quaisquer interesses práticos ... Para os pitagóricos a disciplina prioritária seria a Aritmética, tendo explorado o processo de procura do divisor comum, que passava pela utilização de uma sequência em que o maior dos dois números era substituído pela diferença dos dois, recomeçando o processo. Por exemplo, para determinar o m.d.c. (64,12)

64	12	
52	12	
40	12	
28	12	
16	12	
4	8	
4	4	O m.d.c. é 4.

(Este processo era designado por antifairese ou antinairese ou subtracção recíproca e o algoritmo de Euclides é uma versão condensada deste (Estrada, 2000, p. 238)).

Toda a teoria Pitagórica assentava na ideia de que tudo é número: ou número inteiro ou um quociente (razão) entre inteiros. De um ponto de vista puramente geométrico tudo parecia adequado, quer raciocinado sobre os comprimentos dos segmentos (ponto de vista

geométrico) quer raciocinando sobre os números representativos desse comprimento (ponto de vista aritmético). Por definição, todos os comprimentos seriam co-mensuráveis.

A utilização de um procedimento geométrico pode ter estado na origem da descoberta da incomensurabilidade, isto é, da impossibilidade de encontrar uma unidade de medida que possa servir a uma representação de certos comprimentos em valores inteiros dessa unidade. É sabido que o símbolo pitagórico era o pentagrama, pentágono estrelado formado pelas diagonais de um pentágono regular. Baumgart (Baumgart, 1989) sugere a possibilidade de o primeiro par de segmentos incomensuráveis descobertos ter sido o lado e a diagonal no pentágono regular, visto poder apresentar-se uma prova geométrica que envolve um argumento intuitivo de limites. Uma demonstração visual deste facto é apresentada em <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/visual2.html>

No que diz respeito à teoria Pitagórica de que tudo é número ou relação entre números (inteiros ou relação entre inteiros) a demonstração (feita pelo processo de redução do absurdo), atribuída a um discípulo de Pitágoras, da impossibilidade de estabelecer a razão entre a diagonal e o lado do quadrado abalou por completo o edifício da Aritmética e criou obstáculos de monta ao desenvolvimento científico durante muitos séculos.

A diagonal é “incomensurável” com o lado do quadrado, isto é, não é possível “medir” a diagonal e o lado com uma unidade de medida comum, ou seja com uma unidade que “caiba” um número exacto de vezes na diagonal e no lado, de forma que aparecesse uma razão ou quociente de inteiros traduzindo a relação entre o lado e a diagonal.

A incomensurabilidade, a par com as questões de racionalidade levantadas pelos paradoxos de Zenão levaram a um bloqueio daquilo que parecia promissor como construção de uma ciência dos números ou baseada neles. Mesmo o génio de um Arquimedes e de Heron de Alexandria, que, dum ponto de vista prático não pareciam ter problemas em lidar com os incomensuráveis, se submeteu aos critérios racionalistas e fez depender em muito o seu trabalho científico da possibilidade de apresentar justificações que evitassem a incomensurabilidade e as questões relacionadas com o infinito ou os processos infinitos...

Os romanos usavam um completo sistema de fracções de base 12, apesar de o seu sistema de contagem ser decimal. Este método fraccionário pode ter sido inicialmente relacionado com a unidade de peso, o *ás*, cujo duodécimo, a *uncia* deu origem a onça em

português e a *ounce* e *inch* em inglês e cuja permanência atesta a importância do sistema romano de frações. (Fleg, 1983). Como consequência da forma como foi estabelecida a *úncia*, todas as frações do *ás*, de 1/12 a 11/12, podem ser expressas em números inteiros de *unciae*. A *uncia* era também subdividida em 24 *scrupuli* e o *scrupulus* em oito *calci*, tornando-se possível uma divisão tão pequena quanto 1/2304.

Outras unidades romanas eram divididas da mesma maneira.

As frações decimais terão sido utilizadas na China no séc. III, mas não houve uma disseminação desse uso. Só por volta do séc. XV terão sido redescobertas, em simultâneo no mundo árabe e na Europa. Al-Kashi (1390-1450), um astrónomo de Samarcanda, terá sido o primeiro a notar a possibilidade de estender, com vantagem, o sistema decimal à representação de frações e Simon Stevin, de Bruges foi o primeiro a sistematizar a escrita e cálculo com frações decimais, embora não usando ainda da notação actual. Resta referir que Leonardo de Pisa (1170-1250) escrevia frações ordinárias de forma que fazia antever a evolução: por exemplo, $\frac{9}{10} \frac{7}{10}$ significaria para o Fibonacci sete décimas e nove centésimas, o que está a um passo da notação decimal, se bem que com a ordem inversa... (Fleg, 1983)

3 - Os números e o cálculo

São objectivos do programa de Matemática do Ensino Básico, entre outros, “efectuar procedimentos e algoritmos de cálculo rotineiros” e utilizar instrumentos matemáticos, entre os quais as calculadoras. A utilização destas é um tema de discussão recorrente e a questão que mais se coloca é: quando começar a sua utilização?

O conhecimento da evolução dos processos de cálculo pode trazer alguma luz a esta discussão.

Não temos, muitas vezes, a percepção de que os nossos processos de cálculo aritmético resultam de uma longa evolução histórica e que teremos, possivelmente, à nossa disposição, os melhores métodos possíveis, em resultado da “depuração” nos procedimentos feita, ao longo de toda a história do cálculo aritmético... Supomos também, naturalmente, que dispomos do melhor método de escrita de números que os mesmos processos de “depuração” nos ofereceram. Não estaremos nós, actualmente, perante processos de nova mudança de paradigma que tornem obsoletas, a curto prazo, algumas das convicções ainda consideradas fundamentais?

Qual é o papel do cálculo aritmético no futuro do aprendizagem da Matemática? Será relevante como tem sido? Ou, à maneira como os gregos tratavam os seus “calculadores”, voltará a ser um trabalho de escravos, escravos tecnológicos agora, com o uso indiscriminado das calculadoras?

Será imprescindível saber realizar o cálculo aritmético como o fazemos? Será que nos não apercebemos que não foi sempre assim?

A primeira questão que se pode colocar, a quem conhece a numeração romana (e quase toda a gente está mais ou menos familiarizada com a numeração romana) é: como calculavam os romanos? Facilmente verificamos que é muito pouco provável, senão impossível, que os romanos utilizassem procedimentos de papel e lápis. Por duas razões: primeiro porque o seu sistema de numeração não é adequado aos processos que utilizamos; depois porque não havia disponibilidade de papel para o efeito. Teremos então que admitir que cada civilização usou, da melhor forma possível, a tecnologia e os meios de que dispunha.

Os nossos procedimentos de cálculo fazem parte da herança hindu trazida à Europa pelos árabes, em condições que adiante referiremos. Vejamos, primeiramente, outros procedimentos mais antigos.

3.1 – A primeira calculadora: 2 mãos, 10 dedos.

Há quem argumente que a origem do sistema sexagesimal mesopotâmico possa ter tido origem num processo de contagem pelos dedos utilizando o polegar da mão direita como “contador”, o qual percorria as falanges dos outros dedos na mesma mão, funcionando os dedos da mão esquerda como “acumuladores” dobrando-se de forma a registar o número de vezes que se repetia o processo, até $5 \times 12 \dots$ (Ifrah, 1994)

Os romanos dispunham de um processo de representação dos números de 1 a 10 000 usando os dedos de ambas as mãos, uma forma de representação que



Fig. 7 -Ilustração contida na “*Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*”, de Luca Pacioli (1445-1509) de 1494 , figura retirada de <http://mathdl.maa.org/mathDL//46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2591&bodyId=3055>

supera em muito as práticas ancestrais de contar com os dedos, uma forma de “finger-writing”. Este processo era ainda muito vulgar na Europa na Idade Média e fazia parte,

seguramente, da herança cultural deixada pela civilização romana. Ainda hoje este modo de representação é usado, com naturais modificações, é certo, por comerciantes árabes e indianos no Médio Oriente, permitindo-lhes o negócio discreto ou quase secreto...(Menninger, 1969).

Esta técnica deverá ter sido transmitida oralmente visto não ser conhecido nenhum livro de texto da época romana. Também não parece indispensável que uma técnica destinada a iletrados fosse transmitida por processos inacessíveis aos destinatários.

Da antiguidade não são conhecidas senão referências literárias que permitem garantir a existência do procedimento. Um exemplo é a referência de Plínio, o Velho, à estátua de Janus em Roma, em que se via a representação de 365 nos dedos das mãos como atributo que o identificava como deus do tempo e do ano (*“ manus dextera trecentorum, et sinistra sexaginta quinque numerum retinens ”*³). Esta é uma prova da familiaridade do povo romano com o processo de contagem com os dedos...

Da Idade Média conhecem-se alguns livros de texto com ilustrações relativas ao processo e destinadas à sua divulgação. O Venerável Bede, monge inglês do século VIII e Luca Paccioli no século XV são dois autores que apresentam representações deste sistema, mostrando algumas variantes.

O processo seria certamente muito interessante pelo facto de poder ser utilizado como uma espécie de “língua franca” entre comerciantes de origens diversas.

É ainda referida por alguns autores a utilização de representações com os dedos, nos processos de cálculo com ábaco, provavelmente para “registo “ de resultados intermédios, mas não se conhecem pormenores do processo. No seu “Liber Abacci”, Leonardo de Pisa, o Fibonacci, adverte que *“quem quiser conhecer as subtilezas da arte do cálculo deve conhecer os números com as mãos, uma invenção sábia dos antigos”*.

³ “Apresenta o número trezentos na mão direita e o sessenta e cinco na esquerda”.

3.2- O cálculo à maneira egípcia

Na civilização egípcia utilizavam-se processos de cálculo muito originais, nomeadamente na multiplicação, que eventualmente poderiam usar o cálculo mental e o registo separado, em suporte escrito, dos resultados intermédios. É muito interessante esse processo, designado por “duplicar e dividir ao meio” que também era utilizado na divisão e nas operações com fracções unitárias. Multiplicar 16 por 13, por exemplo, levaria a escolher, por exemplo, o 16 para ser repetido 13 vezes, o que fazia por sucessivas duplicações, escrevendo:

\	1	\	16
	2		32
\	4	\	64
\	8	\	128
<hr/>			
Total	13		208

Na coluna da esquerda assinalavam-se os multiplicadores parciais cuja soma é treze; os resultados correspondentes eram adicionados para obter o resultado final.

3.3 – Ábacos

O cálculo aritmético mais elementar consiste na reorganização ou reagrupamento das quantidades para que se mantenha a especificidade do sistema de contagem. Tal não exige qualificações especiais e, tratando-se de aplicações concretas, está ao alcance de qualquer indivíduo que tenha compreendido o seu sistema contagem.

Num primeiro estágio civilizacional, as operações básicas, realizadas em relação a números representando indivíduos ou objectos concretos, terão sido realizadas com os próprios ou com representantes concretos.

O mais fácil, no estágio seguinte, é promover a representação da quantidade utilizando algo que simbolize os objectos contados e trabalhando com eles. A própria palavra “cálculo”, (que ainda hoje mantém a significação original quando denomina os cálculos renais...) significando pequena pedra, pequeno seixo, é a prova disso. Calcular é utilizar as pedras para obter um resultado da operação aritmética. Para tal utilizava-se uma

mesa com marcações adequadas a uma representação do valor de tipo posicional usando os “cálculos” ou as “contas”. Representando dois números, lado a lado, utilizando os cálculos necessários, a adição consiste na reorganização dos cálculos para que sejam respeitadas as regras do sistema.

As outras operações são, de igual modo, realizáveis, utilizando algumas regras aritméticas cuja formulação e dedução foi sendo descoberta à medida que as necessidades o impunham.

A utilização dos ábacos era independente do processo de escrita dos números. Sendo assim, a utilização de processos ineficientes de escrita de números, como é o caso dos sistemas romano e grego, não impedia nem dificultava o procedimento de cálculo. O registro final era realizado independentemente do processo utilizado.

É estranho e espantoso imaginar-se o volume de necessidades de cálculo de uma organização imperial exigente, capaz de movimentar meios humanos e materiais em grande número e confrontar-se com ausência de sistemas eficientes de cálculo e de escrita de números. O mesmo se diga no que respeita ao domínio das técnicas, nomeadamente técnicas de construção civil e militar, exigentes no cálculo. Por outro lado, o conhecimento das capacidades de realização de Heron de Alexandria, com a

sua “Fabrica automatorum” e as suas construções mecânicas sofisticadas poderia levar-nos a perguntar porque não foi possível automatizar o cálculo... E a resposta, provavelmente, seria que o sistema de escrita dos números não era adequado e não o permitiria. Apesar de tudo... calculava-se, muito e bem... São disso exemplo a tabela de cordas de Ptolomeu

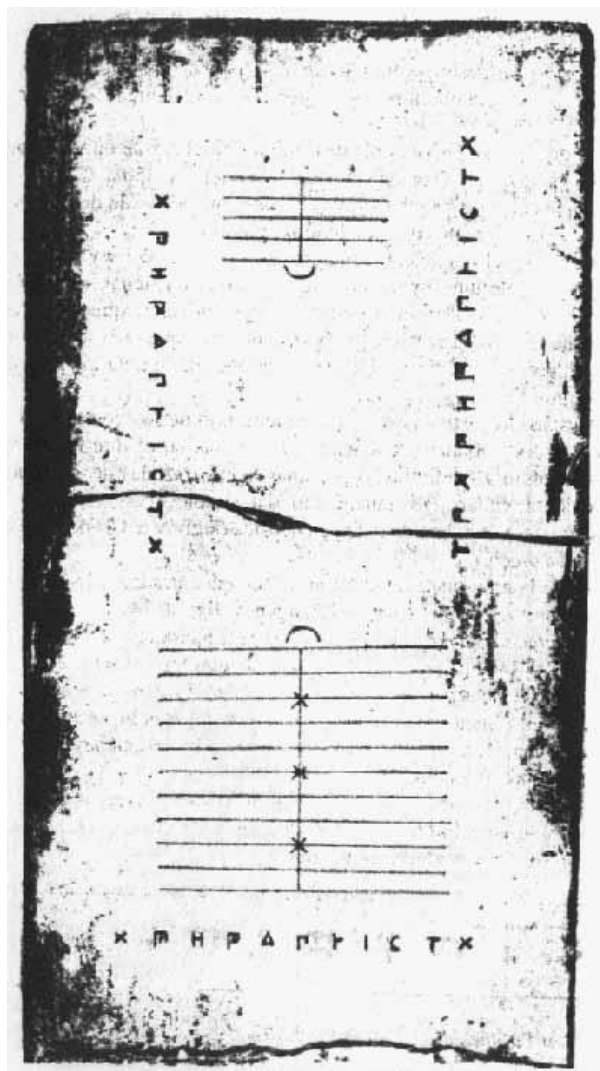


Fig. 8 – Mesa de cálculo de Salamis – figura de <http://www.historyofscience.com/G2I/timeline/index.php/index.php?era=-300>

(85-165 d.C.), as grandes obras de engenharia, a astronomia, o calendário romano (só corrigido 15 séculos depois para um acerto de 24 horas por 400 anos...)

Georges Iphra refere que as civilizações mesopotâmicas mais antigas já utilizavam algum tipo de ábaco, visto aparecerem referências, não só a instrumentos mas também a operadores dos mesmos. (Ifrah, 1994, pág. 139). A complexidade do sistema sexagesimal para efeitos de cálculo deverá ter sido superada com o auxílio de tabelas (tábuas ou tabuadas, como ainda se diz) e com algum tipo de ábaco.

