

Ana Maria Dias Soares Cardoso

**TEORIA DOS GRAFOS: UMA REFLEXÃO
SOBRE A SUA ABORDAGEM NO
ENSINO NÃO UNIVERSITÁRIO**

Dissertação apresentada ao Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia da Universidade Portucalense como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática/Educação, sob a orientação do Prof. Doutor António Carlos Sepúlveda de Machado e Moura.

2009

Aos meus pais, à tia Eduarda e ao Doutor Pascoal

AGRADECIMENTOS

Senhor Professor Doutor António Pascoal:

É com emoção e quase sem ter palavras que lhe quero expressar toda a minha gratidão pelos seus ensinamentos, transmitidos a sorrir, com uma competência ímpar e com exemplos de vida que tentarei pôr em prática e que nunca esquecerei. O ensino, o nosso País ficaram mais pobres com o seu desaparecimento.

Também quero assinalar a disponibilidade a vontade de servir, a competência, do Professor Doutor António Machado e Moura que me ensinou com mestria e simplicidade o caminho que correctamente devo seguir ao longo da minha carreira.

Finalmente quero referir o Professor Doutor António Augusto Lopes, pois o seu carinho, o seu contínuo incentivo naquelas horas em que parece não haver forças para continuar são marcas muito fortes, que carimba a minha licenciatura.

RESUMO

A teoria dos grafos remonta ao século XVIII, quando Euler introduziu as suas ideias básicas para resolver o famoso problema das pontes de Königsberg. No entanto, nas últimas décadas, a teoria dos grafos estabeleceu-se, por direito próprio, como uma importante ferramenta matemática numa grande variedade de áreas do conhecimento e algumas áreas específicas, tais como, investigação operacional, engenharia, genética, sociologia, geografia, ecologia, análise numérica, computação paralela, telecomunicações e química. Aliás, é corrente dizer-se que um grande leque de problemas em diversas ciências pode ser modelizado por um grafo e resolvido com a teoria dos grafos. Por exemplo, é possível calcular as diferentes combinações de voos entre duas cidades, determinar se é ou não possível percorrer todas as ruas de uma cidade sem percorrer a mesma rua duas vezes e determinar o número de cores necessárias para colorir um mapa.

Até à década de 90 do século transacto, a teoria dos grafos era abordada somente no ensino universitário. Com o surgimento de novas disciplinas no ensino secundário, nomeadamente, da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, a teoria dos grafos ganha um lugar nos programas oficiais; aos alunos do ensino não universitário é-lhes proporcionado uma abordagem, ainda que introdutória, a esta teoria.

Neste contexto, algumas questões pertinentes surgem no espírito das pessoas interessadas em questões, simultaneamente, pedagógicas e em rigor científico. Será que a teoria dos grafos é exposta e analisada com o rigor matemático adequado? Será que, numa tentativa de chegar a públicos mais jovens, não se comprometeu a qualidade científica?

O objectivo de fundo do trabalho que se apresenta é, por um lado, mostrar uma perspectiva pessoal e um posicionamento quanto à abordagem que é feita à teoria dos grafos no ensino não universitário e, por outro lado, levantar a questão da ausência da teoria dos grafos nos programas de Matemática A no ensino secundário. Por que motivo não é esta teoria incluída nesses programas? Será só útil e relevante na prossecução dos estudos de alunos interessados em Ciências Sociais?

Neste sentido, inicia-se o presente trabalho, após uma abordagem intuitiva, por uma compilação de resultados fundamentais, alguns elementares e outros com maior grau de complexidade, da teoria dos grafos. Serão apontados os conceitos julgados essenciais a

apresentar aos alunos do ensino secundário sobre teoria dos grafos, de forma a construir um corpo de conhecimentos coerente e consistente. Ao fazer-se tal listagem, apresenta-se um posicionamento pessoal de como deveria ser tal abordagem, servindo de base para uma análise crítica da implementação da teoria dos grafos no ensino não universitário.

Numa segunda parte da tese, no capítulo três, são sumarizadas algumas aplicações da teoria dos grafos, em diversas áreas do conhecimento. Nesses problemas apresentados, é mostrado como a teoria dos grafos é usada, numa primeira etapa, na sua modelização e, numa etapa posterior, na sua resolução, tornando-se perceptível a sua grande aplicabilidade e abrangência. Os problemas sumarizados passam pela determinação de caminhos mais curtos em grafos ponderados, por problemas de minimização, pelo uso diverso do tópico das árvores e suas aplicações, e pelo coloramento de grafos e mapas.

No capítulo quatro é feita uma reflexão sobre a abordagem da teoria dos grafos no ensino não universitário, passando pelo ensino básico e pelo ensino secundário. Ao nível do ensino básico, são identificados alguns conteúdos de teoria dos grafos que já pertencem aos programas oficiais e, também, são lançadas algumas propostas de trabalho adequadas à faixa etária de cada ciclo, e que, em alguns casos, já são levadas a cabo de forma espontânea pelos titulares das turmas, sem existir a consciência que há um suporte teórico subjacente ao exercício. Ao nível do ensino secundário, são referidas algumas sugestões de trabalho consideradas adequadas para os alunos da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais e questionada a ausência formal da teoria dos grafos na Matemática A.

ABSTRACT

Graph theory goes back to the XVIII century, when Euler introduced its basic ideas to solve the famous problem of the Königsberg's bridges. However, in the last few decades, graph theory has been established, by its own right, as an important mathematical tool in a wide variety of areas of knowledge, such as operational research, engineering, genetics, sociology, geography, ecology, numerical analysis, parallel computation, telecommunications and chemistry. Besides, it is usual to say that a considerable number of problems in a wide variety of sciences can be modeled by a graph and solved using graph theory. For example, it is possible to calculate the different combinations of flights between two cities, to determine if it is possible or not to walk in every street of a city without walking in a street twice and to know the number of colours we need to colour a map.

Until the 90s of the last century, graph theory was taught just in university. With the rise of new subjects in high school, namely, Mathematics Applied to Social Sciences, graph theory gained a place in the official curriculum; therefore, the non-university students are exposed to an introduction to this theory.

In this context, some relevant questions arise in the spirit of people interested in pedagogic and scientific problems. Is graph theory introduced and analysed with the adequate mathematical rigour? Can it be that the attempt of dealing with younger students, comes at the expense of scientific quality?

The main goal of this work is, on one hand, to show a personal perspective about the approach that is done to graph theory with non-university students, and on the other hand, to put the question of why graph theory doesn't appear in the Mathematics' curriculum (level A). Is graph theory just relevant for students interested in social sciences?

The thesis starts, after an intuitive approach, with a compilation of the fundamental results, some elementary and others with more complexity, of graph theory. Concepts that are thought to be essential are selected in order for the high school students to build a coherent and consistent body of knowledge. Making such selections will show, from a personal perspective, how the approach of graph theory should be, forming a basis for a critical analysis of the current implementation of graph theory in high school.

In the second part of the thesis, the third chapter, we summarise some applications of graph theory in some areas of science. For each application, we show how graph theory

is used, in the first stage, to model the problem, and in the latter stage, to solve the problem. The problems that are mentioned consist of determining the shortest path in a weighted graph, the problem of minimisation, problems that need the use of trees, and the problem of colouring graphs and maps.

In chapter number four, we give a reflection on how to approach graph theory to non-university students, going through basic school and high school. In the basic school we identify some contents that already belong to the curriculum, and also, propose some activities adequate for the age of the student at each stage (1st, 2nd, 3rd cycle), that, in many cases, are being taught in a spontaneous way, without the conscience that there exists a theory that supports the activities. For the high school, we summarise some proposals of activities for the students of Mathematics Applied to Social Sciences and we question the formal absence of graph theory in the Mathematics'curriculum (level A).

