

**Suzete Marisa de Almeida Paiva**

**A PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO  
SECUNDÁRIO**



**Universidade Portucalense Infante D. Henrique**  
**Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia**

**2008**



Suzete Marisa de Almeida Paiva

## A PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO SECUNDÁRIO

Dissertação submetida à Universidade Portucalense Infante D. Henrique para  
satisfação parcial dos requisitos do grau de Mestre em Matemática/Educação

Dissertação realizada sob a supervisão da  
Professora Doutora Ana Ramires



**Universidade Portucalense Infante D. Henrique**  
Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia

2008



Quero expressar o meu agradecimento a todos quantos me ajudaram neste trabalho.

À Professora Doutora Ana Ramires que me orientou neste trabalho, apoiando, incentivando e comunicando as suas ideias.

À minha família que, com profundo afecto e compreensão, sempre esteve ao meu lado.

Aos meus amigos não devo apenas um agradecimento, mas sobretudo a amizade, tolerância e o carinho que demonstraram ao longo deste tempo.



## RESUMO

As constantes transformações nas sociedades modernas repercutem-se necessariamente em todo o sistema de ensino o que exige a revisão contínua de princípios, processos e objectivos do ensino/aprendizagem. Em particular no ensino da Matemática, tornou-se imperativo a aquisição de aprendizagens significativas que proporcionem o contacto com situações do quotidiano e enfatizem a resolução de problemas. O repensar da acção escolar tem de ter em conta, também, as novas tecnologias com o objectivo de reforçar a motivação para a aprendizagem e permitir a aquisição de competências capazes de ultrapassar, com sucesso, os desafios sociais.

Até ao ano lectivo 2004/2005, o estudo da Programação Linear era conteúdo programático de leccionação facultativa. Actualmente, a Programação Linear é um dos temas obrigatórios das disciplinas de Matemática A do 11º ano e Matemática B do 12º ano do Ensino Secundário e no módulo A10 (designado por Optimização) no Ensino Profissional. Esta dissertação, “A Programação Linear no Ensino Secundário”, pretende mostrar os benefícios da Programação Linear enquanto aprendizagem matemática obrigatória no Ensino Secundário. Consiste numa abordagem sobre os possíveis modos de resolução de problemas de Programação Linear, salientando-se as potencialidades das novas tecnologias, nomeadamente a calculadora gráfica e o computador, enquanto suporte de novos ambientes educativos, de demonstração e discussão e como instrumentos de motivação, exploração, investigação e consolidação de conceitos matemáticos.

## **ABSTRACT**

The constant changes in modern societies certainly have repercussions on the education system which demands the continuous revision of principles, processes and aims of teaching and learning. Especially in the teaching of Mathematics, it is imperative to acquire significant learning which lead to the contact with everyday situations and emphasize problem solving. Thinking about school action has also to bear in mind new technologies aiming the reinforcement of motivation towards learning and allowing skill acquisition able to successfully overcome social challenges.

Until the school year 2004 / 2005, the study of Linear Programming was an optional content in the syllabus. Currently, it is a compulsory topic in Mathematics A in 11<sup>th</sup> grade and Mathematics B in 12<sup>th</sup> grade in Secondary Education and in the module A10 (called Optimization) in Professional Courses. This dissertation "Linear Programming in Secondary Education", aims to show the advantages of Linear Programming as compulsory mathematical learning in Secondary Education. It consists of an approach to the possible ways of solving Linear Programming problems, with emphasis on the potentialities of new technologies, mainly graphic calculator and computer, as a support of new educational atmosphere, of demonstration and discussion and as an instrument of motivation, exploration, investigation and consolidation of mathematical concepts.

# Índice

## **CAPÍTULO 1**

<b>Introdução</b> .....	<b>11</b>
-------------------------	-----------

1.1 Introdução .....	11
----------------------	----

1.2 Breve Síntese Histórica.....	13
----------------------------------	----

1.3 Estrutura da Dissertação .....	15
------------------------------------	----

## **CAPÍTULO 2**

<b>A Matemática no Ensino Secundário</b> .....	<b>17</b>
--	-----------

2.1 Introdução .....	17
----------------------	----

2.2 Os Programas das disciplinas de Matemática A e Matemática B .....	18
---	----

2.3 As Novas Tecnologias no Ensino da Matemática .....	21
--	----

2.4 A interdisciplinaridade entre a Matemática e as TIC .....	25
---	----

2.5 O Módulo de Programação Linear nas disciplinas de Matemática .....	26
--	----

## **CAPÍTULO 3**

<b>O Ensino da Programação Linear</b> .....	<b>31</b>
---	-----------

3.1 O Método da Investigação Operacional.....	32
---	----

3.2 As Hipóteses da Programação Linear .....	36
--	----

3.3 Os Problemas de Programação Linear .....	38
--	----

3.3.1 A Formulação de um problema de PL.....	39
--	----

3.3.2 A Resolução Gráfica de um problema de PL.....	51
---	----

3.3.3 Utilização das TIC .....	76
--------------------------------	----

---

3.3.3.1	A Utilização da Calculadora Gráfica .....	77
3.3.3.2	A Utilização do comando Solver do Microsoft Excel.....	86
3.3.4	Pós-Optimização: Adição de Novas Restrições .....	110
<b>CAPÍTULO 4</b>		
	<b>Conclusão</b> .....	<b>117</b>
	<b>Bibliografia</b> .....	<b>121</b>
	Sites Consultados .....	123

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Representação gráfica da restrição $3x/6 + 4y/6 \leq 320$ .....	53
Figura 2: Representação gráfica da restrição $2x/6 + y/6 \leq 180$ .....	54
Figura 3: Representação gráfica da restrição $x/6 + y/6 \leq 200$ .....	54
Figura 4: Representação gráfica das restrições de não negatividade $x \geq 0$ e $y \geq 0$ .....	55
Figura 5: Representação gráfica da região admissível.....	56
Figura 6: Identificação dos vértices da região admissível.....	57
Figura 7: Representação gráfica da família de rectas da função objectivo.....	60
Figura 8: Representação gráfica da restrição $3x + y \leq 90$ .....	62
Figura 9: Representação gráfica da restrição $x + 2y \leq 80$ .....	62
Figura 10: Representação gráfica da intersecção das restrições de não negatividade.....	62
Figura 11: Representação gráfica da região admissível.....	63
Figura 12: Representação gráfica da família de rectas da função objectivo.....	64
Figura 13: Representação gráfica de uma região de admissibilidade ilimitada.....	65
Figura 14: Representação gráfica da família de rectas da função objectivo e identificação do ponto óptimo.....	66
Figura 15: Processo de determinação da solução óptima inteira numa região de admissibilidade ilimitada.....	67
Figura 16: Representação gráfica da região admissível.....	70
Figura 17: Representação gráfica de um problema de PL com múltiplas soluções óptimas.....	73
Figura 18: Representação gráfica de um problema de PL em que a região admissível é um conjunto ilimitado e possui um óptimo finito.....	74
Figura 19: Representação gráfica de um problema de PL com solução impossível – conjunto vazio.....	75
Figura 20: Representação gráfica de um problema de PL com região admissível limitada e definida, apenas, por um ponto.....	76
Figura 21: Aplicação “Inequal” da calculadora Texas.....	79
Figura 22: Introdução de restrições na calculadora Texas.....	80
Figura 23: Introdução da restrição “ $x \geq 0$ ” na calculadora Texas.....	80
Figura 24: Configuração da janela de visualização na calculadora Texas.....	81
Figura 25: Representação da região admissível, na calculadora Texas.....	81
Figura 26: Localização dos pontos de interesse.....	82
Figura 27: Tabela com as coordenadas dos vértices da região de admissibilidade.....	82
Figura 28: Criação da lista de valores da função lucro.....	82
Figura 29: Tabela com os valores da função objectivo calculados.....	83
Figura 30: Menu principal da calculadora Casio.....	83
Figura 31: Passos necessários para inserir restrições na calculadora Casio.....	84
Figura 32: Configuração da janela de visualização na calculadora Casio.....	84
Figura 33: Representação da região admissível na calculadora Casio.....	85
Figura 34: Determinação das coordenadas dos vértices da região admissível com a calculadora Casio.....	85
Figura 35: Suplemento Solver do Microsoft Excel disponível para utilização.....	87

---

Figura 36: Primeiro passo de instalação do suplemento Solver do Microsoft Excel.....	87
Figura 37: Segundo passo de instalação do Solver .....	88
Figura 38: Terceiro passo de instalação do Solver .....	88
Figura 39: Introdução dos dados do modelo de PLI do Problema 3.2 na folha de cálculo .....	90
Figura 40: Atribuição de valores iniciais às variáveis de decisão .....	90
Figura 41: Janela “Parâmetros do Solver” .....	91
Figura 42: Introdução dos parâmetros do Solver: localização das células da função objectivo e variáveis de decisão na folha de cálculo .....	91
Figura 43: Janela de adição de uma restrição .....	92
Figura 44: Resultado da introdução dos parâmetros do Solver relativos às restrições.....	92
Figura 45: Janela “Opções do Solver” .....	93
Figura 46: Janela “Resultados do Solver” .....	93
Figura 47: Apresentação da solução óptima do modelo.....	95
Figura 48: Relatório de respostas gerado pelo Solver.....	95
Figura 49: Introdução dos dados do modelo de PL do Problema 3.7 na folha de cálculo .....	97
Figura 50: Introdução dos parâmetros do Problema 3.7 .....	98
Figura 51: Verificação dos parâmetros de resolução do Solver .....	98
Figura 52: Mensagem do resultado da resolução do Problema 3.7 .....	98
Figura 53: Apresentação da solução óptima do Problema 3.7 .....	99
Figura 54: Relatório de respostas do Problema 3.7 gerado pelo Solver.....	100
Figura 55: Introdução dos dados do modelo de PL do Problema 3.8 na folha de cálculo .....	102
Figura 56: Introdução dos parâmetros do Problema 3.8 do Solver .....	102
Figura 57: Verificação dos parâmetros de resolução do Solver .....	102
Figura 58: Mensagem do resultado da resolução do Problema 3.8 .....	103
Figura 59: Apresentação da solução óptima do modelo.....	103
Figura 60: Relatório de respostas gerado pelo Solver.....	104
Figura 61: Relatório de sensibilidade gerado pelo Solver .....	105
Figura 62: Representação gráfica da região admissível, da família de rectas da função objectivo e identificação do ponto óptimo do problema 3.9 .....	107
Figura 63: Introdução dos dados do modelo de PL do Problema 3.9 na folha de cálculo .....	108
Figura 64: Introdução dos parâmetros do Problema 3.9 do Solver .....	108
Figura 65: Verificação dos parâmetros de resolução do Solver .....	109
Figura 66: Apresentação da solução óptima do Problema 3.9 .....	109
Figura 67: Determinação da solução óptima após adição da restrição $4x + 5y \leq 300$ à formulação inicial do problema 3.2.....	111
Figura 68: Determinação da solução óptima após adição da restrição $3x + 4y \geq 120$ à formulação inicial do problema 3.2.....	112
Figura 69: Determinação da solução óptima após adição da restrição $7x + 3y \leq 175$ .....	113
Figura 70: Determinação da solução óptima após adição da restrição $6x + 3y \leq 120$ .....	115
Figura 71: Determinação da solução óptima após adição da restrição $x + y \geq 60$ .....	116

---

# CAPÍTULO 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

Até ao ano lectivo 2004/2005, o estudo da Programação Linear era conteúdo programático de leccionação facultativa. Actualmente, a Programação Linear é um dos temas obrigatórios das disciplinas de Matemática A do 11º ano e Matemática B do 12º ano do Ensino Secundário e no módulo A10 (designado por Optimização) no Ensino Profissional.

A abordagem proposta pelo Ministério da Educação neste nível de ensino é *“(...) uma abordagem geométrica para a solução de problemas de máximos ou de mínimos de uma expressão linear com duas variáveis, sujeitas a um conjunto de restrições também lineares. Consegue-se, ao mesmo tempo, uma concretização (à custa de enunciados apelativos e diferenciados) de técnicas algébricas de resolução”* [ME98]. Define como objectivo primordial da Programação Linear *“motivar os alunos para a aprendizagem da Matemática, mostrando-lhes verdadeiros*

*problemas reais nos quais a Geometria que estão a aprender é actualmente usada na indústria, na Economia, etc.” [ME98].*

Os objectivos específicos desta rubrica programática prendem-se fundamentalmente com [ME98]: “ (...) **a tradução Matemática das ideias expressas em linguagem corrente; a representação gráfica de sistemas de inequações lineares; a conexão entre a solução de um sistema de inequações lineares e um plano factível de produção; a ligação gráfica entre uma função objectivo e uma região possível do plano, de forma a obter a “melhor” solução para o problema; a interpretação da solução obtida para o problema; a análise do impacto, em problemas reais, da adição de novas restrições.**” É, portanto, um conteúdo que possibilita ao aluno uma melhor compreensão dos capítulos de Geometria e Equações.

Tendo em conta os objectivos propostos, neste trabalho destaca-se o ensino da Programação Linear numa perspectiva de utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (abreviadamente, TIC). As TIC proporcionam o desenvolvimento da curiosidade, base essencial do gosto pela aprendizagem, conseguindo proporcionar a criação de contextos de aprendizagem ricos e estimulantes onde é incentivada a criatividade. A utilização das novas tecnologias na aula de Matemática ajuda os alunos a desenvolverem outras capacidades para além das que estão associadas às competências de cálculo, compreensão de conceitos e relações matemáticas simples. O seu uso na sala de aula é uma mais-valia no desenvolvimento das capacidades relacionadas com o raciocínio matemático: promove a confiança, a autonomia, o espírito de tolerância e cooperação, e permite que os alunos tenham um papel mais activo na sala de aula, possibilitando uma experiência matemática onde há lugar para a investigação, formulação e teste de conjecturas próprias, e para a discussão e comunicação matemática.

## 1.2 Breve Síntese Histórica

A Programação Linear é uma técnica da Matemática Aplicada que constitui um dos ramos da Investigação Operacional. Envolve a pesquisa, o estudo e desenvolvimento de modelos de optimização sobre operações, sendo aplicada a problemas que envolvem a condução e coordenação de operações. Dentro do universo dos modelos de optimização, existem os modelos de Programação Matemática que permitem determinar em que condição é possível, ou não, optimizar um dado objectivo face a um conjunto de limitações. Nos modelos de Programação Matemática, integram-se os modelos de Programação Linear que constituem a base da Investigação Operacional. Na sua designação, o termo Programação está relacionado com a planificação e resolução de tarefas e o termo Linear com o facto das expressões ou condições envolvidas em cada modelo serem lineares. Como se trata de uma técnica de Modelação Matemática desenhada para optimizar o uso de recursos limitados, a Programação Linear tem como objectivo optimizar problemas de decisão através da utilização de modelos que representem uma realidade, em que o óptimo é um mínimo ou um máximo a ser alcançado nas condições existentes.

O problema de optimizar uma função linear sujeita a restrições lineares teve a sua origem, em 1826, com os estudos de Jean-Baptiste Joseph Fourier sobre sistemas lineares de inequações. Em 1939, o matemático russo Leonid Vitalyevich Kantorovich apresentou um algoritmo para a resolução de um conjunto de exemplos ligados à optimização na administração das organizações, em que a Programação Linear era aplicada, mas que só se tornou conhecido em 1950. O objectivo de cada exemplo era a obtenção da maior produção possível com base numa utilização óptima dos recursos disponíveis.

O estudo da Programação Linear desenvolveu-se, em finais dos anos 40, nos Estados Unidos da América, com a necessidade de resolução de problemas de optimização formulados a partir de questões logísticas da Força Aérea. Embora a

logística fosse uma base de retaguarda muito importante, os problemas logísticos eram resolvidos por tentativa e erro. Em 1947, George Dantzig, enquanto consultor matemático do USAF (US Air Force Comptroller) do Departamento da Força Aérea Americana, apresentou uma forma sistematizada de resolução de problemas de Programação Linear, o Algoritmo Simplex. Este algoritmo veio permitir determinar com mais facilidade e rapidez a solução de um problema principalmente em problemas que envolvem várias variáveis.

A Programação Linear veio dar resposta, mais ou menos eficiente, aos problemas de gestão organizacional, o que propiciou que grandes organizações encarassem de forma diferente o trabalho dos matemáticos. Saliente-se o grande impacto no desenvolvimento da Economia resultante dos desenvolvimentos tecnológicos dos computadores e da Informática, que constituíram factores decisivos para a evolução acelerada da Programação Linear, permitindo a resolução de problemas mais elaborados. As inovações da última metade do Século XX fomentaram a eficiência dos algoritmos de Programação Linear na resolução de uma grande variedade de problemas, envolvendo questões de decisão em vários domínios: planeamento da distribuição e produção de produtos, planeamento de curto prazo em aproveitamentos hidroeléctricos, decisões ligadas às políticas micro e macroeconómicas e na sua utilização como subrotinas para suporte de tarefas específicas em códigos de Programação Não Linear.

Em 1975, a Academia Real de Ciência atribuiu o prémio Nobel da Ciência em Economia a Kantorovich e Koopmans pelas suas contribuições na Teoria da Alocação de Recursos, considerando a contribuição de Dantzig no âmbito matemático. Não havendo prémio para o ramo científico da Matemática, a Academia não atribuiu qualquer prémio a Dantzig. No entanto, Dantzig permanecerá para a história da construção da Programação Linear como um dos arquitectos fundamentais.

### 1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação inclui quatro capítulos, cujo conteúdo se passa a descrever.

No primeiro capítulo, é introduzido o tema “Programação Linear no Ensino Secundário”. Descreve-se a abordagem e os objectivos específicos desta rubrica programática proposta pelo Ministério da Educação como conteúdo programático de leccionação obrigatória nas disciplinas de Matemática A do 11º ano e Matemática B do 12º ano do Ensino Secundário e no módulo A10 (designado por Optimização) no Ensino Profissional. Apresenta-se uma breve síntese histórica da evolução da PL.

O segundo capítulo retrata todo o processo que envolve o ensino/aprendizagem da disciplina da Matemática. Descrevem-se sucintamente os programas do Ministério da Educação para as disciplinas de Matemática A e Matemática B, os recursos físicos sugeridos, a importância da interdisciplinaridade que deverá existir entre a Matemática e as Tecnologias de Informação e Comunicação e os objectivos do módulo de Programação Linear.

No terceiro capítulo aborda-se o ensino da Programação Linear. Descreve-se o funcionamento do Método da Investigação Operacional, os seus passos, fases e técnicas de resolução de um problema de Programação Linear, desde a formulação à pós-optimização - adição de novas restrições à formulação inicial do problema. Apresenta-se a estrutura geral do processo de formulação e os métodos de determinação da solução óptima para problemas de Programação Linear e Programação Linear Inteira com duas variáveis de decisão: método gráfico e métodos com recurso às capacidades da calculadora gráfica (modelo TI-84 Plus Silver Edition da calculadora Texas e o modelo fx-9860G SD da calculadora Casio) e do computador (o suplemento Solver do Microsoft Excel). Os métodos são ilustrados, recorrendo à apresentação de problemas de situações do quotidiano, que se formulam, resolvem e interpretam, e de problemas com diferentes cenários. Destacam-se as especificidades de cada ferramenta e a utilização dos resultados

que se obtêm. Em particular, enfatiza-se a importância da interpretação económica e análise crítica dos resultados obtidos.

No último capítulo deste trabalho apresentam-se as conclusões finais e propostas para a realização de trabalhos futuros ligados ao tema tratado nesta dissertação.

# CAPÍTULO 2

## A Matemática no Ensino Secundário

*“A Matemática tem duas faces: é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também outra coisa. A Matemática, apresentada no estilo euclidiano, revela-se como uma ciência dedutiva, sistemática; mas a Matemática em criação apresenta-se como uma ciência indutiva experimental” [ARPO3, p.13].*

### 2.1 Introdução

O objectivo primordial do ensino da Matemática nas Escolas Secundárias está em consonância com o principal objectivo da Lei de Bases do Sistema Educativo Português [LBSE87]: *“Formar cidadãos autónomos e responsáveis”*. Ou seja, formar pessoas à altura de responder às exigências de uma sociedade activa que requer e exige à Escola que proporcione aos alunos a oportunidade de adquirir conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento matemático para a

resolução de situações do quotidiano. É nesta perspectiva, tornando a aprendizagem da Matemática motivadora e valorizando a aplicação dos seus conteúdos à vida real, que os programas de Matemática do Ensino Secundário devem ser abordados, podendo assim constituir um trampolim para o sucesso escolar da disciplina.

Dada a grande importância da Matemática no dia-a-dia dos indivíduos, a maior parte dos cursos que hoje são ministrados na Escola/Instituição integra-a nos seus currícula. Em particular, a disciplina de Matemática A integra o elenco das disciplinas nos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Socioeconómicas; a disciplina de Matemática B é destinada aos Cursos Tecnológicos de Electrotecnia/Electrónica, Informática, Construção Civil, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos. É, assim, evidente que nenhuma ciência deve ser trabalhada isoladamente numa dada disciplina ou área: o conhecimento matemático é exigido em diferentes cursos.

Nas secções seguintes, aborda-se todo o processo que envolve o ensino/aprendizagem da disciplina da Matemática. Descrevem-se os programas do Ministério da Educação para as disciplinas de Matemática A e Matemática B, os recursos físicos sugeridos nesses programas, a importância da interdisciplinaridade que existe ou deverá existir entre a Matemática e as TIC e os objectivos do módulo de Programação Linear.

## **2.2 Os Programas das disciplinas de Matemática A e Matemática B**

Os programas das disciplinas de Matemática A (homologado em 2001) [ME01] e Matemática B (homologado em 2005) [ME05] definidos pelo Ministério da

Educação para o Ensino Secundário são organizados por grandes temas, subordinados a finalidades, objectivos e competências gerais bem definidos.

Os temas matemáticos foram escolhidos de acordo com as principais áreas da Matemática, atendendo a que as competências fundamentais, que a sua aprendizagem pode favorecer, sejam contempladas e estejam associadas a necessidades reais, fornecendo instrumentos de compreensão do real com utilidade compreensível e imediata. Assim, para a disciplina de Matemática A, foram escolhidos os seguintes temas: Cálculo Diferencial, Geometria (no plano e no espaço), Funções e Sucessões, Probabilidades (com inclusão de Análise Combinatória) e Estatística. Para a disciplina de Matemática B: Funções e Cálculo Diferencial, Geometria (no plano e no espaço), Probabilidades, Estatística e Matemática Discreta. É ainda recomendada especial atenção para os temas transversais explícitos no corpo do programa dado e que assumem uma importância significativa ao nível das técnicas específicas e das estratégias:

- Comunicação Matemática;
- Aplicações e Modelação Matemática;
- História da Matemática;
- Lógica e Raciocínio Matemático;
- Resolução de Problemas e Actividades Investigativas;
- Tecnologia e Matemática.

Para as duas disciplinas em análise, Matemática A e Matemática B, são especificadas as seguintes finalidades: *“Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real; desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade; promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na*

*vida activa; contribuir para uma atitude positiva face à Ciência; promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade; contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a Economia entre outras, formando para uma cidadania activa e participativa.”*

Para a disciplina de Matemática B, é acrescentada ainda uma outra finalidade: *“Desenvolver a capacidade de seleccionar a Matemática relevante para cada problema da realidade.”*

Os objectivos e competências gerais são definidos em termos de Valores/Atitudes, Capacidades/Aptidões e Conhecimentos. Os Valores/Atitudes e Capacidades/Aptidões a desenvolver no aluno são comuns a ambas disciplinas: *“Desenvolver a confiança em si próprio; desenvolver interesses culturais; desenvolver hábitos de trabalho e persistência; desenvolver o sentido da responsabilidade; desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação; desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; desenvolver o raciocínio e o pensamento científico; desenvolver a capacidade de comunicar.”*

Em relação aos conhecimentos a transmitir, os programas diferem. Na disciplina de Matemática A, pretende-se ampliar os conceitos de Número, os conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço, de Estatística e Probabilidades, iniciar o estudo da Análise Infinitesimal e o conhecimento de aspectos da História da Matemática. Na disciplina de Matemática B, pretende-se iniciar a Modelação Matemática, ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades e construir e estudar Modelos Discretos e Contínuos.

Os programas de Matemática para o Ensino Secundário recomendam a utilização das novas tecnologias na sala de aula, como ferramentas essenciais para melhor veicular a informação. A sala de aula deve ser um cenário pedagógico interactivo que envolve a turma e o professor. Ao professor cabe escolher e diversificar estratégias conducentes a uma melhor transmissão dos conteúdos a

leccionar, de acordo com a heterogeneidade ou homogeneidade da turma. É aqui que assenta a grande vantagem das TIC na sala de aula. Elas são, não só objecto de motivação e predisposição para a aprendizagem, mas também permitem que através do seu manuseamento no decurso da aula, o aluno desenvolva a capacidade de resolução de problemas, de investigação e exploração de situações problemáticas.

### **2.3 As Novas Tecnologias no Ensino da Matemática**

A didáctica que se preconiza para a Matemática no Ensino Secundário pressupõe a possibilidade do uso de materiais e equipamentos diversificados conducentes a aprendizagens significativas capazes de proporcionar nos indivíduos/alunos flexibilidade intelectual, espírito crítico, capacidade de formular problemas e de modelar situações desconhecidas [ME01]:

*“ Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor, ...); Material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, “polidron”, sólidos de enchimento, ...); Quadro quadriculado e papel milimétrico; Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...); Livros para consulta e manuais; Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...); Calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas; Computadores; Sensor de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.”* O uso dos restantes recursos físicos existentes na sala de aula: papel, lápis/giz, quadro, etc., facilita, obviamente, todo um processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

No sentido de desenvolver no aluno a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção na vida sócio/pessoal, em [ME01], pode ler-se: *“Todas as Escolas Secundárias devem dotar-se quanto antes de Laboratórios de Matemática”*. As normas da Associação Portuguesa de Matemática [NCT91] referem que: *“Máquinas de calcular e computadores com programas adequados transformarão as aulas de Matemática num laboratório com um ambiente muito semelhante ao das aulas de ciências onde os alunos utilizam a tecnologia para investigar, conjecturar e verificar as suas descobertas”*. Neste sentido, as novas tecnologias vieram assumir um lugar de relevo no ensino da Matemática. Facilitam a comunicação aluno/conteúdo/professor, devendo ser implementadas na Escola o mais cedo possível com o objectivo de ajudar a erradicar o insucesso escolar na Matemática e ajudar a preparar os cidadãos para a sociedade actual, cada vez mais, função da uma Economia competitiva e tecnológica. Porém, torna-se necessário ter em atenção que a tecnologia na sala de aula não deve ser utilizada em substituição de raciocínios básicos mas como enriquecimento da aprendizagem Matemática, tornando-a mais profunda e mais significativa. Isto é, a tecnologia deve intervir como facilitadora na resolução de problemas.

Actualmente, e de acordo com os novos programas, o uso da calculadora gráfica é obrigatório para os alunos do secundário [ME01, p.15; ME05, p.14]. Assim, o uso da calculadora gráfica deve ser entendido também como meio incentivador do espírito de pesquisa. Tendo em conta que a Matemática integra investigação e experimentação, o uso da calculadora gráfica facilita a resolução e concretização de inúmeras actividades conducentes à formulação e resolução de problemas, realização de investigação e argumentação, crítica dos resultados obtidos, etc. Em [ME01], sugere-se a sua utilização exhaustiva nas seguintes actividades Matemáticas: *“Abordagem numérica de problemas; uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação, usando métodos gráficos; modelação, simulação e resolução de situações problemática; uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos; uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável com métodos algébricos; condução de experiências*

*Matemáticas, elaboração e análise de conjecturas; estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções; investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.”*

Entendida a aprendizagem como “*um meio de construção cognitiva favorecido por meios de estimulação e incentivo da investigação por parte dos alunos*” [ECE88], é importante que os alunos sejam capazes de auto-crítica, formular questões-chave, analisar e definir problemas, identificar o seu objectivo, encontrar um modelo que se aplique ao problema, procurar dados relacionados com a situação, experimentar e utilizar estratégias e capacidades de adaptação a outras situações. Neste contexto, devem ser capazes de entender os dados que a calculadora apresenta no seu ecrã. O trabalho feito com a máquina calculadora deve ser, sempre, confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação na máquina. É importante que os alunos descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta, não se limitando a copiar o que vêem, pois tal poderá conduzir a uma aprendizagem ineficaz. De acordo com experiências efectuadas em Portugal e noutros países [ME01], a calculadora gráfica favorecerá positivamente a melhoria do ensino da Matemática desde que os alunos tenham sempre estes cuidados presentes.

O uso do computador ao serviço do ensino/aprendizagem da Matemática deve ser encarado de duas maneiras distintas: por um lado, é uma máquina que todos os alunos desejam utilizar, pois desperta interesse e curiosidade e, por outro, dadas as suas potencialidades e rapidez, permite realizar actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento. Actualmente, existem vários tipos de programas computacionais, nos domínios da Geometria Dinâmica, Cálculo Numérico e Estatístico, Gráficos, Simulações e Álgebra Computacional, que se enquadram no espírito do ensino/aprendizagem da disciplina de Matemática. É recomendado [ME01] que a Escola disponibilize, em salas apropriadas, computadores suficientes para os alunos poderem dar largas à sua imaginação e realizar trabalhos práticos e, ao mesmo tempo disponibilize computadores na sala de aula para que possa servir o ensino como ferramenta de

demonstração usando um “data-show” com retroprojector ou projector de vídeo. Este será o caminho mais viável à transmissão do conhecimento, dada a aceitação que as novas tecnologias têm no mundo moderno.

No documento entregue ao Ministério da Educação em Novembro de 1995 juntamente com a versão final da proposta de ajustamento do programa de Matemática, elaborado por A. Martins, G. Fonseca e J. Carvalho e Silva, é definida como opção fundamental a obrigatoriedade de utilização de tecnologias com capacidades gráficas no ensino da Matemática. Segundo estes autores, os programas de Matemática devem ser adequados à evolução da ciência e tecnologia. Pretende-se usar a tecnologia como meio facilitador do ensino/aprendizagem, utilizá-la não de uma forma abstracta, mas sim ligada a assuntos concretos do quotidiano, promover as novas tecnologias no ensino da Matemática não pela tecnologia em si, mas pelas aprendizagens significativas que ela propicia, que os alunos saibam não só fazer cálculos e raciocínios matemáticos mas reconheçam que de uma forma mais rápida conseguem os mesmos e/ou melhores resultados matemáticos. Em concreto, pretende-se adequar os programas, fazendo depender a leccionação de alguns conteúdos dessa mesma utilização.

Desta forma, o uso da tecnologia permitirá que o aluno não fique preso nem a tratamentos analíticos complexos nem a um reduzido número de exemplos, mas consiga observar e raciocinar sobre múltiplos exemplos em menor espaço de tempo. É a partir destes exemplos que deve desenvolver o seu raciocínio e a sua forma de pensar matematicamente podendo construir generalizações concretizáveis no dia-a-dia com maior facilidade.

Terminando *“(...) a sociedade actual espera que as Escolas garantam que todos os estudantes tenham a oportunidade de se tornar matematicamente alfabetizados, sejam capazes de prolongar a sua aprendizagem, tenham iguais oportunidades de aprender e se tornem cidadãos aptos a compreender as questões em aberto numa sociedade tecnológica. Tal como a sociedade muda também as Escolas devem transformar-se.”* [NCT91, p.5]

Dada a grande importância das TIC no processo do ensino da Matemática, na secção seguinte, analisa-se a horizontalidade entre os dois programas, Matemática e TIC.