Os gregos usavam o ábaco. A etimologia da palavra parece referir mais do que um significado original: mesa sem pernas, para os gregos, estabelecendo referências para a palavra semita “abq”, que se refere a poeira, sendo certo que os povos semitas usavam mesas semelhantes, cobertas de areia, onde desenhavam figuras ou faziam cálculos. Também os romanos tinham mesas semelhantes para os *arenari* ou calculadores de areia, que eram os géometras que desenhavam nessas mesas de areia, os quais eram distintos dos *calculones* e dos

calculatores, palavras que, para um mesmo conteúdo funcional, distinguem os escravos dos cidadãos que se dedicavam profissionalmente ao cálculo. (Menninger, 1969)

O historiador Políbio (c.210 -128 a.C.) referia-se, com toda a

certeza, a um ábaco quando colocou na boca de Sólon as seguintes palavras: “ aqueles que vivem na corte dos reis são exactamente como as contas (“fichas”, “counters”...) na mesa de cálculo (ábaco). É a vontade do calculador que lhe dá o valor: ou um *chalkos* ou um *talento*...”). É o calculador que atribui a posição na mesa de cálculo; *chalkos* é a moeda grega de menor valor, talento a de maior valor e correspondem às linhas extremas da Mesa de Salamis, exemplar de ábaco grego descoberto na Ilha de Salamis no século XIX.



Fig. 9 – Ábaco de bolso romano – Foto do Museo Nazionale Romano at Piazzale delle Terme, Rome, retirada de http://tertisco-alexandru.com/abacus_project.html

Para além de outras referências na literatura é também bem conhecida a representação incluída no famoso Vaso de Dário, onde aparece bem visível o tesoureiro do rei da Pérsia e a sua mesa de cálculo.

O ábaco romano portátil, de que se conhecem muito poucos exemplares, pode ser considerado o precursor do ábaco que ainda hoje é usado extensivamente no Japão e na China e que tem vindo a ser reintroduzido, para fins puramente educacionais, no Ocidente.

O ábaco japonês, largamente usado na actualidade⁴, por tradição mas também por convicção das suas virtualidades na aprendizagem, é análogo ao ábaco de mão romano.



Fig. 10 – “Soan-Pan” chinês – Foto retirada de http://tertisco-alexandru.com/abacus_project.html

Podemos verificar que os romanos e os gregos, apesar de não disporem de um sistema de escrita de números eficiente, prático e extensível a todos os números,

possuíam um eficiente sistema de cálculo. Podemos constatar ainda que estavam presentes, na utilização do ábaco, as mesmas leis e as mesmas regras que utilizamos no cálculo escrito com a numeração indo-árabe. Na verdade, apesar dos sistemas de representação dos números não serem de valor posicional e não existir o zero nestas representações, o ábaco utiliza uma disposição de valor posicional e o vazio de uma coluna representa o zero.

Pode ter sido a utilização do ábaco a abrir caminho para o sistema de representação indo-árabe.

3.4 – O cálculo escrito, a invenção do zero e dos números negativos.

⁴ Segundo K.Meninger, no final do século XIX esteve em declínio mas recuperou nos anos 30 do séc.XX. Há grandes competições (escolares e de profissionais de contabilidade...) de “soroban” com 40 000 participantes.

No sub-contidente indiano existiu, desde as suas mais antigas civilizações, uma sofisticada consciência e conhecimento dos números: os povos de Mohenjo Daro, uma civilização do Vale do Indo de há 5000 anos, usava um sistema decimal simples e tinha métodos de contagem, pesagem e medida de longe mais avançados que os dos seus contemporâneos no Egipto, na Babilónia e na Grécia. (McLeish, *The story of numbers*, 1991).

A civilização Hindu criou o sistema posicional decimal utilizando inicialmente palavras para representar os valores correspondentes às diversas posições no ábaco, incluindo uma palavra adequada à ausência de valor. Os sábios hindus exprimiam-se habitualmente em verso e aquela forma de escrever os números, que usava alguma liberdade poética para a escolha das palavras correspondentes aos nove valores de base do sistema e ao lugar vazio, remonta pelo menos ao séc. VI da era comum. Ifrah (Ifrah, 1994) apresenta diversos exemplos e suas transcrições onde fica claro que, para além da poesia dos textos, é nítida a paixão pelos números grandes. A utilização da poesia tinha também por objectivo a transmissão oral dos números, que terá sido assim muito mais fiável do que se usasse a notação simbólica, muito bem estabelecida e divulgada nessa altura, mas que, na ausência de um contexto simbólico, perderia precisão. E, atendendo também à precariedade dos registos escritos (precariedade adveniente do suporte da escrita e das condições do clima) a opção da transmissão oral de números em recitações de versos parece sábia.

A escrita simbólica dos números adoptou os símbolos do sistema Brahmi para as unidades e o sistema posicional, inspirando-se no ábaco de mesa, eventualmente coberto de fina camada de areia e substituindo os “cálculos” pela escrita dos referidos símbolos (Ifrah, 1994, p. 434) dentro das colunas correspondentes às suas ordem decimais. (Menninger, 1969, p. 397). Desta forma, podemos dizer que não foi a invenção do zero que tornou possível a invenção do sistema de valor posicional mas as próprias “figuras” (a que hoje habitualmente chamamos os dígitos), que se “libertaram” do ábaco com a ajuda do zero para seguirem um processo de abstracção crescente que conduziu à actual utilização universal do sistema.

A invenção do zero aparece, desta forma, inserida num contexto de escrita de números que não era novidade absoluta, já que quer gregos quer babilónios tinham, anteriormente sentido a necessidade de um “marca – lugar” para a posição vazia do

sistema. Mas os matemáticos hindus não tinham as dificuldades de aceitar o que para os gregos era “horror do vazio”. Para os hindus era perfeitamente aceitável o vazio e o infinito, numa linha de pensamento em que a dualidade era comum e desejável. Aliás, a paixão dos números grandes, já referida, era acompanhada pela dos números pequenos (que o sistema de numeração e de escrita, aliás, comportavam perfeitamente). É neste ambiente que Brahmagupta (598-c.665) define o zero como o resultado da subtração de um número por si próprio e descreve as suas propriedades. O zero passou a ser um elemento fundamental do conjunto a que chamamos números.

O sistema hindu de escrita de números proporcionou a abordagem do cálculo com números escritos, dispensando a utilização de ábaco. Brahmagupta descreveu quatro métodos relativos à multiplicação, um dos quais semelhante ao método que actualmente utilizamos, e abordou a radiciação e as potências.

Além disso, no mesmo texto, apresenta as propriedades dos números negativos, usando uma linguagem de débito e fortuna: “um débito subtraído de zero é um crédito; o produto ou quociente de uma fortuna multiplicado por um débito é um débito”. De uma assentada, Brahmagupta, criou as bases de toda a álgebra moderna, com tudo o que ela viria a trazer ao desenvolvimento da Matemática. Por muito tempo ainda, como se verá, haverá dificuldade em fazer aceitar os números negativos como números.

Um longo caminho haveria a percorrer por estas novidades orientais até à sua difusão e aceitação plena na Europa. Nesse caminho acompanharam o processo de criação do Império Árabe, desde o séc.VIII, tendo provavelmente entrado na Europa pela Espanha, com os conquistadores. Por essa razão ficou a numeração hindu a ser conhecida como numeração árabe.

3.5 - Na China e na América

Um parágrafo para salientar que paralelamente ao desenvolvimento da Matemática e da ciência ocidentais, em que a relativa proximidade geográfica nos permite relevar algumas semelhanças e diferenças na evolução dos conceitos, do seu registo e das suas aplicações, outra civilização floresceu, procurando resolver os mesmos problemas, alcançando conclusões idênticas em muitos casos e antecipando em séculos, noutros casos, as descobertas do ocidente. Trata-se da civilização chinesa. Em “textos anteriores à

dinastia Qin (221-201 a.C.) permitem afirmar que nessa época os chineses adquiriram o conceito de número, criaram a notação decimal, desenvolveram os cilindros de contagem com os quais efectuavam as operações aritméticas e escreveram os primeiros livros para o ensino da Matemática” (Estrada, 2000, p. 112). Entre as “antecipações” da civilização chinesa relativamente à civilização ocidental está a utilização dos números negativos.

Um outro parágrafo para relevar a importância das descobertas da civilização Maia, na América Central, com relevância nos resultados das observações astronómicas (a astronomia parece estar sempre presente quando se fala de descobertas Matemáticas). Os astrónomos e sacerdotes Maias criaram e utilizaram em tabelas astronómicas um sistema de numeração posicional de base vinte, utilizando um zero de marcação de lugar.

Registe-se a singularidade de o sistema de numeração posicional ter sido descoberto quatro vezes distintas na História da Humanidade (Babilónia, China, Maias e Índia), tendo apenas três destas civilizações descoberto e utilizado o zero. Porém, apenas uma dessas descobertas do zero avançou ao ponto de o considerar como um número de pleno direito.

4 – Problemas com números. A Álgebra

A evolução do conceito de número foi largamente influenciada, como se verá, pela resolução de problemas com números. E resolução de problemas com números deverá ser uma actividade tão antiga quanto o trabalho de cálculo com os mesmos. Os problemas com números que remontam ao papiro de Rhind ou às placas de argila da Babilónia, para além de aparecerem repetidos ou sucessivamente reformulados, umas vezes referem-se a questões práticas e outras vezes a puras especulações, nomeadamente especulações a respeito de números e de relações entre eles.

Na Babilónia eram colocados e resolvidos problemas conduzindo a equações de segundo grau. E são conhecidos problemas, e a respectiva solução, que apelam a cinco equações e cinco incógnitas. Eram ainda resolvidos problemas de juros compostos que remetiam para a procura de valor desconhecido de um expoente. (Kline, 1972)

Os problemas eram colocados e resolvidos utilizando palavras, usando as palavras correspondentes a comprimento, largura e área para a incógnita ou incógnitas, mesmo não se tratando de problemas de geometria. Eram colocados (e resolvidos!) problemas que conduziam a raízes cúbicas, calculadas com recurso a tabelas.

Parece ter havido motivações de índole económica e de interesse prático no desenvolvimento das técnicas de resolução de problemas. Não há registo de preocupações com a demonstração das técnicas utilizadas ou de organização de uma estrutura articulada de argumentação lógica com vista à garantia de fiabilidade dos processos. Na prática, as coisas funcionavam e isso bastava.

No Egipto, as fontes existentes comprovam a colocação e resolução de problemas simples com uma quantidade desconhecida, de que era fornecida a solução sem explicação do método utilizado. Equações quadráticas simples eram também colocadas. Não era utilizado qualquer simbolismo.

É curioso verificar-se a persistência, na história, de alguns problemas já encontrados nos papiros egípcios e de notar a utilização de formulários para áreas e volumes.

A escola clássica grega, centrando-se na geometria em consequência dos puristas a respeito dos números irracionais, deu origem ao que pode chamar-se geometria algébrica, retardando a evolução quer da aritmética quer das técnicas algébricas.

A escola de Alexandria, porém, adoptou uma orientação mais prática e virada para os resultados úteis e sob o impulso de génios como Arquimedes (287-212 a.C.), Nicomachus (60 – 120d.C.) e Heron (10 – 70 d.C.), traduziu mesmo os resultados da álgebra geométrica clássica em processos geométricos e algébricos. Foram elaborados novos livros de problemas e a ciência dos números tornou-se mais popular que a geometria a partir da época de Nicomachus, cuja *Introductio Arithmetica* se tornou um texto de referência por mais de mil anos. Muitos dos problemas retomados nesta época são os mesmos dos papiros antigos.

Inovador, do ponto de vista da evolução da álgebra foi o trabalho de Diofanto (c.200 -298), que introduziu algum simbolismo nos procedimentos. Apesar de tudo e ao contrário de Heron e de Arquimedes, que aproximavam sem reserva os resultados irracionais para obterem valores utilizáveis, Diofanto rejeitava simplesmente todas as soluções que não fossem racionais e positivas e mesmo a mais pequena das positivas se havia mais do que uma. (Kline, 1972) (pág. 143)

5 - A construção de uma ciência baseada nos números

“Deus fez o Mundo por conta, peso e medida”

Salomão.

5.1 - A Escola Grega

Vimos, até aqui, a aplicação prática dos números na contagem, na medição e no cálculo. A maioria das civilizações que referimos não registou preocupações de ordem filosófica, no sentido de explicar o porquê dos fenômenos, nomeadamente dos fenômenos astronómicos, que aparecem sempre relacionados com as questões relativas aos números.

É o “gênio” grego que vai levantar estas questões filosóficas, ao procurar entender o universo. Para Caraça, “pensando no Universo e procurando (...) compreender os fenômenos, descobrir as suas razões e ligações, os primeiros pensadores foram levados a pôr as seguintes questões fundamentais: 1) (...) existe um princípio único, ao qual tudo se reduza? 2) Qual a estrutura do Universo? Como foi criado? Como se movem os astros e porquê?” (Caraça, 1978 (7ª edição), p. 65).

Um ambiente propício ao desenvolvimento do estudo destas questões terá surgido em época em que a produção de excedentes agrícolas, viabilizando o seu comércio bem como a produção de outros bens transaccionáveis e a riqueza disponível permitiram a libertação da mente para as questões filosóficas, as viagens e contactos com outras civilizações... À primeira das questões referidas, começaram a aparecer respostas na Jónia (Mileto).

Sabe-se pouco da vida de Pitágoras (sec.VI a.C.) mas é indubitável que a escola (ou seita?) que fundou teve extraordinária influência por toda a Grécia quer dum ponto de vista místico quer de um ponto de vista científico. A originalidade da escola Pitagórica residia na resposta que pretendia dar à questão da possibilidade de existência de um princípio único para explicação das coisas: no essencial, a explicação racional do universo seria dada pelas diferenças na quantidade e no arranjo de forma, no número e na harmonia: **“todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem o número”**.

Como foi possível o aparecimento desta crença na explicação do Universo pelos números, como surgiu uma tal relação, “uma das ideias mais grandiosas e mais belas que até hoje têm sido emitidas na história da Ciência – a de que a compreensão do Universo consiste no estabelecimento de relações entre números, isto é de leis Matemáticas (...) uma ordenação Matemática do Cosmos”? (Caraça, 1978 (7ª edição)).

Tudo pode ter começado pelo estudo experimental dos sons emitidos pela corda de uma lira, elaborado por Pitágoras. Os intervalos de uma escala musical que se relacionam de forma harmoniosa podem ser expressos em termos de razões (quocientes, resultados de divisão) entre comprimentos da corda: 1:2 para a oitava, 2:3 para a quinta, 3:4 para a quarta. Os números mais pequenos que seguem este padrão são 6, 8, 9 e 12; 9 é a média aritmética de 6 e 12; 8 é a média harmónica entre 6 e 12; a soma dos números 1, 2, 3 e 4 forma o número triangular 10, o número perfeito, que por sua vez gera todas as outras combinações de número e figura que estão na base do cosmos (Baumgart, 1989).

Passando de uma constatação musical de harmonia para uma representação número-forma em que a unidade é o ponto (da mesma forma que nas civilizações mais primitivas a unidade era representada por um “cálculo”, a pequena pedra usada no cálculo com números), aparece a recta em analogia com o dois (são necessários dois pontos para definir a recta) o plano com o 3 e o sólido com o 4... Então o dez, a soma destes números seria um poder sagrado e onipotente pelo qual faziam o seu juramento. Tudo isto conduziu à crença na “harmonia das esferas”, à convicção de que tudo no universo é composto e mantido unido por princípios de harmonia e de número.