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iv
1 Introdução	1
1.1 Uma primeira abordagem	1
2 Conceitos fundamentais em teoria dos grafos	5
2.1 Grafos	5
2.1.1 Alguns tipos de grafos	10
2.1.2 Operações com grafos	14
2.1.3 Imersões de grafos	20
2.2 Percurso, trajecto, caminho, distância e diâmetro	21
2.3 Grafos eulerianos e hamiltonianos	27
2.4 Árvores	32
2.4.1 Definição e propriedades	32
2.4.2 Teorema de Cayley	41
2.5 Planaridade e dualidade	42
2.5.1 Fórmula de Euler para grafos planos	44
2.5.2 Dualidade	46
2.6 Coloramento de grafos	47
2.6.1 O número cromático	48
2.6.2 O coloramento de mapas	50

2.6.3	Coloramento de arestas	51
2.6.4	Polinómios cromáticos	52
3	Teoria dos grafos - algumas aplicações	54
3.1	O problema do caminho mais curto	54
3.1.1	Grafos ponderados	54
3.1.2	O algoritmo Dijkstra	55
3.2	O problema do carteiro chinês	57
3.3	O problema do caixeiro viajante	59
3.4	O problema da conexão mínima e o algoritmo Kruskal	59
3.5	Enumeração de moléculas	60
3.6	Aplicações de árvores	61
3.6.1	Árvores binárias - algoritmo de procura	62
3.6.2	Árvores de decisão	65
3.6.3	Códigos com prefixo	66
3.6.4	Árvores e ordenação	68
3.6.5	Construção de árvores de ligação	70
3.6.6	Árvores de ligação minimais	71
3.7	Coloramento de grafos e construção de horários	72
3.8	O problema do casamento	73
4	A teoria dos grafos no ensino não universitário	74
4.1	Ensino básico	75
4.1.1	1º Ciclo	75
4.1.2	2º Ciclo	76
4.1.3	3º Ciclo	78
4.2	Ensino secundário	79
4.2.1	Matemática Aplicada às Ciências Sociais	79
4.2.2	Matemática A	87
4.3	Comentários finais	88
	Bibliografia	90

Lista de Figuras

1.1	Grafos representativos da relação «divide»	1
2.1	Grafo simples	6
2.2	Grafo completo K_4	11
2.3	Cubo: grafo regular de grau 3	11
2.4	Grafo bipartido completo $K_{4,3}$	13
2.5	Estrela: grafo bipartido completo $K_{1,5}$	14
2.6	Grafo G	15
2.7	Grafos $G - e$ e $G - v$, respectivamente	15
2.8	Ilustração de uma ponte	17
2.9	Grafo circuito ou ciclo C_6	18
2.10	Grafo roda W_6	19
2.11	Exemplo de um grafo G	22
2.12	Grafo não isomorfos	24
2.13	Grafo euleriano e semi-euleriano, respectivamente	28
2.14	Pontes de Königsberg	28
2.15	Grafo que formaliza o problema das pontes de Königsberg	29
2.16	Grafo hamiltoniano e semi-hamiltoniano, respectivamente	31
2.17	Exemplos de árvores	32
2.18	Exemplo de um grafo G e de uma das suas árvores de ligação	36
2.19	Grafo G	37
2.20	Etapas da construção da árvore de ligação do grafo G	38
2.21	Mapa 3-colorável(f) e 4-colorável(v)	51
3.1	Ilustração do algoritmo Dijkstra	55

3.2	Qual o caminho mais curto entre A e L ?	58
3.3	Grafo ponderado ilustrativo do problema do carteiro chinês	58
3.4	Árvores do butano e isobutano, onde apenas figuram os átomos de carbono	61
3.5	Exemplo de um algoritmo de procura	64
3.6	Árvore binária com um código com prefixo	67
4.1	Grafos a desenhar, sem levantar o lápis e sem repetir a mesma linha	76
4.2	Grafos a desenhar, sem levantar o lápis e sem repetir a mesma linha	76
4.3	Quantas cores são precisas?	77
4.4	Grafo que representa uma rede viária rectangular	83
4.5	Grafo que representa as ruas de um bairro	84
4.6	Grafo com vértices de grau ímpar não consecutivos	85
4.7	Esquema de um pavilhão, saídas de águas e respectivas distâncias	87

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo introdutório, optou-se por fazer uma primeira abordagem a conceitos básicos em teoria dos grafos de uma maneira intuitiva, na expectativa de motivar para a leitura e de facilitar um primeiro contacto com a terminologia utilizada.

São abordadas, a partir de exemplos simples, as noções de grafo, grafo simples, grafo directo, subgrafo, grafos isomorfos, caminho, grafos eulerianos e hamiltonianos, árvores e grafos planares.

1.1 Uma primeira abordagem

Considere-se a figura 1.1, onde está representada a relação divide, sob a forma de um di-

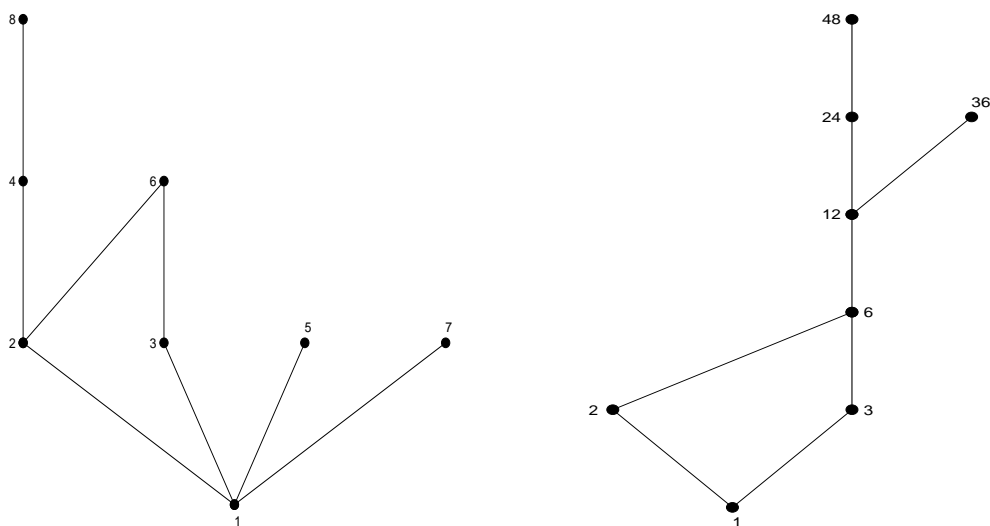


Figura 1.1: Grafos representativos da relação «divide»

agrama que utiliza pontos e linhas. Os pontos $1, 2, 3, \dots, 48$, assinalados com um ponto, são os vértices e as linhas são as arestas. O diagrama, perspectivado como um todo, é um grafo. O grau de um vértice é o número de arestas que têm esse vértice como ponto de chegada. No grafo da esquerda, o vértice 2 tem grau 3, mas no grafo da direita tem grau 2.

Um grafo representa um conjunto de pontos e as suas ligações, mas quaisquer propriedades métricas são irrelevantes. Por exemplo, as distância entre os vértices e a forma das arestas (segmentos de recta ou outro formato mais complexo) não têm importância, na medida em que, num grafo, só é essencial saber se os vértices estão ou não ligados.

Dois grafos dizem-se isomorfos se existir uma relação de um para um entre os seus vértices, no sentido de que dois vértices são unidos por uma aresta num grafo, se e só se os vértices correspondentes estão unidos por uma aresta no outro grafo. Em termos correntes, pode dizer-se que a ideia de espaço e distância é irrelevante.

Um grafo diz-se simples se não contiver nenhum laço nem arestas múltiplas. Os grafos da figura 1.1 têm laços, embora de forma implícita, já que um número é sempre divisor de si próprio; em termos visuais, existiria uma aresta que partia e chegava ao mesmo vértice, sem passar por nenhum outro. No entanto, não têm arestas múltiplas, já que, para cada par de vértices, só existe, no máximo, uma aresta a ligá-los.

Diz-se que existiriam arestas múltiplas no caso que se segue. Admita-se que se construiu um grafo para representar a rede viária entre as cidades A , B e C , onde cada cidade representa um vértice e as arestas são as estradas que ligam essas cidades. Se as cidades A e B têm duas estradas diferentes a uni-las, então, existem arestas múltiplas entre esses dois vértices.

Os grafos apresentados como exemplo na figura 1.1 são grafos directos ou digrafos, no sentido de que as arestas são de sentido único, ou seja, por exemplo, 1 divide 2, mas 2 não divide 1. Já no caso supracitado da rede viária entre duas cidades, as arestas são de duplo sentido, já que a estrada que liga A a B , também liga B a A .

Uma outra situação que pode ser modelada por um grafo directo é o caso do estudo de comportamento de grupo, quando se retrata a influência de uma pessoa no pensamento

das outras pessoas do grupo, mas onde não se verifica influência mútua. Cada pessoa é representada por um vértice, e existe uma aresta directa do vértice a para o vértice b quando a pessoa representada pelo vértice a influencia a pessoa representada pelo vértice b .

Um outro exemplo é o caso de um torneio onde cada equipa joga com as outras equipas exactamente uma vez. Cada equipa é representada por um vértice e (a, b) será uma aresta se a equipa a ganhou à equipa b .

Por vezes, é necessário apenas parte de um grafo para resolver um problema. Por exemplo, considere-se o caso de uma rede de computadores situados no Porto, Braga, Coimbra, Lisboa, Évora e Faro. Se em determinada situação forem relevantes somente os do Porto, Braga e Coimbra, podem ignorar-se os outros computadores que não estão ligados aos computadores destas três cidades. Então, no grafo que modela a rede inteira, podem ser removidos os vértices das cidades não relevantes para o problema e podem ser removidas, também, as arestas que incidiam nos vértices removidos.

Quando arestas e vértices são removidos de um grafo, sem a remoção de pontos terminais das arestas remanescentes, obtém-se um grafo mais pequeno; tal grafo designa-se por subgrafo do grafo original.