## **2.4 A interdisciplinaridade entre a Matemática e as TIC**

A interdisciplinaridade é parte importante em todo o Sistema Educativo. Sendo a Matemática uma ciência entre as ciências, fornece dados a outras áreas do saber ao mesmo tempo que as coloca ao seu serviço. Como seria possível desenvolver nos alunos o conhecimento matemático sem recorrer ao suporte de outras disciplinas? Na disciplina de Matemática, dado ser uma área do saber cuja aprendizagem é facilitada com o apoio das TIC, pretende-se que o professor utilize programas informáticos sem ensinar Informática, cabendo aos professores que leccionam as TIC ensinar como estas funcionam.

É de salientar ainda a importância da horizontalidade nos programas nas diferentes disciplinas, contemplando a necessária diferença temporal. Isto é, é necessário ter em atenção que ao usar os programas das TIC na leccionação dos conteúdos da disciplina de Matemática estes já sejam do conhecimento do aluno, pois podem e devem servir de base instrumental à leccionação da Matemática.

Concretizando, a determinação da solução de problemas de Programação Linear (conteúdo inserido nos programas do 11º ano de Matemática A ou do 12º ano de Matemática B) pode ser efectuada com recurso ao comando “Solver” do Microsoft Excel. O item “Folha de Cálculo” é uma unidade essencial do programa da disciplina de TIC, onde são ensinados os conceitos básicos: como criar e elaborar uma folha de cálculo e como gerar gráficos e listas. Assim, os conhecimentos gerais do Excel aprendidos na disciplina de TIC preparam, antecipadamente, o aluno para a sua aplicação à disciplina de Matemática.

## 2.5 O Módulo de Programação Linear nas disciplinas de Matemática

A Programação Linear é um dos temas obrigatórios das disciplinas de Matemática, sendo sugerida “(...) *uma abordagem geométrica para a solução de problemas de máximos ou de mínimos de uma expressão linear com duas variáveis, sujeitas a um conjunto de restrições também lineares. Consegue-se, ao mesmo tempo, uma concretização (à custa de enunciados apelativos e diferenciados) de técnicas algébricas de resolução.*” [ME98]. Os objectivos deste conteúdo são “*motivar os alunos para a aprendizagem da Matemática, mostrando-lhes verdadeiros problemas reais nos quais a Geometria que estão a aprender é actualmente usada na indústria, na Economia, etc.*” [ME98] e “ (...) *a tradução Matemática das ideias expressas em linguagem corrente; a representação gráfica de sistemas de inequações lineares; a conexão entre a solução de um sistema de inequações lineares e um plano factível de produção; a ligação gráfica entre uma função objectivo e uma região possível do plano, de forma a obter a “melhor” solução para o problema; a interpretação da solução obtida para o problema; a análise do impacto, em problemas reais, da adição de novas restrições.*” [ME98].

Assim, a abordagem pretendida sobre a Programação Linear visa dar ao aluno ferramentas a aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade no âmbito da Economia e de outras áreas do desenvolvimento Socioeconómico como, por exemplo, transportes e telecomunicações, construção civil, militar, indústria, agrícola, planeamento financeiro, assistência médica e serviços públicos.

No módulo de Programação Linear, é requerido o desenvolvimento das seguintes aptidões e competências matemáticas:

- a aptidão para reconhecer as vantagens na escolha de referenciais, no uso das coordenadas e de condições para modelar situações e resolver problemas;

para elaborar, analisar e descrever modelos para situações reais, em especial as de planeamento de produção ou outras; para reconhecer, sobre os modelos, os valores óptimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;

- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito situações problemáticas e os seus resultados; de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios ou monografias;

Os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- utilizar sistemas de coordenadas para obter equações e inequações que representem determinados lugares geométricos (rectas e domínios planos);

- utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções afins, com resolução de equações e inequações;

- relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções afins, bem como entre os sinais dos coeficientes e a monotonia;

- resolver numérica, graficamente e com recurso a programas computacionais (na folha de cálculo) problemas de programação linear;

- abordar a história da programação linear como ferramenta de gestão e nos contextos da sua criação e desenvolvimento;

- resolver numérica, gráfica e algebricamente sistemas de equações e inequações;

- utilizar tecnologia e programas computacionais específicos para gestão e planeamento;

- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações;

- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.

No âmbito dos conteúdos, pretende-se:

- a resolução de problemas envolvendo sistemas de eixos coordenados, equações de rectas ou funções afins e resolução de sistemas de equações e/ou inequações;

- a resolução de problemas de programação linear, com referências expressas à identificação das variáveis de decisão, das restrições e da função objectivo, bem como à sua formulação matemática.

Pretende-se familiarizar os estudantes com situações de gestão. Devem ser abordadas situações de trabalho em que a utilidade do planeamento seja marcante, e a colaboração da Matemática para a tomada de decisões em empresas seja benéfica. O aluno deve ser colocado perante a necessidade de tomar decisões em termos de, por exemplo, planeamento da produção, de maximização de lucros, minimização de custos ou consumos, de selecção de novos investimentos que alterem as condições de fabrico de modo a responder a novos desafios. Os problemas a tratar deverão ser problemas simples. Seguidamente, é apresentada uma pequena selecção de enunciados de problemas, propostos em alguns livros escolares.

“Uma agência de viagens pretende organizar uma excursão a Paredes de Coura, para 500 pessoas assistirem a um concerto de verão. Para o efeito terá de alugar autocarros a uma empresa que apresentou o seguinte: dispõe de 7 autocarros de cinquenta lugares e de 15 autocarros de trinta lugares; o aluguer de um autocarro de cinquenta lugares custa 1000 euros e de um de trinta lugares custa 450 euros; no dia da excursão apenas estarão disponíveis 14 motoristas. Quantos autocarros de cada tipo deverão ser alugados pela agência, para minimizar o custo da viagem?” [MB06]

“Um empreiteiro comprou um terreno para construção de um empreendimento turístico. De acordo com o Plano Director Municipal tem possibilidade de construir prédios no máximo com 3 andares, havendo apenas uma habitação por andar, e vivendas. A construção de cada andar custa ao empreiteiro 7000 euros e permite obter um lucro de 11000 euros. A construção de cada vivenda custa ao empreiteiro 13000 e dá um lucro de 12000 euros. O empreiteiro pretende obter o lucro máximo na construção do empreendimento, mas tem duas condicionantes. Por um lado, a Câmara não autoriza a construção de mais de 50 habitações e, por outro, o empreiteiro não dispõe de mais do que 560 000 euros para investir na construção do empreendimento.” [MB06]

“Uma pequena fábrica de artesanato produz vasos e potes em cerâmica. Estes objectos são moldados por oleiros e depois pintados à mão. Cada pote demora 3 horas a moldar e 2 horas a pintar. Cada vaso demora 2 horas a moldar e 4 horas a ser pintado. Na fábrica há 2 oleiros e 3 pintores e todos eles trabalham 40 horas por semana. Cada pote dá um lucro de 100 euros e cada vaso um lucro de 150 euros. Qual é o número de objectos de cada tipo que deve ser fabricado semanalmente de modo a maximizar o lucro?” [MG11]

“Um investidor tem um máximo de 45000 euros para investir em duas modalidades: A com menos risco e B com mais risco. A modalidade A dá um rendimento anual de 6% e a modalidade B um rendimento anual de 10%. Por questões de segurança o investidor decidiu investir, na modalidade B, no máximo um terço do que investiu na modalidade A. Qual será o máximo lucro anual possível?” [MG11]

“O António decidiu fazer uma dieta que contenha no mínimo 420 unidades de vitaminas, 500 unidades de minerais e 2100 calorias. Dispõe de dois tipos de produtos:  $P_1$  e  $P_2$ . Cada unidade de  $P_1$  contém 2 unidades de vitaminas, 1 unidade de minerais e 5 calorias; cada unidade de  $P_2$  contém 1 unidade de vitaminas, 2 unidades de minerais e 6 calorias. Por unidade,  $P_1$  custa 40 cêntimos e  $P_2$  60

cêntimos. Quantas unidades de  $P_1$  e  $P_2$  o António deve comprar, de modo a gastar o mínimo possível na dieta?" [MG11]

Os exemplos apresentados são prova evidente da aplicabilidade da Programação Linear em situações da vida real. No capítulo seguinte, descreve-se o método da Investigação Operacional e estuda-se a Programação Linear: as hipóteses e as técnicas de formulação, resolução e pós-optimização de problemas.

## CAPÍTULO 3

# O Ensino da Programação Linear

*“Um problema não pode ser bem formulado antes da sua solução ser conhecida, porque perguntas e respostas têm de estar em completa concordância recíproca.” Niels Bohr*

A Programação Linear é um ramo da Investigação Operacional, e como tal, implica a aplicação de um método científico à resolução dos problemas. Neste capítulo, descreve-se o método da Investigação Operacional e sugere-se uma abordagem ao ensino da Programação Linear no Ensino Secundário: a formulação, resolução e pós-optimização de problemas. Na resolução, é enfatizada a utilização da calculadora gráfica e do comando Solver do Microsoft Excel, na perspectiva de possibilitar não só a resolução de problemas mais complexos mas também o desenvolvimento da análise de resultados de forma crítica.

### 3.1 O Método da Investigação Operacional

A Investigação Operacional é a aplicação de um método científico à resolução de um problema: o processo inicia-se por observar cuidadosamente e formular o problema, construindo um modelo matemático que inclua a sua essência, isto é, que represente a realidade de forma precisa mas simplificada e de tal modo que as soluções retiradas do modelo são também válidas para o sistema real. Ao modelo são aplicadas as técnicas necessárias para a determinação dos parâmetros que constituem as incógnitas do problema. É através da sua manipulação que se analisam os resultados associados a cada solução alternativa e se selecciona, entre elas, a melhor. A simplificação, que corresponde à passagem do sistema real para o modelo, envolve um processo de abstracção biotápico. Na primeira etapa, deve ser seleccionado, do elevado número de variáveis que o sistema real envolve, as que se revelam como dominantes. Na segunda etapa, deve ser definido um modelo que represente o sistema, identificando e simplificando as relações entre as características dominantes, de forma mais adequada à análise.

Na aplicação do método da Investigação Operacional, identificam-se tipicamente as seguintes fases:

Fase 1 - Formulação do problema

Fase 2 - Construção de um modelo

Fase 3 - Obtenção da solução

Fase 4 - Validação do modelo e teste de solução

Fase 5 - Implementação da solução

A sequência indicada corresponde à ordem pela qual as fases são iniciadas, no entanto cada fase, depois de iniciada, estende-se até ao final do estudo, sobrepondo-se no tempo e interagindo continuamente com as restantes.

Quando nos encontramos perante um problema prático, a primeira atitude deverá ser a de análise do que é relevante no enunciado do problema a ser considerado. Isto é, determinar o(s) objectivo(s) apropriado(s), as restrições (limitações) sobre o que pode e/ou deve ser feito, possíveis caminhos alternativos, relações de interdependência entre as componentes integrantes, limites de tempo para a tomada de decisão, etc. Este processo de definição do problema é de crucial importância pois dele dependem as conclusões do estudo. A formulação inicial do problema deverá ser reformulada tantas vezes quantas as necessárias até que se alcance a que melhor representa a situação real em estudo - é difícil obter uma resposta “correcta” a partir de um problema “incorrecto”. O início do processo para encontrar a solução óptima consiste em formular correctamente o problema. Torna-se necessário descrevê-lo através de expressões matemáticas de forma tão exhaustiva e fidedigna quanto possível.

A fase de “**Formulação do Problema**” inicia-se pela identificação do problema e dos seus elementos estruturais:

- a função objectivo (função económica ou função critério) que traduz a relação existente entre uma medida da eficiência global do sistema analisado, as variáveis de decisão (controláveis) e os parâmetros (incontroláveis);
- um conjunto de restrições, que traduz os limites dentro dos quais as variáveis de decisão podem ser manipuladas.

Formular um problema não é mais do que representar em termos matemáticos os aspectos que traduzem a situação real que se pretende estudar: o objectivo, o conjunto de decisões alternativas (variáveis controláveis e suas restrições) e os parâmetros, que não sendo controláveis, podem afectar os resultados das decisões.

Depois da identificação das componentes do modelo, a fase “**Construção do modelo**” consiste na reprodução das relações existentes entre elas. Podemos identificar as duas etapas:

- identificação da estrutura de relações do tipo causa/efeito entre variáveis de decisão, variáveis incontroláveis e medida de eficiência do sistema;
- quantificação das relações identificadas e das restrições (ajustamentos sucessivos)

A fase de “**Obtenção da solução**” é a mais técnica do método. O objectivo consiste em determinar a solução óptima, entre as soluções possíveis definidas pelo conjunto de restrições. A obtenção da solução pode ser feita através de dois tipos de métodos: de optimização ou heurísticos. Os métodos de optimização são aplicados a problemas bem estruturados, isto é, problemas representáveis por um modelo que cobre todo o domínio das soluções possíveis, com um critério bem definido para julgar a utilidade de qualquer solução, em que o esforço envolvido na recolha de dados é comportável e para os quais existe um método de resolução que permite a obtenção da solução óptima com esforço computacional não excessivo, relativamente à quantidade de cálculo necessário. Os métodos heurísticos constituem a única alternativa à resolução de problemas que pela sua complexidade e estrutura tornam inviável a tentativa da obtenção de solução óptima. Estes métodos envolvem, basicamente, o desenvolvimento de regras inteligentes cuja aplicação conduz à obtenção de soluções que, sem a garantia de serem óptimas, são, no entanto, satisfatórias, traduzindo uma melhoria em relação às soluções até então adoptadas.

A fase de “**Validação do modelo e teste de solução**” é dinâmica: à medida que o modelo é construído, as hipóteses em que se baseia devem ser continuamente validadas. A validação global do modelo pode ser feita através de testes globais que detectem potenciais deficiências, tais como avaliação imprecisa, exclusão ou inclusão de variáveis relevantes, definição não apropriada da medida da utilidade do sistema, adopção de uma estrutura inadequada de relações entre variáveis de decisão, variáveis incontroláveis e medida de eficiência do sistema. O processo de validação global do modelo pode ainda ser feito através da análise crítica do modelo e das soluções ou através da análise de sensibilidade - estudando de que modo as alterações nos parâmetros afectam a solução óptima do modelo e,

assim, estabelecendo tolerâncias de controlo. Antes de ser implementado, o modelo deve passar por um teste final, onde deve ser verificado se as soluções propostas possuem impacto positivo no processo de decisão em causa. O teste da solução poderá ser efectuado comparando a eficiência do sistema com a eficiência que resultaria da adopção da solução proposta pelo modelo.

Quando o modelo é correctamente formulado, a solução obtida será, com certeza, muito próxima da solução a implementar na situação real, tendo em conta que qualquer modelo possui um certo grau de incerteza devido às simplificações efectuadas; não se pode afirmar que a solução óptima do modelo é sempre a solução óptima na situação real. Nesta fase, é incorporada a "*análise de sensibilidade e pós-optimização*", em que é estudado o comportamento da solução óptima quando são efectuadas alterações nos parâmetros do modelo. São determinados quais os parâmetros do modelo que mais influenciam a solução óptima - parâmetros "*sensíveis*". A *análise de sensibilidade e pós-optimização* possibilita um espectro mais alargado de soluções quando ocorrem alterações nestes parâmetros "*sensíveis*". Uma vez concluído este passo, já é possível avaliar várias propostas de modelos e as respectivas soluções óptimas.

A fase "**Implementação da Solução**" compreende a execução de todas as tarefas necessárias para que a solução proposta seja implementada.

Para concluir, ao analisar um problema com vista à sua modelização matemática, há que ponderar, caso a situação real a estudar não permita a sua formulação, se é possível enveredar pela alteração ou simplificação da descrição. Neste caso, deve-se ter o cuidado de manter presente o teor e/ou o tipo de simplificações efectuadas quer ao longo das fases identificadas, não esquecendo que qualquer modelo será tanto melhor quanto menos simplificações ou transformações forem efectuadas.

### 3.2 As Hipóteses da Programação Linear

A Programação Linear (abreviadamente, PL) é uma subclasse de problemas de Programação Matemática, em que as funções matemáticas no modelo (função objectivo e restrições) são descritas através de relações lineares.

Do ponto de vista matemático, o modelo deve ser constituído por uma função objectivo linear sujeita a restrições lineares. O modelo de PL formula o problema em termos de tomadas de decisão em relação aos níveis de actividades  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , que se denominam variáveis de decisão e às constantes de entrada para o modelo, os valores  $c_j, b_j, a_{ij}$ , em que  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , que se denominam parâmetros. É utilizada a seguinte terminologia:

- a família de funções  $Max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$  é designada por função objectivo,
- as desigualdades  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$  são designadas por restrições funcionais,
- e as restrições  $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$  são designadas por restrições de não negatividade.

Do ponto de vista da modelização, as propriedades matemáticas implicam que certas hipóteses devam de ser satisfeitas em relação às actividades (variáveis), função objectivo e restrições (funcionais e de não negatividade) do problema. As condições ou hipóteses definem as propriedades de um modelo geral e são as seguintes: proporcionalidade, divisibilidade, não negatividade, aditividade e linearidade.

A proporcionalidade é uma condição que se refere tanto à função objectivo como às restrições funcionais. Esta hipótese traduz a condição de que qualquer operação estudada apresenta rendimentos de escala constantes para todo e

qualquer nível de actividade. Segundo esta condição deve-se verificar, sempre, uma proporção directa constante entre todos os parâmetros do problema. Logo, os coeficientes da função objectivo e os coeficientes técnicos das restrições têm que ser os pesos reais das grandezas a medir cujas proporções são fixas, não havendo lugar a qualquer variação condicionada a intervalos de valor das variáveis.

A hipótese da divisibilidade pressupõe que qualquer actividade considerada num problema de PL possa ser uma grandeza divisível, de forma a evitar situações de arredondamento de valores fraccionários de variáveis de decisão, na implementação de soluções óptimas. Este arredondamento para valores inteiros iria adulterar a solução óptima. Acontece, por vezes, que o valor óptimo das variáveis de decisão é fraccionário mesmo que todos os parâmetros do problema inicial sejam números inteiros. Esta hipótese que traduz uma generalização muito simplificada da realidade nem sempre pode ser considerada, pois existem muitas grandezas que, na realidade, só podem traduzir quantidades inteiras (pessoas, viaturas ou qualquer tipo de objecto indivisível). Nestes casos será de todo conveniente aplicar algoritmos específicos de Programação Inteira.

A não negatividade é uma condição imposta a qualquer problema de PL. Em qualquer problema de PL, as variáveis de decisão não podem assumir valores negativos. Esta hipótese é imposta pelos algoritmos de resolução a aplicar, podendo esta condição não existir ao formular o problema. Assim, quando existem variáveis que não verificam esta hipótese, antes da implementação da solução adoptada, são sujeitas a uma codificação especial.

A hipótese de aditividade diz que toda a função (função objectivo ou a função que se encontra no lado esquerdo da restrição), num modelo de PL é a soma das contribuições individuais das respectivas actividades. Esta hipótese não permite a possibilidade da existência de termos envolvendo o produto de duas ou mais variáveis. Na realidade, esta hipótese é frequentemente verificada. No entanto, existem casos em que a hipótese não se verifica (quando a produção de um produto afecta a produção do outro, pois existem relações de causalidade entre as variáveis de decisão). Nestes casos, deve-se optar por uma simplificação da representação da

situação real de forma a evitar as relações de causalidade entre as variáveis de decisão. Quando isto não se justificar deve-se optar por uma melhor forma de interpretar a solução final para que os resultados de uma formulação adulterada do problema não afectem negativamente a implementação da solução óptima.

A hipótese de linearidade pressupõe que o valor atribuído a cada parâmetro de um modelo de PL seja uma constante. Pode-se afirmar que esta regra já está, de certa forma, incluída na hipótese da proporcionalidade pois traduz a ideia de que a contribuição de cada actividade para o valor da função objectivo é proporcional às quantidades produzidas. Em aplicações reais a hipótese da linearidade da função objectivo raramente é satisfeita, dado que os modelos da PL são, em geral, formulados para seleccionar alguma medida futura. Isto introduz um certo grau de incerteza. Face a um problema real há que encontrar a melhor forma de representar o critério de decisão para que se possa traduzir numa expressão linear. Quando isto não é possível, pode-se optar por tentar novas definições para as variáveis de decisão, de tal modo que permitam a construção de uma função objectivo linear ou tentar a reformulação do objectivo. Esta medida só deve ser aplicada em último caso, sendo porém muito útil pois obriga a repensar quais os objectivos do problema e a sua possível redefinição, e a concluir que há diferentes formas de encarar uma mesma realidade.

### **3.3 Os Problemas de Programação Linear**

No nível de ensino em foco neste trabalho, e qualquer que seja a disciplina a considerar - Matemática A ou Matemática B, sugere-se que a escolha dos problemas de PL seja cuidadosa, que envolva somente duas variáveis de decisão e que a resolução - numérica e gráfica, de problemas seja elaborada com referências expressas à identificação das variáveis de decisão, das restrições e da função objectivo, bem como à sua formulação matemática. A formulação deve ser

encarada como a simples tradução matemática dos problemas expressos em linguagem corrente.

Nas subsecções seguintes apresentam-se, utilizando diferentes problemas destinados a alunos de 11º ano – Matemática A ou de 12º ano – Matemática B, as metodologias utilizadas na PL para a formulação de problemas, resolução e análise do impacto resultante da adição de novas restrições. Os conceitos básicos serão introduzidos em paralelo com a resolução dos problemas. Em particular, é dada ênfase aos problemas de Programação Linear Inteira (abreviadamente, PLI), um caso particular dos problemas de Programação Linear nos quais as variáveis de decisão só podem assumir valores inteiros. Estes problemas podem ser resolvidos ignorando as condições de integralidade e usando, na fase de resolução, a mesma metodologia dos problemas de Programação Linear Contínua (abreviadamente, PLC).

São exploradas as capacidades da calculadora gráfica e do computador, que podem ser entendidos como recursos educacionais dinâmicos. Será explorado o uso da calculadora gráfica com o objectivo de melhor visualizar os exercícios trabalhados, e analisadas as potencialidades do comando Solver do Microsoft Excel, que permite ao aluno resolver problemas mais complexos, que por exemplo envolvam mais que duas variáveis de decisão, verificar, analisar e interpretar os resultados dos problemas de forma crítica.

### **3.3.1 A Formulação de um problema de PL**

O processo de formulação de um problema pode ser separado em duas etapas:

1. Entender o problema: se o enunciado do problema for claro e a situação subjacente não suscitar dúvidas de interpretação, construir uma tabela ou desenhar um esquema que agregue os dados;

2. Construir um modelo: identificar, pela seguinte ordem, as variáveis de decisão, a função objectivo e as restrições – funcionais, de não negatividade e de integralidade, quando necessárias.

Um dos objectivos do conteúdo do módulo de PL é a familiarização dos estudantes com situações de gestão reais e de extrema simplicidade e utilidade; é sugerida a abordagem a situações de trabalho em que seja necessário tomar decisões em termos de, por exemplo, planeamento da produção, de maximização de lucros, minimização de custos ou consumos, de selecção de novos investimentos que alterem as condições de fabrico de modo a responder a novos desafios.

Para ilustrar as etapas do processo de formulação e de acordo com estas orientações, seleccionou-se um conjunto de problemas extraídos de manuais escolares.

O primeiro problema, que a seguir se formula, é um problema de composição de mistura, em que as características do problema não obrigam à imposição da condição de integralidade aos valores possíveis.

*Problema 3.1 [MG06]: Uma empresa produz dois tipos de misturas de café, M1 e M2. Nestas misturas utiliza-se café de alta qualidade proveniente de três países A, B, C. A fábrica dispõe de 320 kg proveniente de A, 180 kg de B e 200 kg de C. 6kg de mistura M1 levam 3 kg de A, 2 kg de B e 1 kg de C e são vendidos por 120 euros. 6kg de mistura M2 levam 4 kg de A, 1 kg de B e 1 kg de C e são vendidos por 100 euros. Com o café disponível, quantos quilogramas de cada uma das misturas deve fazer a fábrica para obter a máxima receita possível?*

Após a leitura atenta do enunciado do problema, e antes da construção do modelo matemático que formaliza este problema, pode ser elaborada uma tabela ou um esquema que organize e sintetize os dados relevantes. Os dados encontram-se organizados na tabela seguinte:

Café originário do país	Mistura M1 (kg)	Mistura M2 (kg)	Quantidade disponível (kg)
A	3 / 6	4 / 6	320
B	2 / 6	1 / 6	180
C	1 / 6	1 / 6	200
Preço de venda unitário (euros/Kg)	120 / 6	100 / 6	

De acordo com as fases do processo de formulação, começa-se por identificar as variáveis de decisão, a função objectivo e as restrições (funcionais e de não negatividade):

1. As **variáveis de decisão** são as quantidades acerca das quais é requerida a tomada de uma decisão. Neste problema, pretende-se saber a quantidade de mistura de café do tipo M1 e de café do tipo M2. Designando estas quantidades por  $x$  e  $y$ , respectivamente, tem-se as seguintes variáveis de decisão:

$x$  – “quantidade, em kg, de mistura de café do tipo M1”

$y$  – “quantidade, em kg, de mistura de café do tipo M2”

2. A **função objectivo**, orientará a escolha da solução óptima. Neste problema, pretende-se determinar a quantidade de mistura M1 e M2 que permite obter a receita máxima total, logo a função objectivo será:

$z$  – “receita total em euros”

Sendo a receita directamente proporcional ao número de produzidas, o contributo obtido pela venda de  $x$  kg de mistura de café do tipo M1 é “ $120x/6$ ” euros e de  $y$  kg de mistura de café do tipo M2 é “ $100y/6$ ” euros. O lucro total, expresso em euros, é dado pela função:

$$z = 120x / 6 + 100y / 6$$

3. O conjunto de restrições funcionais que reflecte as limitações impostas pela capacidade de produção. Neste exemplo, identificam-se três restrições funcionais, cada uma relativa às quantidades de café produzido no país A, B e C que

deverão ser incorporadas nas misturas finais. Primeira restrição: se na produção de mistura de café do tipo M1 são necessários  $3/6$  kg provenientes do país A, então a produção de  $x$  implica " $3x/6$ " kg; e se a produção de mistura de café do tipo M2 necessita de  $4/6$  kg de café da mesma origem, então  $y$  necessita " $4y/6$ " kg. Deste modo, a quantidade gasta a produzir  $x$  kg de mistura de café do tipo M1 e  $y$  kg de mistura de café do tipo M2 é dada pela expressão: " $3x/6 + 4y/6$ ". Dado que a fábrica dispõe apenas de 320 kg de café provenientes do país A, a restrição associada será definida pela desigualdade:

$$3x/6 + 4y/6 \leq 320 \text{ (restrição relativa ao café do país A)}$$

Segunda restrição: relativamente à quantidade de café proveniente do país B, sabe-se que a mistura de café do tipo M1 tem de incluir 2 kg, logo a produção de  $x$  incluirá " $2x/6$ " kg; a mistura de café do tipo M2 precisa 1 kg, então  $y$  precisará " $y/6$ " kg. Tendo em conta que a fábrica só dispõe de 180 kg de café provenientes do país B, a restrição referente a esta situação é dada pela desigualdade:

$$2x/6 + y/6 \leq 180 \text{ (restrição relativa ao café do país B)}$$

Terceira restrição: relativamente à quantidade de café proveniente do país C, sabe-se que a mistura de café do tipo M1 tem 1 kg, logo a produção de  $x$  terá " $x/6$ " kg; a mistura de café do tipo M2 tem 1 kg, então  $y$  terá " $y/6$ " kg. Tendo em conta que a fábrica só dispõe de 200 kg de café provenientes do país C, a restrição referente a esta situação é dada pela desigualdade:

$$x/6 + y/6 \leq 200 \text{ (restrição relativa ao café do país C)}$$

4. As restrições de não negatividade garantem que as variáveis de decisão sejam não negativas. No exemplo não faz sentido produzir misturas de café em quantidades negativas. Tem-se:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Assim, o problema enunciado pode ser formulado (modelizado matematicamente) do seguinte modo:

$$\begin{array}{l}
 \text{Max. } z = 120x/6 + 100y/6 \\
 \text{s.a: } \quad 3x/6 + 4y/6 \leq 320 \\
 \quad \quad 2x/6 + y/6 \leq 180 \\
 \quad \quad x/6 + y/6 \leq 200 \\
 \quad \quad x, y \geq 0
 \end{array}$$

em que “Max.” e “s.a” são as abreviaturas de “maximizar” e “sujeito a”, respectivamente. □

No exemplo seguinte, apresenta-se com detalhe o processo de formulação de um problema que envolve a maximização do lucro.

*Problema 3.2 [MG06]: Uma fábrica de banheiras de hidromassagem em fibra de vidro produz banheiras redondas e banheiras rectangulares. Cada banheira redonda necessita de três horas na linha de fabrico e uma hora no acabamento. Cada banheira rectangular necessita de uma hora na linha de fabrico e duas horas no acabamento. A empresa tem um lucro de 600 euros por cada banheira redonda e 300 euros por cada banheira rectangular. Sabendo que tem disponível, no máximo, por dia, 90 horas no fabrico e 80 horas no acabamento, quantas banheiras de cada tipo devem ser produzidas de modo a que a empresa obtenha o máximo de lucro por dia?*

Na tabela seguinte organizam-se os dados do enunciado do problema:

Tipo de banheiras	Redondas	Rectangulares	Total de horas disponíveis
Tempo dispensado no fabrico (em horas)	3	1	90
Tempo dispensado no acabamento (em horas)	1	2	80
Lucro unitário (em euros)	600	300	

De seguida, identificam -se variáveis de decisão, função objectivo e restrições (funcionais, de não negatividade e, neste caso, de integralidade):

1. Variáveis de decisão: de acordo com o enunciado, pretende-se decidir a quantidade de banheiras redondas e rectangulares que devem ser produzidas por dia (no período das 90 horas de fabrico e 80 horas de acabamento). Designando estas quantidades por  $x$  e  $y$ , respectivamente, tem-se as seguintes variáveis de decisão:

$x$  – “número de banheiras redondas produzidas diariamente”

$y$  – “número de banheiras rectangulares produzidas diariamente”

2. Função objectivo: neste problema, pretende-se maximizar o lucro diário da empresa, logo a função será, numa primeira abordagem:

$f$  – “lucro diário obtido com a venda das banheiras produzidas, em euros”

Sendo o lucro directamente proporcional ao número de banheiras produzidas, o contributo obtido pela venda de  $x$  banheiras redondas é “ $600x$ ” euros e de  $y$  banheiras rectangulares é “ $300y$ ” euros. O lucro total, expresso em euros, é dado pela função:

$$f = 600x + 300y$$

Para simplificar, podemos considerar o lucro expresso em unidades de 100 euros e redefinir a função objectivo:

$z$  – “lucro diário obtido com a venda das banheiras produzidas, em centenas de euros”

$$z = f / 100 = 6x + 3y$$

3. Restrições funcionais: identificam-se duas restrições funcionais, uma para a linha de fabrico e outra para o acabamento. Primeira restrição: se a produção de uma banheira redonda demora 3 horas no fabrico, então a produção de  $x$  demorará “ $3x$ ” horas, e se a produção de uma banheira rectangular demora uma hora no fabrico, então  $y$  demorará “ $y$ ” horas. Deste modo, o tempo total gasto a produzir  $x$  banheiras redondas e  $y$  banheiras rectangulares é dado pela expressão: “ $3x+y$ ”.