Os gregos posteriores a Pitágoras ficaram convencidos de que a Aritmética foi invenção sua: na verdade Pitágoras (ou a sua escola) terá transmitido à Aritmética a característica que manteve durante muito tempo, criando mitos e mistérios à volta dos números.

Em termos de teoria de números, dum ponto de vista pitagórico, o “um” (a mónada) não é número mas o princípio deles, o dois, primeiro dos pares, tem estatuto semelhante e a dicotomia par – ímpar, os números – forma (triangulares, quadrados, ...) e suas relações, a consideração de que alguns números são “perfeitos”, outros “amigáveis” ou compatíveis levou ao estabelecimento como que de uma *teologia dos números*, em que o matemático era como que o teólogo que descobre e proclama a ordem divina (McLeish, 1991).

Interessa-nos, de acordo com o propósito de descrever a evolução do conceito de número, mais do que registrar características esotéricas da teoria pitagórica, referir a evolução do método científico grego, onde a demonstração se torna o fundamento do desenvolvimento da ciência, nomeadamente da Aritmética e da Geometria. E a demonstração podia revestir dois aspectos: a demonstração pelo raciocínio usando regras aceites e comprovadas ou a demonstração por absurdo, que procura provar que o contrário daquilo que queremos provar é um absurdo.

O fracasso da teoria pitagórica juntamente com o absurdo das conclusões de Zenão, o criador dos paradoxos que contrapunham de forma chocante a racionalidade dos argumentos com a evidência dos factos observados, levaram a Matemática a grega a uma crise tremenda.

Por um lado, pela defesa arreigada da racionalidade, refutava-se a observação. Por outro lado, evitava-se a discussão do infinito, ou antes, do infinitamente grande e do infinitamente pequeno, dificultando a criação de fundamentos de racionalidade para a Aritmética.

A descoberta da incomensurabilidade provocou a primeira crise de “fundamentos”: a geometria, através das grandezas incomensuráveis, provava que nem tudo era número como pretendia a ciência pitagórica, segmentos havia que não admitiam medida comum e a “geometria não poderia reduzir-se à aritmética. As questões da geometria teriam de ser abordadas por outra via.” (Estrada, 2000).

As dificuldades criadas pelos incomensuráveis foram superadas, na Geometria, pela formulação de uma nova teoria das proporções, no sentido de encontrar bases onde assentassem as descobertas já feitas e que pudesse ser aplicada quer a grandezas mensuráveis quer a grandezas incomensuráveis. Ao mesmo tempo, procurou-se encontrar novos métodos de prova que evitassem a utilização da teoria pitagórica das proporções.

A particularidade de ter havido, na Geometria, um processo de superação dos paradoxos da incomensurabilidade deu origem a uma ênfase nesta ciência, que passou a ser considerada a ciência por excelência, porque dotada de fundamentos sólidos e assente e no método dedutivo que, aparentemente, a tornavam inatacável. A importância da Geometria na História da Ciência que está bem patente no valor e importância dos “Elementos de

Euclides”, o livro que perdurou por mais de 20 séculos como fonte do conhecimento matemático (não apenas geométrico...).

Euclides (360 – 295 a.C.) estabelece os fundamentos para o raciocínio demonstrativo, sem preocupação com a aplicação ou verificação experimental (não relevando sequer a origem da disciplina “geo-metria = medida da terra), a partir de asserções aceites sem demonstração, por serem “auto-evidentes” e construindo daí um sistema fechado de argumentos lógicos,

Nos “Elementos”, a teoria das proporções que é creditada a Eudoxus (410-355 a.C.) pretende superar as dificuldades da incomensurabilidade.

Na Aritmética, porém, o abalo da descoberta dos incomensuráveis foi profundo e aceita-se quase sem discussão que esse facto perturbou o desenvolvimento da ciência dos números por muitos séculos. Basta observar os “malabarismos” de Arquimedes para demonstrar os seus resultados sem sair do rigor dos métodos aceites pelos cientistas da sua época, com quem se correspondia e (se calhar, o maior obstáculo) sem afrontar o “tabú” da utilização de processos que envolvessem os infinitamente grandes e os infinitamente pequenos...

Uma referência à forma como se processava o trabalho científico de Arquimedes foi feita por Pedro Nunes (1502-1578) citado por Gomes Teixeira em livro cuja leitura integral é possível “on-line”: (Teixeira)

«Oh ! que bom fora se os autores que escreveram nas ciências Matemáticas nos deixassem escritas as suas invenções pelos mesmos discursos que fizeram até que as encontraram. E não como Aristóteles diz dos artífices que mostram na máquina que fizeram o que está de fora e escondem o artifício, para parecerem admiráveis. É a invenção muito diferente da tradição em qualquer arte, nem penseis que aquelas tantas proposições de Euclides e Arquimedes foram todas achadas pela mesma via pela qual as trouxeram até nós».

No mesmo livro, é o próprio Gomes Teixeira a afirmar: Estas palavras aplicam-se em especial às questões em que intervêm quantidades indefinidamente decrescentes, nas quais os géometras helenos recorriam ao chamado método de exaustão, para descobrir os teoremas, e depois, para os firmar, empregavam longas demonstrações por absurdo, que encobriam os meios de os achar. Arquimedes é assombroso em questões difíceis desta natureza, e não se podem explicar os triunfos que obteve na resolução de questões relativas

à medida de volumes de sólidos, de áreas de superfícies planas e curvas e de determinações de centros de gravidade, sem admitir que empregava métodos aritméticos, para inventar os seus teoremas, e que depois os apresentava vestidos de roupagens geométricas, para satisfazer às exigências de rigor dos matemáticos do seu tempo.

Aparentemente, a questão da irracionalidade, em termos numéricos, permaneceu latente por muitos séculos, apesar de superado, como foi, por via geométrica, o “absurdo” da existência de números irracionais...

Passaram muitos séculos até que se pudesse integrar os ditos no sistema...

5.2 – A escola de Alexandria

Alexandria, a cidade fundada no Egito por Alexandre Magno (365-323 a.C.) para se tornar o centro da cultura helénica, substituiu Atenas como centro cultural da civilização grega. Por lá terão passado todas ou quase todas as grandes cabeças da ciência da época, como alunos ou como professores no seu Museu.

Enquanto Atenas manteve a primazia relativamente aos estudos filosóficos, Alexandria tornou-se, a breve trecho, o centro de divulgação científica ao longo de vários séculos. Não havia, aparentemente, em Alexandria uma recusa tão nítida em relação ao trabalho com números não racionais e as questões relacionadas com números continuaram a ser trabalhadas ao nível da investigação da época.

Entre os grandes cientistas do Museu conta-se o nome do já referido Teon, (335 – 405 DC) matemático bem conhecido pelas contribuições para os Elementos de Euclides e para a Aritmética de Diofanto. Cerca de 700 anos depois de Pitágoras, considerava-se um Pitagórico e educou a filha, Hypatia (370-415 d.C.), um caso raríssimo de mulher com acesso à cultura científica, de tal forma que ela veio a tornar-se professora de Matemática e filosofia no referido Museu, onde as suas lições se tornaram muito populares (McLeish, *The Story of Numbers*, 1991).

Duzentos anos após a morte de Ptolomeu, numa época em que as discussões científicas, em consequência do aumento da influência do cristianismo, começaram a transforma-se em discussões de fé e a divulgação do platonismo e do pitagorismo ameaçavam, de alguma maneira, a preponderância crescente das influências cristãs,

Hypatia foi vítima do fanatismo dos seus opositores, arrastada pelas ruas e queimada ... Uma história para um filme que simboliza o declínio de uma civilização e o fim de uma escola. A sua morte (415 DC) ocorre muito perto do final do Império Romano do Ocidente e do início da “longa noite medieval”.

Em 640 a cidade de Alexandria é invadida pelos Árabes e aquilo que ainda restava da grande Biblioteca foi destruído. A maior parte do acervo científico da antiguidade perdeu-se. Durante cerca de 1000 anos a civilização ocidental, a civilização da Europa cristã da Idade Média não faz progressos científicos.

5.3 - Os árabes e a sua importância na história dos números

No período subsequente à destruição da Biblioteca de Alexandria, sob a orientação de alguns califas mais iluminados em tempo de florescente império muçulmano, foi iniciada a tradução para árabe de alguns dos textos mais significativos ainda disponíveis e o centro científico da civilização deslocou-se para Leste.

A visão dos califas de Bagdad deu origem a um programa de salvaguarda de obras científicas da antiguidade e da sua tradução para árabe. A Casa da Sabedoria era o centro de toda a actividade científica que se disseminou depois por outras grandes cidades do grande império, onde se criaram academias ou casas de sabedoria idênticas.

As principais características da expansão árabe criaram condições para um desenvolvimento científico sem paralelo: o respeito pela cultura dos povos conquistados (e a sua incorporação na sua própria cultura e a expansão da língua (pela obrigatoriedade de leitura do Corão em árabe). A acumulação de enormes riquezas em consequência de todo o poderio guerreiro demonstrado permitiu a criação de todo um programa cultural. Criou-se deste modo um clima que levou à colaboração entre tradutores de obras de diversas origens e foi possível não só preservar muitas obras da ciência e da literatura gregas como criar nova ciência.

As lutas religiosas dos primeiros séculos da era Cristã tinham conduzido Alexandria ao declínio e o encerramento da Academia de Atenas haviam conduzido a que alguns dos seus mestres se deslocassem para a Pérsia ou para Bizâncio. A procura da

informação permitiu que a corte de Al-mansur (712-775) em Bagdade recebesse livros indianos de Brahmagupta (589-68) (*Siddhanta*, um original, ao que parece, (Wieleitner, 1932) . O sistema posicional decimal dos hindus terá chegado ao conhecimento dos árabes através da visita a Bagdad de uma delegação de sábios hindus nessa mesma época.

Distinguiu-se, neste período, como astrónomo e geógrafo, o persa Muahammad ibn-Musa al-Khwarismi (780-850) cuja obra escrita, no domínio da aritmética, uma vez traduzida, trouxe ao ocidente europeu os números árabes e a sua aplicação prática. O tratado original perdeu-se mas são conhecidas traduções latinas, por vezes pouco fiéis e com acrescentos. Supõe-se que o nome original do livro fosse *O livro da adição e subtracção segundo o cálculo dos hindus*. (Estrada, 2000)

Importa salientar que al-Khwarismi desde logo passou por cima da concepção grega de aritmética como teoria dos números por oposição a logística (- utilização prática dos mesmos). O nome do autor, deu origem às designações de algarismo, algorismo e algoritmo, ainda hoje utilizadas.

O livro que divulgou a utilização dos nove numerais juntamente com o sinal de zero (aparentemente tratado diferentemente do número...) tornou-se na ferramenta básica da ciência. Noutro livro, em que se propunha a dar uma colecção de regras e exemplos destinados em especial a operações ligadas a testamentos, a comerciantes e banqueiros é dado o nome à álgebra, a partir da palavra usada no título.

É curioso notar que só a parte inteira dos números é representada, nesta época, no sistema decimal (Estrada, 2000). As fracções usadas são representadas no sistema sexagesimal (na mesma época, os astrónomos usavam o sistema sexagesimal para inteiros e fracções). Só mais tarde se passou a usar o sistema decimal nas fracções.

5.4 – O Renascimento e os números complexos

A evolução da história da Matemática em geral e do conceito número, em particular desenvolveu-se em novo e muito distinto cenário a partir do declínio do Império Árabe: a Europa Central e Ocidental.

Na sequência da ocupação romana e mesmo após a queda do império romano não havia nestas paragens da Europa uma verdadeira ciência. Aliás, os romanos, que foram autores de obras de arte de grande substrato técnico e científico desdenhavam a ciência que não se traduzisse em utilidade.

Alguma instrução era proporcionada pelas escolas das catedrais, para efeitos religiosos, os poucos livros existentes eram repositórios de algumas ideias traduzidas por Boécio (475-524) do grego para o latim, as quais continham alguma aritmética básica e alguma geometria, nomeadamente no que respeita ao uso do ábaco. Outros nomes que importantes para o início da Idade Média são o de Isidoro de Sevilha (560-636), que nas suas “Etymologies” apresenta, no Livro III “De Mathematica” e o do Venerável Bede (672-735), um monge inglês que, entre outros temas, se dedicou aos problemas do calendário e da fixação da data da Páscoa.

A Aritmética, a música, a geometria e a astronomia constituíam o “quadrivium” de um currículo escolar cuja outra parte, o “trivium”, incorporava a Retórica, a Dialética e a Gramática.

Nos usos práticos, o cálculo era feito à maneira romana, usando os numerais e as fracções romanas, o ábaco e, tal como no Império Romano, eram mal vistos os “matemáticos”, pela associação feita no Império aos astrólogos e praticantes de “magia negra”.

A aplicação da ciência conhecida, pelo menos no que respeita aos problemas matemáticos relacionados com o comércio e a governação, estaria entregue a judeus, nomeadamente no caso da península ibérica, onde eles estiveram sempre em destaque até à expulsão no século XVI. A astronomia e as suas ligações com a astrologia e a medicina eram outros dos domínios científicos relacionadas com o povo judeu. A sua preponderância terá continuado durante a ocupação muçulmana, considerada, de modo geral, compreensiva para com os ocupados. Os sábios judeus poderão ter sido a ponte para a transmissão de conhecimentos que, através de traduções árabes, começaram a chegar à Europa.

Pela Península Ibérica, para adquirir os conhecimentos científicos disponíveis, incluindo os das Matemáticas árabes, passou Gerbert (c.946 – 1003) mais tarde tornado

Papa com o nome de Silvestre II, que impressionou a Europa culta do tempo (séc. X) com o que tinha aprendido em Sevilha e Córdoba.

Como exemplo da forma como foi abordada a difusão da ciência mesmo após o início da reconquista do território deve referir-se a cidade de Toledo, onde uma escola de tradutores incluindo árabes, judeus e cristãos, protegida por Afonso o Sábio (1221-1284), se dedicou à re-tradução dos textos clássicos do árabe ou do hebraico para o latim, bem como das obras de Al-Kwarismi (tendo a tentativa de tradução para latim do nome do autor dado origem às palavras algarismo e algoritmo).

As cruzadas e os contactos daí decorrentes com o médio oriente foram outra forma de acesso a fontes que haveriam de criar o movimento designado por Renascimento.

O expoente maior da transferência de conhecimentos matemáticos para a Europa foi Leonardo de Pisa (1170-1250), cujas obras *Liber Abaci* e *Liber Quadratorum* constituíram o principal meio de difusão dos numerais, dos processos de cálculo e da álgebra utilizados pelos árabes, incluindo também materiais de origem grega e alguma contribuição pessoal importante. O *Liber Abaci*, apesar do título, não é propriamente o livro sobre o uso do ábaco mas sobre o uso das “nove figuras” que com o zero vieram



Fig. 11 – *Arithmetica* de Gregor Reich, 1503. Simbolicamente, Boécio (algorista) compete com Pitágoras, (abacista) no cálculo aritmético. Figura retirada de <http://www.mlhanas.de/Greeks/Counting.htm>

transformar completamente as práticas aritméticas. A introdução dos novos processos de escrita dos números e de cálculo à maneira árabe não foi pacífica. Algumas representações de competições entre “abacistas” e “algoristas” dão conta da resistência à introdução do novo paradigma.