Um caminho é uma sequência de arestas, uma após a outra, onde um mesmo vértice só figura apenas uma única vez. Por exemplo, na figura 1.1, no grafo da direita, a sequência $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 36$, é um caminho de comprimento 4. Um circuito é, em termos abstractos, uma sequência da forma $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, ou seja, um circuito é um caminho, com a particularidade que se inicia e termina no mesmo vértice. Note-se que a noção de caminho requer que ele não se intersecte a si mesmo, no sentido da impossibilidade de vértices repetidos (com excepção, no circuito, do vértice inicial e final, que coincidem). Um circuito de um grafo G é um seu subgrafo.

Em geral, dados dois vértices num grafo, nem sempre é possível encontrar um caminho que os ligue. Neste contexto, diz-se que uma das grandes vantagens do metro de Londres reside no facto que estando numa estação arbitrária, é sempre possível chegar a uma outra estação, sem sair da rede de metro; então, a rede de metro pode ser representada por um

grafo conexo.

Um grafo é euleriano ou hamiltoniano se contiver caminhos que incluem todas as arestas ou todos os vértices exactamente uma vez, respectivamente, e que terminam no vértice inicial.

Uma árvore é um grafo conexo que não contém circuitos, ou seja, existe somente um caminho que liga cada par de vértices.

Um grafo que possa ser redesenhado sem que exista cruzamento de arestas diz-se um grafo planar.

No capítulo seguinte, apresentam-se, de uma maneira mais formal, os conceitos fundamentais em teoria dos grafos introduzidos anteriormente.

Capítulo 2

Conceitos fundamentais em teoria dos grafos

Neste capítulo faz-se uma exposição da terminologia básica em teoria de grafos, ilustrada com alguns exemplos, assim como uma compilação de alguns teoremas e corolários considerados fundamentais.

2.1 Grafos

Os conceitos de grafo simples, grafo, subgrafo, digrafo, grafos isomorfos e matriz de adjacência são sumarizados, de forma a introduzir a teoria dos grafos.

Definição 2.1.1 (Grafo simples). *Um grafo simples G é um par $(V(G), A(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices, nodos ou pontos, e $A(G)$ é um conjunto finito de pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$, chamados arestas ou linhas; $V(G)$ é o conjunto dos vértices e $A(G)$ é o conjunto das arestas*

Note-se que $A(G)$ é um conjunto e não uma família, já que não pode existir mais do que uma aresta a unir um dado par de vértices; uma família refere-se a uma colecção de elementos, onde está em aberto a possibilidade de alguns ocorrerem mais do que uma vez. Por outras palavras, um grafo simples é constituído pelo conjunto $V(G)$ e pelo conjunto $A(G)$, tais como foram supra definidos, e por uma relação de incidência, o subconjunto $V(G) \times A(G)$.

A figura 2.1 apresenta um grafo simples G com conjunto vértice $V(G) = \{u, v, w, z\}$ e com conjunto aresta $A(G) = \{\{u, v\}, \{v, w\}, \{u, w\}, \{w, z\}\}$.

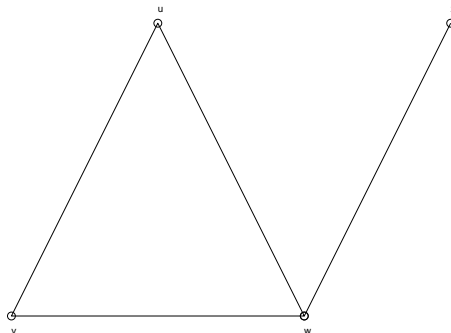


Figura 2.1: Grafo simples

Removendo-se a restrição que qualquer aresta deve unir dois vértices distintos, permitindo-se a existência de laços, e adicionando-se a possibilidade de serem permitidas arestas múltiplas, surge o conceito de grafo genérico, ou, simplesmente, de grafo.

Definição 2.1.2 (Grafo). *Um grafo G é um par $(V(G), A(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices, e $A(G)$ é uma família finita de pares não ordenados de pares de elementos, não necessariamente distintos, chamados arestas.*

Definição 2.1.3 (Subgrafo). *Seja G' um grafo. Se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, então G' é um subgrafo de G .*

Um conceito relacionado é o de digrafos ou grafos directos, apresentado de seguida.

Definição 2.1.4 (Digrafo). *Um digrafo D é um par $(V(D), A(D))$, onde $V(D)$ é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices, e $A(D)$ é uma família finita de pares ordenados de elementos de $V(D)$, chamados arcos.*

Se D não tem laços e se os arcos de D são todos distintos, então D é um digrafo simples.

Dois vértices de um grafo G são adjacentes se existe uma aresta que os una; neste caso, as arestas dizem-se incidentes nesse vértice. Duas arestas distintas de G são adjacentes se elas tiverem, pelo menos, um vértice comum.

O grau de um vértice G , representado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes nesse vértice (por convenção, um laço contribui duas vezes no cálculo do grau). Um vértice de grau zero é um vértice isolado e um vértice de grau 1 é um vértice final.

Euler mostrou que a soma do grau de todos os vértices de um grafo é sempre um número

par, igual ao dobro das arestas; este resultado é conhecido como o lema dos apertos de mão, na medida em que quando várias pessoas apertam as mãos, o número total de mãos envolvidas é par (em cada aperto estão envolvidas duas mãos).

Teorema 2.1.1 (Teorema dos apertos de mão). *Seja $G = (V(G), A(G))$ um grafo com m arestas. Então,*

$$2m = \sum_{v \in V} d(v).$$

Note-se que o teorema é válido mesmo quando existem laços e arestas múltiplas. Em consequência, em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Definição 2.1.5 (Grafos isomorfos). *Dois grafos G_1 e G_2 dizem-se isomorfos se existir uma correspondência de um para um entre os vértices de G_1 e aqueles de G_2 com a propriedade que o número de arestas que unem dois vértices de G_1 é igual ao número de arestas que unem os vértices correspondentes de G_2 .*

Um grafo pode ser completamente descrito por uma matriz, chamada matriz de adjacência, a qual especifica quais os vértices que são adjacentes no grafo. Seja G o grafo cujo conjunto vértice $V(G)$ é o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, e seja $A(G)$ o conjunto de pares não ordenados de elementos de $V(G)$. Se $\{v_i, v_j\}$ figura em $A(G)$, então v_i e v_j são adjacentes.

Definição 2.1.6 (Matriz adjacência). *A matriz adjacência de G é a matriz quadrada \mathbf{A} , de dimensão $n \times n$, cujas entradas a_{ij} são*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i, v_j \text{ adjacentes} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \text{ é uma aresta de } G \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Note-se que a matriz de adjacência é baseada na ordem escolhida para os vértices. Consequentemente, existem $n!$ matrizes de adjacência diferentes para um grafo com n vértices. Em geral, a matriz \mathbf{A} é uma matriz real e simétrica, já que $a_{ij} = a_{ji}$, já que ambas as entradas são 1 quando v_i e v_j são adjacentes, e ambas são 0, caso contrário. Também, num grafo sem laços, tem-se que $a_{ii} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

No caso de uma matriz com arestas múltiplas, as entradas da matriz de adjacência podem não ser somente zeros e uns; a (i, j) -ésima entrada da matriz é igual ao número de arestas que estão associadas a $\{v_i, v_j\}$.

Note-se, também, que num grafo directo, a matriz de adjacência não é simétrica, já que pode não existir uma aresta de v_i para v_j , quando existe uma aresta de v_j para v_i .

Diz-se que dois grafos são isomorfos se existir uma correspondência de um para um entre os vértices de dois grafos que preserve a relação de adjacência. No entanto, muitas vezes é difícil de determinar se dois grafos são ou não isomorfos, já que há $n!$ possibilidades de correspondências de um para um entre os conjuntos vértices dos dois grafos com n vértices. Na prática, testar se cada uma das $n!$ correspondências preservam a adjacência é impraticável, para um n grande.

Contudo, já será mais fácil verificar se dois grafos não são isomorfos, demonstrando que eles não partilham algumas das propriedades que grafos isomorfos partilham. Por exemplo os grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas, assim como o grau dos vértices deve coincidir; caso contrário, conclui-se pelo não isomorfismo dos grafos.

As linhas e as colunas de \mathbf{A} correspondem a uma etiquetagem arbitrária dos vértices de G ; neste contexto é de especial interesse as propriedades desta matriz que são invariantes sob permutações de linhas e colunas, nomeadamente, as suas propriedades espectrais.

Seja λ um valor próprio de \mathbf{A} . Como \mathbf{A} é real e simétrica, então, os seus valores próprios são reais, e a multiplicidade de λ é igual à dimensão do espaço dos vectores próprios correspondentes a λ .