Dado que a linha de fabrico está limitada a 90 horas de produção semanal, a restrição associada será definida pela desigualdade:

$$3x + y \leq 90 \text{ (restrição relativa à linha de fabrico)}$$

Segunda restrição: relativamente ao tempo dispensado no acabamento, sabe-se que cada banheira redonda requer 1 hora, logo  $x$  banheiras redondas requerem  $x$  horas; cada banheira rectangular necessita de 2 horas, logo  $y$  necessitarão de “ $2y$ ” horas. Tendo em conta que só podem ser dispensadas no máximo 80 horas, a restrição referente a esta situação é dada pela desigualdade:

$$x + 2y \leq 80 \text{ (restrição relativa ao acabamento)}$$

4. As restrições de não negatividade, que garantem que as variáveis de decisão sejam não negativas. Neste problema, como não faz sentido produzir banheiras em quantidades negativas, tem-se:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

e, como não faz sentido, também, a produção de quantidades não inteiras de banheiras, as soluções possíveis do problema restringem-se a quantidades não negativas e inteiras:

$$x, y \geq 0 \text{ e } \textit{inteiros}$$

Assim, o problema enunciado pode ser formulado (modelizado matematicamente) do seguinte modo, como um problema de PLI:

$\begin{aligned} \text{Max. } z &= 6x + 3y \\ \text{s.a: } & 3x + y \leq 90 \\ & x + 2y \leq 80 \\ & x, y \geq 0 \text{ e } \textit{inteiros} \end{aligned}$
--

□

O problema seguinte tem características semelhantes ao anterior.

*Problema 3.3 [MGE06]: Uma empresa decidiu-se pela criação de centros de apoio às famílias com crianças em idade Pré-Escolar (CAFC). A empresa tinha duas situações completamente diferentes: uma dizia respeito aos trabalhadores na sede da empresa no centro da cidade, outra dizia respeito aos trabalhadores em unidades da empresa sedeadas na província. Cada CAFC criado na cidade necessitava de 1 professor, 9 auxiliares de educação e 5 mil euros. Cada CAFC criado na província necessitava de 1 professor, 5 auxiliares de educação e 8 mil euros. Para pôr em prática o projecto, a empresa dispunha de 20 professores, 144 auxiliares de educação e 136 mil euros. Determine o número máximo de CAFC que a empresa pode criar.*

O processo de formulação deste problema começa pela elaboração de um quadro que resume os dados do problema.

Recursos	CAFC/cidade	CAFC/província	Total de recursos disponíveis
Professores	1	1	20
Auxiliares de educação	9	5	144
Capital a investir (em milhares de euros)	5	8	136

Para este problema, tem-se:

1. Variáveis de decisão:

$x$  – “número de CAFC criados na sede da empresa no centro da cidade”,

$y$  – “número de CAFC criados em unidades da empresa sedeadas na província”

2. Função objectivo: neste problema, pretende-se determinar o número máximo total de centros na cidade e na província que a empresa pode criar, logo a função objectivo será:

$z$  – “número total de centros de apoio a criar”

$$z = x + y$$

3. Restrições funcionais: de acordo com as limitações referidas no enunciado, identificam-se três restrições funcionais, cada uma associada à utilização de um recurso específico.

Primeira restrição: se cada CAFC/cidade e CAFC/província precisa de 1 professor, então  $x$  precisam de “ $x$ ” professores e  $y$  precisam de “ $y$ ” professores. Como a empresa só dispõe de 20 professores, então a restrição associada será definida pela desigualdade:

$$x + y \leq 20 \text{ (restrição relativa aos professores)}$$

Segunda restrição: se cada CAFC/cidade precisa de 9 auxiliares de educação, então  $x$  necessitam de “ $9x$ ” auxiliares; se cada CAFC/província precisa de 5 auxiliares de educação, então  $y$  precisam de “ $5y$ ” auxiliares de educação. Tendo em conta que a empresa só dispõe de 144 auxiliares de educação, a restrição referente a esta situação será definida pela desigualdade:

$$9x + 5y \leq 144 \text{ (restrição relativa aos auxiliares de educação)}$$

Terceira restrição: para a criação de um CAFC/cidade são necessários 5 mil euros e de um CAFC/província são necessários 8 mil euros; então  $x$  CAFC's/cidade e  $y$  CAFC's/província precisam “ $5x+8y$ ” mil euros; como a empresa só dispõe de 136 mil euros a restrição associada é definida pela desigualdade:

$$5x + 8y \leq 136 \text{ (restrição relativa ao capital)}$$

4. Restrições de não negatividade e integralidade: como não faz sentido criar centros em quantidades negativas e não inteiras, tem-se

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ e inteiros}$$

O problema pode ser formulado do seguinte modo:

<i>Max.</i> $z = x + y$
<i>s.a:</i> $x + y \leq 20$
$9x + 5y \leq 144$
$5x + 8y \leq 136$
$x, y \geq 0$ e inteiros

□

O problema seguinte é um problema de minimização de custos, em que as restrições envolvidas são desigualdades do tipo  $\geq$ .

*Problema 3.4 [MGE06]: Um criador de cães pretende alimentá-los com uma composição mínima de 25 unidades de uma substância  $\alpha$  e 45 unidades de uma substância  $\beta$ . No mercado encontram-se dois tipos de produtos, que contêm estas substâncias, embalados em sacos. Cada saco do produto tipo A tem 5 unidades da substância  $\alpha$  e 5 unidades da substância  $\beta$ . Cada saco do produto tipo B tem 3 unidades da substância  $\alpha$  e 11 unidades da substância  $\beta$ . Cada saco do produto, A ou B, custa 10 euros. Quantos sacos o criador de cães deve comprar de cada produto para gastar a menor quantidade de dinheiro possível?*

Começa-se por elaborar uma tabela com a informação do problema esquematizada:

Substâncias nutrientes	Produto tipo A	Produto tipo B	Composição mínima
Substância $\alpha$	5 u./saco	3 u./saco	25 u.
Substância $\beta$	5 u./saco	11 u./saco	45 u.
Custo unitário (euros/saco)	10	10	

Para formular este problema, define-se:

1. Variáveis de decisão:

$x$  – “número de sacos do produto tipo A a comprar”

$y$  – “número de sacos do produto tipo B a comprar”

2. Função objectivo: determinar o número de sacos de cada produto a comprar de modo que o custo total seja mínimo. Logo, a função objectivo será:

$z$  – “custo total dos sacos tipo A e B a comprar”

$$z = 10x + 10y$$

3. Restrições funcionais: identificam-se duas restrições funcionais, relativas à quantidade de substância  $\alpha$  e  $\beta$  na composição dos sacos de cada tipo de produto a comprar.

Primeira restrição relativa à quantidade de substância  $\alpha$ : se cada saco de produto do tipo A precisa de 5 unidades da substância, então  $x$  precisam de “5x” unidades, e se cada produto do tipo B precisa de 3 unidades, então  $y$  sacos necessitam de “3y”; o criador pretende alimentar os cães com a composição mínima de 25 unidades desta substância. A restrição será:

$$5x + 3y \geq 25 \text{ (restrição relativa à substância } \alpha \text{)}$$

Segunda restrição relativa à quantidade de substância  $\beta$ : cada saco de produto do tipo A precisa de 5 unidades e cada saco de produto tipo B precisa de 11 unidades; o criador pretende alimentar os cães com a composição mínima de 25 unidades desta substância. Então, a restrição será:

$$5x + 11y \geq 45 \text{ (restrição relativa à substância } \beta \text{)}$$

4. Restrições de não negatividade e integralidade: a quantidade de sacos de cada tipo não poderá ser um valor negativo e deverá ser um inteiro,

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ e inteiros}$$

A formulação do modelo de PL para o problema é:

$\begin{aligned} \text{Min. } z &= 10x + 10y \\ \text{s.a:} \quad & 5x + 3y \geq 25 \\ & 5x + 11y \geq 45 \\ & x, y \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$
--

em que “min” é abreviatura utilizada para “minimizar”. □

O problema seguinte é um problema de maximização, em que não é necessária a construção de uma tabela que sintetize os dados, e que se caracteriza pela existência de umas restrições em que o sentido da desigualdade é  $\geq$  e outras,  $\leq$ .

*Problema 3.5 [MG06]: Um comboio de mercadorias pode comportar, no máximo, 20 carruagens. Numa certa viagem transporta madeiras e blocos de granito. Os blocos de granito devem ocupar pelo menos 9 carruagens e a madeira ocupará, pelo menos, um número de carruagens igual a um terço do número de carruagens ocupadas com os blocos de granito. Sabendo que cada carruagem carregada de granito rende à companhia 2500 euros e cada carruagem carregada de madeira rende 1500 euros, calcule como devem ser distribuídas as carruagens de maneira que a companhia obtenha o máximo lucro.*

Para formular o problema, definir:

1. Variáveis de decisão:

$x$  – “número de carruagens atribuídas ao transporte de granito”

$y$  – “número de carruagens atribuídas ao transporte de madeira”

2. Função objectivo: determinar o número de carruagens do comboio de mercadorias que transportarão granito e o número de carruagens que transportarão madeira de modo que o lucro resultante seja máximo. A função objectivo será:

$f$  – “lucro total do transporte, em euros”

$$f = 2500x + 1500y$$

Para simplificar, podemos considerar o lucro expresso em unidades de 100 euros e redefinir a função objectivo:

$z = f / 1000$  – “lucro total do transporte, em centenas de euros”

$$z = 25x + 15y$$

3. Restrições funcionais: no enunciado, identificam-se três restrições funcionais. Primeira restrição relativa ao número de carruagens do comboio em cada viagem.

$$x + y \leq 20 \text{ (restrição relativa ao número de carruagens)}$$

Segunda restrição: os blocos de granito devem ocupar pelo menos 9 carruagens.

$$x \geq 9 \text{ (restrição relativa ao número de carruagens com granito)}$$

Terceira restrição: o número de carruagens com madeira deve ser pelo menos igual a um terço do número de carruagens ocupadas com os blocos de granito.

$$y \geq x/3 \text{ (restrição relativa à relação número de carruagens com madeira e com granito)}$$

4. Restrições de não negatividade e integralidade:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ e inteiros}$$

A formulação do modelo de PL para o problema é:

$\begin{aligned} \text{Max. } z &= 25x + 15y \\ \text{s.a: } x + y &\leq 20 \\ x &\geq 9 \\ -x/3 + y &\geq 0 \\ x, y &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$
--

□

### 3.3.2 A Resolução Gráfica de um problema de PL

A resolução gráfica de um problema de PL é um método frequentemente utilizado quando o modelo se restringe a duas variáveis de decisão. Este método é sempre aplicável e muito útil para identificar as características dos problemas e a natureza das soluções. Permite, além de encontrar rapidamente a solução ótima, a visualização do processo de aproximação à solução do problema. Os problemas de PL, de interesse neste nível de ensino, podem incluir ou não restrições adicionais

relativas à integralidade das variáveis de decisão, o que tem implicações óbvias no método utilizado para a sua resolução. Estes problemas designam-se por problemas de PLI.

Uma abordagem frequente para a resolução de problemas de PLI consiste em resolver o problema PL associado, que resulta de relaxar as variáveis inteiras, e se a solução óptima obtida não for inteira, arredondar a solução. Porém, após o arredondamento, a solução pode nem ser admissível nem óptima para o problema de PLI. Um problema de PLI com região de admissibilidade limitada tem um número finito de soluções admissíveis, pelo que será sempre de admitir um processo enumerativo para a determinação de uma solução óptima. No entanto, esse número pode facilmente tornar-se demasiado grande, tornando inclusivamente inviável a utilização de computadores.

A metodologia de resolução gráfica de um problema de PL (Contínua) com duas variáveis de decisão, inclui três passos:

**1º Passo:** *Representação das restrições funcionais e das restrições de não negatividade.*

**2º Passo:** *Identificação do conjunto das soluções admissíveis do problema, também designado por região admissível ou domínio das soluções admissíveis, constituído pelo conjunto de pontos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem as restrições funcionais e as de não negatividade. Como as restrições definem semiplanos de  $\mathbb{R}^2$ , este conjunto constitui, em termos geométricos, o domínio poliédrico convexo que resulta da intersecção desses semiplanos.*

**3º Passo:** *Obtenção da solução óptima, isto é, determinação do(s) ponto(s) da região de admissibilidade que melhor se ajusta(m) à solução do problema – **solução óptima.***

Exemplifique-se este método de resolução, considerando o Problema 3.1:

$Max. z =$	$120x/6$	$+$	$100y/6$	
$s.a:$	$3x/6$	$+$	$4y/6$	$\leq 320$
	$2x/6$	$+$	$y/6$	$\leq 180$
	$x/6$	$+$	$y/6$	$\leq 200$
	$x, y \geq 0$			

**1º Passo:** Representação das restrições funcionais e das restrições de não negatividade.

Antes da representação das restrições, considere-se a definição de recta no plano  $XY$ .

**Definição:** O conjunto dos pontos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem a equação  $a_1x+a_2y=b$ , com  $a_1, a_2$  e  $b$  constantes, é uma recta perpendicular ao vector  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ . A equação define uma recta no plano que o divide em dois semiplanos abertos  $a_1x+a_2y < b$  e  $a_1x+a_2y > b$ .

Analise-se a primeira restrição funcional, a inequação linear  $3x/6 + 4y/6 \leq 320$ . O conjunto de pares ordenados  $(x,y)$  que satisfazem esta inequação é um semiplano cuja fronteira é a recta de equação  $3x/6 + 4y/6 = 320$ . Para representar a restrição, começa-se por desenhar a recta e, seguidamente, verificar se, por exemplo, a origem satisfaz a inequação – neste caso, verifica-se que o semiplano definido pela inequação contém a origem, como representado na figura seguinte.

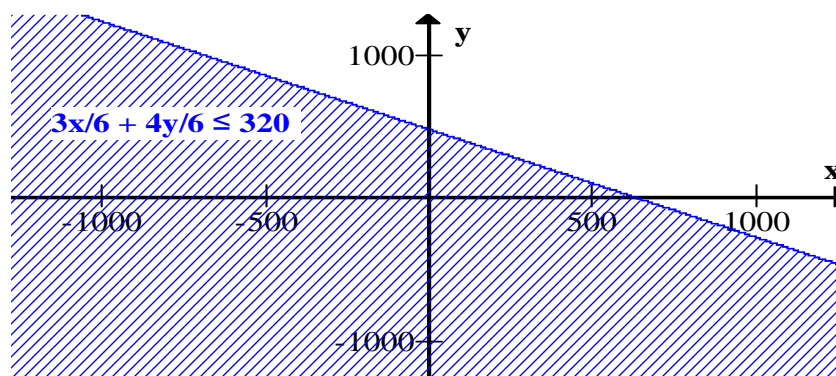


Figura 1: Representação gráfica da restrição  $3x/6 + 4y/6 \leq 320$

Repetindo o procedimento para a segunda restrição funcional  $2x/6 + y/6 \leq 180$ , verifica-se que o semiplano definido pela inequação contém a origem, resultando a seguinte representação.

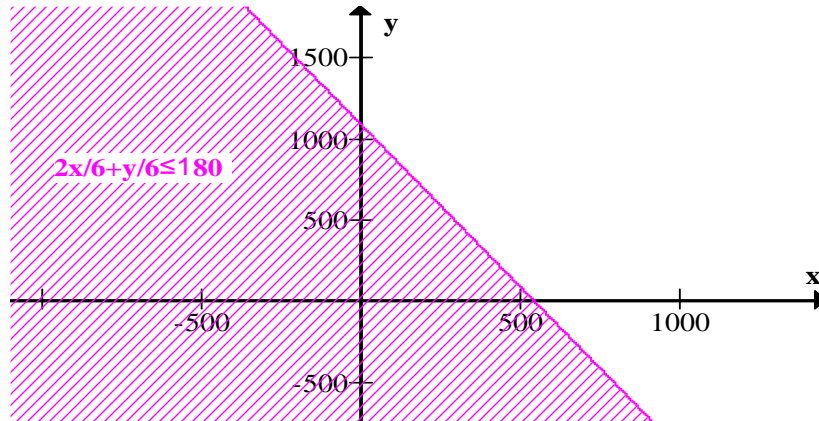


Figura 2: Representação gráfica da restrição  $2x/6 + y/6 \leq 180$

Repetindo o procedimento para a terceira restrição funcional  $x/6 + y/6 \leq 200$ , verifica-se que o semiplano definido pela inequação contém a origem, resultando a seguinte representação.

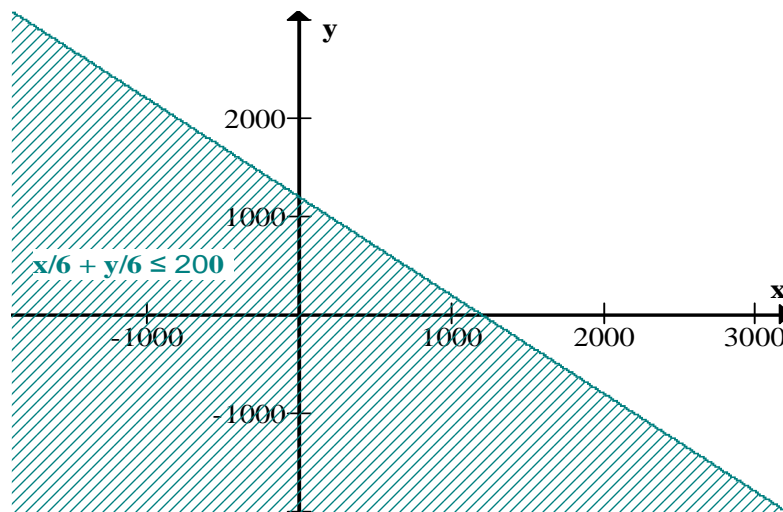
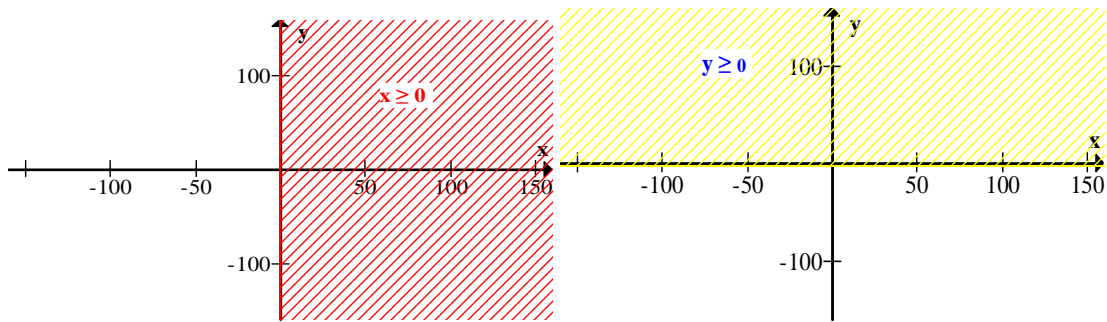


Figura 3: Representação gráfica da restrição  $x/6 + y/6 \leq 200$

As duas restrições de não negatividade  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  impõem que o conjunto de pares ordenados  $(x,y)$ , que representam as soluções possíveis do problema, se situe no primeiro quadrante.



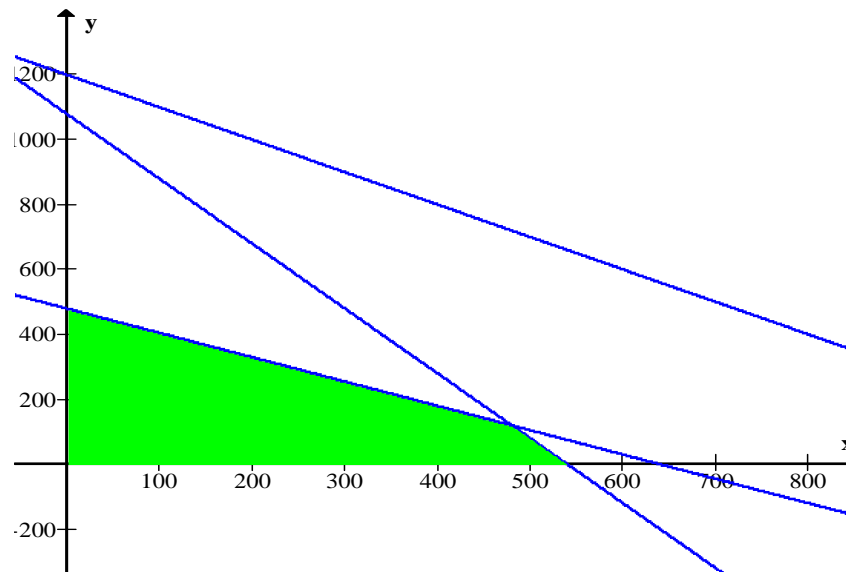
**Figura 4: Representação gráfica das restrições de não negatividade  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$**

## 2º Passo: Identificação da região admissível

Dado que o conjunto solução de um sistema de inequações lineares - designe-se por  $S$ , resulta da intersecção de um número finito de semiplanos, então podem ocorrer as seguintes situações:

- $S$  é não vazio e limitado. O problema tem óptimo finito: uma ou múltiplas soluções óptimas;
- $S$  é não vazio e não limitado. O problema pode ter ou não ter óptimo finito, dependendo do gradiente da função objectivo, isto é, o valor da função objectivo pode crescer indefinidamente;
- $S$  é vazio e o problema não tem solução.

A região admissível, ou seja, o conjunto de pontos que verifica todas as restrições do problema, corresponde à intersecção dos conjuntos das soluções admissíveis de cada inequação. Para este problema, a região de admissibilidade é dada pelo conjunto de pontos na região colorida do gráfico, que corresponde a um polígono convexo limitado pelas três restrições funcionais e pelas restrições de não negatividade. Na figura seguinte, está representado o conjunto de soluções admissíveis do problema.



**Figura 5: Representação gráfica da região admissível**

$$(3x/6 + 4y/6 \leq 320 \wedge 2x/6 + y/6 \leq 180 \wedge x/6 + y/6 \leq 200 \wedge y \geq 0 \wedge x \geq 0)$$

**3º Passo:** Obtenção da solução ótima.

**Definição:** Chama-se vértice (ou ponto extremo) dum politopo ou poliedro convexo  $S$ , a um qualquer ponto  $P \in S$  que não possa ser expresso como combinação linear de outros pontos  $Q \in S$  ( $Q \neq P$ ).

No exemplo anterior, a solução ótima encontra-se num vértice do polígono convexo que representa o domínio das soluções admissíveis. Esta situação não ocorre por acaso, tendo sido provada, em 1826, pelo matemático francês Jean Baptiste Fourier.

**Teorema:** O domínio das soluções admissíveis de qualquer problema de PL é convexo, e o ponto ótimo, quando existe, situa-se num dos vértices do domínio das soluções admissíveis.

O teorema seguinte é designado por **Teorema Fundamental da Programação Linear** e garante a existência de uma solução ótima, desde que o valor ótimo da função objectivo seja finito.

**Teorema:** Seja  $S$  a região admissível de um problema de PL e  $z$  a função objectivo. Se  $S$  é limitada, então  $z$  tem máximo e mínimo em  $S$  e cada um destes

ocorre em pelo menos um dos vértices de  $S$ . Se  $S$  é não limitada, então o valor máximo ou mínimo de  $z$  pode não existir; se existir, ocorre num vértice de  $S$ .

A representação gráfica de problemas de PL com duas variáveis de decisão permite que a determinação da solução óptima do problema possa ser efectuada por dois processos alternativos:

**Processo 1.** Por determinação das coordenadas de cada vértice da região admissível e do valor da função objectivo correspondente a cada vértice.

**Processo 2.** Por análise da ligação gráfica entre a função objectivo e a região admissível.

O primeiro processo é, obviamente, o mais atractivo para os alunos, embora se possa tornar trabalhoso se envolver a resolução de vários sistemas de equações lineares.

Para determinar a solução óptima, aplicando o primeiro processo, é necessário efectuar o cálculo das coordenadas de cada vértice da região através da resolução do sistema de equações lineares constituído pelas rectas que se intersectam em cada ponto.

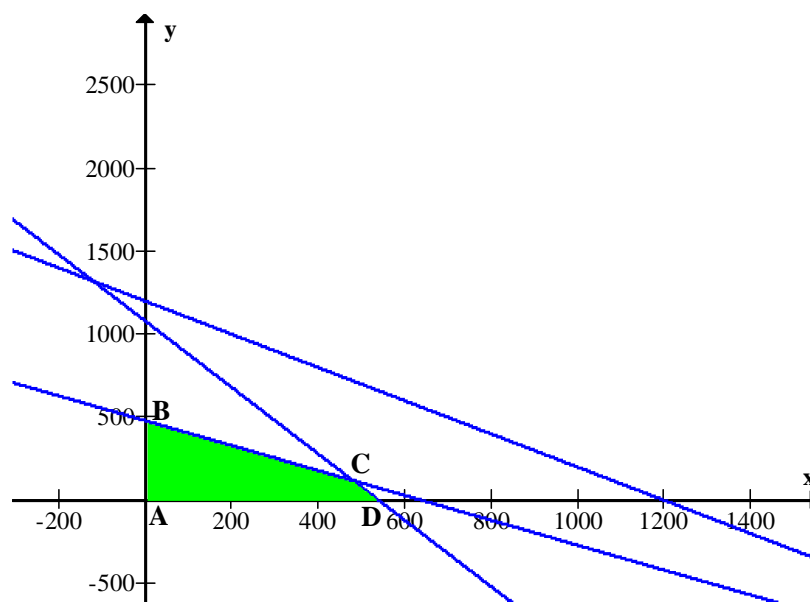


Figura 6: Identificação dos vértices da região admissível

Neste problema, é preciso determinar as coordenadas dos quatro pontos: A, B, C e D. O Ponto A coincide com a origem, logo as suas coordenadas são: A (0,0). O ponto B é a intersecção da recta  $3x/6 + 4y/6 = 320$  com o eixo das ordenadas (recta  $x=0$ ):

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x/6 + 4y/6 = 320 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 480 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto B são: (0,480). O ponto C corresponde à intersecção das rectas  $3x/6 + 4y/6 = 320$  e  $2x/6 + y/6 = 180$ :

$$\begin{cases} 3x/6 + 4y/6 = 320 \\ 2x/6 + y/6 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 480 \\ y = 120 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto C são: (480, 120). O ponto D é a intersecção da recta  $2x + y = 180$  com o eixo das abcissas (recta  $y=0$ ):

$$\begin{cases} 2x/6 + y/6 = 180 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 540 \\ y = 0 \end{cases}$$

As coordenadas do ponto D são: (540,0). Após a determinação das coordenadas dos vértices, constrói-se uma tabela com essa informação e o valor da função objectivo correspondente:

Vértice	x	Y	$z = 120x/6 + 100y/6$
A (0,0)	0	0	$120 \times 0/6 + 100 \times 0/6 = 0$
B (0,480)	0	480	$120 \times 0/6 + 100 \times 480/6 = 8\ 000$
C (480,120)	480	120	$120 \times 480/6 + 100 \times 120/6 = 11\ 600$
D (540,0)	540	0	$120 \times 90/6 + 100 \times 0/6 = 10\ 800$

Como se trata de um problema de maximização da receita, a solução óptima encontra-se no vértice em que o valor de z é máximo: o ponto C.

Interprete-se a solução óptima: para obter a receita máxima de 11 600 euros diários, é necessário produzir 480 kg de mistura de café do tipo M1 e 120 kg de mistura de café do tipo M2. A interpretação da solução óptima não deve restringir-se à leitura dos valores das variáveis de decisão e função objectivo. É importante ter conhecimento da utilização óptima dos recursos: os 320 kg de café proveniente do

país A e 180 kg provenientes do país B são completamente utilizados mas os 200 kg provenientes do país C, não são totalmente utilizados. Como se obtém esta informação? Substituindo os valores da solução óptima,  $x = 480$  e  $y = 120$ , em cada restrição:

- na primeira, relativa ao café proveniente do país A, verifica-se que os 320 kg de café são totalmente utilizados:  $3 \times 480/6 + 4 \times 120/6 = 320 (\leq 320)$ ;

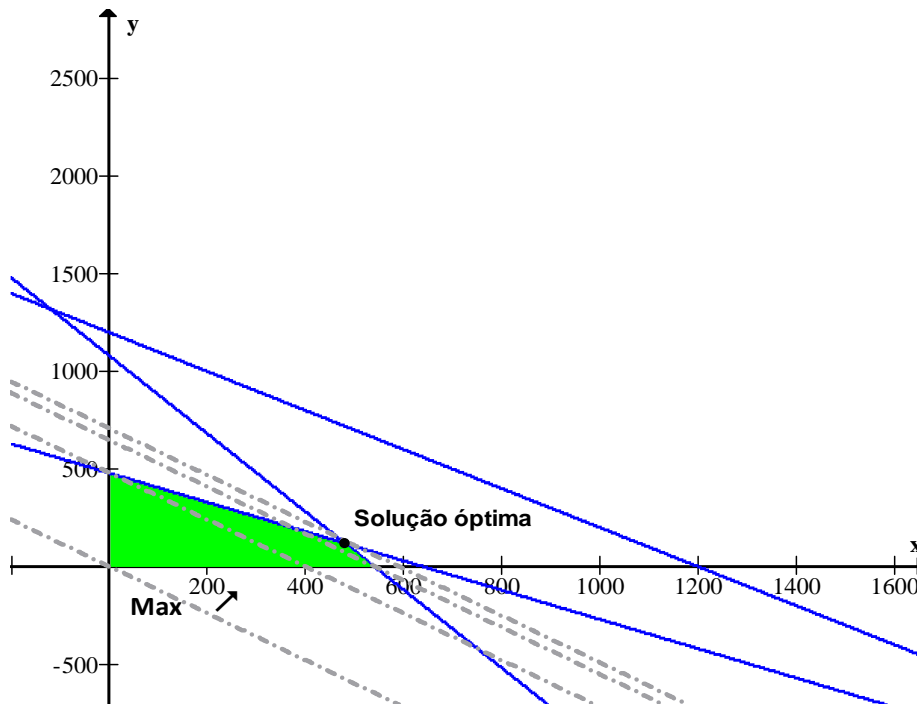
- na segunda, café proveniente do país B, verifica-se também a utilização total dos 180 kg de café:  $2 \times 480/6 + 1 \times 120/6 = 180 (\leq 180)$ ;

- na terceira, café do país C, constata-se que só são utilizados 100kg dos 200 kg de café disponíveis, sobrando 100 Kg:  $1 \times 480/6 + 1 \times 120/6 = 100 (\leq 200)$ .

Para determinar a solução óptima, aplicando o segundo processo, é necessário analisar o comportamento da função objectivo na região admissível: interessa encontrar o maior valor de  $z$  tal que a recta correspondente contenha pelo menos um ponto da região admissível. A função objectivo,  $z = 120x/6 + 100y/6$ , define uma família de rectas paralelas. A sua maximização passará pela deslocação das rectas paralelas representadas pela função objectivo, de forma a aumentar o máximo possível o valor de  $z$ . Como o valor de  $z$  não é conhecido, para traçar uma destas rectas, basta atribuir a  $z$  um valor aleatório, por exemplo 0:  $120x/6 + 100y/6 = 0$ ; esta recta é uma recta de nível, sendo suficiente deslocá-la paralelamente a si própria, para encontrar a solução procurada. Note-se que o sentido da deslocação é ditado pela própria função objectivo: aumentando  $x$  e  $y$  aumenta  $z$ , uma vez que ambas as variáveis têm coeficientes positivos.