A forma como passou a ser vista a aquisição do conhecimento a partir das contribuições de Roger Bacon (1214-1294) e William de Ockham (1285-1387), em contraste com as concepções aristotélicas dos escolásticos, permitia antever progressos na evolução científica. A criação de Universidades em diversos países e, mais tarde, a invenção da imprensa, despoletaram o movimento renascentista que, no que diz respeito aos números, suas concepções e aplicações, não teve consequências imediatas.

Com a entrada no Renascimento, com a grande divulgação das obras traduzidas e agora impressas, com o desenvolvimento das Universidades, grandes avanços foram feitos na Astronomia, onde Copérnico (1473-1543) e Kepler (1571-1630) provocaram mudanças completas na visão que se tinha do Universo, que Galileu (1564 –1642) ajudou a comprovar com a observação directa. Os trabalhos destes cientistas deram grande impulso e motivação à Matemática, sobretudo na sua ligação às aplicações práticas, à maneira do que tinha acontecido antes em Alexandria,

Com o novo cenário, verifica-se também alguma alteração no “programa”: em vez das preocupações gregas de entendimento do Universo, cuja essência é o número e usando a razão, agora, acreditando ser Deus o supremo geómetra que criou o Universo com o correspondente rigor, o objectivo passa a ser a descoberta das leis Matemáticas do funcionamento da natureza. É, essencialmente, um programa religioso.

O estado da arte, no final da Idade Média, era de utilização relativamente livre dos números irracionais, à maneira árabe (apesar de se manter em aberto se deviam ou não ser considerados números), de aceitação do zero como número, de repulsa na aceitação dos números negativos. Mesmo os matemáticos que aceitavam os números negativos recusavam a aceitá-los como solução de equações. Absurdos, eram eles designados por muitos matemáticos. Cardano (1501-1576) apresentou-os como solução de equações mas considerou-as soluções impossíveis, meros símbolos: chamou-lhes raízes ficcionadas enquanto chamava reais às positivas. Vieta (1540-1603) desprezou-os e Descartes (1596-1650) só parcialmente os aceitava (Kline, 1972).

Apesar de não terem superado as dificuldades com os irracionais e os negativos, os matemáticos europeus entraram decididamente pelo caminho dos números a que chamamos actualmente números complexos. A resolução de equações de terceiro grau através de processos algébricos conduziu ao estabelecimento de fórmulas cuja aplicação conduzia, em certos casos, a estranhas situações de resolução impossível: raízes quadradas

de números negativos. A evidência, porém, da existência de solução real para algumas dessas equações (p.e. $x^3=15x+4$ admite a solução 4) levou a admitir trabalhar com esses números, visto permitirem obter uma solução real válida, como provou Bombelli (1526-1572). Sem hesitações, estenderam a aplicação da raiz quadrada a todos os números que aparecessem na resolução de equações quadráticas. Cardano obtêm as raízes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ para a equação $x(10 - x) = 40$, verifica o resultado e escreve “pondo de lado todas as torturas mentais envolvidas”, e concluindo que “assim progride a subtilmente a aritmética, para uma conclusão tão refinada quanto inútil” (Kline, 1972), pág. 253.

Outros autores oscilavam entre a aceitação e a rejeição mas o carácter utilitário e programático presente na posição expressa por Girard (1595-1632) prevaleceu: “ Poderá perguntar-se para que servem (as raízes complexas)? Eu respondo: para três coisas: para garantir a certeza das regras gerais, para a utilidade que tiverem e porque não há outras” (Kline, 1972). Descartes “cunhou” a palavra “imaginárias”, considerando que “nem as verdadeiras nem as falsas (negativas) raízes são sempre reais; às vezes elas são imaginárias”, defendendo que, enquanto as negativas podem, pelo menos tornar-se reais por transformação da equação noutra de raízes positivas, isto não pode ser feito com raízes complexas. Estas, portanto, não são reais mas imaginárias”. (Kline, 1972)

É muito estranho que se aceite mais facilmente o resultado da radiciação de um número negativo do que o próprio número negativo...

Galileu tinha introduzido a ideia de descrever os movimentos usando fórmulas algébricas para representar funções. O ideal pitagórico do tudo é número é modificado agora para a definição o de relações entre números, procurando interpretar a linguagem do Universo (o Universo está escrito em linguagem Matemática, nas palavras de Galileu). Descartes e Fermat (1601-1665) criaram a “geometria algébrica”, cuidadosamente definida como “analítica”, a fim de evitar a crítica sobre um processo que acreditavam ser mais arte do que ciência e o seu poder rapidamente se revelou maior do que o antevisto pelos seus criadores. As curvas passaram a poder ser representadas por equações e as suas propriedades estudadas de forma muito mais prática.

As ferramentas algébricas estavam disponíveis para o estudo da geometria e das funções de tal modo que o poder da álgebra foi reconhecido ao ponto de tomar a anterior posição da geometria no comando das Matemáticas, embora com críticas e insistências dos

mais puros, como Pascal (1623-1662), que insistiam no rigor dos métodos e provas geométricas e apontavam a ausência de fundamentos lógicos da álgebra. Outros, como Newton, renderam-se, esperando que alguém haveria de demonstrar que aquilo que, como resultado da experiência prática, funcionava, não podia deixar de ser terreno sólido.

No âmbito da Teoria das Equações, para além de Vieta e Bombelli destacam-se as contribuições de Descartes e Newton.

Pascal e Fermat contribuíram para o desenvolvimento da teoria das Probabilidades. A Teoria dos Números teve as suas mais importantes contribuições com Pierre de Fermat, que defendia que a Aritmética tinha sido negligenciada porque submetida, em boa medida, à Geometria e acreditava que havia, partindo do trabalho de Diofanto, um importante caminho a percorrer. Anotando nas margens do livro que continha a versão grega e a tradução latina da “Arithmetica”, escreveu teoremas que não se deu ao trabalho de demonstrar. Os melhores matemáticos dos séculos seguintes, que lhe seguiram as pisadas, trabalharam duro para fazer as demonstrações. E, no caso bem conhecido do “último” teorema de Fermat só foi finalmente demonstrado em 1994...

Ao nível do cálculo aritmético verificou-se um desenvolvimento no uso de frações contínuas, com vista ao cálculo aproximado de irracionais e foi dado um passo de gigante no sentido da simplificação do cálculo com a invenção dos logaritmos, por Napier (1550-1618) e por Just Burgi (1552-1632), de forma independente, quase simultânea, usando ambos bases diferentes entre si e diferentes das que são hoje utilizadas. Ambos tinham por objectivo obter facilidades no cálculo astronómico, o que foi conseguido após construção de tabelas de logaritmos. Há bem poucos anos ainda as tabelas (“tábuas”) de logaritmos faziam parte das “ferramentas” do estudante do ensino secundário e de profissionais de muitas profissões.

A “régua de cálculo”, instrumento de trabalho que desapareceu da circulação tão depressa quanto as Tábuas de Logaritmos com o advento das calculadoras electrónicas tinha como princípio de funcionamento os logaritmos neperianos.

É também na época renascentista que Pascal cria a sua calculadora mecânica, a que se seguiram outras invenções que realizavam apenas operações aritméticas. Charles Babbage (1791-1871), no século XIX procurou antecipar uma máquina programável capaz

de executar seqüências de cálculos pré-definidos mas a engenharia da época não esteve à altura das concepções do inventor.

No que respeita à álgebra, o grande desenvolvimento foi a melhoria da simbologia, desde o sinal de igual aos sinais das operações e aos símbolos das potências. Até aqui, eram usadas palavras inteiras (como “a coisa” e “o censo”) muitas abreviaturas,

5.5 - Base da ciência Matemática: a geometria ou os números?

Numa primeira fase, François Vieta promoveu a separação das águas entre a Aritmética e a Algebra, recorrendo às designações curiosas de “Logística numerosa” ou dos números para a Aritmética e de “Logística speciosa”, operando com espécies, formas ou coisas.

Numa época em que o rigor matemático estava associado à Geometria, dado o processo dedutivo utilizado na construção de todo o seu edifício teórico desde o tempo dos gregos e em que a boa parte da motivação da álgebra foi a resolução de problemas geométricos, devia ser de algum modo frustrante, para quem se sentia seguro e confiante na aplicação de métodos algébricos, não poder contar com solidez científica como tinha a Geometria (pelo menos naquela época). Objecções de monta à álgebra, à geometria analítica e ao cálculo foram feitas por Pascal e por Barrow (1630-1677), por falta de fundamentação, isto é, por não serem compatíveis com as exigências de rigor herdadas dos Gregos.

A visão de Vieta foi de que havia necessidade de desenvolver a álgebra no sentido de poder lidar com a proporção de magnitudes, fossem elas de que tipo fossem: o seu sonho seria a criação de uma ciência dedutiva das magnitudes empregando simbolismo algébrico. Usando a álgebra como caminho para a Geometria, Vieta sonhava para ela uma vida e um sentido próprios. Bombelli já havia apresentado demonstrações aceitáveis sem recurso à geometria e Stevin garantia que o se podia fazer na Geometria era possível na Álgebra...

Descartes dá uma contribuição teórica importante no mesmo sentido, considerando que “a álgebra precede os outros ramos da Matemática, é uma extensão da lógica útil para manusear a quantidade e, neste sentido, é mesmo mais fundamental que a geometria” (Kline, 1972), mas não completa o caminho encetado no sentido de uma Matemática

universal, utilizando princípios lógicos e simbólicos e todo o conjunto utilizado para mecanizar o raciocínio....

Outros, como Barrow, encaravam a álgebra mais como uma formalização da lógica do que como parte da Matemática. Newton usou a linguagem da álgebra no desenvolvimento do cálculo e essa necessidade fez crescer a importância do cálculo face à geometria.

De qualquer forma, a álgebra tinha direito ao seu lugar mas continuava assente na intuição e na tentativa e erro desde os tempos babilônicos e de Alexandria; novas contribuições e mais trabalho tinham-lhe dado importância e visibilidade, mas, fundamentos análogos aos que Euclides tinha dado à Geometria, não os havia. E fora algumas objecções, já referidas, não parecia haver excessiva preocupação com o facto: parecia haver auto-evidência nas propriedades dos números e das fracções, tão directamente derivadas da experiência. Se o próprio Euclides tinha sido parco em fornecer as bases lógicas da teoria dos números nos livros dos Elementos que a eles respeitam... O sistema dos números tinha crescido com a introdução de novos tipos de números, as regras das operações anteriormente aceites para os inteiros positivos e para as fracções eram aplicadas a esses novos elementos, as letras tratadas como números... A Geometria não podia fornecer a base lógica para os negativos, para os irracionais e para os complexos...

Mesmo assim, a coisa resultava em termos práticos e continuou a avançar-se confiantemente no emprego da nova álgebra. O problema de criar fundamentos lógicos para o sistema de números era difícil demais para a época. Um período de grande criatividade estava em marcha e a criatividade precede a formalização e a lógica. (Kleine, 1980).

5.6- Newton, Leibnitz e os infinitésimos e infinitamente grandes

Newton e Leibnitz (1646-1716) construíram o cálculo diferencial e integral utilizando o conceito de função, apoiando-se na álgebra e na geometria analítica, utilizando, indistintamente, todos os tipos de números: irracionais, negativos, complexos.

Desta forma, todo o edifício lógico que faltava ao tratamento dos números, faltava ao desenvolvimento do trabalho com funções.

Newton e Leibnitz introduzem dois novos conceitos, a derivada e o integral definido, noções complexas a requerer, também elas, fundamentos lógicos. Ambos, se “apoiaram nos ombros de gigantes” que os precederam para criar ferramentas que se revelaram da maior importância. Mas falharam a fundamentação das suas teorias. De facto, tornou-se necessário adoptar alguma flexibilidade para utilizar processos que envolvem acréscimos h (“indivisíveis”, “quantidades infinitamente pequenas”), que são “levados” a zero para realizar uma divisão, em que, sendo o denominador, não podem ser zero... Ou, por outro lado, a subdivisão da área abaixo da curva representativa da função poderia ser dividida em n intervalos, fazendo n “tender” para infinito... E porquê desprezar os termos do tipo $1/n$ ou $1/n^2$ que de seguida podem surgir?

Escreveu Leibnitz, numa das respostas às muitas críticas que recebeu, que “infinitésimos não são realmente números mas ficções. No entanto estes números ficcionados ou ideais regem-se pelas mesmas leis dos números ordinários” – “infinitesimals are not real but fictitious numbers...” (Kleine, 1980, p. 137).

Acreditava-se que se poderiam encontrar justificações precisas, provavelmente baseadas no método de exaustão, à maneira de Arquimedes. E a eficiência e a importância dos resultados práticos obtidos na utilização do cálculo promoveram a imediata aceitação da nova ciência. Nova ciência que por sua vez deu origem a novos ramos (alguns dos quais vieram acrescentar algumas dificuldades de fundamentação), numa árvore frondosa mas sem raízes.

5.7 – Número, o que é?

Os espectaculares resultados obtidos no século XVIII conduziram a uma situação pouco confortável em que, no que respeita aos números, os racionais eram aceites sem objecções, mas não os negativos e os complexos. Ainda no século XIX havia discussão exacerbada sobre estas duas entidades, com a mesma força dos séculos anteriores. Publicavam-se livros em que se ridicularizavam os números menores do que nada, em que se defendida como inaceitável que a multiplicação de dois negativos pudesse dar um

resultado positivo ou que uma equação tivesse duas raízes impossíveis ou que houvesse números impossíveis cuja multiplicação resultasse na unidade. Nomes sonantes como Carnot (1753- 1823) defendiam que a noção de algo inferior a zero era absurda e que, se usadas nas equações, era porque se revelavam úteis, devendo não ser consideradas quantidades para que não se tirem conclusões erradas e outros, como Cauchy (1789-1857) recusavam tratar como números expressões do tipo $a + b\sqrt{-1}$, evitando utilizar $\sqrt{-1}$ por não se saber o que significa.. De Morgan, em 1831, foi mais longe ao dizer que tanto $\sqrt{-a}$ quanto $-a$ são imaginários porque são tão inconcebíveis um como o outro. (Kleine, 1980).

A representação geométrica dos complexos, proposta por Argand em 1806 e depois por Gauss (1777-1855), teve o condão de reconciliar os matemáticos sobre a questão dos complexos (e eventualmente reconciliou Gauss consigo mesmo, visto ter revelado antes algum cepticismo). Depois de descrever a adição e a multiplicação geométrica dos complexos teve ocasião de referir que as fracções, números reais e números negativos já estavam bem compreendidos e que os complexos tinham sido apenas tolerados, apesar do seu grande valor. A interpretação geométrica de $\sqrt{-1}$ permitia-lhe fundamentar convenientemente uma demonstração do seu significado intuitivo, nada mais sendo necessário para integrar a coisa no domínio dos objectos aritméticos. Gauss ficou satisfeito com a intuição. (Kleine, 1980, p. 158).

6 – Complexos e Hipercomplexos

A utilização da representação geométrica dos complexos no plano de Argand como vectores e a possibilidade de realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de vectores utilizando essa sua representação pelos complexos permitiu a criação de uma álgebra dos vectores: os vectores podem, desde então ser também tratados algebricamente e não apenas geometricamente. A regra do paralelogramo para somar dois vectores é substituída pela soma dos complexos correspondentes.