Definição 2.1.7 (Espectro de um grafo). *O espectro de um grafo G é o conjunto dos valores próprios de \mathbf{A} , juntamente com as suas multiplicidades. Sejam $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{s-1}$ os valores próprios distintos de \mathbf{A} , e $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_{s-1})$ as correspondentes multiplicidades. Então,*

$$\text{Spec}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{pmatrix}.$$

Definição 2.1.8 (Grafos coespectrais). *Dois grafos não isomorfos dizem-se coespectrais se tiverem os mesmos valores próprios com multiplicidades idênticas.*

Por uma questão de simplicidade, os valores próprios de \mathbf{A} podem ser mencionados como os valores próprios do grafo G . Seja $(G; \lambda)$ o polinómio característico de G , ou seja, $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$, expresso como

$$\chi(G; \lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n.$$

Prova-se o resultado que se segue [1].

Teorema 2.1.2. *Os coeficientes do polinómio característico de um grafo G satisfazem:*

1. $c_1 = 0$;
2. o número de arestas de G é $-c_2$;
3. $-c_3$ corresponde ao dobro do número de triângulos em G .

Este resultado indica que o polinómio característico de um grafo é uma construção algébrica que contém informação gráfica.

Seja \mathbf{A} a matriz adjacência de um grafo G . O conjunto dos polinómios em \mathbf{A} , com coeficientes complexos, forma uma álgebra, sob as operações matriciais usuais. Esta álgebra é um espaço vectorial complexo de dimensão finita.

Definição 2.1.9. *A álgebra adjacência de um grafo G é a álgebra dos polinómios na matriz adjacência \mathbf{A} , e é representada por $\mathcal{A}(G)$.*

A matriz de incidência, de forma similar à matriz de adjacência, também define, por completo um grafo.

Para cada aresta $a_\alpha = \{v_\sigma, v_\tau\}$ de um grafo G , pode escolher-se uma de v_σ, v_τ para ser o termo positivo de a_α , e a outra para ser o termo negativo. Neste sentido, diz-se que o grafo G é orientado.

Definição 2.1.10 (Matriz de incidência). *A matriz de incidência \mathbf{D} de G , com respeito a uma dada orientação de G é a matriz quadrada de dimensão $n \times n$, cujas entradas são*

$$d_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } v_i \text{ é o termo positivo de } a_\alpha \\ -1 & \text{se } v_i \text{ é o termo negativo de } a_\alpha \end{cases}$$

As linhas da matriz de incidência correspondem aos vértices de G , e as suas colunas correspondem às arestas de G ; cada coluna contém unicamente duas entradas não nulas, $+1$ e -1 , que representam os termos positivos e negativos da correspondente arestas.

Teorema 2.1.3 (Poincaré, 1901). *Qualquer submatriz quadrada da matriz de incidência D de um grafo G tem determinante igual a 0 , $+1$ ou -1 .*

De seguida, apresentam-se alguns tipos de grafos que aparecem com frequência na literatura.

2.1.1 Alguns tipos de grafos

Definição 2.1.11 (Grafo nulo). *Um grafo cujo conjunto das arestas seja vazio é designado por grafo nulo, e representa-se por N_n , onde n é o número de vértices. Neste tipo de grafo, todo o vértice é isolado.*

Definição 2.1.12 (Grafo completo). *Um grafo simples no qual todo o par de vértices distintos é adjacente chama-se grafo completo.*

Um grafo completo com n vértices representa-se por K_n e tem $\frac{1}{2}n(n - 1)$ arestas.

Por exemplo, o grafo completo K_4 tem como matriz adjacência

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e como espectro

$$\text{Spec}(K_4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A figura 2.2 contém o grafo completo K_4 .

Definição 2.1.13 (Grafo regular). *Um grafo em que todo o vértice tem o mesmo grau é um grafo regular. Se todo o vértice tiver grau r , o grafo é regular de grau r .*

Todo o grafo nulo é regular de grau 0 , e o grafo completo com n vértices é regular de grau $n - 1$. Se G tem n vértices e é regular de grau r , então G tem rn arestas.

A figura 2.4 contém o cubo, um grafo regular de grau 3 .

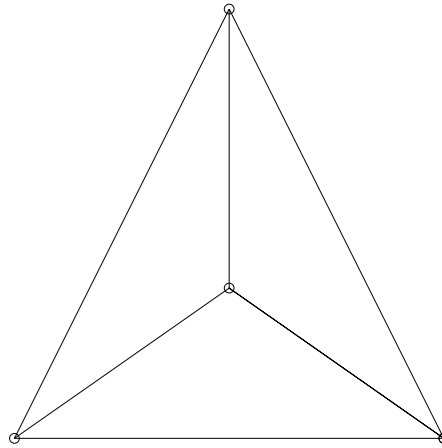
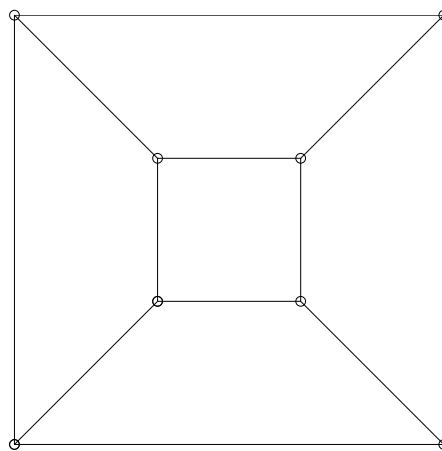
Figura 2.2: Grafo completo K_4 

Figura 2.3: Cubo: grafo regular de grau 3

O grafo completo e o cubo podem modelizar as ligações entre computadores em computação paralela. Até recentemente, os computadores executavam uma operação de cada vez; no entanto, programas bastante complexos e pesados em termos computacionais demoravam demasiado tempo a ser executados, mesmo por um supercomputador. Contornou-se este obstáculo por dividir um problema em subproblemas que possam ser resolvidos simultaneamente. O programa envia os subproblemas para diferentes computadores e direcciona os dados e os resultados deste subproblemas para os processadores adequados.

Na computação paralela, um processador pode necessitar do output de um outro e, por isso, precisam de estar ligados e, então, é desejável desenhar uma rede de comunicação

eficiente, a qual pode ser representada por um grafo. A rede de intercomunicação mais simples é a representada por um grafo completo com n vértices K_n , onde cada par de computadores, dos n computadores, estabelece intercomunicação. No entanto, este tipo de rede é muito dispendiosa já que, quando o número de processadores cresce, o número de conexões também cresce, tornando-se fisicamente impraticável.

Uma alternativa é o arranjo em linha, onde cada processador P_i , à excepção de P_1 e P_n , estabelece intercomunicação com os computadores adjacentes P_{i-1} e P_{i+1} ; P_1 está ligado, somente, a P_2 , e P_n está ligado, somente, a P_{n-1} . A grande vantagem do arranjo em linha é que cada processador tem, no máximo, duas ligações com os outros computadores.

Uma outra solução utilizada é o arranjo em matriz, onde o número de computadores é um cubo perfeito, por exemplo, $n = m^2$. Os n processadores estão etiquetados como $P(i, j)$, onde $0 \leq i, j \leq m - 1$. O processador $P(i, j)$ estabelece intercomunicação com os seus quatro processadores adjacentes, $P(i \pm 1, j)$ e $P(i, j \pm 1)$, desde que estes pertençam ao arranjo em matriz (note-se que os quatro processadores das pontas têm apenas dois computadores adjacentes, e os processadores nas fronteiras do arranjo em matriz têm apenas três computadores adjacentes). Mas, de facto, o arranjo em linha limita o número conexões que cada processador necessita.

A solução de como ligar os processadores em rede que, nos dias de hoje, assume grande importância, é o chamado hipercubo. Para este tipo de rede, o número de processadores é uma potência de 2, seja $n = 2^m$. Os n processadores estão etiquetados P_0, P_1, \dots, P_{n-1} e cada processador estabelece intercomunicação com m processadores. O processador P_i estabelece ligação com os processadores cujos índices na representação binária difiram da representação binária de i em exactamente um bit. A rede em hipercubo arranja uma solução de equilíbrio entre o número de conexões directas de cada processador e o número de conexões intermédias necessárias para que os processadores possam comunicar.

O grafo cubo da figura 2.4 pode representar uma rede com oito processadores.

A regularidade combinatorial de um grafo regular, que decorre da sua definição, tem consequências nos seus valores próprios, nomeadamente, as que se encerram no teorema seguinte.

Teorema 2.1.4. *Seja G um grafo regular de grau r . Então,*

1. r é um valor próprio de G ;
2. se G é um grafo conexo (ver definição 2.1.18), então a multiplicidade de r é 1;
3. para qualquer valor próprio λ de G , tem-se que $|\lambda| \leq r$.