Portanto, na prática, é suficiente o uso de uma régua para encontrar a solução óptima: a partir da recta  $z=0$ , traçando rectas paralelas na região admissível, de acordo com o sentido do crescimento da função objectivo. Este processo permite identificar, de forma simples, o ponto óptimo, caso exista. Se o objectivo do problema fosse minimizar, as rectas paralelas seriam traçadas de acordo com o decréscimo da função objectivo. A maximização de  $z$  será atingida no último

ponto de contacto da região admissível que corresponder à máxima deslocação da função objectivo.



**Figura 7: Representação gráfica da família de rectas da função objectivo ( $z = 120x/6 + 100y/6$ ) e determinação da solução ótima.**

Para este problema, foi encontrada apenas uma solução que corresponde a um ponto extremo do conjunto das soluções admissíveis, resultante da intersecção das rectas originadas pelas duas restrições funcionais:  $3x/6 + 4y/6 \leq 320$  e  $2x/6 + y/6 \leq 180$ . Para determinar as coordenadas do ponto ótimo de forma analítica, resolve-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x/6 + 4y/6 = 320 \\ 2x/6 + y/6 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 480 \\ y = 120 \end{cases}$$

A solução do problema encontra-se no ponto de coordenadas  $(x,y) = (480,120)$ . Isto é, para obter a receita máxima diária:

$$z = 120 \times 480/6 + 100 \times 120/6 = 11600 \text{ euros}$$

é necessário produzir 480 kg de mistura de café do tipo M1 e 120 kg de mistura de café do tipo M2. □

Quando o problema a resolver inclui as restrições adicionais de integralidade das variáveis de decisão, isto é, um problema de Programação Linear Inteira, então, atendendo a que a correspondente região de admissibilidade está contida na região de admissibilidade do problema que se obtém ignorando as restrições de integralidade, pode ser resolvido do seguinte modo:

1º *Resolução do problema que se obtém ignorando as restrições de integralidade – designe-se por problema relaxado, utilizando a metodologia atrás descrita.*

2º *Se a solução óptima do problema relaxado for inteira, então é também a solução óptima do problema de PLI.*

*Caso contrário, identificar apenas a parte do conjunto das soluções admissíveis inteiras, na vizinhança da solução não inteira, e determinar a “melhor” solução inteira (pode não ser única), deslocando as rectas da função objectivo no sentido “ótimo”.*

Seguidamente, ilustra-se a resolução gráfica de um problema de PLI, em que a solução do problema relaxado é uma solução inteira, logo coincide com a solução óptima do problema de PLI. Recorde-se, para tal, a formulação do problema do *Problema 3.2*:

$$\begin{array}{l} \text{Max. } z = 6x \quad + \quad 3y \\ \text{s.a:} \quad 3x \quad + \quad y \quad \leq \quad 90 \\ \quad \quad x \quad + \quad 2y \quad \leq \quad 80 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x, y \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

Primeiro, resolve-se o problema relaxado:

$$\begin{array}{l} \text{Max. } z = 6x \quad + \quad 3y \\ \text{s.a:} \quad 3x \quad + \quad y \quad \leq \quad 90 \\ \quad \quad x \quad + \quad 2y \quad \leq \quad 80 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

**1º Passo:** Representação das restrições funcionais e das restrições de não negatividade.

Analise-se a primeira restrição funcional, a inequação linear  $3x + y \leq 90$ . O conjunto de pares ordenados  $(x,y)$  que satisfazem esta inequação é um semiplano cuja fronteira é a recta de equação  $3x + y = 90$ :

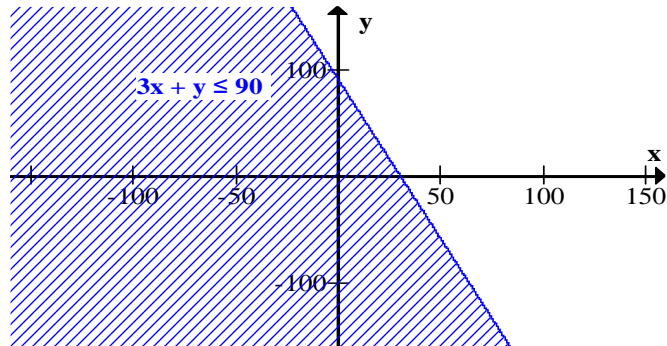


Figura 8: Representação gráfica da restrição  $3x + y \leq 90$

Repetindo o procedimento para a segunda restrição funcional  $x + 2y \leq 80$ :

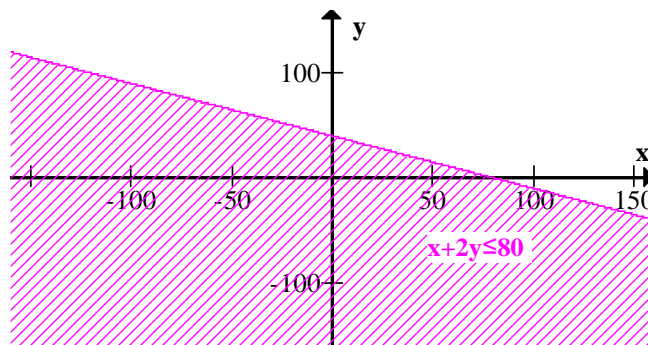


Figura 9: Representação gráfica da restrição  $x + 2y \leq 80$

As duas restrições de não negatividade  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  impõem que o conjunto de soluções possíveis do problema, se situe no primeiro quadrante:

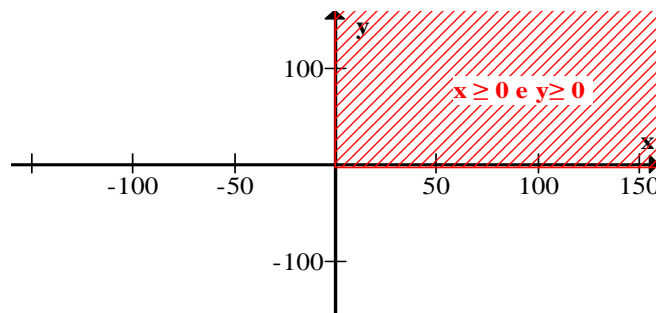
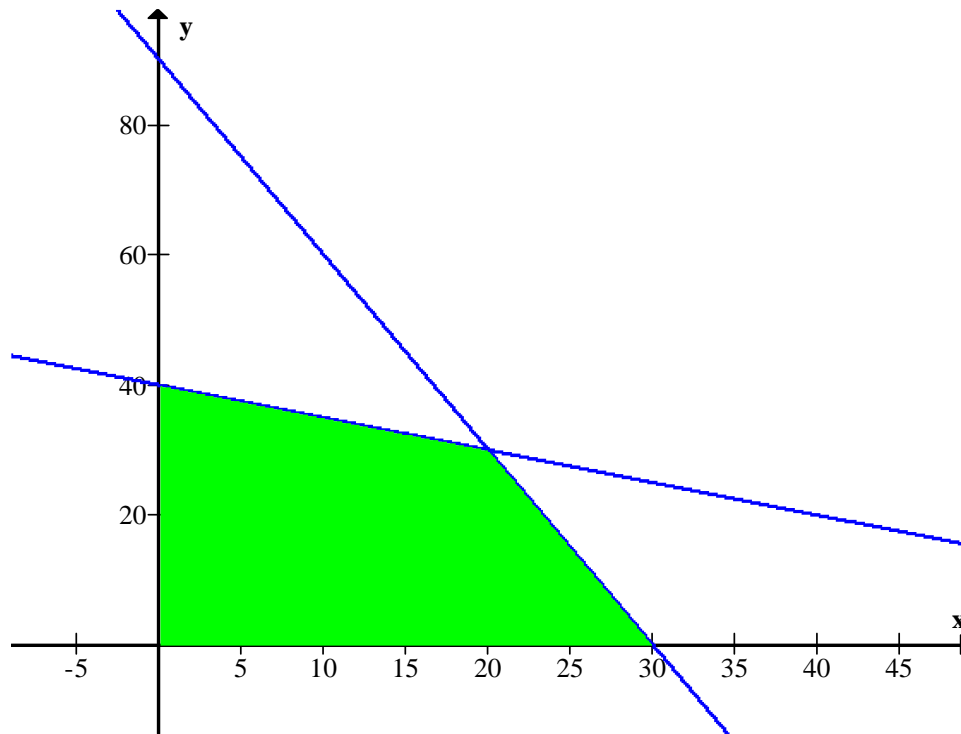


Figura 10: Representação gráfica da intersecção das restrições de não negatividade  $(x \geq 0 \wedge y \geq 0)$

**2º Passo:** Identificação da região admissível

Na figura seguinte, está representado o conjunto de soluções admissíveis do problema relaxado.

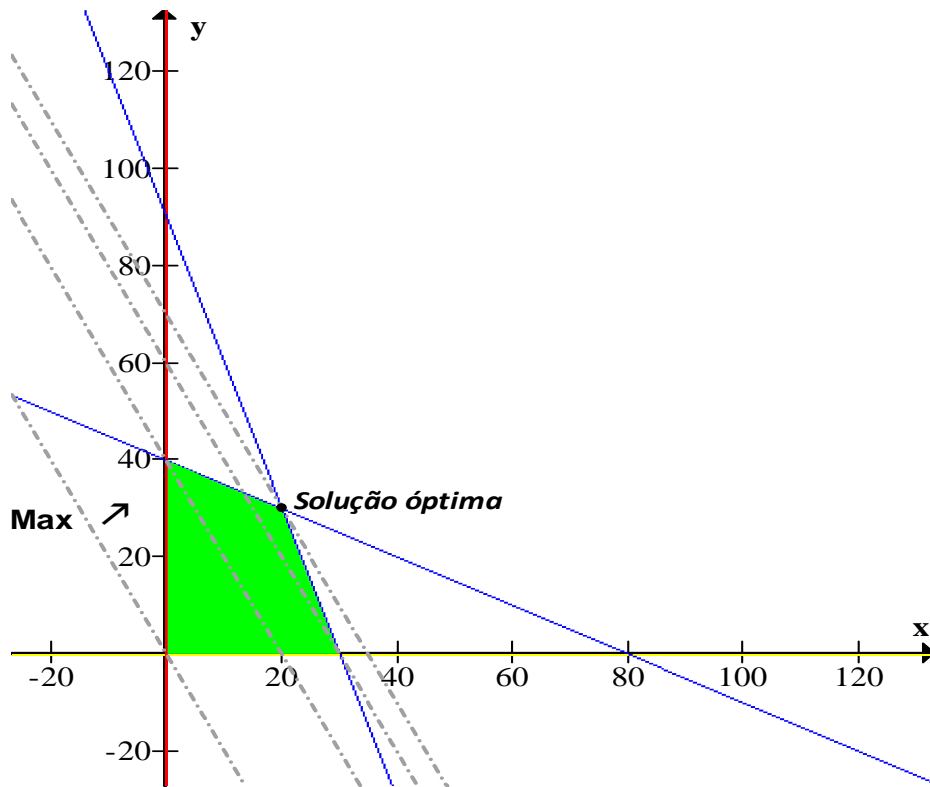


**Figura 11: Representação gráfica da região admissível**

$$(3x + y \leq 90 \wedge x + 2y \leq 80 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0)$$

**3º Passo:** Obtenção da solução óptima.

A função objectivo,  $z = 6x + 3y$ , define uma família de rectas, todas com declive igual a -2, paralelas. Para determinar a solução óptima, que maximiza  $z$ , analise-se o comportamento da função objectivo na região admissível: a maximização da função objectivo passará pela deslocação das rectas paralelas de forma a aumentar o máximo possível o valor de  $z$ . Traçando rectas paralelas na região admissível, de acordo com o sentido do crescimento da função objectivo, determina-se o ponto óptimo, como ilustrado na figura seguinte.



**Figura 12: Representação gráfica da família de rectas da função objectivo ( $z = 6x + 3y$ ) e determinação do ponto óptimo.**

Para este problema, foi encontrada apenas uma solução que corresponde a um ponto extremo do conjunto das soluções admissíveis, resultante da intersecção das rectas originadas pelas duas restrições funcionais:  $3x + y \leq 90$  e  $x + 2y \leq 80$ . Para determinar as coordenadas do ponto óptimo de forma analítica, resolve-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + y = 90 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$$

A solução do problema encontra-se no ponto de coordenadas inteiras  $(x,y)=(20,30)$ , a solução também verifica a restrição de integralidade imposta, logo é também a solução óptima do problema de PLI, terminando a resolução do problema. Interprete-se a solução obtida: para obter o lucro máximo diário

$$z = 6x + 3y = 6 \times 20 + 3 \times 30 = 210 \text{ centenas de euros}$$

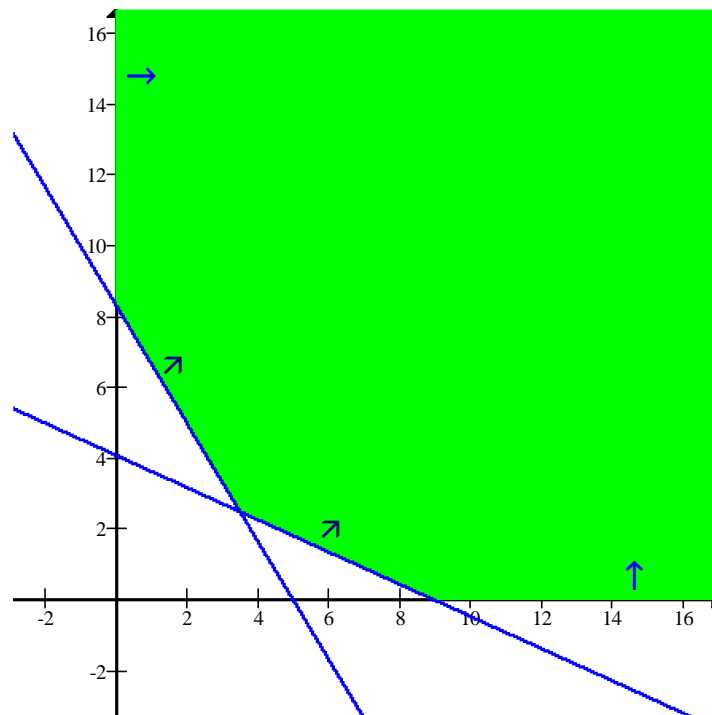
É necessário produzir 20 banheiras redondas e 30 banheiras rectangulares. Em relação aos recursos disponíveis, 90 horas para fabrico e 80 horas para acabamento,

estes são completamente utilizados, como facilmente se verifica, analítica e graficamente. □

No problema anterior, a solução óptima do problema sem considerar as restrições de integralidade, coincidiu com a solução inteira. Mas, nem sempre o problema possui características que permitem que tal aconteça, como sucede no problema seguinte. Considere-se a formulação do *Problema 3.4*:

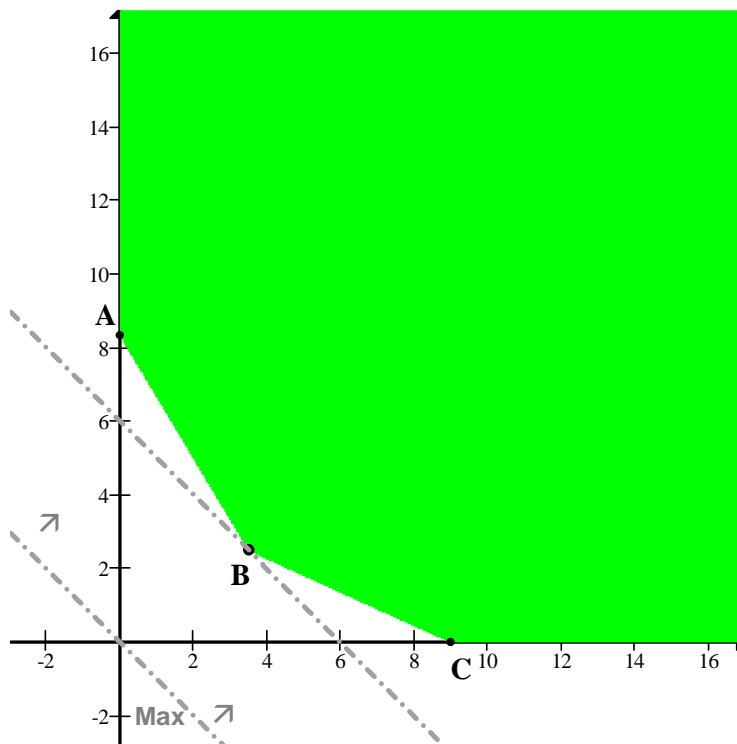
$$\begin{array}{l} \text{Min. } z = 10x + 10y \\ \text{s.a:} \quad 5x + 3y \geq 25 \\ \quad \quad 5x + 11y \geq 45 \\ \quad \quad x, y \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

Na figura seguinte, encontra-se representada a região de admissibilidade do problema relaxado. Note-se que a região de admissibilidade é um conjunto não limitado:



**Figura 13: Representação gráfica de uma região de admissibilidade ilimitada**

Para determinar a solução óptima, analise-se o comportamento da função objectivo  $z = 10x + 10y$  na região admissível: interessa encontrar o menor valor de  $z$  tal que a recta correspondente contenha pelo menos um ponto da região admissível. A minimização de  $z$  exige a consideração de valores para  $x$  e  $y$  tão pequenos quanto possível. A deslocação das rectas em direcção à região admissível pára no primeiro ponto de contacto com a região admissível, isto é, no ponto de coordenadas  $(x,y)$  de menor valor que será a solução óptima.



**Figura 14: Representação gráfica da família de rectas da função objectivo e identificação do ponto óptimo.**

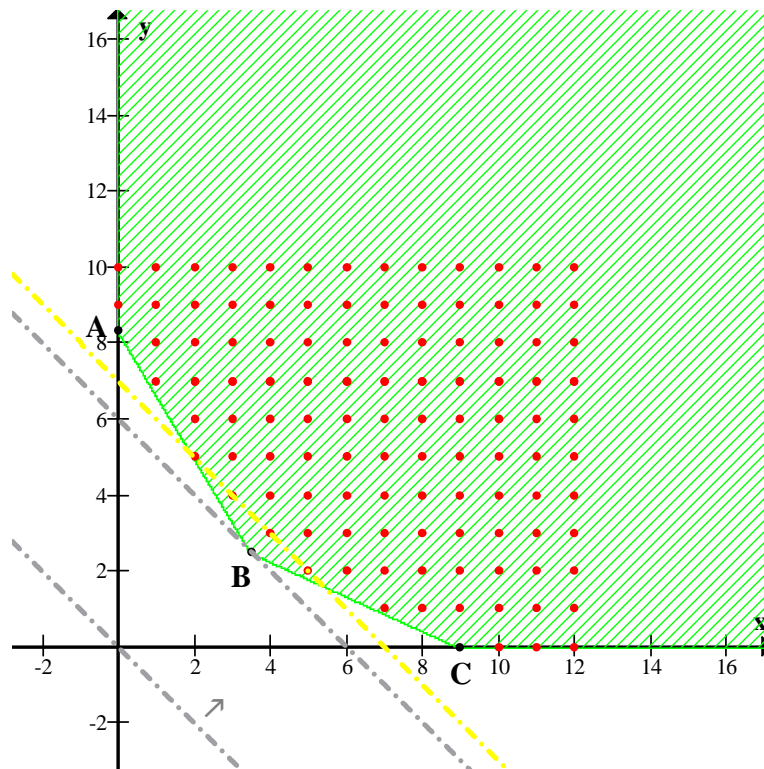
Uma vez identificada a solução óptima, o ponto B, é necessário calcular as suas coordenadas analiticamente. Considerando que corresponde ao vértice obtido pela intersecção das rectas originadas pelas duas restrições funcionais  $5x + 3y \geq 25$  e  $5x + 11y \geq 45$ , resolve-se o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 25 \\ 5x + 11y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{10}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

A solução não faz sentido para o problema original, dado que os valores óptimos não são inteiros: aquisição de 3,5 sacos de produto tipo A e 2,5 sacos de produto tipo B. O vértice B não é um resultado adequado, sendo preciso procurar, na região admissível, uma solução inteira.

Neste problema, a região de admissibilidade é ilimitada, tornando-se fundamental a análise cuidada do problema, no sentido de detectar alguma possibilidade de examinar apenas uma parte do conjunto das soluções admissíveis. Para este problema, sugere-se a seguinte abordagem:

1. Identificação das soluções admissíveis inteiras na vizinhança da solução óptima não inteira (ponto B)
2. Deslocação das rectas da função objectivo, na região de admissibilidade, até à primeira solução inteira identificada.



**Figura 15: Processo de determinação da solução óptima inteira numa região de admissibilidade ilimitada**

Com se pode verificar, existem quatro soluções inteiras localizadas sobre a recta de nível  $10x + 10y = 70$ :

(2, 5), (3, 4), (4, 3) e (5, 2)

o que significa que o problema possui múltiplas soluções ótimas, isto é, soluções que conduzem ao mesmo valor ótimo do custo. Interpretando o resultado, o criador de cães tem quatro alternativas para gastar o menos possível, 70 euros:

A1 - comprar 2 sacos do tipo A e 5 sacos do tipo B, a que correspondem 25 unidades de substância  $\alpha$  e 65 de  $\beta$  (mais 20 unidades além das 45 unidades que devem integrar, no mínimo, a composição da mistura);

A2 - comprar 3 sacos do tipo A e 4 sacos do tipo B, a que correspondem 27 unidades de substância  $\alpha$  (excedendo em 2 unidades o mínimo) e 59 de  $\beta$  (mais 14 unidades além das 45 mínimas);

A3 - comprar 4 sacos do tipo A e 3 sacos do tipo B, a que correspondem 29 unidades de substância  $\alpha$  (excedendo em 4 unidades a quantidade mínima) e 53 de  $\beta$  (mais 8 unidades além do mínimo);

A4 - comprar 5 sacos do tipo A e 2 sacos do tipo B, a que correspondem 34 unidades de substância  $\alpha$  (excedendo em 9 unidades a quantidade mínima) e 47 de  $\beta$  (mais 2 unidades além do mínimo).

□

Como referido, o Ministério da Educação propõe que, neste nível de ensino, sejam resolvidos geometricamente “... *problemas de máximos ou de mínimos de uma expressão linear com duas variáveis...*” [ME98]. Porém, há problemas com mais variáveis que podem ser convertidos a problemas de duas variáveis de decisão e serem resolvidos graficamente pelos métodos anteriormente descritos, como exemplificado no problema seguinte. Neste problema, são identificadas três variáveis de decisão, mas como existe uma restrição do tipo igualdade envolvida, o número de variáveis pode ser reduzido a duas, eliminando (por substituição) uma das variáveis.

*Problema 3.6 [XMAT04]: Para arranjar dinheiro para a viagem de finalistas, uma turma do 12º ano vai organizar uma festa. A festa começa às 21 horas e termina às 2 horas da manhã. Vão contratar um grupo de teatro e duas bandas: Bandaqui e Bandolé. A peça de teatro tem de durar pelo menos 45 m e não mais que uma hora e meia. A Bandaqui tem de tocar pelo menos 1 hora, mas o seu repertório não dá para mais de 2 horas. A Bandolé exige tocar pelo menos 2 horas. Investiga como deve ser organizado o espectáculo, de modo que a despesa seja mínima, sabendo que o grupo de teatro cobra 60 € por hora, a Bandaqui custa 40 €/hora e a Bandolé é a mais dispendiosa: o seu preço por hora é 90 €.*

As variáveis de decisão:

$x$  – “número de horas que o grupo de teatro vai actuar”,

$y$  – “número de horas que a banda Bandaqui vai actuar”,

$w$  – “número de horas que a banda Bandolé vai actuar”.

O objectivo é determinar o número de horas que serão atribuídas ao grupo de teatro e a cada banda de modo que a despesa total seja mínima:

$z$  – “despesa total da festa, em euros”

$$z = 60x + 40y + 90w$$

As restrições funcionais relativas à:

- duração da actuação do grupo de teatro,  $0,75 \leq x \leq 1,5$

- duração da actuação da banda Bandaqui,  $1 \leq y \leq 2$

- duração da actuação da banda Bandolé,  $w \geq 2$

- duração da festa,  $x + y + w = 5$

As restrições de não negatividade:  $x \geq 0, y \geq 0$  e  $w \geq 0$

Resulta a seguinte formulação do problema:

$$\begin{array}{l} \text{Min. } z = 60x + 40y + 90w \\ \text{s.a:} \quad 0,75 \leq x \leq 1,5 \\ \quad \quad 1 \leq y \leq 2 \\ \quad \quad w \geq 2 \\ \quad \quad x + y + w = 5 \\ \quad \quad x, y, w \geq 0 \end{array}$$

A última restrição permite definir, por exemplo,  $w$  em função das variáveis  $x$  e  $y$ , e reformular o problema só com duas variáveis de decisão:  $w = 5 - x - y$

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = -30x - 50y + 450 \\ \text{s.a:} \quad 0,75 \leq x \leq 1,5 \\ \quad \quad 1 \leq y \leq 2 \\ \quad \quad x + y \leq 3 \\ \quad \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

Resolvendo graficamente, determina-se a região admissível representada na figura seguinte.

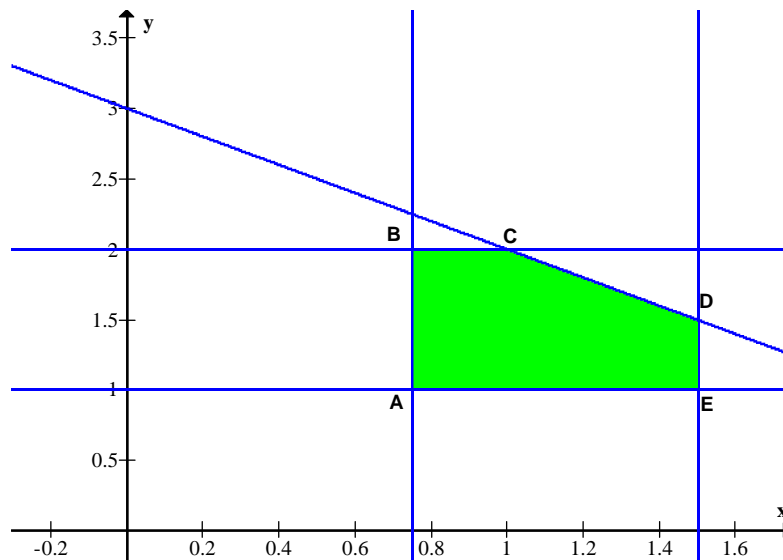


Figura 16: Representação gráfica da região admissível

( $0,75 \leq x \leq 1,5 \wedge 1 \leq y \leq 2 \wedge x + y \leq 3 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$ ) e identificação dos seus vértices.

Da tabela com a informação das coordenadas de cada vértice e o valor da função objectivo correspondente:

Vértice	x	y	$z = -30x - 50y + 450$
A	0,75	1	$-30 \times 0,75 - 50 \times 1 + 450 = 377,5$
B	0,75	2	$-30 \times 0,75 - 50 \times 2 + 450 = 327,5$
C	1	2	$-30 \times 1 - 50 \times 2 + 450 = 320$
D	1,5	1,5	$-30 \times 1,5 - 50 \times 1,5 + 450 = 330$
E	1,5	1	$-30 \times 1,5 - 50 \times 1 + 450 = 355$

conclui-se que a solução óptima que minimiza o custo total,  $z = 320$ , é  $x=1$  e  $y = 2$ . Para terminar, determina-se o valor óptimo de  $w$ :

$$w = 5 - 1 - 2 = 2.$$

Interprete-se a solução óptima: para ter a despesa mínima de 320 euros, o grupo de teatro actua 1 h, as bandas Bandaqui e Bandolé actuam 2h. Portanto:

- a peça de teatro terá a duração de 1h, sobrando meia hora da duração possível, já que  $1 \leq 1,5$  (horas),
- a banda Bandaqui, terá de usar o seu repertório completo,  $2 \leq 2$  (horas).
- a banda Bandolé não poderá tocar mais de duas horas! □

A resolução gráfica dos problemas de PL, até agora efectuada, identificou a ocorrência de duas situações: há problemas que podem ter uma só solução ou múltiplas soluções. Mas, nem sempre um problema de PL tem solução óptima, o que pode ser provocado por uma de duas diferentes causas:

- (i) não existe solução admissível;
- (ii) existindo solução admissível, a solução óptima é ilimitada, porque a função objectivo cresce, no caso da maximização, ou decresce, no caso da minimização, indefinidamente.

Todas estas situações possíveis, algumas já exemplificadas e outras que a seguir se exemplificam, são perfeitamente identificáveis na resolução gráfica. Resumindo, os casos possíveis são:

**Caso 1.** O conjunto das soluções admissíveis é limitado e a solução óptima é única

**Caso 2.** O conjunto das soluções admissíveis é limitado e existem soluções óptimas alternativas

**Caso 3.** O conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e existe uma solução óptima única

**Caso 4.** O conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e existem soluções óptimas alternativas

**Caso 5.** O conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e o valor óptimo da função objectivo é infinito (a solução óptima é ilimitada)

**Caso 6.** O conjunto das soluções admissíveis é vazio e o problema é impossível.

A resolução gráfica do Problema 3.2, ilustra o Caso 1. No Problema 3.4, anteriormente resolvido pelo método gráfico, apresentou-se um problema de PLI caracterizado por um conjunto de soluções admissíveis ilimitado e existência de um conjunto finito de soluções óptimas alternativas - Caso 4; e, simultaneamente, a resolução do problema relaxado do Problema 3.4 exemplificou o Caso 3. A situação que agora se analisa diz respeito ao Caso 2: o conjunto das soluções admissíveis é limitado e existem soluções óptimas alternativas.

A detecção de um problema de PL com múltiplas soluções óptimas - soluções que determinam o mesmo valor óptimo da função objectivo, pode ser antecipada pela observação atenta do modelo: quando existe uma restrição com coeficientes iguais ou proporcionais aos coeficientes correspondentes da função objectivo, isto é, uma restrição que pertence à família de rectas da função objectivo, provavelmente está-se perante uma solução óptima múltipla. Isto é uma condição necessária, mas não suficiente pois, a restrição “paralela” terá também de ser a que contém os pontos de fronteira da região admissível que se encontra na direcção do movimento da função objectivo que se está a otimizar. Esta condição adicional nem sempre se pode verificar pela simples análise da formulação, principalmente quando estamos perante casos em que existem restrições redundantes (difíceis de

identificar à partida). Para estudar este caso, considere-se o seguinte problema de PL Não Inteira:

$$\begin{array}{l} \text{Max. } z = 3x + 2y \\ \text{s.a:} \quad x \leq 4 \\ \quad \quad 2y \leq 12 \\ \quad \quad 3x + 2y \leq 18 \\ \quad \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

Observando os coeficientes da terceira restrição - são iguais aos coeficientes da função objectivo, pode-se suspeitar estar perante a existência de múltiplas soluções óptimas. Resolvendo graficamente o problema, verifica-se que a função objectivo alcança o seu máximo em qualquer ponto do segmento de recta [CD]. Então, a solução óptima não é única, constatando-se a existência de um conjunto infinito de soluções: todos os pontos do segmento de recta [CD] são solução óptima do problema, conduzindo ao valor máximo da função objectivo,  $z = 18$ .