Os números complexos, na perspectiva geométrica, seriam como que números de duas dimensões enquanto os números ordinários corresponderiam a uma única dimensão.

Pensando nos problemas concretos em que, quando várias forças actuam sobre um corpo é pouco normal que estejam todas no mesmo plano e verificando a vantagem dos complexos para o tratamento algébrico dos vectores (logo, das forças) no plano, tornava-se desejável que pudesse encontrar-se o correspondente tri-dimensional dos números complexos. O programa de pesquisa incluía a possibilidade de realizar as operações usuais, tal como no caso dos complexos e a permanência das propriedades dos reais e dos complexos para uma liberdade total de manipulação algébrica.

Não houve, neste caso, o surgimento ocasional ou imposto pelas circunstâncias de uma nova entidade numérica que os resultados obrigaram que fosse aceite. Neste caso empreendeu-se um processo insistente de procura da entidade que correspondesse ao caderno de encargos. William R. Hamilton, em 1843, o visionário desta pesquisa, teve a intuição genial que lhe faltava para a resolução da questão e deixou o essencial dessa “iluminação” gravada a canivete na ponte de Brougham, em Dublin: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, ponto essencial da álgebra dos “números” que acabava de criar.

O resultado da persistente pesquisa de Hamilton foi uma entidade a quatro dimensões, o quaternião, representável por $H = a \cdot 1 + bi + cj + dk$, com a, b, c e d reais, utilizável e utilizado para os objectivos pretendidos, se bem que não contando com a comutatividade da multiplicação. Os quaterniões são um exemplo de uma classe mais vasta de números, designados por Hipercomplexos, que têm propriedades comuns aos reais e aos complexos. (<http://mathworld.wolfram.com/HypercomplexNumber.html>)

Chegados a este ponto e olhando todo o “edifício” matemático suportado em bases que não parecem lógicas e sólidas e procurando refazer a pergunta básica “o que é um número”, parece termos chegado a conclusões tão estranhas como “é o par (a,b)” (com a e b ambos reais) com que se aceita iniciar a definição de complexos ou é o quarteto (a,b,c,d) com que se começa a definição dos quaterniões ?

“Há muitos e importantes sistemas que não são designados por números, em resultado de acidente histórico ou da psicologia humana; mas que se revelam em determinadas circunstâncias tão práticos quanto esses sistemas a que chamamos números. Por vezes têm propriedades em comum com os números e podem ser mesmo usados para investigá-los. A distinção entre o numérico e o não-numérico é tão arbitrária quanto é ilusória a crença de que os números são dádiva de Deus” (Stewart, 1975, p.29).

7 – A procura dos fundamentos

O século XIX trouxe consigo novas preocupações de rigor que obrigaram os grandes matemáticos a reflectir.

Primeiro porque o edifício da Geometria, que se julgava sólido desde a sua construção axiomática apresentada nos “Elementos” há mais de dois mil, ficou abalado em consequência do “ataque” feito ao 5º postulado de Euclides. Tratava-se de assunto em aberto há muitos séculos e pretendia-se uma de duas coisas: substituí-lo por postulado mais auto-evidente ao nível dos restantes ou arrumá-lo por desnecessário, provando que pode ser deduzido dos restantes axiomas. Em golpes de génio e contra a corrente, foi-se mais longe e criaram-se as Geometrias não-Euclidianas. Entretanto, a pressão para pôr em ordem o edifício recente da análise e do cálculo, dando-lhe alicerces lógicos seguros, levou homens como Cauchy (1789-1857) a decidir que tal teria de ser baseado no número: tentativas de arranjar fundamentos na Geometria para o trabalho de Newton tinham falhado redondamente, e a crise da Geometria não era um bom augúrio. A criação dos complexos por Hamilton não perturbou a confiança no sistema numérico mas o sistema precisava de obras.

Cauchy procurou definir rigorosamente os conceitos base da análise e fundamentar o cálculo no conceito de limite, mas parece ter persistido em alguma falta de rigor no seu próprio trabalho, que foi completado por Weirstrass (1815-1897). Todo o trabalho foi feito confiando nas propriedades do sistema de números reais e complexos, eles próprios sem fundamentos. Hamilton tinha tido necessidade de estudar profundamente os complexos como ponto de partida para a descoberta dos quatérniões e apresentou a definição dos complexos como par de reais e definiu as operações com estes pares. Assim, tomou como pressupostas para a criação da teoria dos pares (complexos) as propriedades dos números reais.

Weirstrass foi o primeiro a dar conta de que não seria possível completar o trabalho de fundamentação da análise sem um melhor entendimento do sistema de números reais e foi o primeiro a propor uma definição rigorosa das propriedades dos irracionais a partir dos racionais.

Dedekind (1831-1916) e Cantor (1845-1918), confiados nas propriedades dos racionais, definiram os irracionais e estabeleceram as suas propriedades. Só depois caíram na conta da necessidade de bases claras e rigorosas para todo o edifício da Aritmética: faltavam as bases lógicas para os números racionais.

Dedekind, no seu “ *The Nature and meaning of numbers*”, descreveu as base para uma abordagem axiomática e, quase no final do século XIX, Giuseppe Peanno (1858-1932) apresentou uma tal abordagem axiomática para os números inteiros positivos. Cerca de seis mil anos depois de os Babilónios e Egípcios terem começado a usar números - inteiros, fracções e irracionais - podiam, finalmente, os matemáticos demonstrar os resultados das operações elementares.

11 - Conclusão

A tradição filosófica impunha a procura da verdade como a finalidade da ciência, ciência matemática incluída. As dificuldades relacionadas com a abordagem do infinito e o horror do vazio criaram dificuldades ao desenvolvimento da Aritmética, desprezando os números irracionais, e relevando a importância da Geometria, fundada na Lógica e tida por construção segura e rigorosa.

Ao longo dos séculos a utilidade dos números começou a forçar o reconhecimento da sua importância. Os números irracionais são a pouco e pouco aceites. O zero e os negativos adquirem estatuto de números, não sem reacções adversas. A evidência de se poderem obter soluções válidas de equações de terceiro grau a partir de expressões algébricas contendo raízes quadradas de números negativos fez aceitar os números complexos, aceitação que se tornou pacífica quando descoberta a sua representação geométrica no plano e a sua utilidade. A procura intencional duma relação geométrica tri-dimensional com um ente matemático idêntico aos complexos levou à invenção dos quaterniões e de outros entes de outras dimensões.

Digamos que a intuição e a utilidade prevaleceram sobre a lógica, visto que nem mesmo nas partes dos Elementos que Euclides dedicou aos números aparece uma fundamentação adequada.

O grande passo em frente de Newton e de Leibnitz na criação do Cálculo foi um passo no escuro em termos de fundamentação com direito a duríssimas críticas de George Berkeley (1665-1753), o Bispo Berkeley. Foi mais uma vez o utilitarismo a prevalecer. Dava-se razão aos críticos mas reconhecia-se a validade dos resultados práticos. Mesmo assim, do mesmo modo que os gregos “encostaram” os irracionais, encostaram-se agora os “infinitésimos”. Entretanto procurava-se a fundamentação da Análise Infinitesimal e os obstáculos pareciam ser os mesmo de antigamente: o infinito (e o infinitamente pequeno) e os irracionais.

Cantor, Dedekind e outros abordam a criação de uma teoria dos irracionais. Dedekind encontra em Eudoxo a inspiração para o seu trabalho: os “cortes” de Dedekind partem da observação que em qualquer divisão da recta dos números em duas classes há um único ponto que produz a divisão. E há “cortes” que não são feitos por números racionais: se colocarmos na classe da esquerda todos os números racionais negativos e todos os números cujo quadrado é menor que 2 e no lado direito todos os outros, o corte

não é determinado por um número racional. Para cada corte deste tipo temos um número irracional criado por este corte. Para alguns, esta criação não passa de um “monstro intelectual”, mas é aceite. Otto Stolz (1842-1905) mostrou que os irracionais são representados por dízimas não periódicas (Kline, 1972) e isso traz-nos algum conforto, pelo menos de um ponto de vista didático.

O passo seguinte foi a definição dos números racionais e das suas propriedades, assumindo a natureza e as propriedades dos naturais não são discutíveis e que o problema é estabelecer logicamente os negativos e as fracções. Weirstrass introduziu os racionais positivos como pares de números naturais e os negativos como outros pares de números naturais. Era nestes que se encontrava a dificuldade para a fundamentação do sistema dos números racionais e para o estabelecimento das suas propriedades. A ideia de Weirstrass foi retomada por Peano.

Para Kronecker o problema não se põe: “Deus criou os inteiros, o resto é obra do homem”. Dedekind avançou com uma teoria dos inteiros mas foi de Peano a abordagem axiomática melhor sucedida, apoiada numa simbologia muito cuidada, servindo-se da Lógica na sua argumentação. Russel (1872-1970) e Frege (1848-1925), influenciados por Peano e numa onda de axiomatização de a Matemática, procuraram fundá-la na Lógica.

A partir da fundamentação dos naturais foi possível estabelecer as propriedades dos inteiros relativos. As propriedades destes derivam de definições adequadas para as operações. De modo prático, podemos dizer que a existência dos negativos torna sempre possível a operação $a-b$ entre dois naturais e que a existência dos racionais torna sempre possível a operação a/b , desde que b não seja nulo.

Ficava criado o edifício dos números por uma ordem histórica inversa da ordem lógica.

Porém, o programa não estava completo. Para David Hilbert (1862 - 1943), “apesar do alto valor heurístico e pedagógico do método genético, merece, no entanto, a minha preferência o método axiomático para a representação definitiva do nosso conhecimento e a sua fundamentação lógica”. (Hilbert, 1930). E definiu de seguida os axiomas que devem ajustar exacta e completamente as relações entre os entes (de um sistema) a que chamamos números, bem como uma “teoria da demonstração”, “*que nos presta um serviço mais geral. Pois qual seria o estado de veracidade do nosso saber em geral e da existência e do*

progresso da ciência se nem na Matemática existisse a verdade certa? A teoria da demonstração (...) proporciona-nos a exaltação da convicção de que o comportamento da Matemática, pelo menos, não tem limites e que ela é capaz de descobrir as leis do seu próprio pensamento”.

Hilbert não estava ciente, nessa altura, das dificuldades que estavam a surgir para provar a consistência dos axiomas dos números reais (Kline, 1972).

Apesar de tudo, parece poder considerar-se que todo o trabalho à volta dos números reais tinha proporcionado bases sólidas para resolver os problemas lógicos que haviam sido levantados e que havia finalmente fundamentos relativamente seguros tanto para a Aritmética como para a Álgebra e para a Análise.

A procura de rigor na Análise havia revelado a necessidade de compreender a estrutura do conjunto dos números reais. Cantor percebeu a necessidade de estudar os conjuntos infinitos (a dificuldade que remontava ao tempo dos gregos) e os paradoxos relativos à divisão infinita da recta ou do entendimento da recta como um conjunto de infinitos pontos discretos. Permanecia ainda a questão do infinito actual e do infinito potencial, com o qual os gregos, eventualmente, evitavam o problema de saber se o número de circunferências obtidas por divisão por um diâmetro, sendo os diâmetros uma infinidade, deveria ser uma dupla infinidade. Galileu tinha dado um primeiro passo ao estabelecer que, apesar de podermos fazer corresponder, um a um, os números inteiros e os seus quadrados e verificarmos que há números que não são quadrados perfeitos, não podemos daí concluir que a infinidade destes é maior do que a daqueles.

A questão do infinito não foi pacífica e muitos preferiram ignorá-la, evitando reconhecer a existência de conjuntos infinitos, como o sistema de números reais: poderia falar de pontos da recta e evitar referir que a recta é constituída por um infinito número de pontos.

Cantor, o criador da teoria dos conjuntos infinitos e dos números transfinitos teve que enfrentar a oposição de poderosos antagonistas. Cantor ultrapassou o problema do “infinito potencial” considerando conjunto uma colecção de objectos definidos e separados que possam ser considerados pela mente e em relação aos quais podemos decidir se um objecto pertence ou não pertence... Um conjunto é infinito, para Cantor, se pode ser posto em correspondência, elemento a elemento, com uma parte de si próprio. Depois definiu

como numerável o conjunto que se pode colocar em correspondência um a um com o conjunto dos inteiros positivos e provou que o conjunto dos números racionais é numerável tal como o conjunto dos números algébricos, sendo não numeráveis os conjuntos dos transcendentais e dos números reais.

A um nível prático, a teoria de Cantor permite-nos entrever a possibilidade de justificar a utilização da representação dos números na recta real, considerando que a cada número racional corresponde um ponto e que em cada intervalo há um número infinito de pontos que não se esgotam com a atribuição a cada um deles de uma correspondência com um número racional. É que ainda há os irracionais, que até são mais numerosos que aqueles.

A teoria de Cantor não estava imune ao aparecimento de paradoxos e Hilbert, reconhecendo isso e procurando “*não trair a nossa ciência*” definiu os objectivos a alcançar e as considerações para a descoberta dos caminhos, sentenciando que “*ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós*”.

O desenvolvimento da Matemática, no século XX, não seguiu a previsão de Hilbert de construção de um sistema sólido de verdade irrefutável. Pelo contrário, verificou-se ser impossível fazê-lo. Dum ponto de vista pedagógico, podemos considerar que “*a Matemática não é o estudo de uma realidade ideal, pré-existente e intemporal*”, “*nem é um jogo com símbolos e regras inventadas*”, “*é um facto*”, “*nem mais nem menos que a existência de modos de raciocínio e argumentos acerca de ideias, que são aliciantes e conclusivas, que não são controversas uma vez compreendidas*”. “*Devemos aceitar a legitimidade da Matemática tal como ela é: falível, corrigível e com significado*”. (Philip J. Davis, 1995, pags. 377 e 378).

Bibliografia

- Aharoni, R. (2008). *Aritmética Para Pais*. Lisboa: Gradiva.
- Baumgart, J. K. (1989). *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. USA: NCTM.
- Caraça, B. d. (1978 (7ª edição)). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa.
- Estrada, M. F. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Fleg, G. (1983). *Numbers Their History and Meaning*. New York: Schoken Books.
- Hilbert, D. (1930). *Fundamentos da Geometria (Tradução portuguesa)*.
- <http://mathworld.wolfram.com/HypercomplexNumber.html>. (s.d.).
- Ifrah, G. (1994). *Histoire Universelle des chiffres.English*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Kleine, M. (1980). *Mathematics The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press.
- Kline, M. (1972). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, Inc.
- McLeish, J. (1991). *The story of numbers*. New York: Fawcett Columbine.
- Medeiros, A. P. (s.d.). <http://www.prof2000.pt/users/hjco/ForumWeb/Pg000101.htm>.
- Menninger, K. (1969). *Number words and number symbols*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Philip J. Davis, R. H. (1995). *A experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Stewart, I. (1975). *Concepts of Modern Mathematics*. New York: Dover Publications.
- Struik, D. J. (1948). *História Concisa das Matemáticas (A Concise History of Mathematics)*. Gradiva .
- Teixeira, G. (s.d.). *História das Matemáticas em Portugal*. Obtido em 16 de Maio de 2009, de Nonius: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexhm.html>
- Wieleitner, H. (1932). *Historia de las Matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor, SA.

ANEXO

ACTIVIDADES MATEMÁTICAS
PARA A FEIRA MEDIEVAL DA ESCOLA

Pretende-se neste trabalho definir algumas actividades práticas destinadas a alunos do Ensino Básico, organizadas de modo a apresentar as actividades matemáticas antigas, relacionadas com a evolução da cultura e do modo de vida, que tem uma história relacionada com a história da humanidade e que acompanhou e deu forma à evolução cultural da humanidade.