Definição 2.1.14 (Grafo platónico). *Um grafo regular formado pelos vértices e arestas dos sólidos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.*

Definição 2.1.15 (Grafo bipartido). *Admita-se que o conjunto dos vértices de um grafo G pode ser separado em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 , de tal modo que cada aresta de G une um vértice de V_1 a um vértice de V_2 . Tal grafo é um grafo bipartido e representa-se por $G(V_1, V_2)$.*

Note-se que num grafo bipartido, não é necessário que cada vértice de V_1 esteja unido a cada vértice de V_2 . Se tal se verificar e, em simultâneo, G for simples, então G é um grafo bipartido completo, representado por $K_{r,s}$, onde r e s são o número dos vértices em V_1 e V_2 .

A figura 2.4 contém respectivamente.

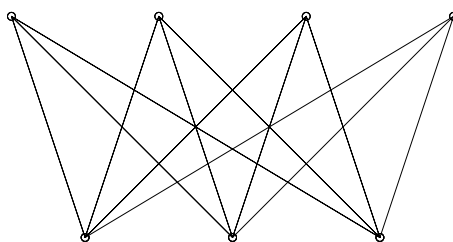


Figura 2.4: Grafo bipartido completo $K_{4,3}$

Um exemplo prático é o que se segue. Considere-se um grafo que representa os casamentos entre as pessoas de uma cidade, onde cada pessoa é representada por um vértice e um casamento por uma aresta. Assumindo que só se verificam casamentos entre pessoas de sexo diferente, o grafo será bipartido, já que os vértices a serem unidos por uma aresta são retirados da seguinte forma: um do subconjunto dos vértices que representam o sexo masculino e o outro do subconjunto dos vértices que representam o sexo feminino.

A figura 2.6 ilustra a estrela, grafo bipartido $K_{1,5}$.

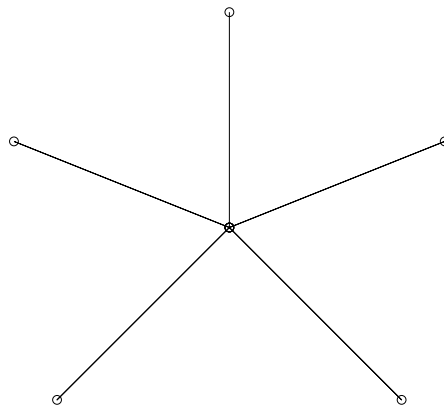


Figura 2.5: Estrela: grafo bipartido completo $K_{1,5}$

Imagine-se uma rede local, formada por computadores ligados em rede e ligados a impressoras e plotters. Caso estejam todos ligados a um servidor central, diz-se que essa rede local tem uma topologia em estrela, a qual pode ser representada por um grafo bipartido $K_{1,n}$, um grafo em estrela.

Ordenando os vértices de tal forma que os vértices em V_1 figurem em primeiro lugar, a matriz adjacência de um grafo bipartido assume a forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

O espectro de um grafo bipartido é simétrico em relação a 0, resultado obtido no contexto da química teórica.

Definição 2.1.16 (*k*-cubos). *Os grafos k-cubos são grafos bipartidos; são grafos cujos vértices correspondem às sequências (a_1, a_2, \dots, a_k) , onde cada $a_i = 0$ ou 1, e cujas arestas unem as sequências que diferem somente numa entrada. Os k-cubos são representados por Q_k .*

Os grafos Q_k têm 2^k vértices, $k2^{k-1}$ arestas e são regulares de grau k .

2.1.2 Operações com grafos

Nesta seção descrevem-se as seguintes operações com grafos: união, apagamento de arestas, contração e complemento.

Definição 2.1.17. *Considerem-se os grafos $G_1 = (V(G_1), A(G_1))$ e $G_2 = (V(G_2), A(G_2))$, onde $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são disjuntos. A união $G_1 \cup G_2$ é o grafo com conjunto vértice dado por $V(G_1) \cup V(G_2)$ e família das arestas dada por $A(G_1) \cup A(G_2)$.*

Seja a uma aresta de um grafo G . O grafo obtido de G por se apagar a aresta A é representado por $G - a$; em geral, se F é um qualquer conjunto de arestas de G , então $G - F$ é o grafo obtido de G por se apagar as arestas de F .

Analogamente, se v é um vértice de G , $G - v$ é o grafo obtido de G por se apagar o vértice v e, também, as arestas incidentes em v ; em geral, se S é um qualquer conjunto de vértices em G , $G - S$ é o grafo obtido por se apagar em G os vértices de S , assim como todas as arestas incidentes neles.

Considere-se o grafo da figura 2.6, que contém o grafo G , e a figura 2.7 que contém o

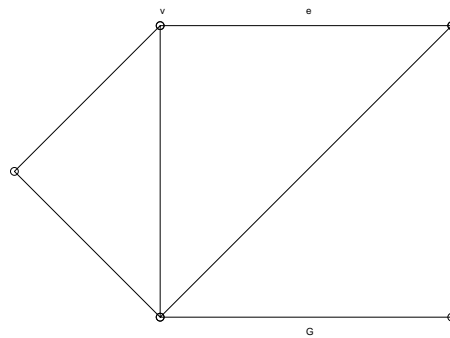


Figura 2.6: Grafo G

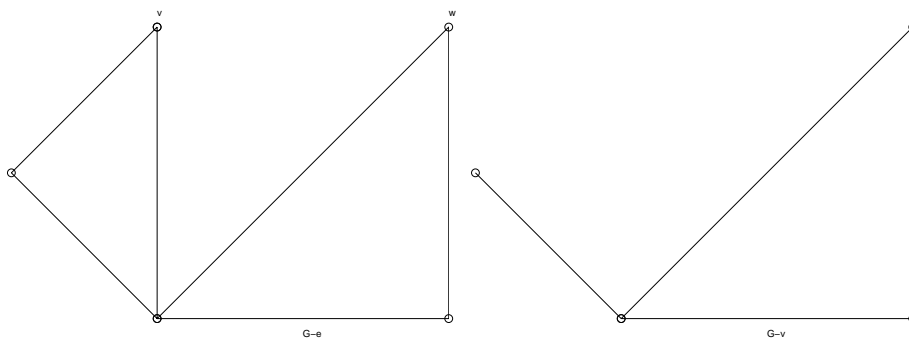


Figura 2.7: Grafos $G - e$ e $G - v$, respectivamente

grafo $G - e$ e $G - v$.

$G \setminus a$ é o grafo obtido por remover a aresta a e contraí-la; tal significa remover a , identificar os seus extremos v e w e, então, fazer coincidi-los, sendo que as arestas que originalmente incidiam em v e w , incidem agora no vértice vw . Uma contracção de G é um grafo que resulta de G após uma sucessão de contracções.

Definição 2.1.18 (Grafo conexo). *Um grafo que não possa ser expresso como a união de dois grafos é um grafo conexo; caso contrário, diz-se desconexo.*

Qualquer grafo desconexo G pode ser expresso como a união de um número finito de grafos conexos, e cada um destes é designado por componente de G .

Definição 2.1.19 (Grafo k -conexo). *Um grafo diz-se k -conexo se nenhum par de vértices de G é separado por menos de k outros vértices.*

O maior inteiro k tal que G é k -conexo é a conectividade $\kappa(G)$ de G . Então, se G é desconexo ou se é K_1 , $\kappa(G) = 0$; $\kappa(K_n) = n - 1$, para todo $n \geq 1$.

Um grafo G diz-se l -conexo, no sentido das arestas, se $G - F$ é conexo para todo o conjunto $F \subseteq A$ de menos de l arestas. O maior inteiro l tal que G é conexo no sentido das arestas é a conectividade das arestas $\lambda(G)$ de G . Se $\lambda(G) = 0$, então G é um grafo desconexo. Tem-se que

$$\kappa(G) \leq \lambda(G).$$

Os dois resultados que se seguem estão demonstrados em [14].

Teorema 2.1.5. *Seja G um grafo simples com n vértices. Se G tem k componentes, então o número de arestas m de G satisfaz*

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1).$$

Corolário 2.1. *Qualquer grafo simples com n vértices e mais de $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ arestas é conexo.*

O conjunto que desconexa ou separa um grafo conexo G é o conjunto das arestas de G que, ao ser removidas, mudam a natureza do grafo, de conexa para desconexa; dito de outra forma, é o conjunto de arestas que, ao ser removidas, aumentam o número de componentes de G . O conjunto corte de G é um conjunto que desconexa ou separa um grafo

conexo, sendo que nenhum seu subconjunto próprio o consegue fazer. Se um conjunto corte contiver apenas uma aresta, essa aresta chama-se ponte ou istmo. As pontes num grafo são precisamente aquelas arestas que não figuram em qualquer circuito.

Na figura 2.8 a aresta e é um exemplo de uma ponte.

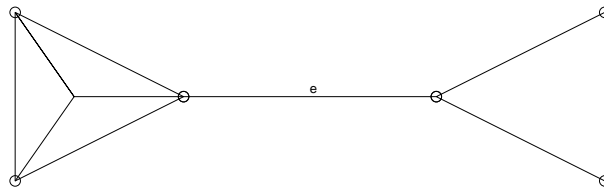


Figura 2.8: Ilustração de uma ponte

Neste contexto, surgem as definições de vértice de corte e de aresta de corte. Por vezes, a remoção de um vértice e de todas as suas arestas incidentes, origina um subgrafo com mais componentes conexas do que o grafo original; tais vértices são os vértices de corte. O acto de remover um vértice de corte de um grafo conexo produz um subgrafo desconexo.