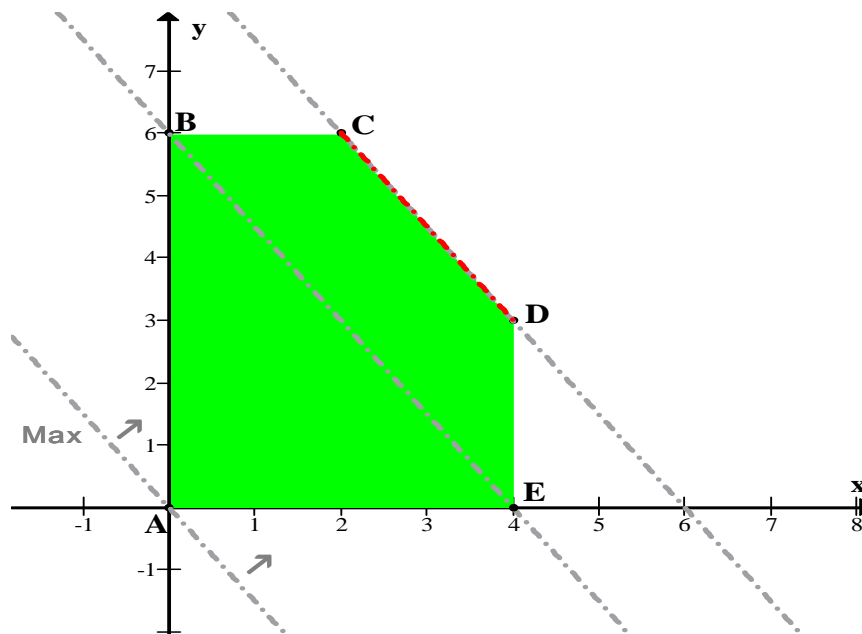


Figura 17: Representação gráfica de um problema de PL com múltiplas soluções óptimas

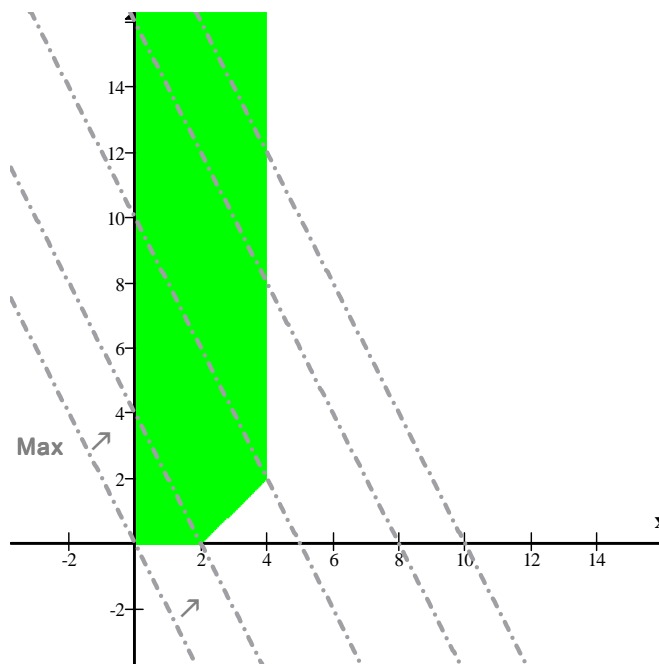
**Teorema:** Uma função linear sobre um poliedro convexo limitado,  $S$ , atinge o **ótimo** num ponto extremo de  $S$ . No caso de atingir o óptimo em mais de um ponto extremo, **qualquer combinação linear convexa** destes pontos corresponde ainda a uma solução óptima. A expressão geral das soluções óptimas é dada por:

$$(x, y) = \lambda C + (1 - \lambda)D, \lambda \in [0, 1] \Leftrightarrow (x, y) = \lambda(2, 6) + (1 - \lambda)(4, 3), \lambda \in [0, 1]$$

A solução de um problema de PL diz-se ilimitada quando o valor óptimo tende para infinito, isto é, existem variáveis que podem aumentar indefinidamente o seu valor, provocando um aumento indefinido no valor da função objectivo. Para a existência de uma solução ilimitada é, condição necessária, mas não suficiente, que a região admissível seja um conjunto ilimitado. Para exemplificar esta situação - **Caso 5**, considere-se o seguinte modelo de PL:

$Max. z = 2x + y$
$s.a: \quad x - y \leq 2$
$\quad \quad x \leq 4$
$\quad \quad x, y \geq 0$

A região de admissibilidade é:



**Figura 18: Representação gráfica de um problema de PL em que a região admissível é um conjunto ilimitado e possui um óptimo finito**

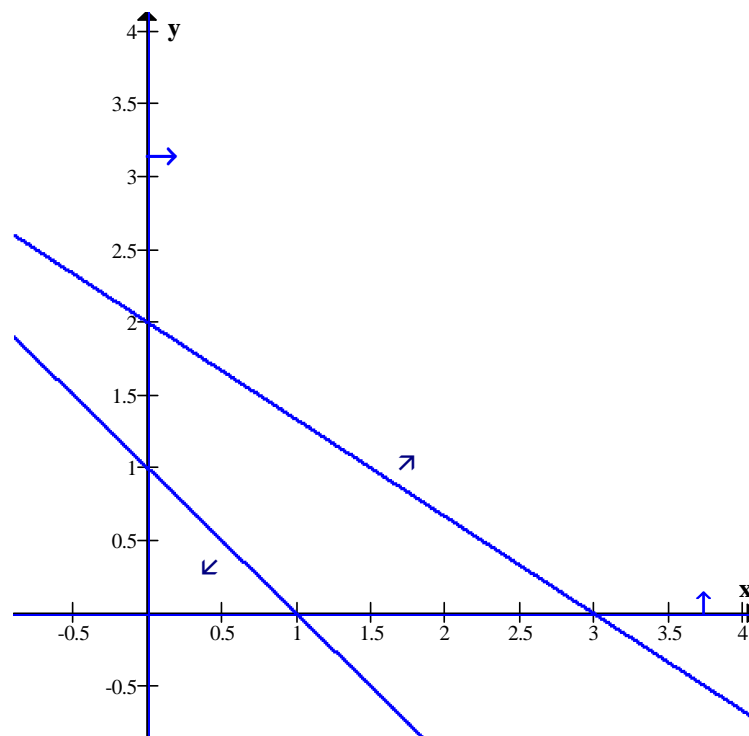
A região de admissibilidade é não limitada e o valor da função objectivo cresce indefinidamente nesta região. Logo, o problema não possui óptimo finito.

A inexistência de soluções admissíveis pode ser originada por erros que se cometem na formulação do problema e resulta na não existência de quaisquer

valores das variáveis que verifiquem todas as restrições (restrições funcionais e restrições de não negatividade). Neste caso,  $S$  é vazio e o problema não tem solução - diz-se que o problema tem solução impossível (**Caso 6**). Considere-se o seguinte modelo de PL:

$$\begin{array}{l} \text{Max. } z = x + y \\ \text{s.a: } \quad x + y \leq 1 \\ \quad \quad 2x + 3y \geq 6 \\ \quad \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

A região de admissibilidade encontra-se representada na figura seguinte e mostra, perfeitamente, como é impossível obter qualquer solução admissível, uma vez que a intersecção das quatro restrições é um conjunto vazio. Logo, o conjunto de soluções admissíveis é também um conjunto vazio!



**Figura 19: Representação gráfica de um problema de PL com solução impossível – conjunto vazio.**

Para terminar, apresenta-se um exemplo interessante, pouco usual, em que a região admissível é limitada e definida, apenas, por um ponto. Considere-se:

$Max. z =$	$x$	$+$	$2y$	
$s.a:$	$2x$	$+$	$y$	$\leq 6$
	$x$	$+$	$y$	$= 4$
	$x$	$+$	$3y$	$\geq 8$
	$x, y$	$\geq 0$		

A região de admissibilidade encontra-se representada na figura seguinte - corresponde um conjunto singular  $S = \{A\}$ , sendo A a única solução admissível do problema e solução óptima:  $z = 6, x = 2, y = 2$ .

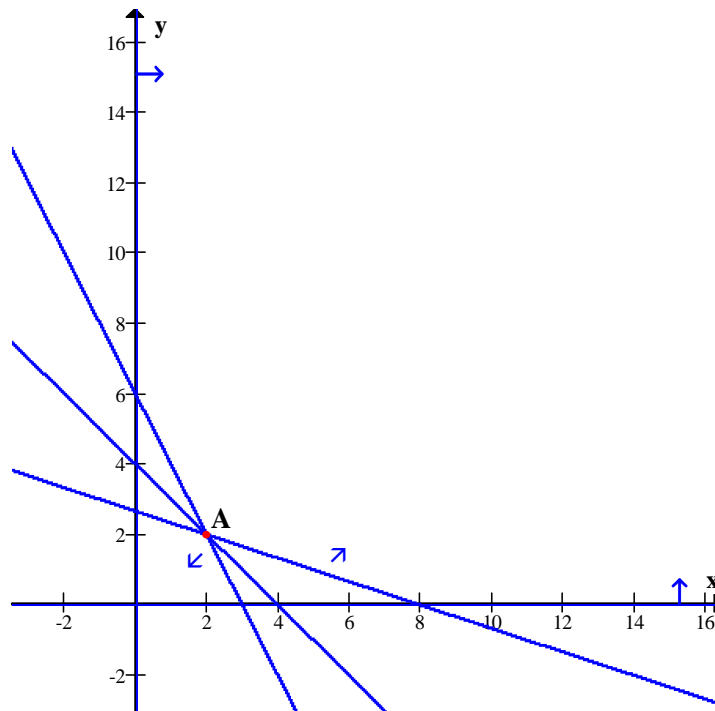


Figura 20: Representação gráfica de um problema de PL com região admissível limitada e definida, apenas, por um ponto

### 3.3.3 Utilização das TIC

Actualmente, a pedagogia no ensino da Matemática apoia-se, em muito, na utilização das novas tecnologias. Se por um lado, a máquina de calcular é uma ferramenta necessária e indispensável ao ensino da Matemática, fazendo parte do dia-a-dia, por outro, actualmente, é impensável não se saber manusear um computador. O computador tornou-se ferramenta indispensável em todo o

processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática, tendo provocado uma melhoria de atitude perante a disciplina na maior parte dos alunos.

A calculadora e o computador permitem o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, proporcionando o desenvolvimento de novas estratégias, tornam possíveis abordagens numéricas e de natureza gráfica sem necessidade de recurso ao Cálculo ou Álgebra e ajudam a estruturar problemas que envolvem um maior número de variáveis, de funções, logo de cálculos, como é o caso da generalidade dos problemas de optimização. Assim, com o seu auxílio, o aluno poderá dedicar mais tempo à modelação matemática, testar a razoabilidade do modelo, analisar e simular diversos cenários alternativos e estudar a sensibilidade das soluções a variações dos parâmetros.

Antes da utilização da calculadora gráfica ou do computador para a resolução de um problema de PL, a situação tem de ser entendida e o seu modelo matemático construído. É fundamental que o aluno seja capaz de interpretar o problema e utilizar um processo de resolução sem recurso a qualquer ferramenta de cálculo. A resolução com a calculadora gráfica deve ser sempre testada com conhecimentos teóricos. É importante que o aluno não se limite a copiar resultados, que saiba descrever correctamente os raciocínios utilizados e interpretar os resultados.

Seguidamente, apresenta-se a resolução de alguns problemas de PL, recorrendo à utilização da calculadora gráfica e do computador. Destacam-se as especificidades de cada ferramenta e o uso que pode ser feito dos resultados que se obtêm.

### **3.3.3.1 A Utilização da Calculadora Gráfica**

Neste trabalho, para ilustrar as vantagens e limitações da utilização da calculadora gráfica na resolução de problemas de PL, utiliza-se o modelo TI-84 Plus Silver Edition da calculadora Texas e o modelo fx-9860G SD da calculadora Casio. As

marcas Texas e Casio estão bastante implantadas na Escola sendo, por sugestão do professor e/ou por opção do próprio aluno ou família, as mais adquiridas. A escolha dos modelos deve-se ao facto de serem recentes e integrarem o conjunto de calculadoras permitidas pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) em situações de avaliação.

A resolução dos problemas de PL é feita de forma distinta nas duas calculadoras: no modelo utilizado da calculadora Texas, a partir da aplicação “Inequality Graphing” e no modelo da Casio, do menu “Graph”.

Como exemplo de aplicação, para ilustrar o uso das duas calculadoras, considere-se o problema de produção formalizado no seguinte modelo de PL:

$$\begin{array}{l}
 \text{Max. } z = 3x + 2y \\
 \text{s.a:} \quad x + y \leq 10 \\
 \quad \quad 3x + y \leq 15 \\
 \quad \quad x, y \geq 0
 \end{array}$$

em que  $x$  e  $y$  são as decisões de produção dos produtos e as restrições reflectem a utilização dos recursos matéria-prima e tempo no plano de produção. O objectivo é maximizar o lucro resultante da produção e comercialização dos produtos.

#### Calculadora Texas

Na calculadora Texas, a aplicação “Inequality Graphing” permite representar graficamente equações e inequações e avaliar as suas relações, nomeadamente:

- introduzir inequações com símbolos de relação,
- representar graficamente inequações e sombrear regiões de união ou de intersecção,
- introduzir inequações (apenas linhas verticais) num X=editor,
- traçar pontos de interesse (como intersecções) entre relações,

- armazenar pares de coordenadas em tabelas.

Esta aplicação funciona apenas no modo de função. Se a calculadora não estiver neste modo, a aplicação altera o modo automaticamente. Para ser executada de forma eficiente, a calculadora deve ter pelo menos 600 bytes de RAM livre.

Para aceder ao menu que lista todas as aplicações instaladas, premir a tecla **APPS** (abreviatura de “Applications”) e seleccionar a opção “Inequal” (“Inequality Graphing”) ou “Inequalz” na versão internacional. Aparece o ecrã “Inequality Graphing” – o que significa que a aplicação está activada.



Figura 21: Aplicação “Inequal” da calculadora Texas.

**1º Passo:** Introduzir as inequações correspondentes às restrições funcionais e de não negatividade

As restrições não são inseridas na sua forma normal. Por exemplo, a primeira restrição, “ $x + y \leq 10$ ”, é inserida na forma equivalente “ $y_1 \leq 10 - x$ ”, em que o índice de  $y$  indica a ordem da restrição. A forma equivalente da segunda restrição funcional, “ $3x + y \leq 15$ ”, é “ $y_2 \leq 15 - 3x$ ”. As duas restrições de não negatividade das variáveis de decisão são tratadas de forma distinta: “ $x \geq 0$ ” é inserida como “ $x_1 \geq 0$ ” e “ $y \geq 0$ ” é inserida como “ $y_3 \geq 0$ ”. Premindo a tecla **Y=** inserem-se as expressões de  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  no editor. A colocação do cursor no sinal “=” para qualquer variável “ $Y$ ” apresenta todos os símbolos de relação na parte inferior do ecrã. Para inserir um símbolo de relação, premir **ALPHA** e [F1] – [F5]; por exemplo, para inserir “ $\leq$ ” premir [F3].

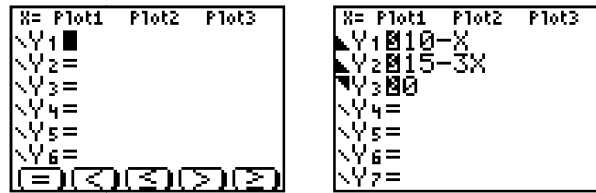


Figura 22: Introdução de restrições na calculadora Texas.

Para introduzir a restrição " $x_1 \geq 0$ ", é necessário, alterar a variável para x (na primeira linha da janela de visualização): mover o cursor para a opção X= (no canto superior esquerdo), premir **ENTER** para aceder ao editor "X=", premir **ALPHA** [F5] para seleccionar  $\geq$  e premir **0** para armazenar a expressão de  $x_1$ .

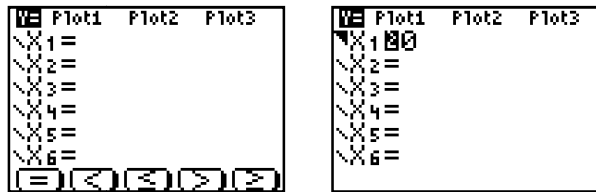


Figura 23: Introdução da restrição " $x \geq 0$ " na calculadora Texas.

## 2º Passo: Configurar a janela de visualização do gráfico

Uma das principais limitações da calculadora gráfica é que o que é visualizado no ecrã é condicionado pelas definições da janela de visualização. A definição do rectângulo de visualização é um aspecto fundamental na obtenção da representação gráfica. Se a janela não for adequada, pode não ser possível detectar pontos de intersecção com os eixos coordenados, extremos da região admissível, etc. A janela de visualização é a parte do plano de coordenadas definidas por **Xmin**, **Xmax**, **Ymin** e **Ymax**. A distância entre as marcas é definida por Xscl (escala de X) no eixo dos xx e Yscl (escala de Y) no eixo dos yy. A opção Xres define a resolução e pixéis (de 1 a 8) apenas para gráficos de funções. A predefinição é 1. Esta calculadora possui 95 pixéis "horizontais" por 63 pixéis "verticais", num total de 5985 pixéis. Para Xres=1, a função é calculada em cada pixel no eixo dos xx. Para Xres =8, as funções são calculadas e traçadas de oito em oito pixéis ao longo do eixo dos xx, ou seja, são calculados somente 12 pontos pertencentes ao gráfico e portanto a precisão é muito menor. Quanto mais pixéis tiver o ecrã, melhor será a sua resolução e apresentação gráfica. Se escolhermos as variações de x de  $a_{min}$  até

$b_{\max}$  e os valores de  $y$  de  $c_{\min}$  até  $d_{\max}$ , então a parte do gráfico que está no retângulo ou janela de visualização é

$$[a, b] \cdot [c, d] = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

Para configurar a janela de representação gráfica, premir **Window**. Para o problema em estudo, tendo em conta as duas restrições de não negatividade, alterar as definições de **Xmin** e **Ymin** para “-5” e, tendo em conta as restrições funcionais, de **Xmax** e **Ymax** para “15”.

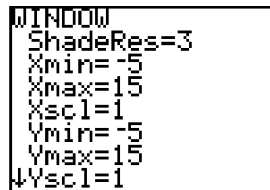


Figura 24: Configuração da janela de visualização na calculadora Texas.

**3º Passo:** Obter a representação gráfica da região admissível

Premir **GRAPH** para representar as desigualdades seleccionadas. Quando desenhar o gráfico, aparecem as opções “Shades”, “Pol-Trace” e “?”. Premir **ALPHA** [F1] para seleccionar a opção “1:Ineq Intersection”: a aplicação desenha o gráfico novamente, sombreando a região de intersecção das inequações.

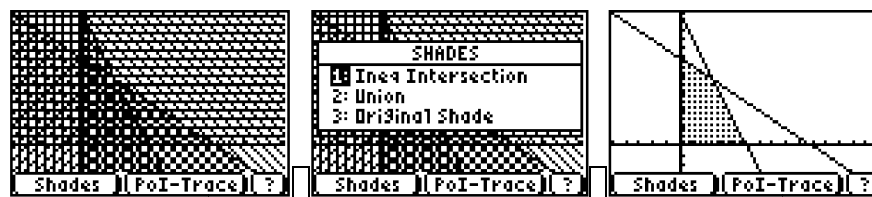


Figura 25: Representação da região admissível, na calculadora Texas.

**4º Passo:** Determinação das coordenadas dos vértices da região admissível

Premir **ALPHA** [F3] para seleccionar a opção “Pol-Trace”: aparecem as coordenadas do primeiro ponto de interesse na parte inferior do ecrã e as variáveis  $X$  e  $Y$ , no canto superior esquerdo (neste caso,  $Y1$  e  $Y2$ ). Orientando o cursor, obtêm-se as coordenadas dos restantes pontos de interesse.

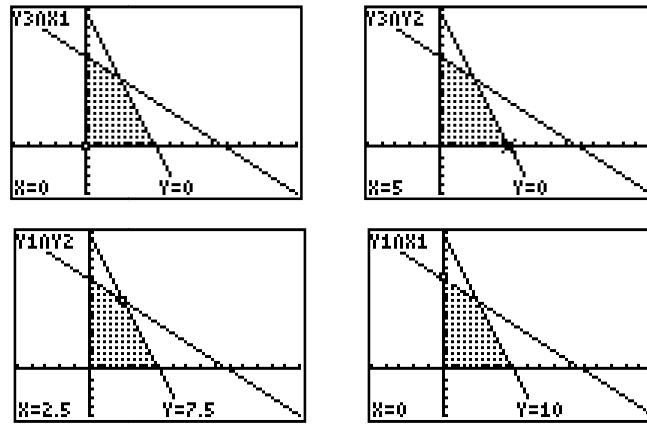


Figura 26: Localização dos pontos de interesse

Premir **STO>** para acrescentar as coordenadas para o ponto na posição do cursor às listas LINEQX (coordenada x) e LINEQY (coordenada y). Localizar e armazenar os restantes pontos que limitam a região sombreada.

LINEQX	LINEQY	
2.5	7.5	
0	10	
0	0	
5	0	
-----	-----	
Name=		

Figura 27: Tabela com as coordenadas dos vértices da região de admissibilidade

**5º Passo:** Determinar a solução óptima.

Premir **STAT** e seleccionar 1:Edit no menu Edit. Inserir uma lista nova designada LUCRO.

LINEQX	LINEQY	LUCRO
2.5	7.5	-----
0	10	
0	0	
5	0	
-----	-----	
LUCRO = 3* LINEQX + 2...		

Figura 28: Criação da lista de valores da função lucro

Adicionar a expressão do lucro:  $3 * \text{LINEQX} + 5 * \text{LINEQY}$ :

**3** [x] **2nd** [LIST] → seleccionar LINEQX e **ENTER** **+** **2** [x] **2nd** [LIST] → seleccionar LINEQY e **ENTER**

LINEQX	LINEQY	LUCRO	9
2.5	7.5	22.5	
0	10	20	
0	0	0	
5	0	15	
-----			
LUCRO(1)=22.5			

Figura 29: Tabela com os valores da função objectivo calculados

Analisando os valores obtidos, o valor mais elevado da função LUCRO (LUCRO (1)), fornece os valores  $x$  (LINEQX) e  $y$  (LINEQY) correspondentes à maximização do lucro:  $z = 22,5$ , para  $x=2,5$  e  $y=7,5$ .  $\square$

A apresentação deste exemplo mostra como o uso da calculadora gráfica pode agilizar a resolução dos problemas de PL que envolvem duas variáveis de decisão, mas não dispensa o correcto conhecimento do procedimento da determinação da solução óptima.

### Calculadora Casio

Na calculadora Casio, o menu principal (“MAIN MENU”) apresenta um conjunto de ícones que integra o modo “GRAPH”. Este modo permite representar graficamente equações e inequações e avaliar as suas relações, nomeadamente:

- introduzir inequações com símbolos de relação,
- representar graficamente inequações e sombrear regiões de intersecção,
- traçar pontos de interesse (como intersecções) entre relações.

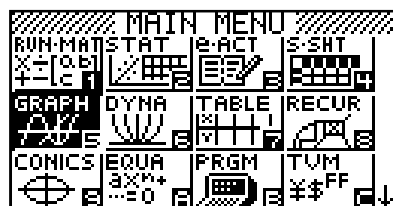


Figura 30: Menu principal da calculadora Casio

**1º Passo:** Introduzir as inequações correspondentes às restrições funcionais e de não negatividade

Para inserir os símbolos de relação das inequações,  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  e  $\geq$ , premir a sequência [F3] (para aceder ao menu TYPE) [ $\triangleright$ ] [F3] ou [F4], conforme se pretende o sinal  $\geq$  ou  $\leq$ . Nesta calculadora, não é possível introduzir desigualdades do tipo " $x \geq 0$ ". Para ultrapassar esta impossibilidade, simula-se a condição através da configuração da janela de visualização do gráfico, reduzindo-a apenas à visualização do primeiro e quarto quadrantes. Para aceder à configuração da janela, no menu "V-Window", premir  $\square$  [SHIFT]  $\square$  [F3]. Se a configuração da janela for adequada, conseguem-se detectar pontos de intersecção com os eixos coordenados e/ou extremos da região admissível. Para este problema, tendo já em conta um estudo prévio das restrições, as definições ideais dos parâmetros são:  $Xmin: 0$ ,  $Ymin: -5$ ,  $Xmax: 11$  e  $Ymax: 15$ .

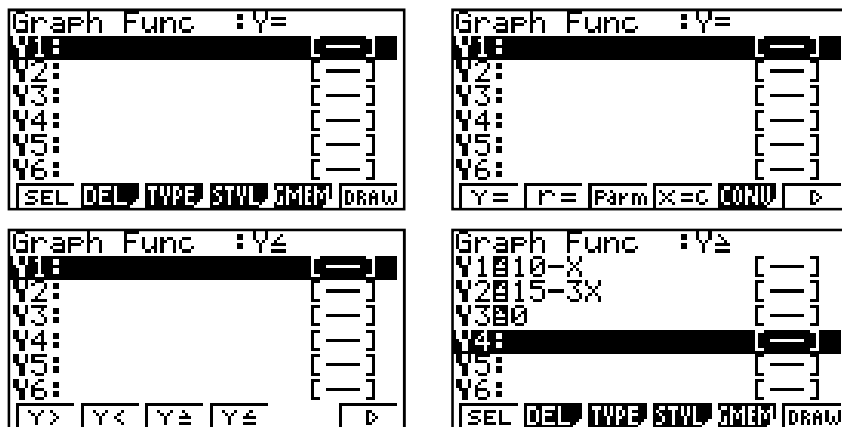


Figura 31: Passos necessários para inserir restrições na calculadora Casio

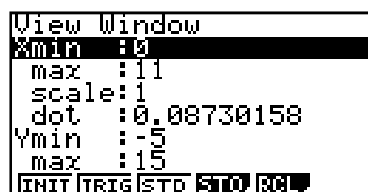


Figura 32: Configuração da janela de visualização na calculadora Casio

**3º Passo:** Obter a representação gráfica da região admissível

Premir  $\square$  [DRAW] para representar as desigualdades introduzidas.

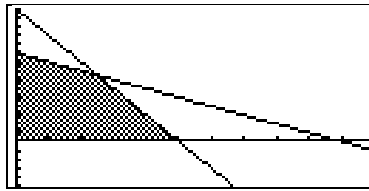


Figura 33: Representação da região admissível na calculadora Casio

**4º Passo:** Determinação das coordenadas dos vértices da região admissível.

Premir **SHIFT** **F5** para seleccionar a função “G-Solv” (abreviatura de Graph Solve), que permite, entre outras facilidades, a determinação das coordenadas de pontos de intersecção. Para determinar as coordenadas do ponto de intersecção de uma restrição com o eixo do  $yy$ , premir **F4**, isto é, Y-ICPT (abreviatura de Y-InterCePTion). Para os restantes vértices, seleccionar ISCT (abreviatura de InterSeCTion) e indicar as restrições relativas às rectas que se intersectam no vértice de interesse: consequentemente, no canto superior esquerdo do ecrã aparecem as restrições seleccionadas e, em baixo, as coordenadas do vértice.

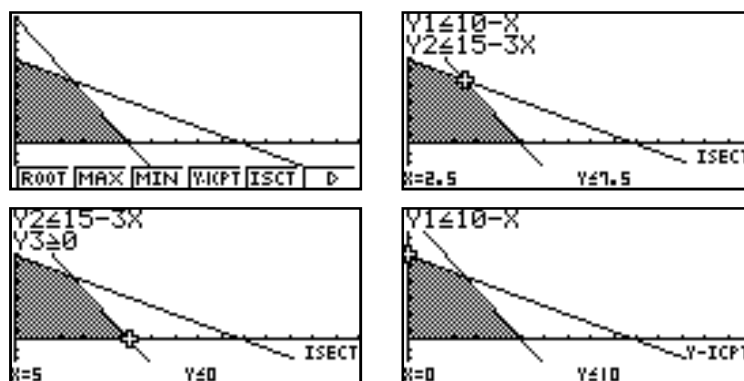


Figura 34: Determinação das coordenadas dos vértices da região admissível com a calculadora Casio

**5º Passo:** Determinar a solução óptima.

Esta calculadora não possui nenhuma função que permita sintetizar os resultados da análise gráfica, as coordenadas dos vértices determinadas no passo anterior, numa tabela. Consequentemente, é necessário efectuar o procedimento de determinação da solução óptima, construindo uma tabela que se completará com uma coluna destinada à função objectivo.

Vértice	x	Y	$z = 3x + 2y$
(0,0)	0	0	$3 \times 0 + 2 \times 0 = 0$
(2,5;7,5)	2,5	7,5	$3 \times 2,5 + 2 \times 7,5 = 22,5$
(5,0)	5	0	$3 \times 5 + 2 \times 0 = 15$
(0,10)	0	10	$3 \times 0 + 2 \times 10 = 20$

Observando os valores obtidos, o valor correspondente à maximização do lucro é  $z = 22,5$  para  $x=2,5$  e  $y=7,5$ . □

### 3.3.3.2 A Utilização do comando Solver do Microsoft Excel

Os problemas de PL que envolvem a determinação da solução óptima de duas variáveis de decisão, admitem, do ponto de vista geométrico, a representação no plano. Se o problema envolver três variáveis de decisão a sua região de admissibilidade é limitada por uma superfície poliédrica convexa e a solução óptima é um dos vértices. Se o número de variáveis de decisão for superior a três, só com a ajuda de software adequado é possível obter todos os vértices da superfície poliédrica que satisfazem as restrições e avaliar a função objectivo a otimizar para obter o resultado óptimo (caso exista). Neste caso, a resolução de problemas de PL com qualquer número de variáveis pode ser feita utilizando o comando Solver do *Microsoft Office Excel 2007*.

O Solver é um suplemento<sup>1</sup> do Microsoft Office Excel. Antes de o utilizar, é necessário verificar se está disponível com o nome **“Solucionador”** no separador **Dados** - grupo **Análise** (Figura 35). Caso contrário, é necessário instalá-lo, seguindo o procedimento que a seguir se ilustra nas figuras 36 a 38:

1º Em “Personalizar Barra de Ferramentas de Acesso Rápido” seleccionar a opção **“Mais comandos”** (Figura 36).

<sup>1</sup> Suplemento - programa que adiciona comandos ou funcionalidades personalizadas

2º Seleccionar, na janela “Opções do Excel”, a opção “Suplementos”, que abre uma janela de listagem dos suplementos e onde se escolhe “Suplemento Solver” (Figura 37).