As propostas de actividades que se seguem enquadram-se na iniciativa da Escola de realizar uma “Feira Medieval” no final do ano lectivo.

Imagina-se que as actividades poderão decorrer numa tenda, orientadas por um matemático (Boécio ?) vestido a rigor, dispondo de um “contador” (uma mesa baixa sobre a qual se colocará um pano preto com linhas, de modo a servir de ábaco), de alguns bancos tradicionais para os visitantes (alunos) e de alguma estante para dispor as diversas fichas de orientação das actividades. Podemos ainda antever a presença em simultâneo de um “abacista” (matemático que utiliza o ábaco como ferramenta de trabalho e só conhece a numeração romana) e de um “algorista”, matemático experimentado na utilização dos algarismos e dos algoritmos indo-árabes, introduzidos na Europa a partir da Península Ibérica e que demoraram vários séculos a impor-se...

A decorar a tenda poderá aparecer a reprodução de algum quadro (por exemplo, a competição entre Pitágoras e Boécio sob os olhares da personificada Aritmética, figura incluída na “Margarita Philosophica”, de Gregor Reisch, 1503) e de alguns símbolos que relacionem a astronomia, astrologia,



medicina e matemática tendo em conta a importância dada na Idade Média aos aspectos astrológicos na medicina...

A animação do espaço durante a feira deverá basear-se na utilização de vários materiais preparados para o efeito e que se poderão agrupar nas categorias seguintes:

- PROCESSOS DE CÁLCULO ANTIGOS USADOS NA IDADE MÉDIA:

- Uso do ábaco romano para somar, subtrair, multiplicar e dividir (apresentando exemplos em numeração romana);

- Multiplicação e divisão à maneira egípcia (dobrar e partir ao meio) (com exemplos em escrita egípcia e, sobretudo, em escrita indo-árabe visto tratar-se de processo interessante para o desenvolvimento de capacidades de cálculo...);

- Multiplicação “à russa”;

- Fracções egípcias (fracções unitárias) na multiplicação e na divisão;

- Multiplicação por “Gelosia”

- PROCEDIMENTOS E PROBLEMAS MAIS VELHOS QUE....

- Problemas típicos de épocas diversas...

- Resolução de equações pelo método da falsa posição;

- Resolução de equações de 2º grau pelo método de completar o quadrado;

- JOGOS

- Jogo do moinho

- O alquerque dos doze



- ENIGMAS E PROBLEMAS
 - “SATOR AREPO...” (quadrado mágico)



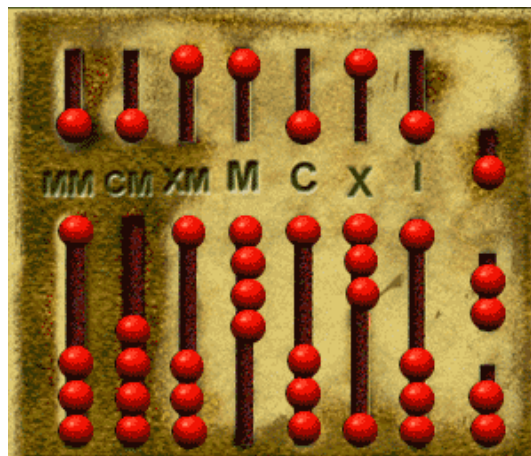
As fichas seguintes apresentam algumas das actividades matemáticas possíveis.

Outras, a seu tempo, poderão completar o projecto.

Os Cálculos dos Romanos

1

A escrita dos números à maneira dos Romanos ainda é utilizada em muitas situações e ensinada nas escolas. Naturalmente que não é propriamente por causa da Matemática que se aprende a numeração romana, porque na Matemática já não se usa esta maneira de escrever os números. É uma questão cultural, que revela como se mantém a influência de uma civilização antiga.



Quem gosta de Matemática e de História pode ser desafiado a responder a uma pergunta interessante: como é que os Romanos faziam para adicionar, subtrair, multiplicar e dividir? É que, se pensarmos na maneira como actualmente fazemos essas operações e na maneira romana de escrever os números, rapidamente concluímos que não "joga" uma coisa com a outra.

A imagem mostra um ábaco romano de bolso. Trata-se de uma espécie de calculadora manual, portátil. Repara nas colunas relativas às unidades (I), às dezenas (X), às centenas (C), etc. Nota que, à direita das unidades aparecem ainda três ranhuras mais pequenas: referem-se a partes da unidade (fracções no sistema adoptado pelos romanos).

A forma mais vulgar do ábaco romano e que continuou a ser utilizada durante séculos, depois da queda do Império Romano do Ocidente, terá sido uma pequena mesa (banca) onde, em vez das ranhuras que a figura mostra, haveria marcações a separar as colunas correspondentes às diversas ordens de grandeza, como se pode ver no esquema abaixo.

As palavras banqueiro e bancarrota são derivadas de banca, no sentido referido.

Para representar um número são colocadas, em cada coluna, pequenas pedras (chamadas "cálculos", que deram origem à palavra calcular...) em número correspondente às unidades, às dezenas, às centenas. Repara que por baixo de cada símbolo (por exemplo das dezenas X) podemos colocar, no máximo, 4 "contas" ou "cálculos". Isto porque vamos colocar uma na parte de cima a representar 5, sempre que necessário.

Como primeiro exercício, responde à pergunta: Qual é o número representado no ábaco de bolso (primeira figura)? 1 069 181? Acertaste... E na segunda figura? 94826? Muito bem...

	⊗		⊗		⊗
CM	XM	M	C	X	I
	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
	⊗	⊗	⊗	⊗	
	⊗	⊗	⊗		
	⊗	⊗			

Há algumas variantes na maneira de representar as classes de números elevados como mil, dez mil, cem mil e um milhão mas, com um pouco de atenção, é fácil fixar o que está em cada coluna.

**ACTIVIDADE
PROPOSTA:**

Utilizando pedrinhas, feijões, caricas ou fichas no esquema do ábaco romano desenhado abaixo, experimenta adicionar os números romanos

MMMMDCCXXXIX
MCCCCLVI e
MMMMMMCXCV

MM	CM	XM	M	C	X	I

Começa por representar o primeiro dos três números.

Depois adiciona ("acrescenta") o segundo, começando da direita para a esquerda... Basta representar os números e reagrupar os "cálculos" de acordo com regras que são fáceis de descobrir: cinco pedras na parte de baixo são substituídas por uma na parte de cima, duas na parte de cima são substituídas por uma na coluna da esquerda...

No final regista o resultado em numeração romana.

Outros exemplos:

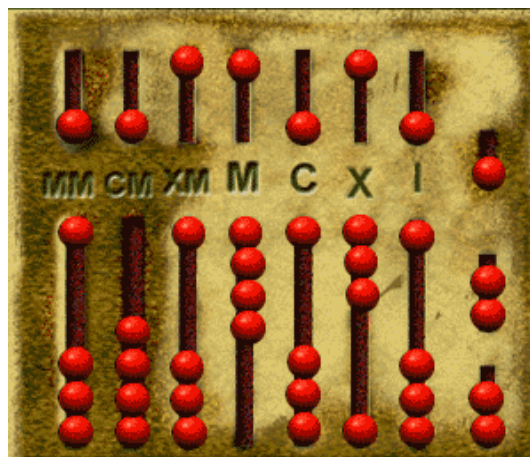
Adiciona MMMCCVII com MXXII

Os Cálculos dos Romanos

2

A escrita dos números à maneira dos Romanos não permite que se realizem cálculos de papel e lápis com facilidade.

Os cálculos eram feitos com um ábaco que podia ter um aspecto como o da imagem, utilizando pequenas pedras a que chamavam "cálculos". Calcular não é, por isso, mais do que contar as pedrinhas para descobrir o resultado de uma operação.



Repara nas colunas relativas às unidades (I), às dezenas (X), às centenas (C), etc., do ábaco de bolso da figura. Nota que, à direita das unidades aparecem ainda três ranhuras mais pequenas: referem-se a partes da unidade (fracções no sistema adoptado pelos romanos).

A forma mais vulgar do ábaco romano e que continuou a ser utilizada durante séculos, depois da queda do Império Romano do Ocidente, terá sido uma pequena mesa (banca) onde, em vez das ranhuras que a figura mostra, haveria marcações a separar as colunas correspondentes às diversas ordens de grandeza, como se pode ver no esquema abaixo.

Para representar um número são colocadas, em cada coluna, as pequenas pedras em número correspondente às unidades, às dezenas, às centenas, etc. Repara que por baixo de cada símbolo (por exemplo das dezenas X) podemos colocar, no máximo, 4 "contas" ou "cálculos". Isto porque vamos colocar uma na parte de cima a representar 5, sempre que necessário.

A subtracção no ábaco é intuitiva: é só retirar "pedras" nas quantidades pedidas. Pode haver necessidade de fazer algumas mudanças de posição para tornar mais evidente o modo de proceder.

ACTIVIDADE:

Experimenta
representar no ábaco o
número *MCCCCLVII* e
subtrair-lhe
DCCCCXXIII

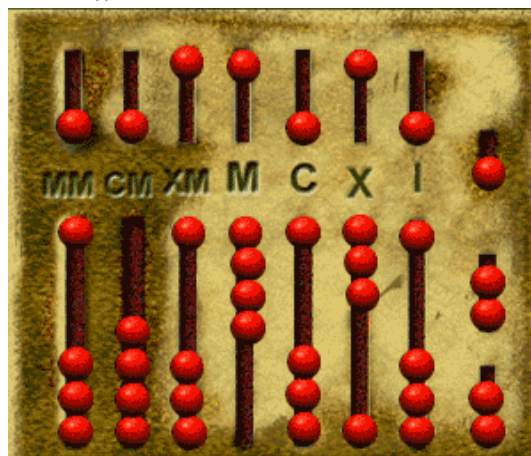
MM	CM	XM	M	C	X	I

Os Cálculos dos Romanos

3

Para multiplicar no ábaco exige-se o conhecimento da tabuada: sobre isso não há solução senão aprendê-la ou tê-la à mão...

Imagina que pretendes multiplicar dois números e que tinhas cada um deles representado no ábaco romano. Para efectuar a multiplicação terás de multiplicar cada valor que está em cada coluna de um dos números por todos os valores de todas as colunas do outro e somar tudo...



A dificuldade maior é a de saber em que coluna colocar o "cálculo" ou pedrinha correspondente a cada multiplicação parcial.

Há uma regra que era seguida pelos abacistas (as pessoas que usavam o ábaco) medievais que diz que a coluna onde começar a colocação do resultado (pelo valor mais baixo) é a coluna $a+b-1$, sendo a o número de colunas do multiplicando e b o número de colunas do multiplicador.

Para multiplicar, por exemplo, 23 por 3, vamos usar 3 como multiplicador

e temos de multiplicar 3 por 2 e colocar o resultado (6) na segunda coluna porque estamos um número da primeira coluna com um da segunda, logo $1+2-1=2$.

Depois temos $3 \times 3 (=9)$ para a primeira coluna porque $(1+1-1=1)$.

A leitura do ábaco dá o resultado: 69

Vejamos ainda como exemplo a multiplicação de 42×23 .

Na multiplicação de 4 (de quarenta e dois) por 2 e de 4 por 3 obtemos a disposição seguinte (a preto a primeira, a vermelho a segunda):

	*	*
C	X	I
	*	*
		*
		*
		*

Temos de seguida a multiplicação de 2 (de 42) por 2 e por 3 (a verde, a primeira na posição 1+2-1, a azul a segunda, na posição 1+1-1)

Falta apenas reorganizar o ábaco de acordo com as regras e registar o resultado: CMLXVI

*		*
C	X	I
***	**	*
*	****	

*	*	*
C	X	I
****	*	*

O multiplicador e o multiplicando podiam ser recordados de cabeça ou registados ao lado (em papel ou em tabuinha coberta de cera ou mesmo em zona do ábaco preparada para o efeito).

O multiplicador (no exemplo, o número 42) podia ser colocado na mesa e as pedras correspondentes serem retiradas à medida que avançava a multiplicação

XM	M	C	X	I

PROPOSTA

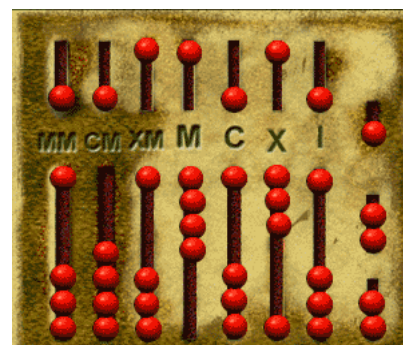
Calcula, usando o ábaco, CCIX vezes CLXIII

1. Calcula, usando o ábaco, o quadrado de CCLXV
2. Explica como multiplicar um número por X, por C e por M

Os Cálculos dos Romanos

A divisão realiza-se por subtração repetida do divisor, usando para isso um pequeno truque que consiste em verificar se se pode subtrair o divisor PELO MENOS 100 VEZES, ou PELO MENOS 10 VEZES, o que aumenta a rapidez do processo.

Além disso, como subtrair corresponde a retirar "cálculos", poderá tornar-se necessário passar cálculos de uma coluna para outra à sua direita ou de cima para baixo para se poder continuar até ao fim.



Vejamos, por exemplo, como dividir 808 por 35 (para facilitar a compreensão, não usamos, por agora, os numerais romanos).

Verificamos que podemos retirar **10 vezes 35**.

	※		*
↙	C	↘ ※	X
			I
	※※※		*
	※※※※※		*
			*

		*	*
C	X	I	
※※※※		*	*
		*	*

$$808 - 350 = 458$$

Podemos ainda retirar **10 vezes 35**.

		*
C	X	I
*		*
		*
		*

$$458 - 350 = 108$$

Retiramos agora 35, uma vez. É necessário fazer algumas mudanças no ábaco:

	**	*
C	X	I
*	*****	* * *

$$108 - 35 = 73$$

Retiramos novamente 35, uma vez.

	*	**
C	X	I
	** *****	* * *

$$73 - 35 = 38$$

Retiramos, finalmente, ainda mais uma vez 35

$$38 - 35 = 3$$

Temos então finalmente que o quociente é $10+10+1+1+1=23$ (retiramos 35 unidades 23 vezes) e o resto é 3.

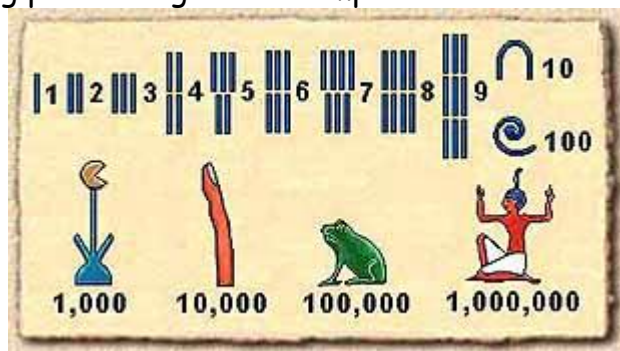
ACTIVIDADE

Experimenta agora com o ábaco a mesma operação: DCCCVIII a dividir por XXXVIII

MULTIPLICAÇÃO À MANEIRA EGÍPCIA

5

O sistema de escrita de números dos Egípcios antigos era complicado e pouco prático. Interessam-nos, por isso, mais os processos de cálculo do que a maneira de escrever os números. Vamos então usar os processos egípcios de cálculo com os nossos números. Na realidade estamos a fazer o que já faziam os gregos e os romanos, que também tinham sistemas de escrita de números próprio.