Definição 2.1.20 (Vértice de corte). *Um vértice de corte v de um grafo G é um vértice tal que $G - v$ tem mais componentes que G .*

Uma aresta que, ao ser removida, produza um grafo com mais componentes conexas que o grafo original é uma aresta de corte ou ponte.

Definição 2.1.21 (Aresta de corte). *Uma aresta de corte a de um grafo G é uma aresta tal que $G - a$ tem mais componentes que G .*

Um conceito associado é o de bloco. No que se segue, um grafo G é maximal relativamente a uma dada propriedade, quando G goza dessa propriedade, mas nenhum grafo $G + v_1v_2$ não, para vértices $v_1, v_2 \in G$ não adjacentes.

Definição 2.1.22 (Bloco). *Um subgrafo conexo maximal sem um vértice de corte é um bloco.*

Então, todo o bloco de um grafo G é um subgrafo maximal 2-conexo, ou uma ponte ou um vértice isolado.

Seja A o conjunto dos vértices de corte de G , e B o conjunto dos seus blocos. Então, tem-se um grafo bipartido em $A \cup B$, formado pelas arestas aB , com $a \in B$, chamado grafo bloco.

Um grafo conexo pode ser definido de forma alternativa, apelando ao conceito de caminho, a ser posteriormente introduzido.

Definição 2.1.23 (Grafo circuito ou ciclo). *Um grafo conexo e regular de grau 2 é um grafo circuito, e é representado por C_n , sendo n o número de vértices.*

A figura 2.9 apresenta o grafo C_6 , o grafo ciclo com 6 vértices.

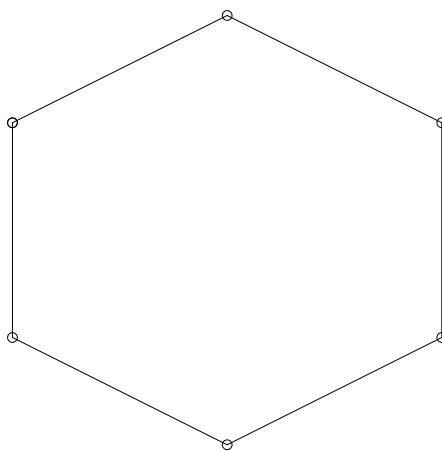
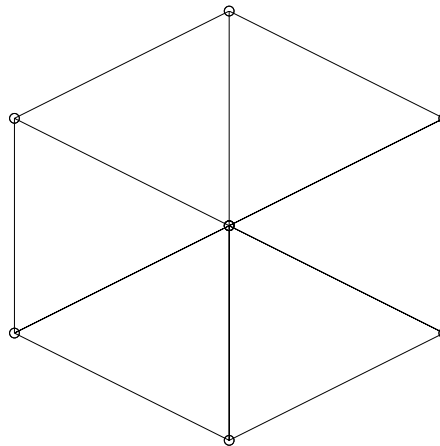


Figura 2.9: Grafo circuito ou ciclo C_6

O grafo C_6 é bipartido, já que o seu conjunto vértice pode ser partido em dois subconjuntos, $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ e $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, e cada aresta de C_6 une um vértice em V_1 a um vértice em V_2 .

Imagine-se uma rede local formada por computadores, no qual cada unidade está ligada a exactamente duas outras unidades. A informação circula de computador para computador, ao longo do circuito, até ao local desejado; diz-se que este tipo de rede local tem topologia em anel ou em circuito, e é modelada por grafos C_n .

O grafo obtido a partir de C_{n-1} , por unir cada vértice a um novo vértice v , é conhecido como a roda; é representado por W_n , onde n é o número de vértices. A figura 2.10 contém um exemplo de um grafo em forma de roda, o grafo W_6 .

Figura 2.10: Grafo roda W_6

Algumas redes locais de computadores são um misto da topologia em estrela e em anel, já que a informação pode circular ao longo do anel ou através de um servidor central (diz-se que esta redundância torna a rede mais fiável). Este género de redes locais pode ser modelada por grafos roda W_n .

Um grafo bipartido pode ser caracterizado a partir do conceito de ciclo ou circuito.

Teorema 2.1.6. *Um grafo é bipartido se e só se não contiver nenhum ciclo ímpar.*

Definição 2.1.24 (Complemento de um grafo simples). *Seja G um grafo simples com conjunto vértice $V(G)$. O complemento \bar{G} de G é o grafo simples que tem $V(G)$ como o seu conjunto vértice, e onde dois vértices são adjacentes se e só se eles não o são em G .*

Caso G tenha n vértices, \bar{G} pode ser construído por remover de K_n todas as arestas de G , sendo G perspectivado como um subgrafo de K_n . O complemento de um grafo completo é o grafo nulo e o complemento de um grafo bipartido completo é a união de dois grafos completos.

Seja G um grafo com n vértices e seja \bar{A} a matriz adjacência de \bar{G} . Então,

$$\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{J} - \mathbf{I},$$

onde \mathbf{J} é uma matriz cujas entradas são todas iguais a 1.

Caso G seja um grafo conexo e regular de grau r , tem-se que

$$(\lambda + r + 1)\chi(\bar{G}; \lambda) = (-1)^n(\lambda - n + r + 1)\chi(G; -\lambda - 1).$$

Definição 2.1.25 (Grafo linha de um grafo). *O grafo linha $L(G)$ de um grafo G é construído por pegar nas arestas de G como vértices de $L(G)$, e unir dois vértices em $L(G)$ quando as correspondentes arestas em G têm um vértice comum.*

Teorema 2.1.7. *Se λ é um valor próprio de um grafo linha $L(G)$, então $\lambda \geq -2$.*

Note-se que este teorema 2.1.7 é uma condição necessária mas não suficiente para definir grafo linha, já que existem grafos cujos valores próprios são $\lambda \geq -2$, mas não têm a natureza de grafo linha.

Quando G é um grafo regular de grau r , o seu grafo linha é regular de grau $2r - 2$.

O grafo linha $L(K_t)$ do grafo completo K_t é, por vezes, designado por grafo triângulo, sendo representado por Δ_t . Os seus vértices correspondem a $\frac{1}{2}t(t - 1)$ pares de números do conjunto $\{1, 2, \dots, t\}$, dois vértices sendo adjacentes quando os pares correspondentes têm em comum um único elemento. Tem-se que

$$\text{Spec } \Delta_t = \begin{pmatrix} 2t - 4 & t - 4 & -2 \\ 1 & t - 1 & \frac{1}{2}t(t - 3) \end{pmatrix}.$$

O complemento do grafo linha de K_5 é conhecido como grafo Petersen, é representado por O_3 , e

$$\text{Spec } O_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Imersões de grafos

Uma curva de Jordan no plano é uma curva contínua que não se auto-intersecta; uma curva de Jordan fechada é aquela cujos extremos coincidem.

Definição 2.1.26. *Um grafo G pode ser imerso (ou tem uma imersão) num dado espaço se é isomorfo a um grafo desse espaço, com pontos representando vértices de G e curvas de Jordan representando arestas, de tal forma que não há cruzamentos.*

Diz-se que não há cruzamentos se

- (i) as curvas de Jordan correspondentes a duas arestas intersectam-se num ponto, o qual não é um vértice, ou então,
- (ii) a curva de Jordan correspondente a uma aresta passa num ponto que é um vértice, mas, no entanto, essa aresta não é incidente no vértice.

Os teoremas que se seguem estão demonstrados em [14].

Teorema 2.1.8. *Qualquer grafo pode ser imerso num espaço euclidiano de dimensão 3.*

Teorema 2.1.9 (Grafo planar). *Um grafo diz-se planar se e só se puder ser imerso numa superfície esférica.*

O grafo K_4 , o grafo nulo, os grafos platónicos, o grafo circuito e o grafo roda constituem exemplos de grafos planáveis.

2.2 Percurso, trajecto, caminho, distância e diâmetro

Muitos problemas podem ser modelados com caminhos formados por se viajar ao longo das arestas de um grafo. Por exemplo, a determinação de itinerários eficientes na distribuição do correio, na recolha do lixo ou, até mesmo, decidir se uma mensagem pode ser enviada entre dois computadores usando ligações intermédios, são feitas pelo estudo de grafos e caminhos em grafos.