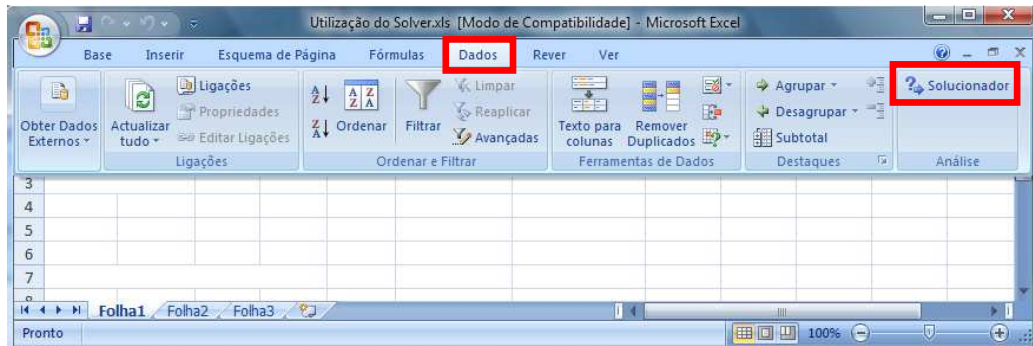


Figura 35: Suplemento Solver do Microsoft Excel disponível para utilização

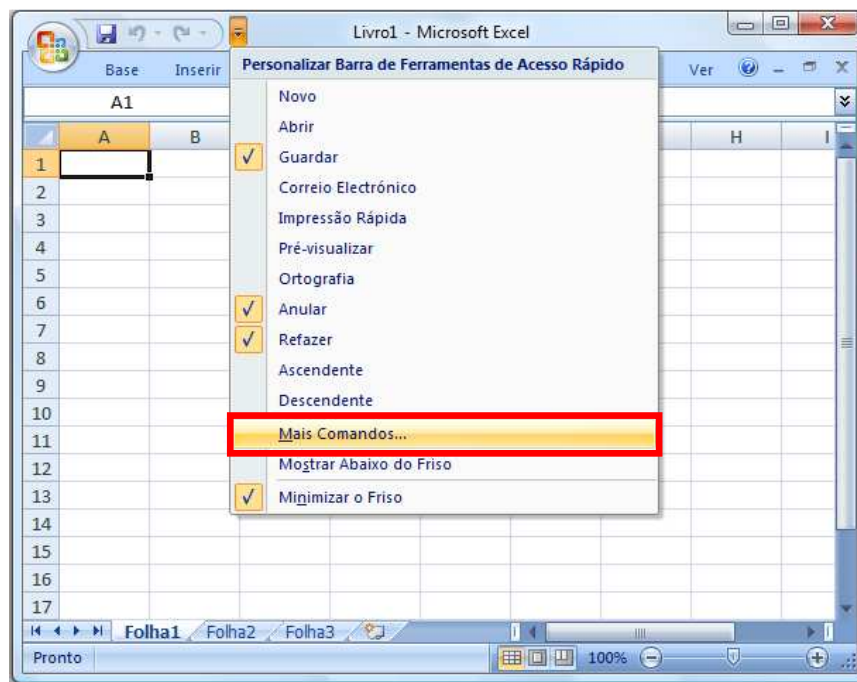


Figura 36: Primeiro passo de instalação do suplemento Solver do Microsoft Excel

3º Abre-se uma nova janela “Suplementos”, onde se selecciona a caixa de verificação “Suplemento Solver” (Figura 38). Se, nesta janela, o **Suplemento Solver** não constar da lista, antes de ser instalado deve primeiro ser localizado, seleccionando “Procurar”. Depois de instalar este suplemento, o comando **Solver** fica disponível no separador **Dados**, no grupo **Análise**.

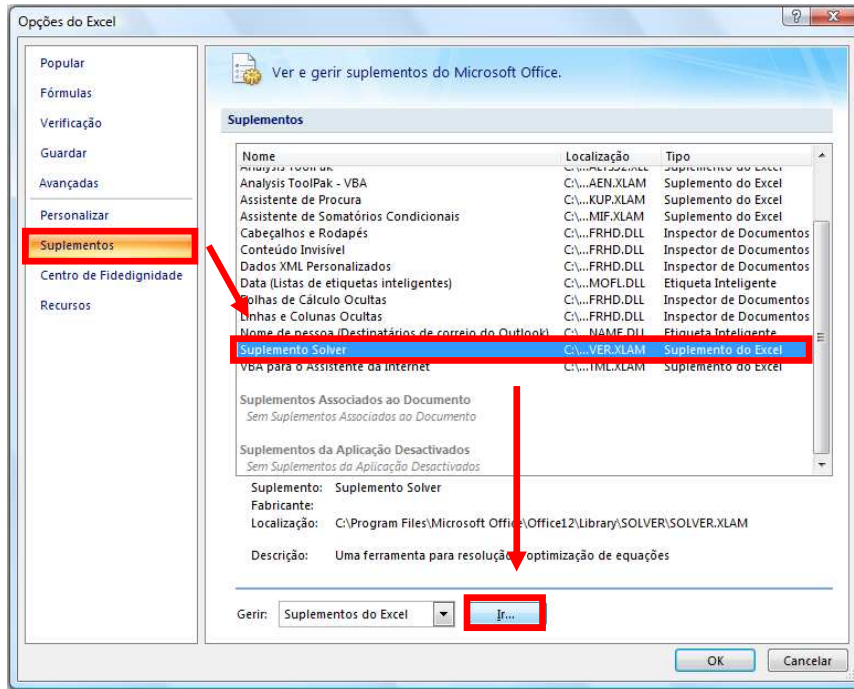


Figura 37: Segundo passo de instalação do Solver

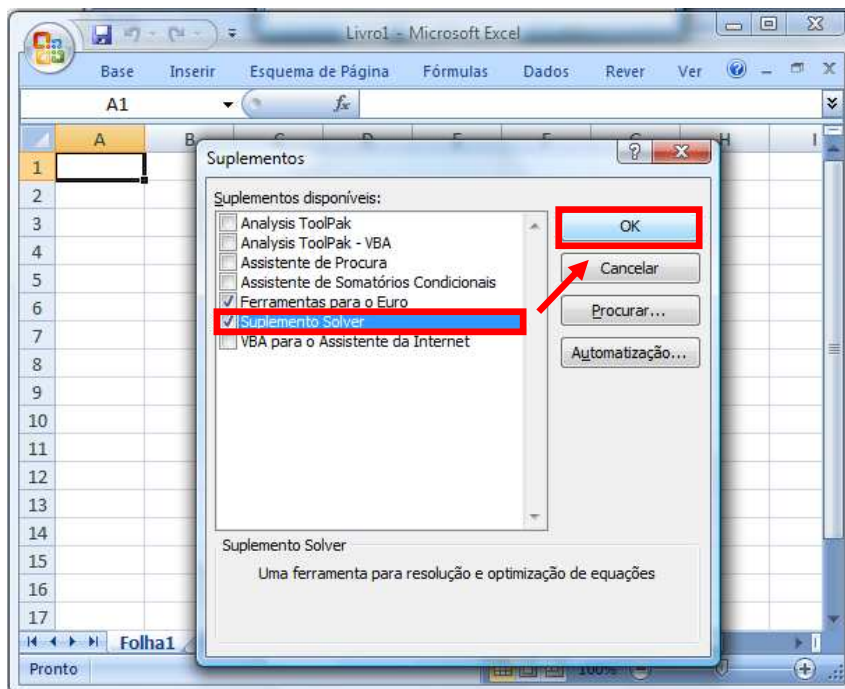


Figura 38: Terceiro passo de instalação do Solver

Escolheu-se, como primeiro problema, e para ilustrar a simplicidade de utilização e as capacidades do Solver na resolução de problemas de Programação Linear, o modelo de Programação Linear Inteira formulado para o *Problema 3.2.* e anteriormente resolvido pelo método gráfico:

$\begin{aligned} \text{Max. } z &= 6x + 3y \\ \text{s.a: } & 3x + y \leq 90 \\ & x + 2y \leq 80 \\ & x, y \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$
--

Seguidamente, é apresentada a sequência de passos desde a introdução dos dados até à leitura dos relatórios gerados após a determinação da solução óptima deste problema.

*1º Passo* - Criação de uma folha de cálculo com a informação do modelo, onde devem estar definidos, de forma inequívoca, os seguintes itens (Figura 39):

- as células onde serão colocados os valores das variáveis de decisão, os coeficientes da função objectivo, os coeficientes das restrições e as constantes que constituem o lado direito das restrições;

- a fórmula que relaciona os coeficientes da função objectivo com as variáveis de decisão – a função objectivo;

- as fórmulas que relacionam os coeficientes das restrições com as variáveis de decisão – as restrições funcionais.

Na folha de cálculo, também pode ser colocada informação adicional que possa servir de ajuda à compreensão dos valores apresentados, mas sem qualquer função específica para o Solver.

*2º Passo* - Atribuir às variáveis de decisão, valores iniciais, por exemplo  $x = 0$  e  $y = 0$ . Automaticamente, os valores das células “Função objectivo” e “Lado esquerdo” são actualizados (Figura 40).

*3º Passo* – No separador **Dados** - grupo **Análise**, seleccionar a ferramenta **Solver** – “**Solucionador**”, que abre a janela “**Parâmetros do Solver**” (Figura 41) onde é definida a localização, na folha de cálculo, das células onde serão guardados os valores resultantes da optimização e onde estão definidas as fórmulas do modelo, o sentido da optimização (maximização ou minimização), as restrições e o tipo de variáveis do modelo (inteiras ou binárias).

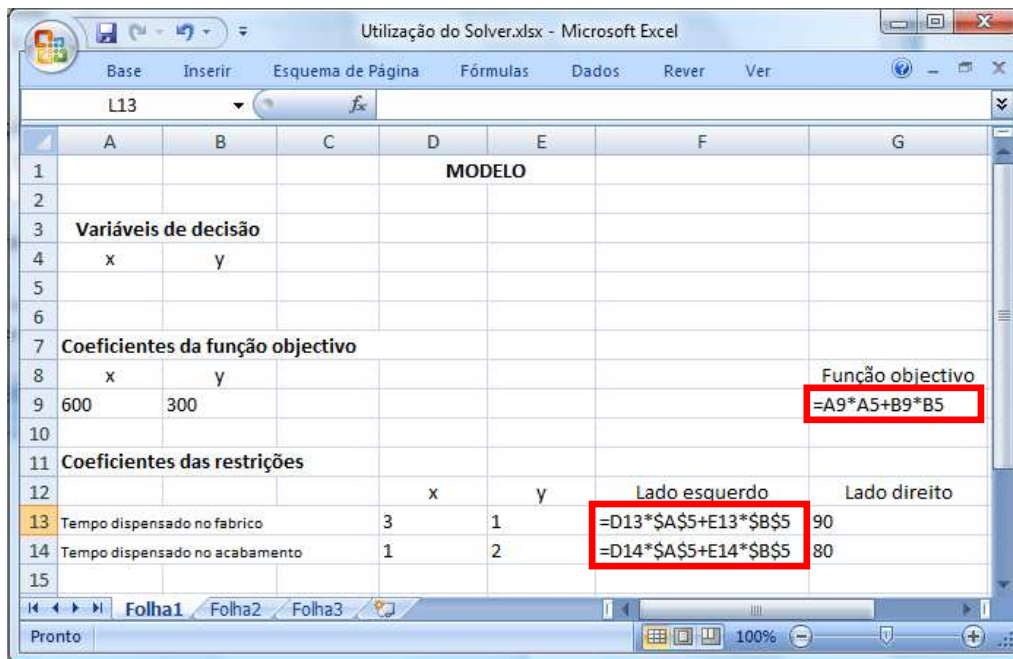


Figura 39: Introdução dos dados do modelo de PLI do Problema 3.2 na folha de cálculo

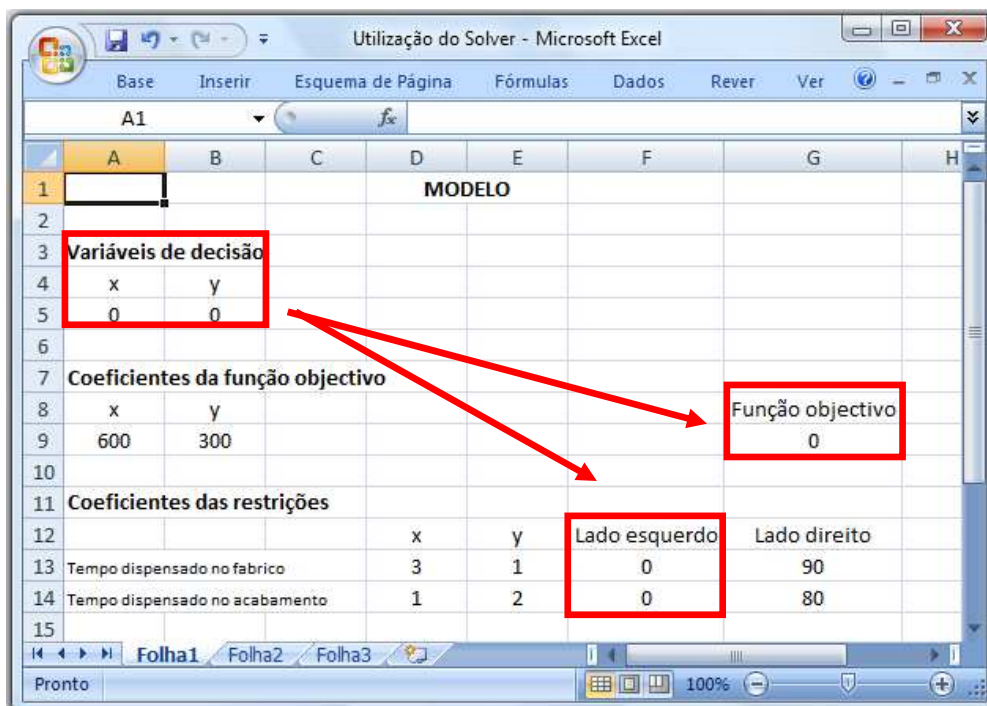


Figura 40: Atribuição de valores iniciais às variáveis de decisão

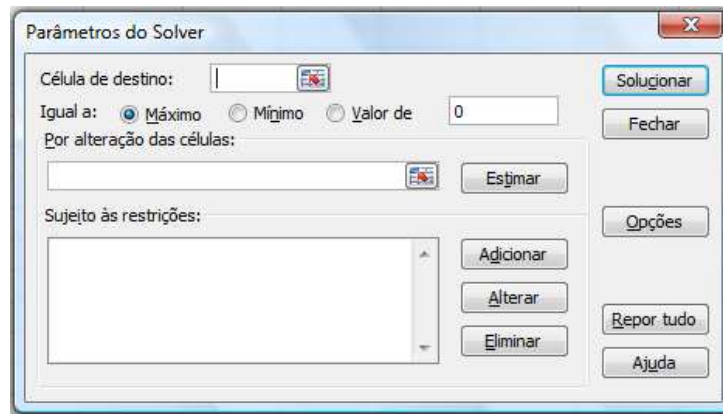


Figura 41: Janela “Parâmetros do Solver”

Para o problema em estudo, inserir os seguintes dados:

- em “**Célula de destino**”, indicar a localização da célula da folha de cálculo onde está definida a fórmula da função objectivo, neste caso, “**G9**”;
- em “**Igual a:**” seleccionar a opção do sentido da optimização da função objectivo; neste caso, dado tratar-se de um problema de maximização selecciona-se a opção “**Máximo**”;
- no campo “**Por alteração das células**”, indicar a localização das células da folha de cálculo onde se armazenam os valores das variáveis de decisão, x e y, neste caso, em “**A5**” e “**B5**”, respectivamente (Figura 42).

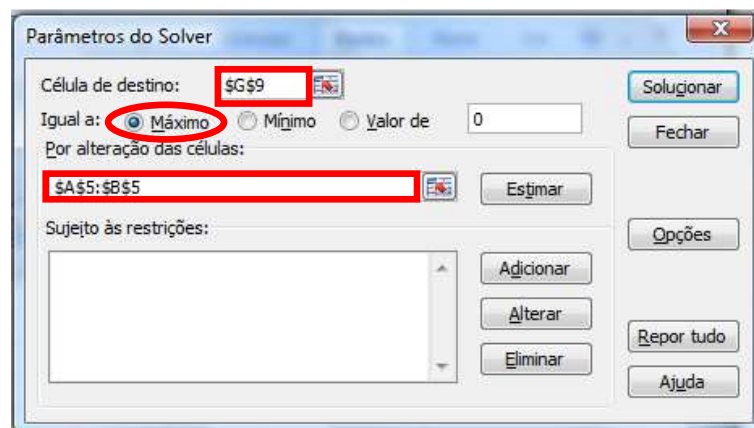


Figura 42: Introdução dos parâmetros do Solver: localização das células da função objectivo e variáveis de decisão na folha de cálculo

- Para introduzir as expressões das restrições funcionais e de integralidade (quando necessárias), seleccionar “**Adicionar**”, que abre a caixa de diálogo “**Adicionar restrição**” (Figura 43). Note-se que as restrições de não negatividade podem ser definidas também neste conjunto de restrições ou, alternativamente, como indicado no 4º Passo, como parâmetro do modelo, seleccionando “**Assumir não-negativos**”.

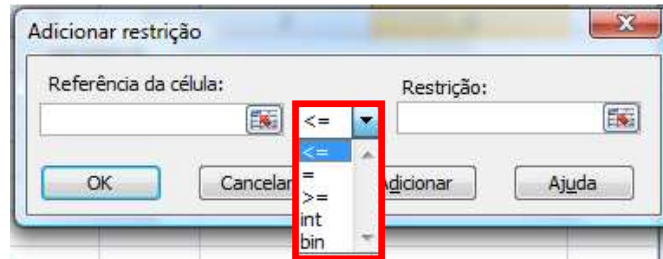


Figura 43: Janela de adição de uma restrição

Para cada restrição, em “**Referência da célula**” introduzir a localização da célula onde se encontra a fórmula relativa ao lado esquerdo da restrição (definida no 1º Passo), em “**Restrição**”, a localização da célula com o valor do lado direito da restrição. No menu do meio, selecciona-se o sinal da restrição em causa ( $\leq$ ,  $\geq$  ou  $=$ ). Note-se que é neste menu que se pode declarar se as variáveis são inteiras ou binárias (quando o modelo o exige). Guardar os dados referentes a cada restrição pressionando “**Adicionar**” e terminar a introdução de todas as restrições pressionando “**OK**”. Neste ponto, obtém-se a janela, apresentada na Figura 44, com toda a informação do modelo.

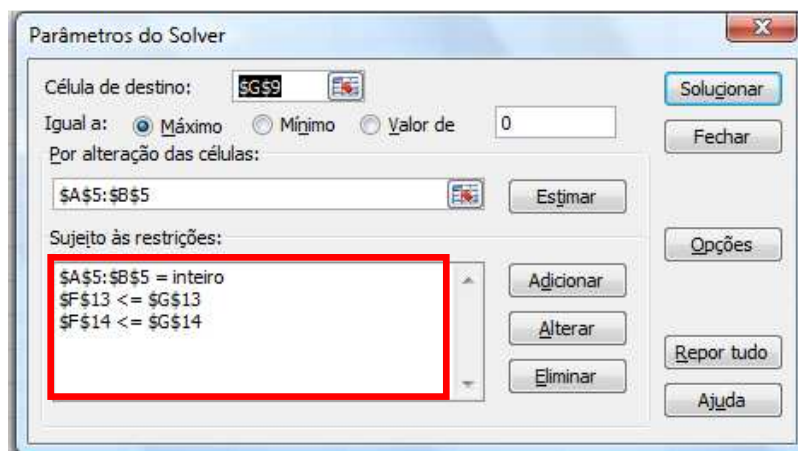


Figura 44: Resultado da introdução dos parâmetros do Solver relativos às restrições

4º Passo – Verificar os parâmetros da resolução de problemas na caixa de diálogo de “Opções”. Nesta caixa, é possível configurar, não só vários parâmetros da resolução de problemas, mas também guardar modelos distintos para uma mesma folha de cálculo. Neste caso, verificar se as opções “Assumir modelo linear” e “Assumir não-negativos” estão seleccionadas.

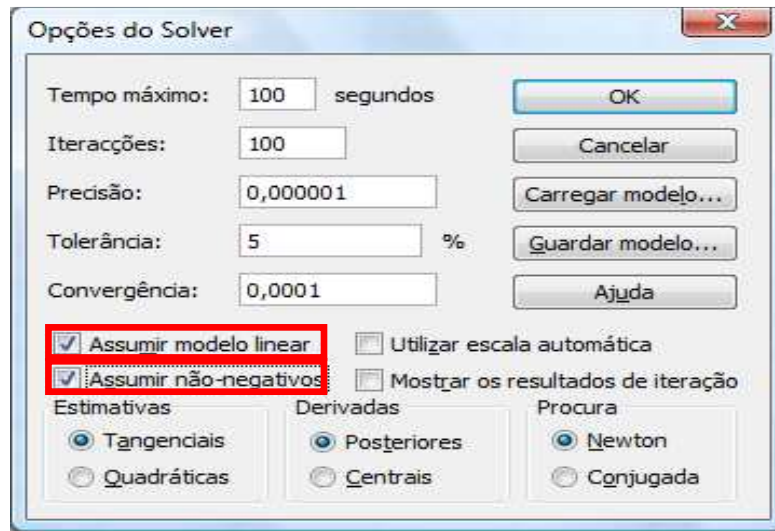


Figura 45: Janela “Opções do Solver”

5º Passo – Solucionar o problema, premindo o botão “Solucionar”. Se nem o modelo nem as definições na folha de cálculo apresentarem erros, surge a caixa da Figura 46. É muito importante ler a mensagem que surge no cimo da janela. Neste caso, informa que o Solver encontrou uma solução óptima que se pode analisar na folha de cálculo onde foi inicialmente introduzido o modelo (ver Figura 47).

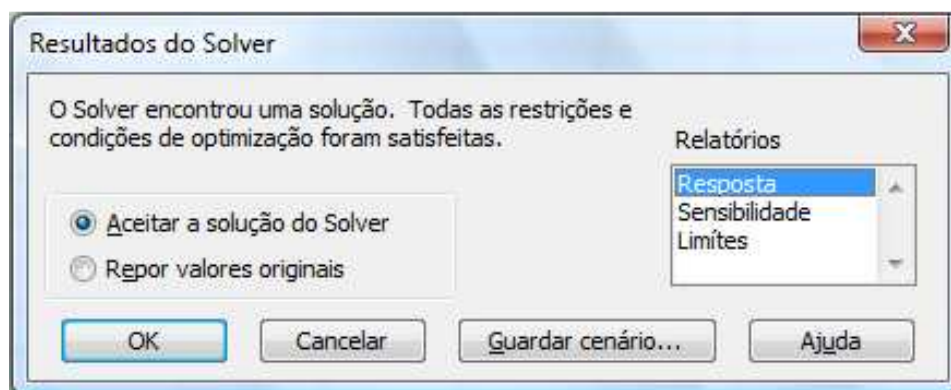


Figura 46: Janela “Resultados do Solver”

O Solver pode, ainda, gerar relatórios que analisam a solução encontrada: “Resposta”, “Sensibilidade” e “Limites”. Cada relatório é criado numa nova folha de cálculo do mesmo livro, com o respectivo nome. Note-se que, para este problema, só é gerado automaticamente o relatório de respostas, como se verifica na Figura 47, não sendo gerado nenhum dos outros dois relatórios possíveis: de sensibilidade<sup>2</sup> e de limites<sup>3</sup>. Embora estes dois tipos de relatórios surjam na lista, não são gerados por não fazerem sentido em problemas de Programação Linear Inteira. O relatório de respostas gerado para este problema pode-se observar na Figura 48. Neste relatório, a solução óptima é apresentada de forma detalhada e a sua leitura permite a interpretação seguinte:

- o valor óptimo da função objectivo em “Célula de destino”; neste caso, o valor é 21 000, logo o lucro máximo é de 21 000 euros, por dia;

- os valores óptimos das variáveis de decisão em “Células ajustáveis”; o valor de  $x$  é 20 e de  $y$  é 30, logo a produção óptima corresponde à produção de 20 banheiras redondas e 30 banheiras rectangulares;

- o estado de cada restrição na solução óptima em “Restrições”. As conclusões seguintes resultam de análise da informação sobre a distância a que, na solução óptima, se está do limite da restrição. Neste caso, para a primeira restrição pode-se ler: “Valor da célula” = 90, “Estado”= Arquivar e “Tolerância”=0; então, são utilizadas as 90 horas disponíveis no fabrico, o que dá uma folga nula em relação à quantidade disponível, o que significa que esta restrição está arquivada ou, melhor, activa<sup>4</sup>, isto é, o vértice correspondente à solução óptima encontra-se sobre esta restrição. O mesmo se pode concluir sobre a restrição respeitante ao tempo dispensado no acabamento.

---

<sup>2</sup> O relatório de sensibilidade fornece informações sobre a sensibilidade da solução relativamente a pequenas alterações.

<sup>3</sup> O relatório de limites lista a célula de destino e as células ajustáveis com os respectivos valores, limites inferior e superior e valores alvo.

<sup>4</sup> Uma restrição de um problema de PL diz-se activa para uma dada solução óptima, quando define o ponto óptimo. Num problema de duas variáveis de decisão, corresponde a uma restrição que passa pelo ponto que representa a solução óptima.

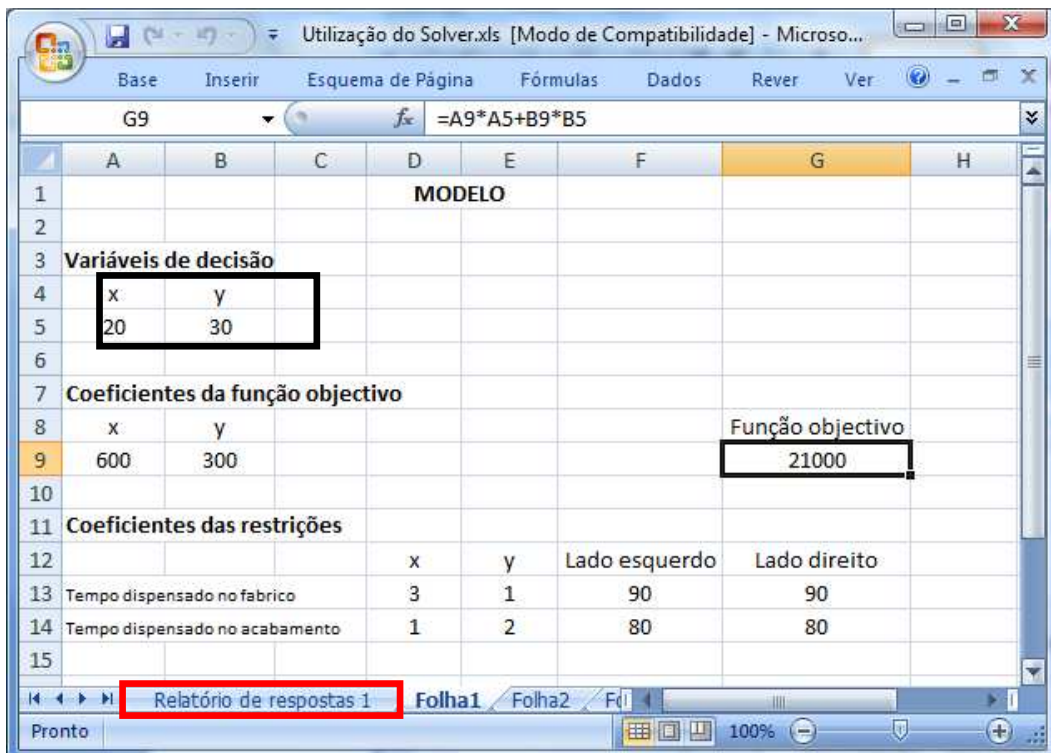


Figura 47: Apresentação da solução óptima do modelo

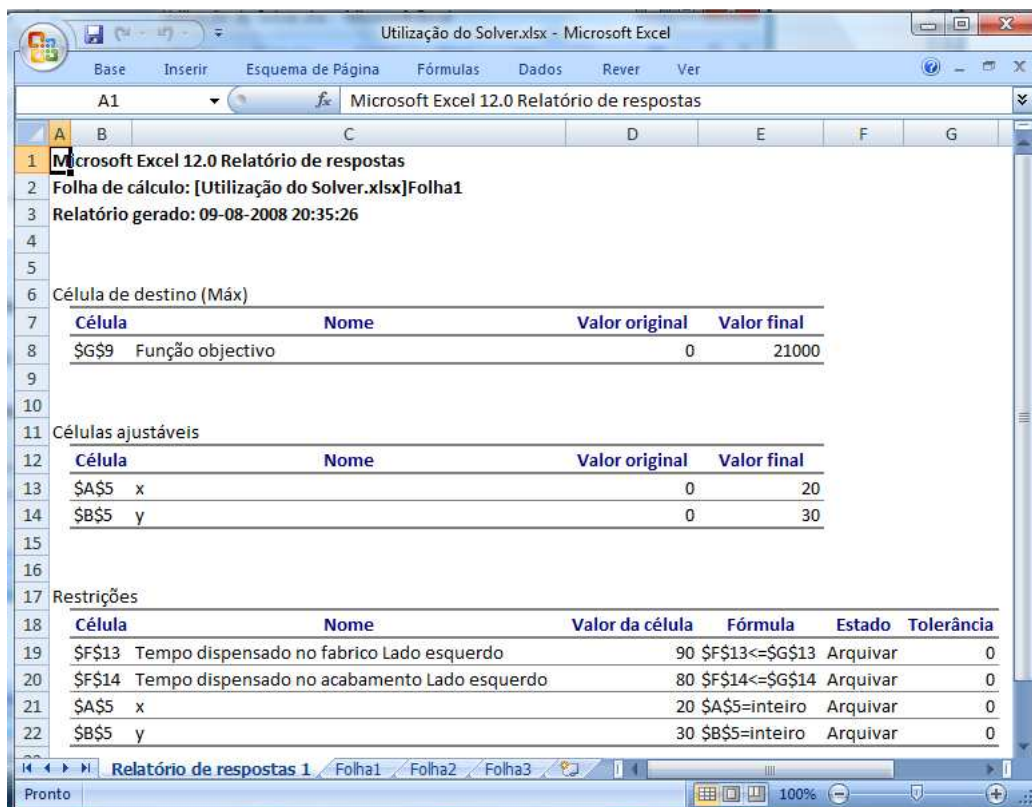


Figura 48: Relatório de respostas gerado pelo Solver

A resolução deste problema através do Solver confirma, naturalmente, o valor da solução obtida pela resolução gráfica anterior e a sua interpretação. Porém, no caso de problemas com um número de variáveis de decisão superior a dois, como é o caso do seguinte problema de Programação Linear Inteira, a resolução gráfica não é possível. Neste caso, a utilização desta ferramenta apresenta-se de grande utilidade.

*Problema 3.7 [IOPL99]: A Universal é uma companhia mineira que explora três minas de cobre. O cobre retirado de cada mina é separado segundo a sua qualidade (alta, baixa). No quadro seguinte são indicadas as capacidades diárias de produção de cada uma das minas, e o seu custo de funcionamento diário.*

<i>Capacidade diária de produção (ton./dia)</i>	<i>Cobre de alta qualidade</i>	<i>Cobre de baixa qualidade</i>	<i>Custo diário de funcionamento (u.m./dia)</i>
<i>Mina I</i>	<i>4</i>	<i>4</i>	<i>20</i>
<i>Mina II</i>	<i>6</i>	<i>4</i>	<i>22</i>
<i>Mina III</i>	<i>1</i>	<i>6</i>	<i>18</i>

*A Universal comprometeu-se a fornecer 54 toneladas de cobre de alta qualidade e 65 toneladas de cobre de baixa qualidade nos próximos sete dias. O acordo laboral em vigor impõe que os empregados em qualquer das minas recebam o salário integral por cada dia em que a mina esteja a operar. Determine o número de dias que cada mina deve operar durante os próximos sete dias, de modo a que a Universal cumpra os seus compromissos, com um custo mínimo.*

Para este problema, identificam-se três variáveis de decisão:

$x$  – “número de dias que mina I vai operar”,

$y$  – “número de dias que mina II vai operar”,

$w$  – “número de dias que mina III vai operar”.