Na Idade Média ainda era comum usar o processo egípcio de multiplicação, que consistia em fazer **duplicações** sucessivas de um dos números a operar realizando-se a seguir a soma das parcelas que perfazem o outro número.

Exemplo: 16×13

/1	16/
2	32
/4	64/
/8	128/

13 208

Para perfazer 13 vezes o número 16 entram a primeira, a terceira e a quarta parcelas, tal como assinalado acima..

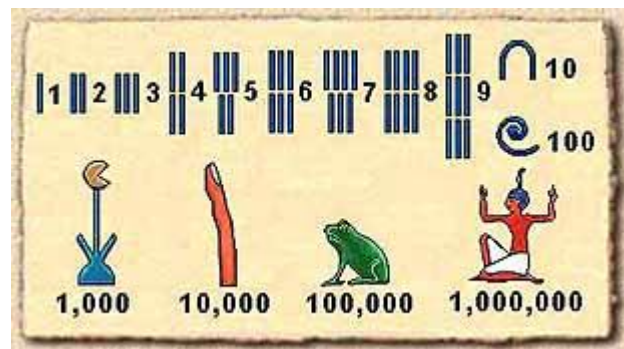
ACTIVIDADE

Calcula 287×13 por este processo

DIVISÃO À MANEIRA EGÍPCIA

6

O sistema de escrita de números dos Egípcios antigos era complicado e pouco prático. Interessam-nos, por isso, mais os processos de cálculo do que a maneira de escrever os números. Vamos então usar os processos egípcios de cálculo com os nossos números. Na realidade estamos a fazer o que já faziam os gregos e os romanos, que também tinham sistemas de escrita de números próprio.



A divisão à maneira egípcia é feita com a multiplicação, pensando que se quero, por exemplo, dividir 1120 por 80 vou procurar o número que multiplicado com 80 dá 1120.

1	80
2 /	160 /
4 /	320 /
8 /	640 /

(Não interessa continuar porque a duplicação já excede 1120. Vamos procurar nas parcelas a soma mais próxima de 1120. Como obtemos esse valor com as 3 últimas parcelas, o número que interessa é 14, resultado obtido somando os números correspondentes na outra coluna.

Proposta: 102 a dividir por 12, quanto é?

MULTIPLICAÇÃO POR GELOSIA

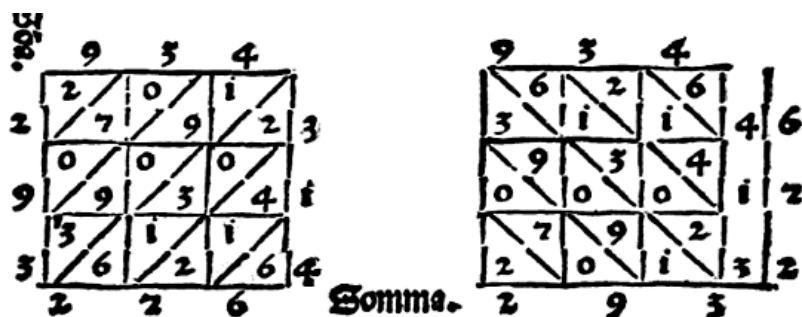
Os numerais que usamos hoje em dia são designados por "Indo-Árabes" porque são originários da Índia e porque foram adoptados e depois divulgados pelos Árabes. Num período que durou vários séculos e que começou no século VII, os governantes muçulmanos lançaram um programa de tradução para árabe de todas as obras científicas que pudessem encontrar, fossem dos sábios da antiga Grécia ou da Índia. Na "Casa da Sabedoria", em Bagdad, viveram e trabalharam os grandes cientistas da época. Um dos sábios árabes mais referidos nesse processo de aquisição do conhecimento e posterior divulgação foi Al-Kwarizmi, que escreveu livros sobre o uso dos numerais e sobre álgebra, cuja tradução para Latim promoveu a divulgação da aritmética árabe na Europa. A tentativa de traduzir o nome do autor dos livros deu origem às palavras algarismo e algoritmo.



Com os "algarismos", os europeus aprenderam a usar "algoritmos" para calcular. E em vez de registar apenas os resultados do cálculo, como se fazia com o ábaco romano, passaram a registar tudo, em papel e escrito a tinta, de forma que se passou a poder verificar, passo por passo, se havia erros... (E isto foi certamente, uma grande vantagem). E tudo isto só foi possível depois de os árabes terem decidido que o zero devia ser tratado como um número e definido as regras para trabalhar com ele.

Uma das operações que com maior dificuldade se fazia no ábaco antigo era a multiplicação. Para realizar esta operação com os numerais indo-árabes há vários algoritmos. Na escola primária ensinaram-te um deles.

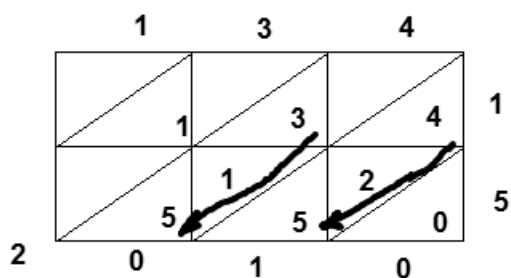
Vê agora como proceder para realizar a multiplicação por "Gelosia (mas, cuidado, que não irás longe sem a tabuada...).



FIRST PRINTED CASE OF GELOSIA MULTIPLICATION

Por exemplo, para multiplicar 134 por 15, colocamos os dois números assim:

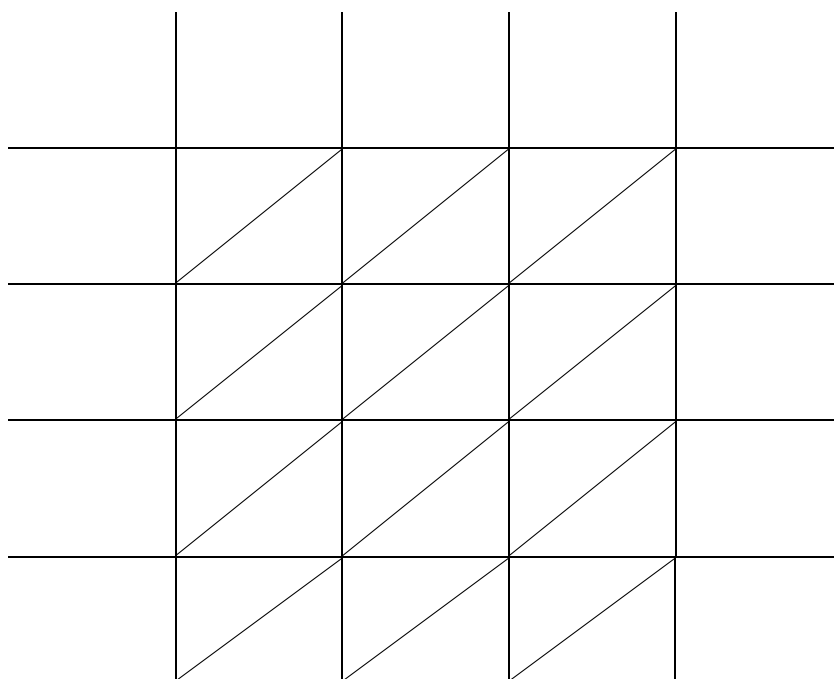
Neste processo colocamos sempre ambos os algarismos das multiplicações parciais que se vão fazendo (repara por exemplo que colocamos 20 no cruzamento da linha do 5 com a coluna do quatro; e 15 no cruzamento da linha do 5 com a coluna do 3).



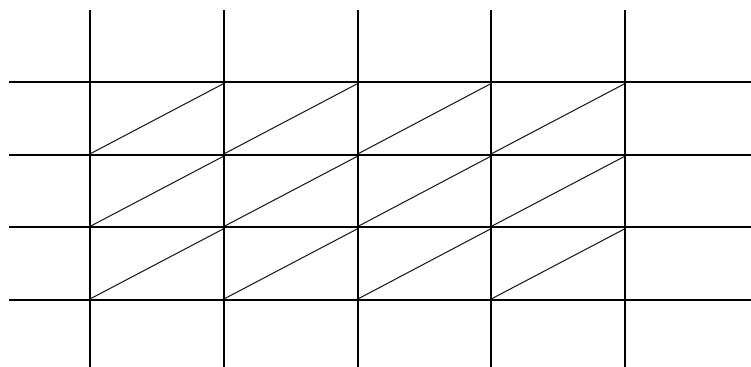
As somas finais são efectuadas segundo a diagonal, conforme indicado pelas setas.

ACTVIDADE

Utiliza o método de gelosia para calcular 456×223



Utiliza o método de gelosia para calcular $3127 \times 285 =$



FRACÇÕES EGÍPCIAS

8

Na Idade Média, os matemáticos ainda usavam as fracções que os antigos egípcios, 2000 anos antes, tinham inventado. O que estas fracções tinham de especial era que o numerador era sempre 1, pelo que lhe podemos chamar também fracções unitárias. (Havia uma excepção: a fracção dois terços também se usava e era muito importante). Com estas fracções unitárias, qualquer resultado de divisão que não fosse inteiro era apresentado como a soma de fracções unitárias todas diferentes. Por exemplo, a fracção $\frac{6}{7}$, para os egípcios era $\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{42}$, interpretada como a soma das 3 fracções.



Como é que sabemos que era assim? Sabemos porque foi completamente decifrado um papiro de 5 metros de comprimento por 30 cm de altura, escrito em 1650 a.C. por um escriba chamado Ahmes, que o copiou de um ainda mais antigo. Este papiro foi comprado por um advogado escocês chamado Rhind, em 1858 num mercado de Luxor e encontra-se actualmente no Museu Britânico. Há ainda mais alguns documentos da época, mas também se encontram fracções egípcias em documentos matemáticos muito mais recentes.

\ 1	5	\
\ 2	10	\
4	20	
8	40	
\ 16	80	\
19	95	

Os egípcios realizavam as multiplicações pelo processo de "dobrar e partir ao meio" e as divisões procurando, pela multiplicação, o número que serve para obter o dividendo. Por exemplo, para dividir 95 por 5, vou multiplicar o 5 para ver com quantas vezes chego a 95.

Para isso, colocamos o 5 e vamos duplicando sucessivamente, sem passar de 95. Depois procuramos as parcelas com chegamos a 95, assinalámo-las e somamos as parcelas correspondentes da outra coluna.

Fácil, não é?

O resultado da divisão é 19.

Se o resultado não for inteiro, começa-se a partir ao meio o número com que se começou para procurar o que falta.

Por exemplo 39 a dividir por 6:

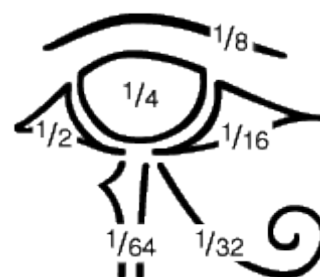
$$\begin{array}{r}
 1 \quad 6 \\
 \backslash \quad 2 \quad 12 \quad \backslash \\
 \backslash \quad 4 \quad 24 \quad \backslash \\
 \backslash \quad \frac{1}{2} \quad 3 \quad \backslash \\
 \hline
 6\frac{1}{2} \quad 39
 \end{array}$$

O resultado é $6\frac{1}{2}$, que se pode escrever $6\bar{2}$. É curioso verificar como este processo permite atribuir sentido aos números mistos, que quase não utilizamos.

Os egípcios dispunham de tabelas para ajudar a escrita das fracções unitárias evitando qualquer repetição, mas na base das fracções está o processo de divisão.

ACTIVIDADES

- Representa $\frac{3}{4}$ na forma egípcia. (Para dividir por 4, opera com o 4 até dar 3. Como não dá para dobrar, parte ao meio...)
- Representa $\frac{5}{8}$ na forma egípcia.
- Compara $\frac{3}{4}$ com $\frac{5}{8}$ quando estão escritos na forma egípcia. Que comentário podes fazer?
- Como farias a divisão de 5 broas de pão por 8 pessoas? E como fariam os egípcios?
- Um dos problemas do papiro de Rhind é o de dividir 6 broas de pão por 10 homens. Verifica que $\frac{6}{10}$, para os egípcios é $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ (também se podia escrever $\bar{2}\bar{10}$) e explica como fariam a distribuição.
- Investiga a lenda das fracções do olho de Hórus



RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES - MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

9

A resolução de equações, na Idade Média, baseava-se em processos muito antigos, já conhecidos dos egípcios ou dos babilônios. (Os métodos que utilizamos hoje, a que chamamos algébricos, foram elaborados e divulgados pelos árabes a partir do séc. VIII e só começaram a aparecer na Europa depois do séc. XII).

No papiro de Rhind aparece o seguinte problema:

Uma quantidade e a sua quarta parte, somadas, perfazem 15. Qual é a quantidade?

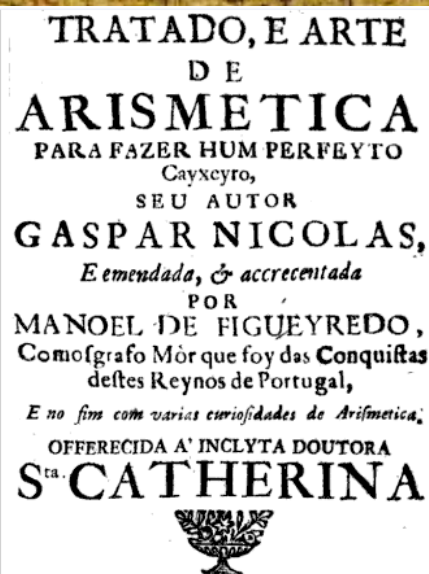
A tradução, para nós, deste problema é $x + \frac{1}{4}x = 15$.

O escriba Ahmes ensina a resolver este problema por um processo que, muitos séculos mais tarde, chamaram método da falsa posição:

Faz de conta que a solução é 4 (repara na fracção!). Se a solução fosse 4, $\frac{1}{4}$ de 4 é 1, mais 4 dava 5 e não 15, como nós queremos. Mas 15 é 3 vezes mais do que 5. Então a solução também tem de ser 3×4 .

Gaspar Nicolas, aritmético português que escreveu o *Tratado da pratica Darismetica*, publicado pela primeira vez em 1519, apresenta um problema parecido: *Um homem comprou um cavalo por um tanto preço que se o comprara por mais um terço da quarta parte do que lhe custou, o cavalo teria custado 100 cruzados. Pergunto: quanto custou o cavalo?"*

Gaspar Nicolas sugere escolher um número em que aches quebrados, o 60. Como $\frac{1}{3}$ é 20 e $\frac{1}{4}$ deste valor é 5, temos $60+5$ o que dá



hum terço do quarto do que lhe custou, o cavallo lhe custára cem cruzados. Demando quão lhe custou. Faze assim toma, hũ numero em q aches quebrados, o qual he 60. ora vê qual he o terço do quarto de 60. & velohás nesta maneyra, dirás assim 3 vezes 4 são 12. & assim é o terço do quarto de hũ dozavo. Ora toma o dozavo de 60. q são 5. & porque diz q se custára mais o terço do quarto de 60. q são 5. reaes, dirás assim, pondo estes 5. sobre 60. fe 65. fofsem 60. q seriaõ 100. de que elle fez meção. Faze por regra de tres, & acharás q vallem 92. & quatro trezavos, & tanto custou o cavallo. Se quizeres provar, toma o terço do quarto de 92. & 4. trezavos, & ajúta-o com os mesmos 5. & 4. trezavos & fará 100. & assim

65 em vez do 100 que custou o cavalo. Basta ver por quanto multiplicar 65 para dar 100. Como 65 só cabe uma vez em 100, o resultado é $1\frac{35}{65}$ (35 é o que sobra depois de tirar uma vez 65). Este número misto equivale a $1\frac{7}{13}$, que vamos multiplicar pelo número escolhido inicialmente: $60 \times 1\frac{7}{13} = 60 + 60 \times \frac{7}{13} = 92\frac{4}{13}$

Outros problemas

O problema nº. 32 do papiro de Rhind propunha:

Uma quantidade, a sua terça parte e a sua quarta parte adicionadas perfazem 2. Qual é a quantidade?