Então, atendendo à relevância prática destas ferramentas, nesta secção, são introduzidos e diferenciados os conceitos de percurso, trajecto e caminho num grafo, assim como são apresentados os conceitos de distância e diâmetro

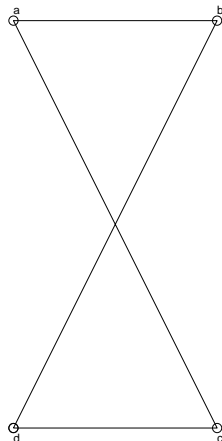
Definição 2.2.1 (Percurso). *Um percurso de tamanho l em G , de v_i a v_j , é a sequência finita de vértices em G ,*

$$v_i = u_0, u_1, \dots, u_l = v_j,$$

tais que u_{t-1} e u_t são adjacentes para $1 \leq t \leq l$.

Demonstra-se o resultado que se segue [1, 12].

Teorema 2.2.1. *O número de percursos de tamanho l em G , de v_i para v_j , é a entrada na posição (i, j) , na matriz \mathbf{A}^l , onde \mathbf{A} representa a matriz adjacência.*

Figura 2.11: Exemplo de um grafo G

Por exemplo, considere-se o grafo G , que consta na figura 2.11, com matriz de adjacência \mathbf{A} , considerando os vértices com ordem a, b, c, d ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O número de caminhos de comprimento quatro, de a a d , corresponde à entrada a_{14} da matriz \mathbf{A}^4 . Como

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

então, existem exactamente oito caminhos de comprimento quatro, de a até d .

Um percurso fechado é aquele onde os vértices inicial e final coincidem. Então, pelo teorema 2.2.1, o número total de percursos fechados de tamanho l é igual ao traço da matriz \mathbf{A}^l ; como o traço de uma matriz coincide com a soma dos seus valores próprios, vem $\text{tr}\mathbf{A}^l = \sum \lambda_i^l$.

Em particular, a soma dos seus valores próprios é zero, a soma dos seus quadrados é o dobro do número de arestas, e a soma dos seus cubos é o sêxtuplo do número de triângulos. Destes resultados, e admitindo que $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$ são valores próprios de G , onde

o grafo tem n vértices e m arestas, infere-se que

$$\lambda_0 \leq \left(\frac{2m(n-1)}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\lambda_0 \leq \sqrt{2m - n + 1},$$

ou seja, é possível apresentar um majorante para o maior valor próprio.

Definição 2.2.2 (Trajecto). *Um percurso no qual todas as arestas são distintas designa-se por trajecto.*

Definição 2.2.3 (Caminho). *Um caminho de comprimento l em G , de v_i a v_j , é a sequência finita de vértices em G ,*

$$v_i = u_0, u_1, \dots, u_l = v_j,$$

tais que u_{t-1} e u_t são adjacentes para $1 \leq t \leq l$, sendo que os vértices são distintos (excepto, possivelmente, $u_0 = u_l$).

Definição 2.2.4 (Caminhos independentes). *Dois ou mais caminhos dizem-se independentes se nenhum deles contém um vértice interno de um outro.*

Em concreto, dois caminhos serão independentes se e só se os únicos vértices comuns forem os vértices inicial e final.

Definição 2.2.5 (Circuito ou ciclo). *Um caminho fechado (vértice inicial coincide com o vértice final) é um circuito.*

Em particular, qualquer laço ou qualquer par de múltiplas arestas forma um circuito. Um circuito de tamanho 3 é um triângulo.

O comprimento de um circuito é o número dos seus vértices (ou arestas). O comprimento mínimo de um circuito contido num grafo G é o contorno ou o perímetro $g(G)$ de G ; o comprimento máximo de um circuito em G é a sua circunferência. Caso G não contenha um circuito, $g(G) = \infty$ e a circunferência tem valor nulo.

Por exemplo, $g(K_n) = 3$ para $n \geq 3$, $g(K_{\alpha,\alpha}) = 4$ para $\alpha \geq 2$ e $g(O_3) = 5$.

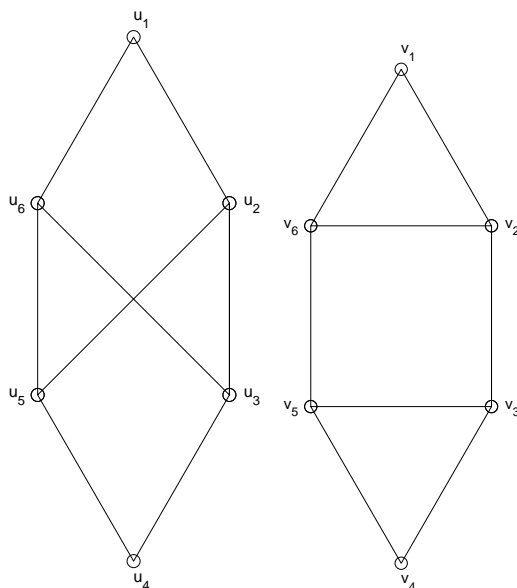


Figura 2.12: Grafo não isomorfos

A existência de um circuito de determinado comprimento constitui um invariante útil para se concluir que dois grafos são não isomorfos. Por exemplo, observe-se a figura 2.12. Ambos os grafos têm seis vértices e oito arestas; cada um dos grafos tem quatro vértices de grau três, e dois vértices de grau dois. Significa que estes três invariantes em grafos isomorfos - número de vértices, número de arestas e grau dos vértices - harmonizam-se. No entanto, o grafo da direita tem um circuito de comprimento três, v_1, v_2, v_6, v_1 , enquanto que o grafo da esquerda não contém nenhum circuito de comprimento três; aliás, nesse grafo, todos os circuitos têm, no mínimo, comprimento quatro. Conseqüentemente, os grafos não são isomorfos, já que a existência de um circuito com comprimento idêntico, é um invariante em isomorfismo de grafos.

Teorema 2.2.2. *Se $G(V_1, V_2)$ é um grafo bipartido, então cada circuito tem comprimento par.*

Redefina-se, agora, a noção de grafo conexo e apresente-se um teorema associado. Um grafo diz-se conexo se cada par de vértices é unido por um caminho. Também, um grafo é k -conexo se dois quaisquer vértices podem ser unidos por k caminhos independentes. Pode ilustrar-se a situação com um caso prático, lançando-se a pergunta que se segue. Quando é que uma rede de computadores goza da propriedade que qualquer par de com-

putadores pode partilhar informação, isto é, que uma mensagem pode viajar através de uma ou mais ligações intermédias? Admitindo que se usa um grafo para representar a rede de computadores, onde os vértices representam os computadores e as arestas as ligações, a questão pode ser reformulada - quando é que se assegura que há sempre um caminho entre dois vértices de um grafo? Dois quaisquer computadores numa rede podem partilhar informação se e só se o grafo que representa a rede for conexo.

Um grafo desconexo é a união de dois ou mais grafos conexos, cada par não contendo nenhum vértice comum. Estes grafos conexos disjuntos são as componentes conexas do grafo.

Teorema 2.2.3. *Os vértices de um grafo conexo G podem ser enumerados, por exemplo, como v_1, \dots, v_n ; então,*

$$G_i = G[v_1, \dots, v_i]$$

é conexo para cada i .

Definição 2.2.6 (Distância num grafo). *O número de arestas percorridas no caminho mais curto entre v_i e v_j , é a distância em G entre v_i e v_j , e representa-se por $\partial(v_i, v_j)$.*

Caso não exista um caminho a unir v_i e v_j , então $\partial(v_i, v_j) = \infty$.

Definição 2.2.7 (Diâmetro de um grafo). *O valor máximo da função distância num grafo conexo G é o diâmetro de G , e representa-se por $\text{diam}(G)$.*

O resultado seguinte relaciona o diâmetro de um grafo com o perímetro [7].

Teorema 2.2.4. *Todo o grafo que contém um circuito satisfaz*

$$g(G) \leq 2\text{diam}(G) + 1.$$

Os dois resultados seguintes relacionam o conceito de distância e grafo conexo [1].

Teorema 2.2.5. *Seja G um grafo conexo G com álgebra adjacência $\mathcal{A}(G)$ e diâmetro $\text{diam}(G)$. A dimensão de $\mathcal{A}(G)$ é, no mínimo, $\text{diam}(G) + 1$.*

Corolário 2.2. *Um grafo conexo G com diâmetro $\text{diam}(G)$ tem, no mínimo, $\text{diam}(G) + 1$ valores próprios distintos.*

Um vértice diz-se central em G se a sua maior distância a qualquer outro vértice for a menor possível. Esta distância é o raio de G , e representa-se por $\text{rad}(G)$. Tem-se que

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G).$$

O grau $d(v)$ de um vértice v é o número de arestas incidentes em v . O número

$$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$$

é o grau mínimo de G , e o número

$$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$$

é o grau máximo de G . O número

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v),$$

onde $|V|$ representa o número de vértices do grafo G , é o grau médio do grafo. A seguinte desigualdade é válida

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

O grau médio quantifica, em termos globais, o que é medido localmente pelo grau de cada vértice: o número de arestas de G por vértice.