O objectivo é determinar o número de dias que cada mina deve operar num período de sete dias de modo que o custo total de exploração seja mínimo:

$z$  – “custo total de exploração, em u.m.”

$$z = 20x + 22y + 18w$$

Identificam-se cinco restrições funcionais, as duas primeira relativas aos compromissos assumidos com o fornecimento de cobre de alta e baixa qualidade e as restantes relativas ao número máximo de dias que cada mina pode operar. O problema enunciado pode, então, ser formulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \min z &= 20x + 22y + 18z \\ \text{s.a:} \quad &4x + 6y + z \geq 54 \\ &4x + 6y + z \geq 65 \\ &x \leq 7 \\ &y \leq 7 \\ &z \leq 7 \\ &x, y, z \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

1º e 2º Passos: Criação da folha de cálculo com a informação do modelo e atribuição às variáveis de decisão, de valores iniciais, por exemplo  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .

MODELO							
Variáveis de decisão							
x	y	z					
2	7	5					
Coeficientes da função objectivo			Função objectivo				
x	y	z	=A9*A5+B9*B5+C9*C5				
20	22	18					
Coeficientes das restrições			x	y	z	Lado esquerdo	Lado direito
Cobre de alta qualidade	4	6	1	=D13*\$A\$5+E13*\$B\$5+F13*\$C\$5	54		
Cobre de baixa qualidade	4	4	6	=D14*\$A\$5+E14*\$B\$5+F14*\$C\$5	65		
Máx. de dias que a mina I pode operar	1	0	0	=D15*\$A\$5+E15*\$B\$5+F15*\$C\$5	7		
Máx. de dias que a mina II pode operar	0	1	0	=D16*\$A\$5+E16*\$B\$5+F16*\$C\$5	7		
Máx. de dias que a mina III pode operar	0	0	1	=D17*\$A\$5+E17*\$B\$5+F17*\$C\$5	7		

Figura 49: Introdução dos dados do modelo de PL do Problema 3.7 na folha de cálculo

3º Passo – No separador **Dados** - grupo **Análise**, seleccionar a ferramenta **Solver** – “**Solucionador**”, que abre a janela “**Parâmetros do Solver**”.

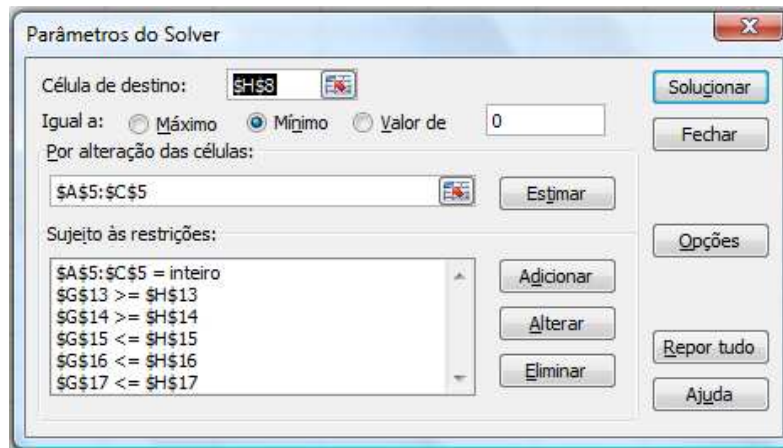


Figura 50: Introdução dos parâmetros do Problema 3.7

4º Passo – Verificar os parâmetros da resolução de problemas na caixa de diálogo de “Opções”.

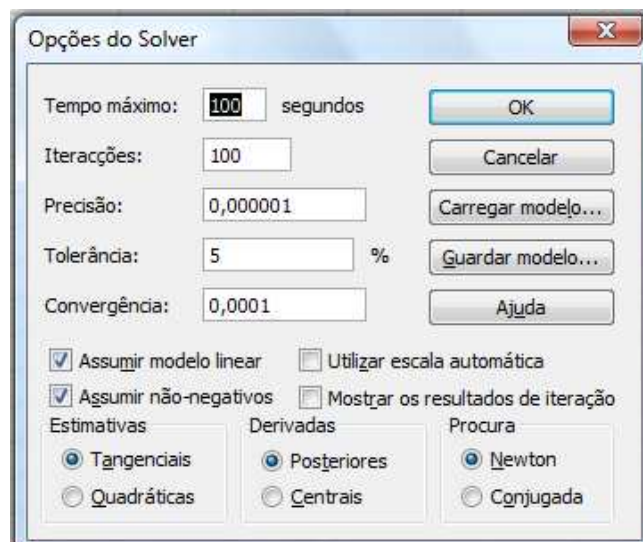


Figura 51: Verificação dos parâmetros de resolução do Solver

5º Passo – Solucionar o problema, premindo o botão “Solucionar”.

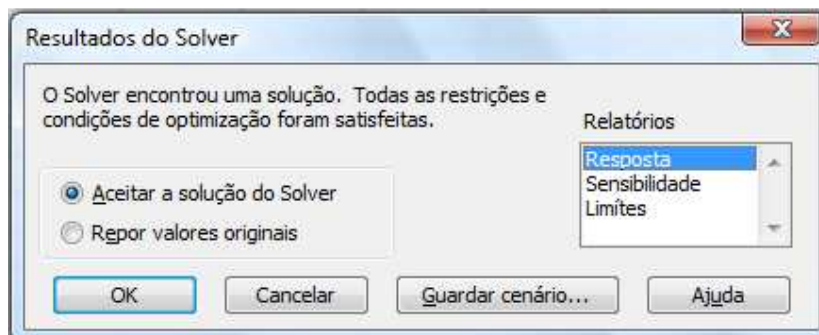


Figura 52: Mensagem do resultado da resolução do Problema 3.7

É encontrada uma solução óptima como se pode observar na folha de cálculo onde foi inicialmente introduzido o modelo:

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

MODELO							
Variáveis de decisão							
x	y	z					
2	7	5					
Coeficientes da função objectivo						Função objectivo	
x	y	z				284	
20	22	18					
Coeficientes das restrições							
			x	y	z	Lado esquerdo	Lado direito
Cobre de alta qualidade			4	6	1	55	54
Cobre de baixa qualidade			4	4	6	66	65
Máx. de dias que a mina I pode operar			1	0	0	2	7
Máx. de dias que a mina II pode operar			0	1	0	7	7
Máx. de dias que a mina III pode operar			0	0	1	5	7

Figura 53: Apresentação da solução óptima do Problema 3.7

O relatório de respostas caracteriza detalhadamente a solução óptima:

- valor óptimo da função objectivo: o custo mínimo total de exploração é 284 u.m.;

- valores óptimos das variáveis de decisão:  $x = 2$ ,  $y = 7$  e  $z = 5$ . A mina I opera 2 dias, a mina II, 7 dias e a mina III, 5 dias;

- estado de cada restrição na solução óptima: para a primeira restrição (cobre de alta qualidade) pode-se ler: “Valor da célula” = 55, “Estado” = Não Arquivar e “Tolerância” = 1; o que significa que é produzida mais uma tonelada de cobre de alta qualidade, além das 54 toneladas assumidas. O mesmo se pode concluir sobre a segunda restrição (cobre de baixa qualidade). Em relação ao número de dias que cada mina pode operar, a mina I opera apenas 2 dos 7 dias, o que implica estar parada 5 dias; a mina II vai operar os 7 dias; e a mina três opera 5 dos 7 dias, estando inactiva 2 dias.

Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas

Folha de cálculo: [prob.xlsx]Folha1

Relatório gerado: 09-08-2008 21:39:40

Célula de destino (Min)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$H\$8	z Função objectivo	284	284

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$A\$5	x	2	2
\$B\$5	y	7	7
\$C\$5	z	5	5

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Estado	Tolerância
\$G\$13	Cobre de alta qualidade Lado esquerdo	55	\$G\$13>=\$H\$13	Não arquivar	1
\$G\$14	Cobre de baixa qualidade Lado esquerdo	66	\$G\$14>=\$H\$14	Não arquivar	1
\$G\$15	Máx. de dias que a mina I pode operar Lado esquerdo	2	\$G\$15<=\$H\$15	Não arquivar	5
\$G\$16	Máx. de dias que a mina II pode operar Lado esquerdo	7	\$G\$16<=\$H\$16	Arquivar	0
\$G\$17	Máx. de dias que a mina III pode operar Lado esquerdo	5	\$G\$17<=\$H\$17	Não arquivar	2
\$A\$5	x	2	\$A\$5=inteiro	Arquivar	0
\$B\$5	y	7	\$B\$5=inteiro	Arquivar	0
\$C\$5	z	5	\$C\$5=inteiro	Arquivar	0

**Figura 54: Relatório de respostas do Problema 3.7 gerado pelo Solver**

A resolução do problema anterior comprova a facilidade com que o Solver determina a solução óptima de problemas de Programação Linear Inteira, mesmo quando os problemas implicam mais de duas variáveis.

Este suplemento do Excel quando utilizado para a resolução de problemas de Programação Linear Contínua gera para além do relatório de respostas, o relatório de sensibilidade que contém anotações suplementares sobre a variação das constantes do problema, como se exemplifica a seguir.

*Problema 3.8 [MB06]: Uma mercearia encomendou a um pasteleiro dois tipos de bolos para vender na quadra de Natal. Cada quilograma de bolo do tipo A dá um lucro de 5 euros e cada quilograma de bolo do tipo B dá um lucro de 7 euros. Relativamente aos produtos necessários à confecção dos bolos, o pasteleiro só tem limitações em dois: dispõe apenas de 10 kg de açúcar e de 6 kg de farinha. Sabe-se que cada quilograma de bolo do tipo A leva 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg de farinha e que cada quilograma de bolo do tipo B leva 0,2 kg de açúcar e 0,3 kg de farinha. Quantos quilogramas de bolo do tipo A e quantos quilogramas de bolo do tipo B, deve o pasteleiro fabricar para ter o maior lucro possível?*

De acordo com o enunciado deste problema, identificam-se as seguintes variáveis de decisão:

$x$  – “quantidade, em kg, de bolo do tipo A”

$y$  – “quantidade, em kg, de bolo do tipo B”

O objectivo é determinar a quantidade de bolo do tipo A e B que o pasteleiro deve fabricar para que o lucro seja máximo. Logo a função objectivo será:

$z$  – “Lucro obtido no fabrico dos bolos do tipo A e B, em euros”

$$z = 5x + 7y$$

As duas restrições funcionais dizem respeito à quantidade de farinha e de açúcar utilizada na confecção dos bolos, respectivamente. A formulação do problema é a seguinte:

$Max. z = 5x + 7y$
$s.a: \quad 0,4x + 0,2y \leq 10$
$\quad \quad 0,2x + 0,3y \leq 6$
$\quad \quad x, y \geq 0$

1º e 2º Passos: Criação da folha de cálculo com a informação do modelo e atribuição às variáveis de decisão, de valores iniciais, por exemplo  $x = 0$  e  $y = 0$ .

3º Passo – No separador **Dados** - grupo **Análise**, seleccionar a ferramenta **Solver** – “**Solucionador**”, que abre a janela “**Parâmetros do Solver**”.

4º Passo – Verificar os parâmetros da resolução de problemas na caixa de diálogo de “**Opções**”.

5º Passo – Solucionar o problema, premindo o botão “**Solucionar**”.

MODELO						
1						
2						
3	Variáveis de decisão					
4	x	y				
5	0	0				
6						
7	Coeficientes da função objectivo					
8	x	y				Função objectivo
9	5	7				= $\$A\$9*\$A\$5+\$B\$9*\$B\$5$
10						
11	Coeficientes das restrições					
12			x	y	Lado esquerdo	Lado direito
13	Quantidade de Açúcar (kg)		0,4	0,2	= $D13*\$A\$5+E13*\$B\$5$	10
14	Quantidade de Farinha (kg)		0,2	0,3	= $D14*\$A\$5+E14*\$B\$5$	6
15						

Figura 55: Introdução dos dados do modelo de PL do Problema 3.8 na folha de cálculo

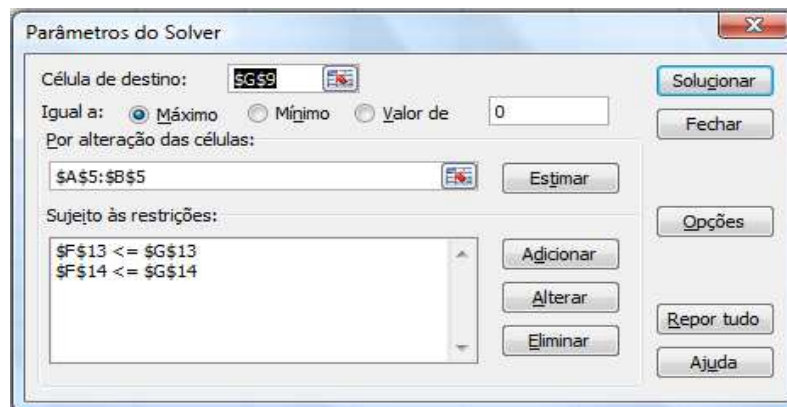


Figura 56: Introdução dos parâmetros do Problema 3.8 do Solver

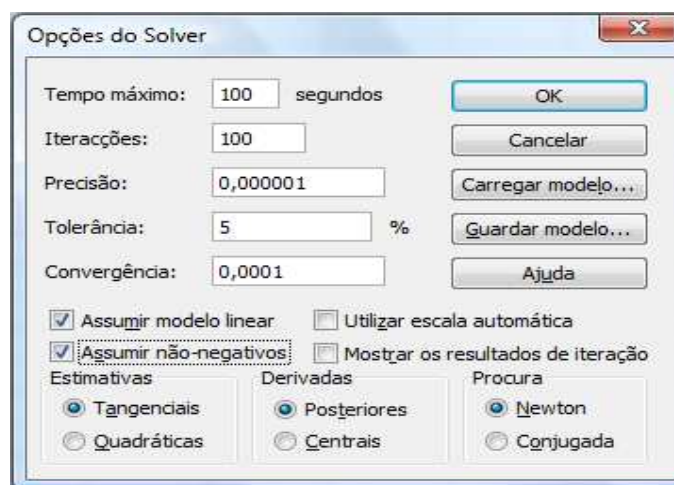


Figura 57: Verificação dos parâmetros de resolução do Solver

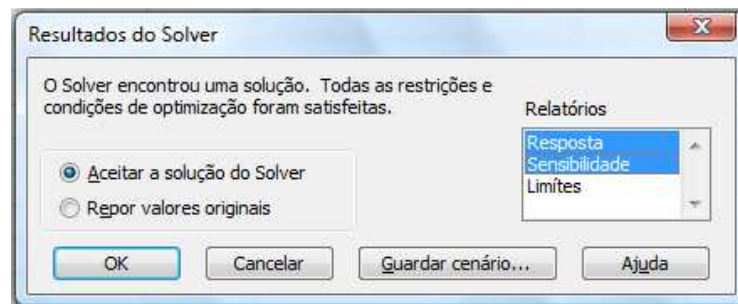


Figura 58: Mensagem do resultado da resolução do Problema 3.8

O Solver determina uma solução óptima como se pode observar na folha de cálculo onde foi inicialmente introduzido o modelo:

MODELO					
Variáveis de decisão					
x	y				
22,5	5				
Coeficientes da função objectivo					
x	y				Função objectivo
5	7				147,5
Coeficientes das restrições					
		x	y	Lado esquerdo	Lado direito
Quantidade de Açúcar (kg)		0,4	0,2	10	10
Quantidade de Farinha (kg)		0,2	0,3	6	6

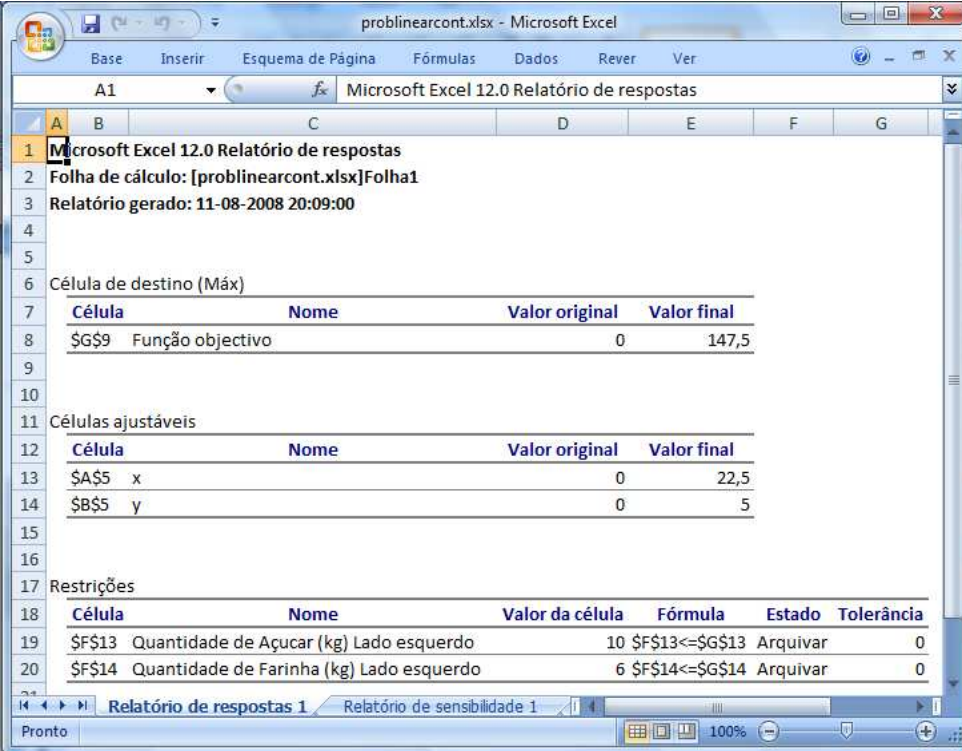
Figura 59: Apresentação da solução óptima do modelo

Como este problema é um problema de PL Contínua, o Solver gera, para além do relatório de respostas, o relatório de sensibilidade que contém anotações suplementares sobre a variação das constantes do problema.

O relatório de respostas fornece as informações seguintes de acordo com a caracterização detalhada dada sobre a solução óptima:

- o valor óptimo da função objectivo correspondente ao lucro máximo é de 157,5 euros;

- os valores óptimos das variáveis de decisão são:  $x = 22,5$  e  $y = 5$ , isto é, fabricam-se 22,5 kg de bolo do tipo A e 5 kg de bolo do tipo B;
- em relação às restrições pode-se verificar que são utilizados os 10 kg de Açúcar e 6 kg de farinha no fabrico dos bolos, o que dá uma folga nula em relação à quantidade disponível.



Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas

Folha de cálculo: [problelinearcont.xlsx]Folha1

Relatório gerado: 11-08-2008 20:09:00

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$G\$9	Função objectivo	0	147,5

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$A\$5	x	0	22,5
\$B\$5	y	0	5

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Estado	Tolerância
\$F\$13	Quantidade de Açucar (kg) Lado esquerdo	10	\$F\$13<=\$G\$13	Arquivar	0
\$F\$14	Quantidade de Farinha (kg) Lado esquerdo	6	\$F\$14<=\$G\$14	Arquivar	0

Figura 60: Relatório de respostas gerado pelo Solver

O outro relatório gerado é o de sensibilidade. Permite efectuar uma crítica ao modelo tendo em conta possíveis alterações que possam afectar o resultado pois informa como podem variar os coeficientes da função objectivo e os lados direitos das restrições, sem que a solução óptima sofra alterações substanciais. Na tabela “**Células ajustáveis**”, é apresentada a análise de sensibilidade aos coeficientes da função objectivo, sendo de interesse a interpretação dos valores que constam nas colunas “**Permissível aumentar**” e “**Permissível diminuir**”: indicam a variação dos valores dos coeficientes da função objectivo permitida sem que haja alteração da solução óptima. A consequência da alteração desses coeficientes para valores fora do intervalo determinado implica a mudança da estrutura da solução óptima. No relatório gerado para este problema, em relação à variável  $x$  o coeficiente (lucro de

um quilograma de bolo do tipo A) se aumentar 9 euros ou diminuir  $1/3$  euros, a solução óptima continuará a incluir a confecção de bolos deste tipo, ou, este coeficiente pode variar entre  $5 - 1/3 = 14/3$  euros e  $5 + 9 = 14$  euros. Em relação à variável  $y$  o coeficiente (lucro de um quilograma de bolo do tipo B) se aumentar 0,5 euros ou diminuir 4,5 euros, a solução óptima continuará a incluir a confecção de bolos deste tipo, ou, este coeficiente pode variar entre  $7 - 4,5 = 2,5$  euros e  $7 + 0,5 = 7,5$  euros.

The screenshot shows the 'Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade' window. It contains two main tables: 'Células ajustáveis' and 'Restrições'.

Células ajustáveis		Final	Reduzido	Objectivo	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	Custo	Coeficiente	Aumentar	Diminuir
\$A\$5	x	22,5	0	5	9	0,333333333
\$B\$5	y	5	0	7	0,5	4,5

Restrições		Final	Sombra	Restrição	Permissível	Permissível
Célula	Nome	Valor	Preço	Lado direito	Aumentar	Diminuir
\$F\$13	Quantidade de Açucar (kg) Lado esquerdo	10	1,25	10	2	6
\$F\$14	Quantidade de Farinha (kg) Lado esquerdo	6	22,5	6	9	1

Figura 61: Relatório de sensibilidade gerado pelo Solver

Na tabela “Restrições” pode analisar-se o resultado do estudo de sensibilidade dos valores do lado direito das restrições. A consequência da alteração para valores diferentes dos permitidos é a obtenção de uma região admissível diferente e uma possível mudança de solução óptima. Os valores dados nas colunas “Permissível Aumentar” e “Permissível Diminuir” são os valores que se podem somar e subtrair ao valor inicial, coluna “Restrição Lado direito”, sem que a solução óptima mude. O “Preço Sombra” informa qual a variação no lucro por cada unidade de recurso (quantidade de açúcar e quantidade farinha) que se possa adquirir adicionalmente. Neste caso, por cada quilograma de açúcar que se possa passar a dispor, além dos 10 kg actuais, o lucro aumenta 1,25 euros e por cada kg de farinha

o lucro aumenta 22,5 euros. Portanto, se for possível adquirir recursos em quantidades extra, é mais rentável a aquisição de farinha!

*Problemas 3.9 [PT06]: Na loja do Sr. Nicolau estão armazenados sacos de batata e de cebola. Para poder atender às solicitações, o Sr. Nicolau tem de ter em armazém no mínimo 100 sacos de cebola e 200 de batata. Sabe-se que a loja tem capacidade para armazenar 2000 sacos e que há mais sacos de batata do que sacos de cebola. Por razões de ordem comercial, deve haver em stock pelo menos 500 sacos. O custo de armazenagem de um saco de cebola é de 0,10 € e de um saco de batata é de 0,15 €. Quantos sacos de batata e de cebola devem ser armazenados para que a despesa com a armazenagem seja mínima?*

Identificam-se as duas variáveis de decisão:

$x$  – “quantidade de sacos de batata”

$y$  – “quantidade de sacos de cebola”

O objectivo é determinar número de sacos de batatas e de cebola que devem ser armazenadas com custo de armazenagem mínimo:

$z$  – “custo total de armazenagem, em euros”

$$z = 0,15x + 0,1y$$

As restrições funcionais:

“...tem de ter em armazém no mínimo 100 sacos de cebola e 200 de batata.”

$$y \geq 100 \quad \text{e} \quad x \geq 200$$

“...deve haver em stock pelo menos 500 sacos.”

$$x + y \geq 500$$

“...a loja tem capacidade para armazenar 2000 sacos...”

$$x + y \leq 2000$$

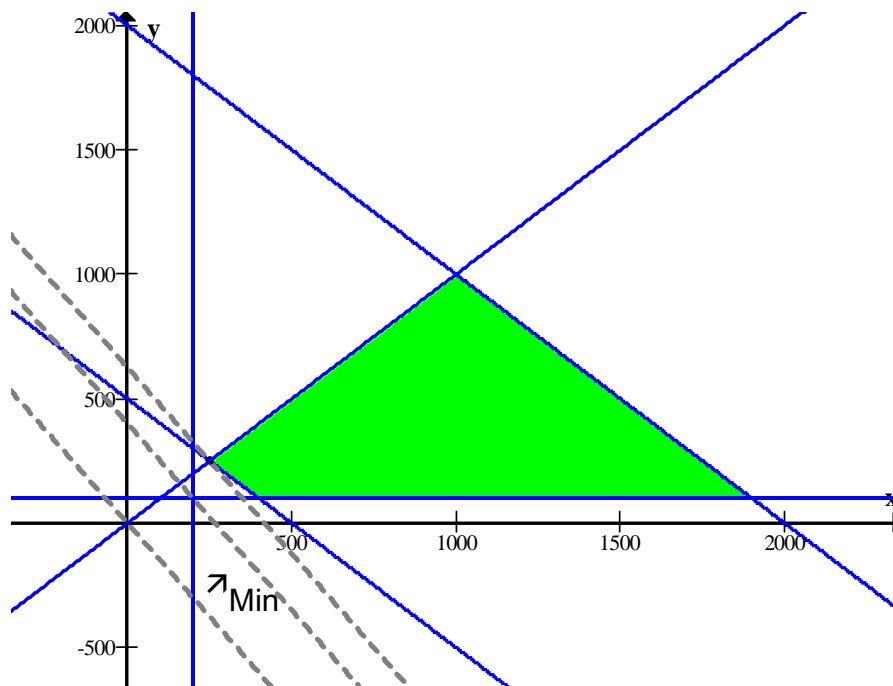
“...há mais sacos de batata do que sacos de cebola.”

$$x \geq y + 1$$

A formulação do problema, tendo em conta que as variáveis devem assumir valores inteiros, é a seguinte:

<i>Min. z = 0,15x + 0,1y</i>		
<i>s.a:</i>	$x$	$\geq 200$
	$y$	$\geq 100$
	$x + y$	$\geq 500$
	$x + y$	$\leq 2000$
	$x - y$	$\geq 1$
	$x, y \geq 0$ e inteiro	

Na figura seguinte, ilustra-se a aplicação do método gráfico à determinação da solução óptima do problema relaxado.



**Figura 62: Representação gráfica da região admissível, da família de rectas da função objectivo e identificação do ponto óptimo do problema 3.9**

O ponto óptimo corresponde ao ponto de intersecção das rectas “ $x - y = 1$ ” e “ $x + y = 500$ ”, de coordenadas (250,5 ; 249,5). Dado que os valores óptimos não são inteiros, a solução não faz sentido para o problema original, sendo necessário determinar, na região de admissibilidade, a solução óptima inteira. Como

facilmente se observa, graficamente não é possível determinar o valor exacto da solução óptima inteira: armazenamento de 251 sacos de batatas e 249 sacos de cebolas, dada a dificuldade de representar as soluções admissíveis inteiras na vizinhança da solução óptima não inteira. Esta solução só é passível de ser encontrada se o problema foi resolvido, recorrendo ao comando Solver do Microsoft Excel, como ilustrado nas Figuras 63 a 66.

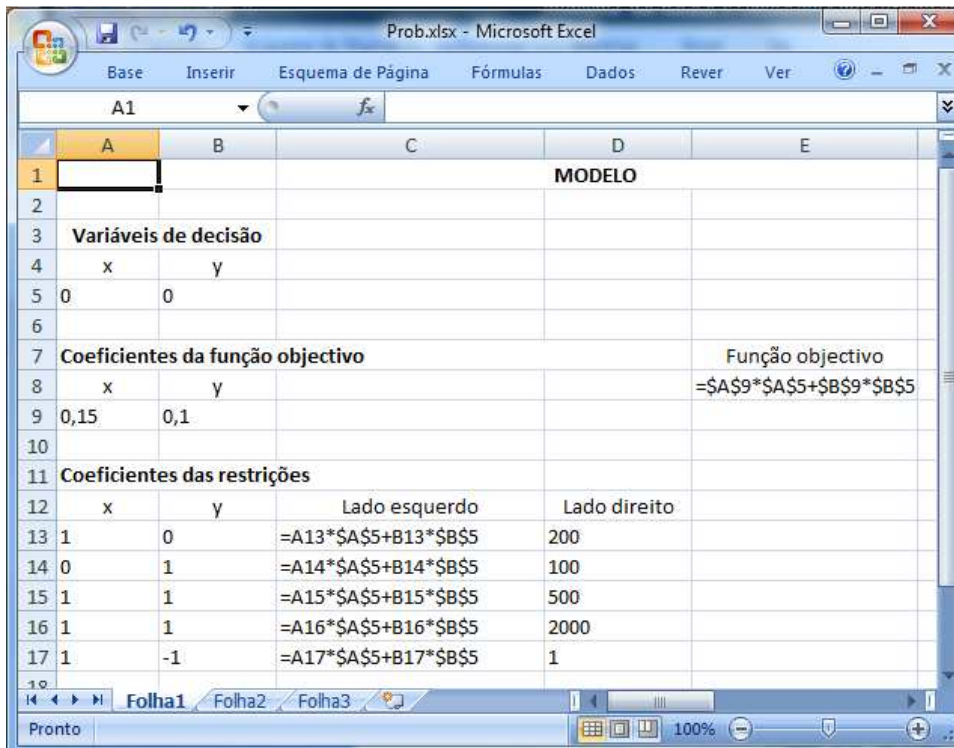


Figura 63: Introdução dos dados do modelo de PL do Problema 3.9 na folha de cálculo

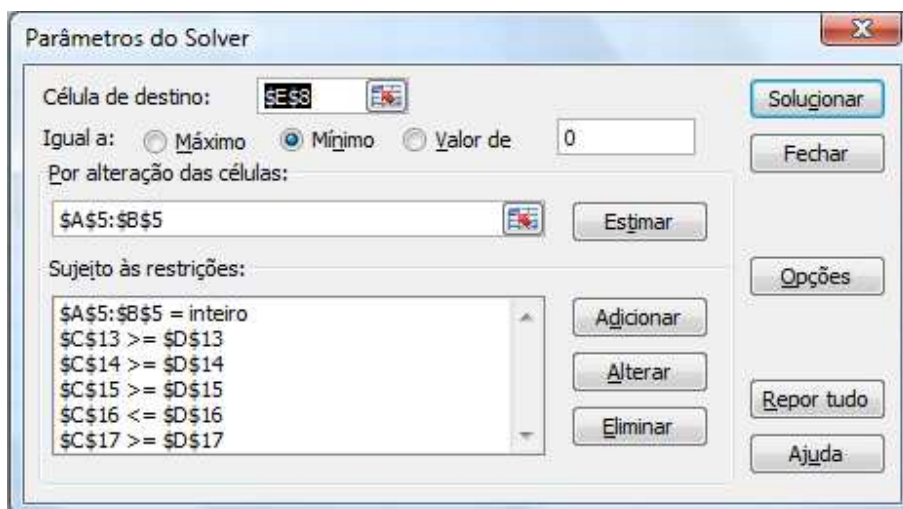


Figura 64: Introdução dos parâmetros do Problema 3.9 do Solver



Figura 65: Verificação dos parâmetros de resolução do Solver

The spreadsheet shows the following data:

MODELO				
<b>Variáveis de decisão</b>				
	x	y		
	251	249		
<b>Coefficientes da função objectivo</b>				<b>Função objectivo</b>
	x	y		62,55
	0,15	0,1		
<b>Coefficientes das restrições</b>				
	x	y	Lado esquerdo	Lado direito
	1	0	251	200
	0	1	249	100
	1	1	500	500
	1	1	500	2000
	1	-1	2	1

Figura 66: Apresentação da solução óptima do Problema 3.9

Em modelos com este tipo de problema, a utilização de ferramentas como o comando Solver do Microsoft Excel deve ser fomentada pois é a única maneira do aluno conseguir determinar a sua solução óptima.