Em termos actuais, trata-se de resolver a equação $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2$. O valor de x obtém-se dividindo 2 por $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. O escriba egípcio procurava por quanto multiplicar $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ para obter 2, o que era um bom desafio à sua perícia para trabalhar com fracções unitárias.

Este tipo de problema, aparece também no livro de Gaspar Nicolas: "*busca-me um número que, tirado o quinto e o sétimo fique 981*".

Este problema traduz-se por $x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{7}x = 981$ e a resolução apresentada aparece sob forma de regra sem qualquer justificação. Mas bem podia pensar-se em começar por

experimentar o número 1: o primeiro membro da fracção daria $1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{23}{35}$.

Falta saber por quanto multiplicar $\frac{23}{35}$ para obter 981, o que se faz dividindo 981 por $\frac{23}{35}$. Obtemos $1492\frac{19}{23}$. (Aqui o processo de cálculo mais fácil é fazer

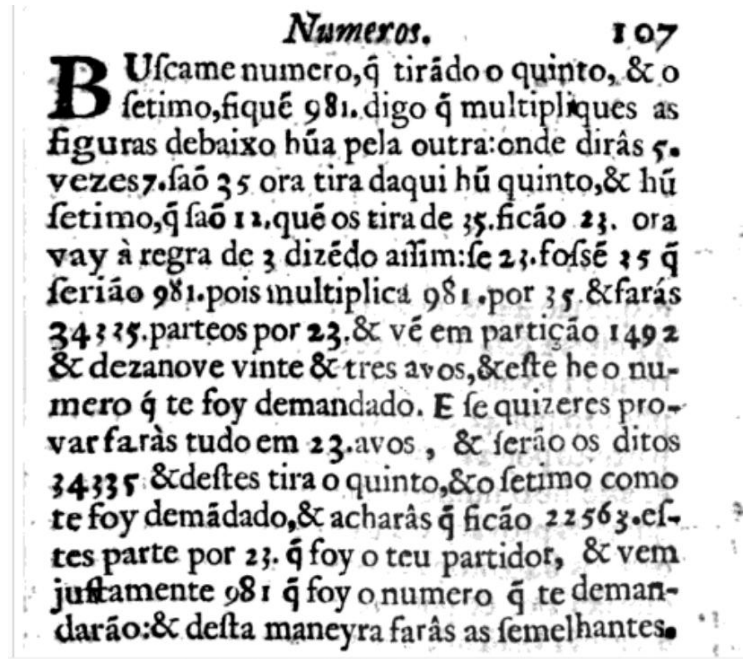
$981 \div \frac{23}{35} = 981 \times \frac{35}{23} = \frac{34335}{23} = 1492$ e resto 19, pelo que o número **exacto** é $1492\frac{19}{23}$.

Propostas:

Resolve o seguinte problemas:

-Qual é a quantidade que adicionada com a sua nona parte perfaz 20.

-Uma quantidade adicionada com a sua terça parte e a sua sexta parte perfaz 11. Qual é a quantidade?



PROBLEMAS COM NÚMEROS INTEIROS

10

Os problemas de números são muito antigos e muitas vezes são praticamente os mesmos, repetindo-se em livros ao longo de séculos. No "Sun Tsu Suan Chin", também conhecido como "Manual de Matemática do Mestre Sun", do séc. I, aparece um problema assim: *"uma mulher estava a lavar pratos no rio quando um funcionário que supervisionava as águas lhe perguntou: Porque há tantos pratos aqui? - Porque houve uma festa, respondeu a mulher. Depois o funcionário perguntou o número de convidados. Não sei, disse a mulher, quantos lá estiveram. Por cada dois foi usado um prato para arroz, por cada três, um prato para caldo; por cada quatro, um prato para carne; e havia 65 pratos no total"*.

Gaspar Nicolas, o português que escreveu o "Tratado e Arte de Arismética" apresenta o seguinte:

"Uma mulher trazia uns poucos de ovos para vender e um homem encontrou-a e quebrou-lhe os ovos todos. E a mulher disse-lhe que lhe pagasse os ovos. E sobre esta disputa foram ambos ao tribunal. O Juiz mandou que lhe pagasse os ovos e o homem perguntou-lhe quantos eram os ovos. A mulher disse que não sabia mas que quando os meteu na cesta os contou dois a dois e sobrou um; que depois os contou três a três e lhe sobrou um; que os contou quatro a quatro e lhe sobrou um e depois cinco a cinco e lhe sobrou um; e depois contou-os seis a seis e lhe sobrou um; e depois os contou sete a sete e não sobrou nenhum. Ora eu pergunto, quantos eram os ovos?"

TRATADO, E ARTE
DE
ARISMETICA
PARA FAZER HUM PERFYTO
Cayxeyro,
SEU AUTOR
GASPAR NICOLAS,
Emendada, & accreentada
POR
MANOEL DE FIGUEYREDO,
Comofrafo Mór que foy das Conquistas
destes Reynos de Portugal,
E no fim com varias curiosidades de Arismetica;
OFFERECIDA A' INCLYTA DOUTORA
S^{ta}. CATHERINA



168

Preguntas.

H Uma molher trazia hús poucos de ovos a véder, & não sabia quãtos eraõ, & hús homé deu por ella, & quebrou-lhe os ovos todos: & a molher lhe disse q̄ lhe pagasse os ovos: & sobre esta referta foraõ ambos a juizas: o Juiz m̄ idou, que lhe pagasse os ovos, & elle lhe perguntou quantos eraõ para lhos pagar, & a molher disse que não sabia quantos eraõ, porém que quando os meteu na cesta os cõtara dous, & dous, & que lhe sobejãra hús: & despois que os tornou a contar tres, & tres: & que lhe sobejãra hús: & que os contou quatro, & quatro, & que sobejãra hum, & despois que os contou cinco, & cinco, & que lhe sobejãra hum: & despois que os cõtara seis, & seis, & que sobejãra hum: & despois q̄ os cõtara sete, & sete, & não sobejou nenhum. Ora eu dem̄ ido quantos eraõ os ovos que a boa

NÚMEROS E SEQUÊNCIAS

11

No papiro de Rhind (1650 a.C) o problema 79 parece querer dizer o seguinte: *"há sete casas; em cada casa há sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada rato tinha comido sete grãos de trigo; cada grão de trigo teria produzido sete medidas de cereal. Qual a soma disto tudo?"*

O escriba fez o cálculo. Consegues fazê-lo também?

Este problema parece ser o modelo seguido por Leonardo de Pisa, o Fibonacci, no seu "Liber Abacci", de 1212 e que diz:

*Há sete velhas mulheres na estrada para Roma;
cada mulher tem sete mulas;
cada mula carrega sete sacos;
cada saco contém sete pães;
e com cada pão estavam sete facas;
e cada faca está colocada em sete bainhas;
quantos há ao todo na estrada para Roma?*



Uma canção de embalar inglesa diz assim:

*As I was going to St. Ives I met a man with seven wives,
Each wife had seven sacks, each sack had seven cats,
Each cat had seven kits: kits, cats, sacks and wives,
How many were going to St. Ives?*

*(Quando eu ia par a feira de S.Yves, encontrei um homem com sete mulheres;
cada mulher tinha sete sacos, cada saco tinha sete gatos, cada garo sete gatinhos: gatinhos, gatos , sacos, mulheres, quantos iam para S.Yves?)*

No *Manual de Matemática de Mestre Sun* (sec. I), aparece o seguinte problema:

Vemos 9 aterros; cada aterro tem 9 árvores; cada árvore tem 9 ramos; cada ramo tem 9 ninhos; cada ninho tem 9 pássaros; cada pássaro tem 9 filhotes; cada filhote tem 9 penas e cada pena tem 9 cores. Quantos há de cada?

PROBLEMAS E DESAFIOS

12

Alcuino de York, (735-804) foi um grande educador da Idade Média, tendo sido convidado por Carlos Magno, em 782, para fazer a reforma do ensino na sua corte. No que respeita à matemática, Alcuino de York escreveu o livro intitulado "Propositiones ad Acuendo Juvenes" (Problemas para estimular os jovens), que pode não ser mais do que uma recolha de problemas tradicionais mais antigos. A sequência em que surgem os problemas não revela grandes



preocupações de organização pedagógica e alguns são simples desafios lógicos, quase que adivinhas. Alguns desses problemas, como o do coelho, a cabra e a couve, nunca terão saído dos livros escolares.

No conjunto, os problemas incluídos no livro de Alcuíno permitem uma visão da situação da Matemática na Europa, em plena Idade Média.

Diverte-te com alguns dos problemas de Alcuíno:

Problema 11

Se cada um de dois homens casa com a irmã do outro, qual é o parentesco entre os filhos e cada um deles?

Problema 13

Um certo rei ordenou ao seu servo que reunisse um exército de 30 cidade da seguinte forma: deveria trazer consigo tantos homens [de cada cidade sucessiva] como os que tinha aí levado. Assim, [o servo] foi à primeira cidade sozinho, foi com outra pessoa á cidade seguinte, três pessoas foram à terceira cidade.

Quantas pessoas foram reunidas nas 30 cidades?

Problema

14

Quantas pegadas deixa um boi que esteve a lavrar todo o dia no seu último sulco?

Problema

17

Havia três homens, cada um tendo uma irmã solteira, que precisavam de atravessar um rio. Cada homem desejava as irmãs dos seus amigos. Ao chegar ao rio, encontraram um pequeno barco no qual, de cada vez, só podiam atravessar o rio duas pessoas. Como é que atravessaram o rio, de tal forma que nenhuma das irmãs seja desonrada por um dos homens.

Problema 18

Um lobo, uma cabra e uma couve têm de atravessar um rio num barco que transporta um de cada vez, incluindo o remador. Como é que o remador os levará para o outro lado de forma que a cabra não coma a couve e o lobo não coma a cabra?

Problema 19

Um homem e uma mulher, cada um pesando um carro carregado, que tinham dois filhos, cada um pesando um pequeno carro, precisavam de atravessar um rio. No entanto, o barco em que o atravessaram podia levar apenas o peso de um carro. Deixe-o descobrir [uma forma] de atravessar o rio de maneira a que o barco não se afunda.

Problema 35

Um certo pai morreu deixando para trás crianças, uma mulher grávida e 960 solidi dos seus bens. [No leito de morte] estipulou que se um filho nascesse, então o filho deveria receber três quartos da herança - ou seja, nove doze avos. A mãe deveria receber a quarta parte [dos bens], ou seja, três duodécimos. No entanto, se nascesse uma filha, esta deveria receber sete duodécimos, e a mãe cinco duodécimos. Mas, aconteceu que ela deu à luz dois gémeos - um rapaz e uma rapariga.

Quanto é que a mãe, o filho e a filha receberam?

Este último problema é apresentado também por Gaspar Nicolas, com alterações: descobre as diferenças!

ERa hũ homé, & tinha hũa manceba pre-nhe, & este homé estava para morrer, & fez hũ testamento nesta maneyra. Se minha mãceba parir filho, levará meu filho dous terços da fazenda, & minha manceba leve hum terço. E se minha manceba parir filha, leve minha manceba os dous terços da minha fazêda, & minha filha leve hũ terço. Ora este homé levou-o Deos deste múdo, & a mãceba acertou de parir filho, & filha: ora eu demádo em q maneyra se deve de partir esta fazenda: & se o quizeres laber pôe que este homé dey-xou 700 cruzados de fazenda. Ora pôe que a filha ouvesse hum cruzado, & elle mandou que a mãy ouvesse em dobro da filha, onde havia de haver dous, & elle mandou q o filho ouvesse em dobro da mãy, onde o filho havia de haver 4. Ora soma estes todos, s. hũ, & 2. & 4. & fãõ 7. & este he o teu partidõ para todos. 3. ora faze logo primeitamete para o filho, on-

PROBLEMAS de "QUARTO E VINTENA"

13

Toda a mercadoria que as naus que atracavam no porto de Lisboa nele descarregavam estava sujeita ao pagamento de um imposto chamado "quarto e vintena".

"Tirar o quarto e vintena segundo se tira na Casa da Índia não é outra coisa salvo saber de uma certa quantia o quarto e dos três quartos dela mesma a vintena, quantos serão e tirados dela, quantos ficarão", explica um matemático num livro da época.

Tendo em conta esta explicação, calcula o imposto (em mercadoria) a pagar por 80 quintais de pimenta.

Quarto, & vintena. 47

ze quarto faz mção de 4. & vintena faz mção de 20. ora multiplica hū por outro. f. 4. vezes 20. & farás 80. Ora dize o quarto de 80. são 20. & tira-os de 80. & ficão 60. Ora dize a vintena de 60. são 3. tira-os de 60. & ficão 57. & por esta regra podes fazer todas as outras. Pois ja sabes que de 80. pagãdo **quarto & vintena**, ficão 57. faze de 37. quintaes, pagãdo **quarto, & vintena** quãto te fica neto: & para o saberes, ja sabes a regra que de 80. ficão netos 57. ora faze por regra de tres, q ficarão de 73. & se o quizeres saber, multiplica 57. por 37. & farás 2109. estes parte por 80. & vem 26. quintaes, & ficão 29. nesta repartição, estes multi-

4	
116	
48	
8	
384	
37	
17	
259	
187	
2109	
64	

"PREGUNTAS" ...de Gaspar Nicolas, aritmético

Em linguagem actualizada, o texto diz:

Um rato está em cima de uma torre de 58 braças de altura e em baixo está um gato. Ora o rato anda cada dia um terço de braça e de noite torna atrás um quarto de braça. O gato não anda coisa nenhuma.

Ora eu pergunto quantos dias demora o rato a chegar a baixo. E se o quiseres saber ... é muito fácil....

Um rato está enfiado de hũa torre q̄ té 58. braças, & em baixo de todo está hũ gato, ora o **rato** anda cada dia hũ terço, & de noite torna atrás hũ quarto, & o gato não anda nenhũa cousa. Ora eu demãdo em quãtos dias serà o rato embaixo. E se o quiseres saber, mui boa he de fazer, por q̄ diz q̄ de dia anda hũ terço, & de noite anda hũ quarto, tira de hũ terço hũ quarto, fica hũ dozavo, onde

Preguntas. 183
tês sabido q̄ cada dia anda hũ dozavo de braça: assim q̄ em 12. dias anda hũa braça: ora por q̄ a torre té 58. braças, farás por regra de tres, dizêdo assim. Se 1. fosse 12. q̄ serão 58. multiplica 12. vezes 58. & são 696. parte por hũ, & vê aquillo mesmo, convem a saber 696. & em tãtos dias foy o **rato** embaixo.