### 3.3.4 Pós-Optimização: Adição de Novas Restrições

Nos objectivos específicos do ensino da Programação Linear [ME98], consta “(...)a análise do impacto, em problemas reais, da adição de novas restrições.” Este objectivo enquadra-se na análise de pós-optimização onde é estudado o impacto, na solução óptima, resultante de alterações no modelo inicial.

A adição de uma nova restrição não altera o gradiente da função objectivo, mas pode restringir o conjunto das soluções admissíveis do problema original, pelo que o novo valor óptimo da função objectivo nunca poderá ser “melhor” que o correspondente do problema original. Desta forma, o primeiro passo consiste em verificar se a solução óptima já obtida satisfaz a nova restrição: em caso afirmativo, a solução permanece óptima para o novo problema e o processo termina; caso contrário, é necessário determinar a nova solução óptima. A introdução de uma nova restrição, pode conduzir às seguintes situações:

- não alterar a região admissível, mantendo a solução óptima;
- alterar a região de admissibilidade, não alterando a solução óptima;
- alterar a região de admissibilidade e a solução óptima.

Para ilustrar a análise de pós-optimização, considere-se, no *Problema 3.2.*, a ocorrência de diversas situações alternativas que implicam a não alteração da solução óptima. Suponha-se que as alterações a estudar não terão impacto no valor do lucro unitário de cada banheira (o diferencial entre os novos custos e preços de venda actualizados mantém-se).

**1º Caso:** Considere-se a necessidade de empacotar as banheiras produzidas. Para cada banheira redonda são necessárias quatro horas e para cada banheira rectangular cinco horas. Sabendo que a empresa tem, diariamente, 300 horas disponíveis na secção de empacotamento, a restrição adicional será:

$$4x + 5y \leq 300$$

A solução óptima do problema inicial é  $x = 20$  e  $y = 30$ . Substituindo-a na nova restrição, observa-se que a solução verifica a restrição:

$$4 \times 20 + 5 \times 30 = 230 \leq 300 \text{ (V)}$$

A solução obtida permanece óptima, como se pode confirmar pela representação gráfica na Figura 67, em que se confirma a não alteração da região admissível. Conclusão: o lucro máximo diário mantém-se, 210 centenas de euros, correspondentes à produção diária de 20 banheiras redondas e 30 rectangulares; os recursos inicialmente disponíveis, 90 horas para fabrico e 80 horas para acabamento, são completamente utilizados e das 300 horas disponíveis para o empacotamento são utilizadas 230 horas ( $4 \times 20 + 5 \times 30 = 230 \leq 300$ ), sobrando 70 horas.

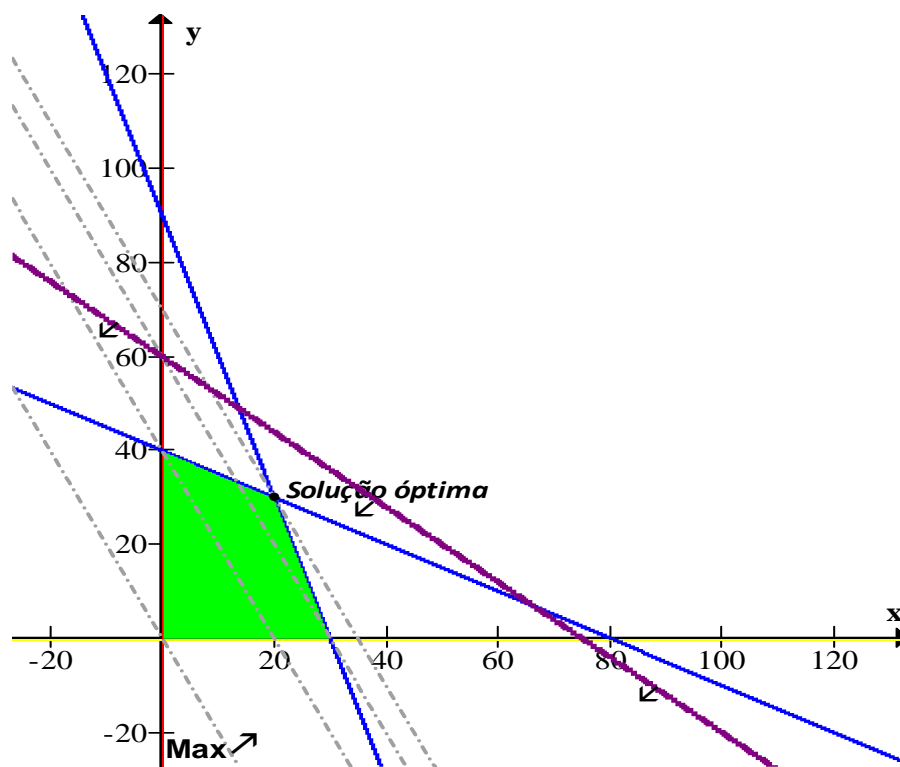


Figura 67: Determinação da solução óptima após adição da restrição  $4x + 5y \leq 300$  à formulação inicial do problema 3.2

**2º Caso:** Para acompanhar as novas tendências do mercado, a empresa tem em estudo a viabilidade da instalação do sistema de hidromassagem em todas as banheiras produzidas. Como não possui técnicos especializados para sua

montagem, terá de contratar uma equipa externa que exige no mínimo 120 horas de contratação diária. Para instalar o sistema são necessárias 3 horas em cada banheira redonda e 4 horas em cada banheira rectangular. A restrição adicional respectiva é:

$$3x + 4y \geq 120$$

Substituindo a solução óptima nesta restrição, observa-se que a solução verifica a restrição:

$$3 \times 20 + 4 \times 30 = 180 \geq 120 \text{ (V)}$$

A solução óptima manteve-se, mas a região admissível foi alterada, como se pode comprovar através representação gráfica na Figura 68. Conclusão: a equipa de instalação do sistema de hidromassagem terá de ser contratada por 180 horas ( $3 \times 20 + 4 \times 30 = 180 \geq 120$ ).

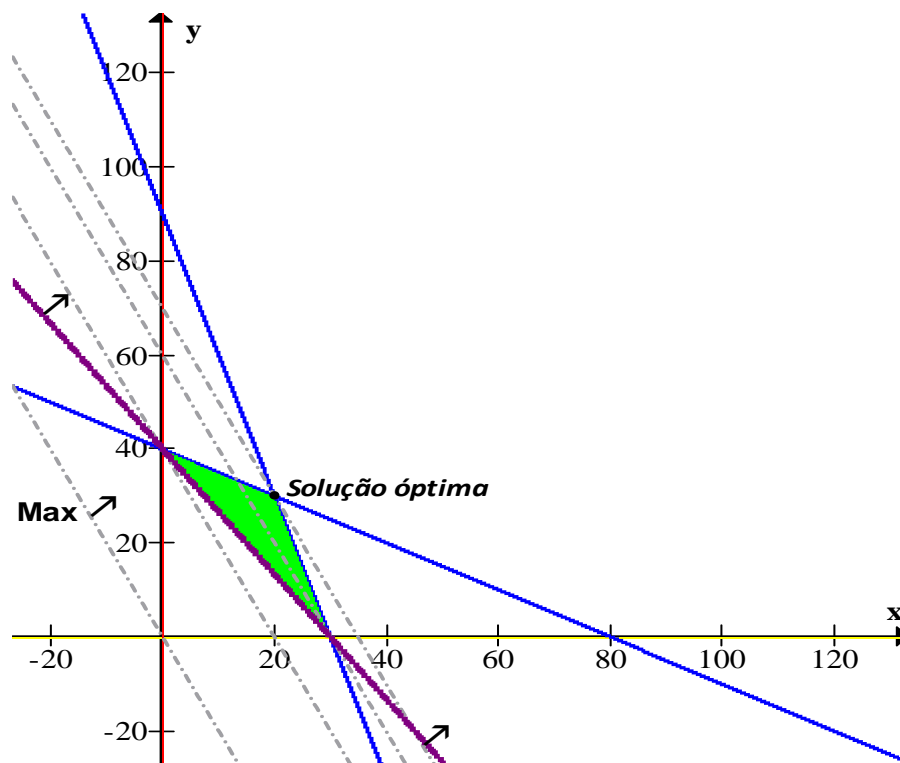


Figura 68: Determinação da solução óptima após adição da restrição  $3x + 4y \geq 120$  à formulação inicial do problema 3.2

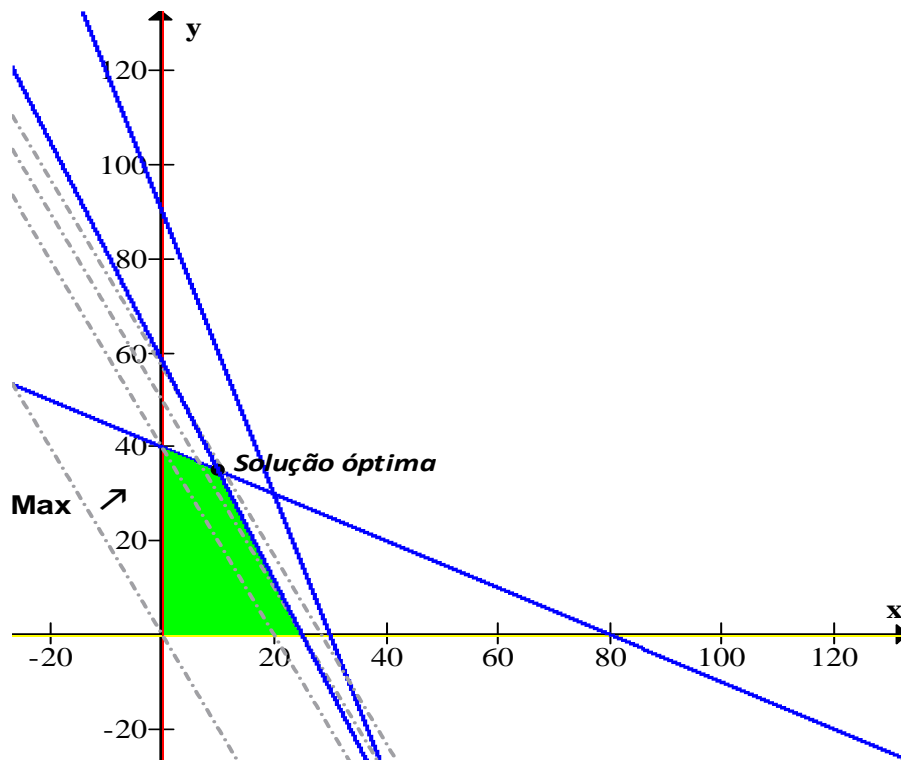
**3º Caso:** A fábrica decidiu colocar uma base anti-derrapante nas banheiras. Para colocar as bases são necessários sete minutos para cada banheira redonda e três para cada banheira rectangular. Sabendo que a empresa tem, no máximo, 175 minutos disponíveis por dia para essa tarefa, a restrição adicional respectiva é:

$$7x + 3y \leq 175$$

Substituindo a solução óptima nesta restrição, observa-se que não verifica a restrição, deixando de ser admissível para a nova região de admissibilidade:

$$7 \times 20 + 3 \times 30 = 230 > 175$$

O passo seguinte será determinar a nova solução óptima. Na Figura 69 apresenta-se a respectiva resolução gráfica: a nova solução óptima  $x = 10$  e  $y = 35$ , corresponde ao ponto de intersecção das rectas associadas às restrições  $x + 2y \leq 80$  e  $7x + 3y \leq 175$ .



**Figura 69:** Determinação da solução óptima após adição da restrição  $7x + 3y \leq 175$  à formulação inicial do problema 3.2

O lucro total diminuiu (em relação à solução ótima inicial) para 165 *centenas de euros* ( $z = 6 \times 10 + 3 \times 35 = 165$ ), passando a ser produzidas 10 banheiras redondas e 35 banheiras rectangulares. Os tempos disponíveis para o acabamento e colocação das bases anti-derrapantes são completamente utilizados, mas dado que a produção de banheiras diminuiu, das 90 horas para o fabrico passam a sobrar 25 horas ( $3 \times 10 + 35 = 65 \leq 90$ ).

**4º Caso:** Nova situação: colocação de pegas nas banheiras. Para aplicar este acessório, são necessários 6 minutos para cada banheira redonda e 3 para cada banheira rectangular. No máximo, por dia, podem ser disponibilizados 120 minutos para a execução deste serviço. A restrição adicional respectiva é:

$$6x + 3y \leq 120$$

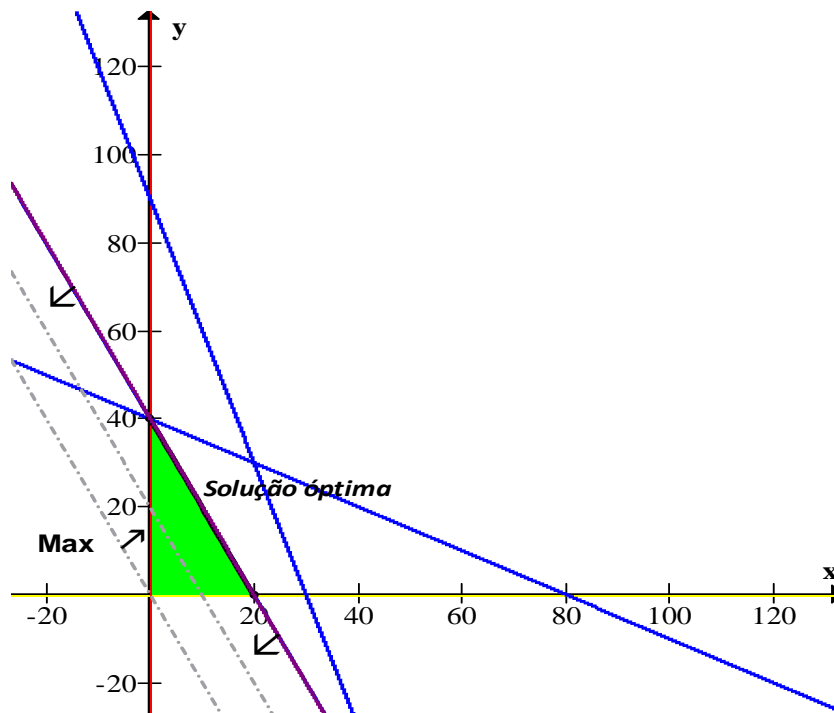
Substituindo a solução ótima nesta restrição, constata-se que a solução não verifica a nova restrição, deixando de ser admissível para a nova região de admissibilidade:

$$6 \times 20 + 3 \times 30 = 210 > 120$$

É necessário determinar a nova solução ótima. Da resolução gráfica, na Figura 70, conclui-se que não existe apenas uma solução ótima: todos os pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao segmento de recta de extremos (20,0) e (0,40) são solução do novo problema.

O lucro máximo será 120 *centenas de euros*, por dia ( $z = 6 \times 20 + 3 \times 0 = 120$ ). O tempo disponível para a fixação das pegas é completamente utilizado, mas, relativamente aos restantes recursos disponíveis, a sua utilização dependerá da solução ótima alternativa escolhida. Por exemplo, se for escolhida só a produção de 20 banheiras redondas, as 90 horas disponíveis para fabrico e as 80 horas disponíveis para acabamento, não são totalmente utilizadas: sobram 60 horas ( $3 \times 20 + 0 = 60 \leq 90$ ) na linha de fabrico e 60 horas ( $20 + 2 \times 0 = 20 \leq 80$ ) do tempo disponível para o acabamento. Mas, se for escolhida só a produção de 40 banheiras rectangulares, só as 90 horas disponíveis para fabrico é que não serão totalmente

utilizadas: sobram 50 horas ( $3 \times 0 + 40 = 40 \leq 90$ ); o tempo disponível para acabamento é completamente utilizado ( $0 + 2 \times 40 = 80$ ).



**Figura 70: Determinação da solução ótima após adição da restrição  $6x + 3y \leq 120$  à formulação inicial do problema 3.2**

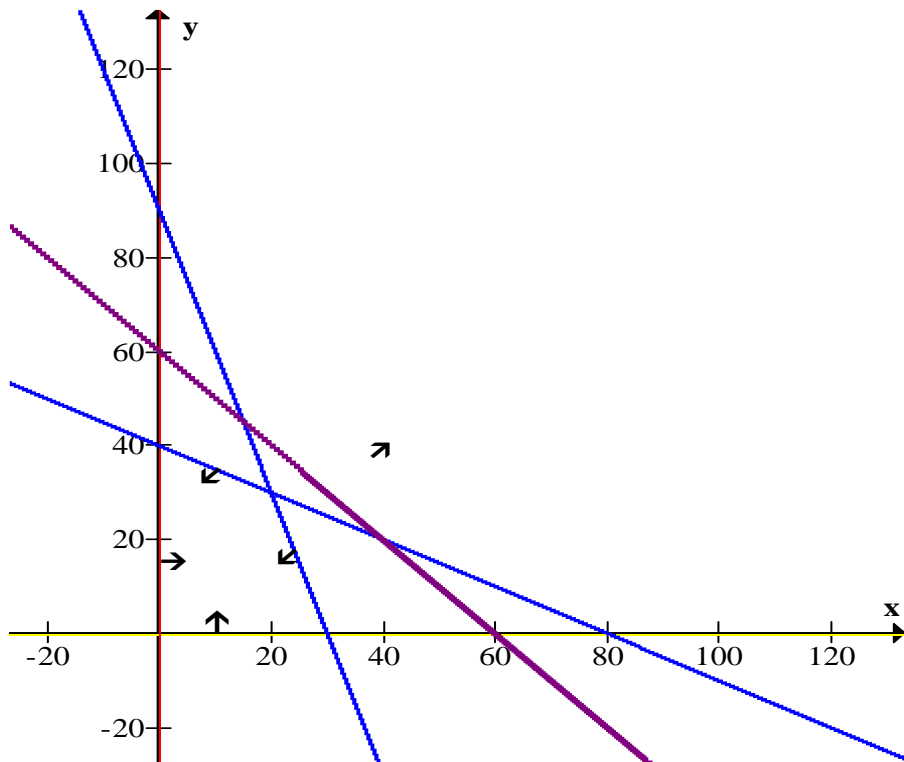
**5º Caso:** A administração da empresa pretende saber se é possível produzir no mínimo 60 banheiras por dia, com os recursos que dispõe. A restrição adicional respectiva é:

$$x + y \geq 60$$

Substituindo a solução ótima nesta restrição, observa-se que não verifica a restrição, deixando de ser admissível para a nova região de admissibilidade:

$$1 \times 20 + 1 \times 30 = 50 < 60$$

Da resolução gráfica, na Figura 71, conclui-se que não existe solução ótima pois a intersecção das restrições resulta num conjunto vazio. Conclusão, não é possível produzir pelo menos 60 banheiras, por dia, com as 90 horas para fabrico e 80 horas para acabamento.



**Figura 71: Determinação da solução óptima após adição da restrição  $x + y \geq 60$  à formulação inicial do problema 3.2**

# CAPÍTULO 4

## Conclusão

Nos programas definidos pelo Ministério da Educação para o ensino da Programação Linear nas disciplinas de Matemática A do 11º ano e Matemática B do 12º ano do Ensino Secundário são claramente definidos o objectivo primordial, os objectivos específicos e a abordagem a seguir: *“motivar os alunos para a aprendizagem da Matemática, mostrando-lhes verdadeiros problemas reais nos quais a Geometria que estão a aprender é actualmente usada na indústria, na Economia, etc.”*; como objectivos específicos *“(…) a tradução Matemática das ideias expressas em linguagem corrente; a representação gráfica de sistemas de inequações lineares; a conexão entre a solução de um sistema de inequações lineares e um plano factível de produção; a ligação gráfica entre uma função objectivo e uma região possível do plano, de forma a obter a “melhor” solução para o problema; a interpretação da solução obtida para o problema; a análise do impacto, em problemas reais, da adição de novas restrições.”* [ME98] e *“(…) uma abordagem geométrica para a solução de problemas de máximos ou de mínimos de uma expressão linear com duas variáveis, sujeitas a um conjunto de restrições também lineares. Consegue-se, ao mesmo tempo, uma concretização (à custa de enunciados apelativos e diferenciados) de técnicas algébricas de resolução.”* [ME98].

Ao longo de todo o trabalho, pretendeu-se dar cobertura à totalidade dos objectivos definidos. Em particular, enfatizaram-se os aspectos considerados de maior importância no ensino da Programação Linear: a distinção entre a formulação e técnicas de resolução de problemas de programação linear restritos a valores inteiros, a interpretação de resultados (cuja amplitude é directamente dependente

do método e da tecnologia utilizada) e as diferenças e as vantagens decorrentes da utilização de calculadoras gráficas e do comando Solver do Microsoft Excel.

No Capítulo 1, introduziu-se o tema “A Programação Linear no Ensino Secundário”. Referiram-se a abordagem e os objectivos específicos propostos pelo Ministério da Educação e destacou-se a importância da utilização das TIC no seu ensino.

No Capítulo 2, descreveu-se todo o processo e organização que envolve o ensino/aprendizagem da disciplina de Matemática: programas, recursos físicos, interdisciplinaridade com TIC e objectivos da aprendizagem da Programação Linear.

No Capítulo 3, descreveu-se o método da Investigação Operacional e trabalharam-se as diversas etapas desde a formulação, passando pela resolução, até à pós-optimização de problemas de Programação Linear. Apresentou-se a estrutura geral do processo de formulação de problemas de Programação Linear contínua e Programação Linear Inteira. A selecção de problemas efectuada, para ilustrar esta fase, aposta no desenvolvimento da capacidade de reconhecimento do tipo de problema: a distinção entre os dois tipos de problemas é estabelecida pelas restrições de integralidade, que garantem que solução óptima seja composta por valores inteiros. Introduziu-se o primeiro método de determinação da solução óptima para problemas de Programação Linear com duas variáveis de decisão baseado na representação gráfica da região de admissibilidade. Como a integralidade das variáveis de decisão tem implicações óbvias no método utilizado para a sua resolução, é apresentado um procedimento sistematizado de resolução dos problemas inteiros que se baseia na resolução do problema relaxado. Os métodos são ilustrados, recorrendo à apresentação de problemas com diferentes cenários: o conjunto das soluções admissíveis é limitado e a solução óptima é única, o conjunto das soluções admissíveis é limitado e existem soluções óptimas alternativas, o conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e existe uma solução óptima única, o conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e existem soluções óptimas alternativas, o conjunto das soluções admissíveis é ilimitado e o valor óptimo da função objectivo é infinito (a solução óptima é ilimitada) e o conjunto das

soluções admissíveis é vazio e o problema é impossível. Foi apresentada a resolução de alguns problemas de PL com recurso ao uso da calculadora gráfica e do computador. Destacaram-se as especificidades de cada ferramenta e o uso que pode ser feito dos resultados que se obtêm. Mostrou-se como o uso da calculadora gráfica pode agilizar a resolução dos problemas de PL que envolvem duas variáveis de decisão, mas não dispensa o correcto conhecimento do procedimento da determinação da solução óptima. Ilustraram-se as vantagens e limitações da utilização de duas calculadoras gráficas na resolução dos problemas de Programação Linear contínua e nos de Programação Linear Inteira: o modelo TI-84 Plus Silver Edition da calculadora Texas e o modelo fx-9860G SD da calculadora Casio. As máquinas foram escolhidas por serem as mais utilizadas na Escola. Apresentou-se ainda a outra das ferramentas exploradas neste trabalho: o computador, através do suplemento Solver do Microsoft Excel, mostrando-se como o Solver proporciona um ambiente rico para o ensino da PL - embora não possibilite observar a evolução do processo de obtenção da solução óptima, permite aos alunos explorar os modelos por um processo flexível, resolvendo com a mesma facilidade problemas de Programação Linear contínua e de Programação Linear Inteira; pode ser usado em diferentes problemas contendo várias variáveis de decisão e os relatórios gerados (distintos para cada tipo de problema) permitem a análise completa dos resultados, incluindo a fácil observação dos efeitos provocados por alterações feitas às restrições ou à função objectivo. Destacou-se a vantagem da sua utilização em problemas em que não é fácil determinar graficamente a solução óptima inteira, apresentando um problema enquadrado na Programação Linear Inteira em que a solução do problema relaxado não é inteira e a escala de representação da região de admissibilidade impossibilita a representação e identificação de todas as soluções admissíveis inteiras e conseqüentemente da solução óptima inteira. Ao longo deste capítulo, destacou-se a importância da interpretação económica e análise crítica dos resultados obtidos. Em particular, foram analisadas as conseqüências, tanto na região admissível como na solução óptima, da adição de novas restrições à formulação inicial do problema.

Atendendo a que este módulo é comum aos cursos de Ciências e Tecnologias, Socioeconómicos e Profissionais que dão seguimento a cursos superiores como Engenharia, Economia, Gestão, Matemática, etc., é importante levar a cabo discussões com o objectivo de rever a forma de como deve ser leccionada a PL, com base nas práticas aqui relatadas, dado que o grande problema à implementação no terreno da leccionação da Programação Linear reside na falta de preparação científica dos docentes, não só porque é uma novidade programática mas também porque poderão mesmo desconhecer as matérias relacionadas com a Investigação Operacional, onde se insere a Programação Linear.

Neste trabalho, estão presentes as principais estratégias para ultrapassar os erros mais frequentes cometidos na resolução de exercícios de PL, podendo ser uma contribuição - apoio tutorial - para melhorar a competência dos docentes ao nível da PL e as suas aplicações.

Sugere-se então a inserção de um novo módulo, no 12º ano, que trabalhasse o paralelismo entre o método analítico e o método de Simplex, na resolução de problemas de PL, com duas variáveis, e que introduzisse conceitos básicos de Cálculo Matricial necessários ao ensino do método Simplex, que surgiria como mais-valia na interpretação económica (mais detalhada e completa) das soluções.

# Bibliografia

- [MG11] Bernardes, A., Loureiro, C., Viana, J. P., Bastos, R., *Matemática 11 – Geometria*, Porto, Edições Contraponto.
- [IO01] Bronson, R., Naadimuthu, G., Costa, R., *Investigação Operacional*, Lisboa, McGraw-Hill, 2001, 2ª Edição.
- [ECE88] Carvalho, A., *Epistemologia das Ciências da Educação*, Porto, Afrontamento, 1988.
- [UEDC96] Duarte, J., *Utilizações educativas da folha de cálculo*. Documento elaborado para um curso de formação de formadores no âmbito do Projecto FORJA. ESE de Setúbal, 1996.
- [AEEA94] Ferreira, M. S., Santos, M. R., *Aprender a Ensinar Ensinar a Aprender*, Porto, Afrontamento, 1994.
- [XMAT04] Francelino, G.; Viegas, C, *XEQMAT, Matemática 11º ano, volume 1*, Lisboa, Texto Editora, 2004, 1ª Edição.
- [IOPL99] Hill, M. M., Santos, M. M., *Investigação Operacional – Vol. 1 – Programação Linear*, Lisboa, Edições Sílabo, 1999, 1ª Edição.
- [IPO06] Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (Tradução de Ariovaldo Griesi), *Introdução à Pesquisa Operacional*, São Paulo, McGraw-Hill, 2006, 8ª Edição.
- [ME98] Loureiro, C., Oliveira, A. F., Ralha, E., Bastos, R., *Geometria: Matemática - 11º ano de escolaridade*, Editorial do Ministério da Educação, 1998, 1ª Edição.
- [ME01] Ministério da Educação, *Matemática A - 10º Ano, Cursos Científico-humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*, Departamento do Ensino Secundário, homologação 22 de Fevereiro de 2001.

- 
- [ME05] Ministério da Educação, *Matemática B - 10º Ano, Cursos Tecnológicos*, Departamento do Ensino Secundário, homologação 03 de Dezembro de 2005.
- [ME03] Ministério da Educação, *Programa de Tecnologias da Informação e Comunicação – 9º e 10º anos*, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, homologação 17 de Junho de 2003.
- [NCTM91] NCTM, *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (tradução do original em inglês da APM), Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.
- [MG 06] Neves, M. A. F., Guerreiro, L., Moura, A., *Geometria II – Matemática A, 11º Ano*, Porto, Porto Editora, 2006.
- [MGE06] Neves, M. A. F., Guerreiro, L., Moura, A., *Geometria II – Exercícios de Matemática A, 11º Ano*, Porto, Porto Editora, 2006.
- [MB06] Neves, M. A. F., Silva, M. C., Guerreiro, L., Pereira, A., *Matemática B, 12º Ano – Cursos Tecnológicos*, Porto, Porto Editora, 2006.
- [LBSE87] Pires, E. L., *Lei de Bases do Sistema Educativo*, Porto, Edições Asa, 1987, 1ª Edição.
- [ARP03] Pólya, G., *A arte de resolver problemas* (tradução de HOW to solve it por Heitor Lisboa de Araújo), Rio de Janeiro, Editora Interciência, 2003.
- [LP73] Rogers, C.R., *Liberdade para Aprender*, Belo Horizonte, Interlivros, 1973.
- [PDA89] Tavares, J., Alarcão, *Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem*, Coimbra, Almedina, 1989.
- [IO96] Tavares, L. V., Oliveira, R. C., Themido, I. H., Correia, F. N., *Investigação Operacional*, Lisboa, McGraw-Hill, 1996.

---

**Sites Consultados**

[http://www.prof2000.pt/users/i.pinto/vitae/textos/04\\_ProgLinear\\_JPinto.pdf](http://www.prof2000.pt/users/i.pinto/vitae/textos/04_ProgLinear_JPinto.pdf)

(13/05/2006)

[http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Dantzig\\_George.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Dantzig_George.html)

(07/09/2006)

[http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1975/kantorovich-autobio.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1975/kantorovich-autobio.html) (18/03/2007)

[http://repositorio.up.pt/jspui/bitstream/10216/429/2/Sistema\\_de\\_instrumentação\\_virtual\\_para\\_monitorização\\_de\\_máquinas\\_eléctricas.pdf](http://repositorio.up.pt/jspui/bitstream/10216/429/2/Sistema_de_instrumentação_virtual_para_monitorização_de_máquinas_eléctricas.pdf) (05/06/2007)

[http://www.netprof.pt/matematica/pdf/Linear\\_Solver.pdf](http://www.netprof.pt/matematica/pdf/Linear_Solver.pdf) (05/06/2007)

<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/indexem2.html> (09/08/2007)

<http://www.prof2000.pt/users/adam/matematica/Textos/Opfunda.pdf>  
(10/08/2007)

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_matemática\\_da\\_administração](http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_matemática_da_administração) (03/11/2007)

[http://www.apm.pt/files/Parecer\\_MatB\\_45d4ce709ab4b.pdf](http://www.apm.pt/files/Parecer_MatB_45d4ce709ab4b.pdf) (03/09/2007)

<http://arquivo.es.e.ips.pt/nonio/cadernos/publicacoes/matnet/modellus/index.htm>  
(04/11/2007)

[http://www2.mat.ua.pt/io/Documentos/Apontamentos/Capitulo1\\_1.pdf](http://www2.mat.ua.pt/io/Documentos/Apontamentos/Capitulo1_1.pdf)  
(28/11/2007)

<http://ia.fc.ul.pt/textos/arochoa/cap1.pdf> (7/01/2008)

<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/PC4-Cur-Pratica.doc>  
(28/03/2008)

<http://archive.ite.journal.informs.org/Vol7No1/Pachamanova/Pachamanova.pdf>

(22/05/2008)