Teorema 2.2.6 (Mader, 1972). *Todo o grafo com grau médio, no mínimo $4k$, contém um subgrafo k -conexo.*

Teorema 2.2.7. *Um grafo G com raio, no máximo, k , e grau máximo, no máximo d , não tem mais do que $1 + kd^k$ vértices.*

O teorema que se segue, o teorema de Menger, é um dos pilares da teoria dos grafos.

Teorema 2.2.8 (Teorema de Menger, 1927). *Seja $G = (V, A)$ um grafo e $X, Y \subseteq V$. Então, o número mínimo de vértices que separam X de Y em G é igual ao número máximo de caminhos disjuntos que unem X a Y em G .*

Um conjunto de caminhos $a - X$ é um leque ou fole $a - X$ se quaisquer dois caminhos têm em comum unicamente a .

Corolário 2.3. *Para $X \subseteq V$ e $a \in V \setminus X$, o número mínimo de vértices diferentes de a que separam a de X em G é igual ao número máximo de caminhos que formam um leque $a - X$ em G .*

Corolário 2.4. *Sejam a e b dois vértices distintos de G .*

- (i) *Se $ab \notin A$, então o número mínimo de vértices diferentes de a, b que separam a de b em G é igual ao número máximo de caminhos independentes $a - b$ em G ;*
- (ii) *O número mínimo de arestas que separam a de b em G é igual ao número máximo de caminhos $a - b$ em G com arestas disjuntas.*

Teorema 2.2.9 (Versão global do teorema de Menger). *Seja G um grafo.*

- (i) *G é k -conexo se e só se contém k caminhos independentes entre quaisquer dois vértices.*
- (ii) *G é k -conexo no sentido das arestas se e só se contiver k caminhos disjuntos entre quaisquer dois vértices.*

2.3 Grafos eulerianos e hamiltonianos

Definição 2.3.1 (Grafo euleriano). *Um grafo conexo G diz-se euleriano se existir um trajecto fechado que inclui todas as arestas de G . Esse trajecto chama-se euleriano.*

Saliente-se que se exige que cada aresta seja percorrida apenas uma vez. Caso não se imponha a condição do fecho do trajecto, G diz-se semi-euleriano. Então, todo o grafo euleriano é semi-euleriano.

Na figura 2.13 observam-se dois grafos, sendo que o da esquerda tem natureza euleriana e o da direita tem natureza semi-euleriana.

O nome de Euler surge associado a este tipo de grafo, já que o matemático foi a primeira pessoa a resolver o problema das pontes de Königsberg, o qual levantava a questão se seria possível atravessar cada uma das sete pontes da cidade apenas uma vez, voltando ao ponto de partida. A figura 2.14 representa as sete pontes da cidade; note-se que o rio divide a cidade em quatro regiões. O problema terá solução se o grafo constante na figura

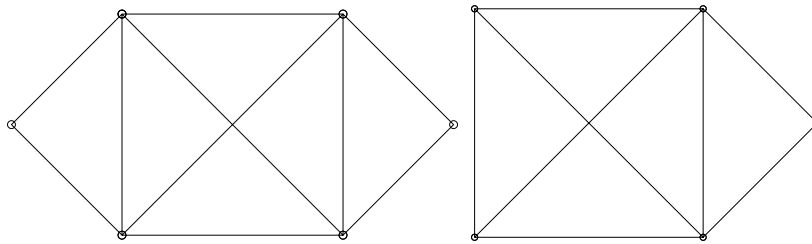


Figura 2.13: Grafo euleriano e semi-euleriano, respectivamente

2.15, onde as regiões estão representadas por vértices e as pontes por arestas, contiver um trajecto euleriano, o que não é verdade.

De seguida, resumizam-se alguns resultados associados a grafos eulerianos.

Lema 2.1. *Se G é um grafo no qual o grau de cada vértice é, no máximo, 2, então G contém um circuito.*

Uma condição necessária e suficiente para concluir sobre existência de grafos eulerianos é apresentada de seguida.

Teorema 2.3.1. *Um grafo conexo G é euleriano se e só se o grau de cada vértice de G é par.*

Este teorema 2.3.1 permite resolver a questão das pontes de Königsberg, já que a observação da figura 2.15 indica a existência de quatro vértices com grau ímpar. Consequentemente, não é possível iniciar uma viagem num dado ponto inicial, atravessar cada ponte exactamente uma única vez, e retornar ao ponto de partida.

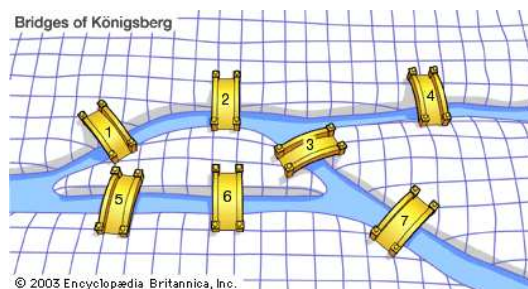


Figura 2.14: Pontes de Königsberg

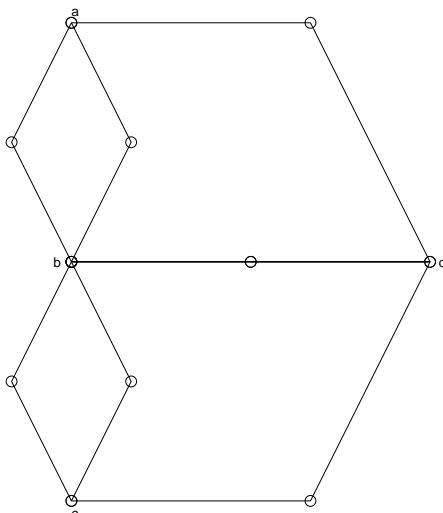


Figura 2.15: Grafo que formaliza o problema das pontes de Königsberg

Uma outra situação onde se usa o mesmo resultado é quando é solicitado para desenhar uma figura com a condição de o movimento ser contínuo, ou seja, sem levantar o lápis, de forma a que não haja partes da figura onde o lápis passou mais de uma vez.

Corolário 2.5. *Um grafo conexo é euleriano se e só se a sua família das arestas puder ser separada em circuitos disjuntos.*

Corolário 2.6. *Um grafo conexo é semi-euleriano se e só se existirem 0 ou 2 vértices de grau ímpar.*

Note-se que afirmar que um grafo conexo é semi-euleriano é sinónimo de dizer que o grafo conexo tem um trajecto euleriano mas não tem um circuito euleriano.

Saliente-se, também, que se um grafo semi-euleriano tem, exactamente, dois vértices de grau ímpar, então qualquer trajecto semi-euleriano deve ter um como vértice inicial e o outro como vértice final.

O corolário 2.6 pode ser usado na questão das pontes de Königsberg, na formulação que se segue. É possível iniciar a viagem num qualquer ponto da cidade, atravessar todas as pontes exactamente uma vez, e terminar num outro ponto qualquer? Como há quatro vértices com grau ímpar, a resposta continua a ser negativa.

Existe um método que permite construir um trajecto euleriano num dado grafo euleriano,

designado por algoritmo Fleury.

Teorema 2.3.2 (Algoritmo Fleury). *Seja G um grafo euleriano. Então, a construção que se segue é sempre possível, e produz um trajecto euleriano em G .*

Inicie-se em qualquer vértice u e percorram-se as arestas de uma forma arbitrária, obedecendo às seguintes regras:

(i) *apague as arestas à medida que as for percorrendo e, caso surjam vértices isolados, apague-os também;*

(ii) *em cada etapa, use uma ponte somente se não tiver alternativa.*

Os grafos eulerianos surgem no contexto de se saber se existe um trajecto fechado que inclua cada aresta de um dado grafo conexo G . Um problema análogo pode ser colocado no sentido dos vértices, ou seja, será que existe um trajecto fechado que passe, exactamente, uma única vez por cada vértice de G ?

Naturalmente, tal trajecto será um circuito (excluindo o caso trivial do grafo N_1), sendo conhecido por circuito hamiltoniano; G será um grafo hamiltoniano. Um grafo que contenha um caminho que passe em todos os vértices é semi-hamiltoniano (nem todo o grafo hamiltoniano é semi-hamiltoniano).

Definição 2.3.2 (Grafo hamiltoniano). *Um grafo conexo G diz-se hamiltoniano se existir um trajecto fechado que inclui todos os vértices de G .*

O nome deriva de um puzzle feito, em 1857, pelo matemático Hamilton. O puzzle consistia num dodecaedro de madeira (um poliedro com doze pentágonos regulares como faces), onde os vinte vértices do dodecaedro representavam vinte cidades diferentes. O que se pretendia era iniciar a viagem numa dessas cidades e visitar as restantes dezanove exactamente uma vez, retornando à cidade de onde se partiu. O problema pode ser reformulado em termos de grafos - existe um circuito que passe exactamente em cada vértice uma única vez? A resposta é afirmativa.

Na figura 2.16 estão representados dois grafos, sendo o mais à esquerda hamiltoniano e o mais à direita semi-hamiltoniano.

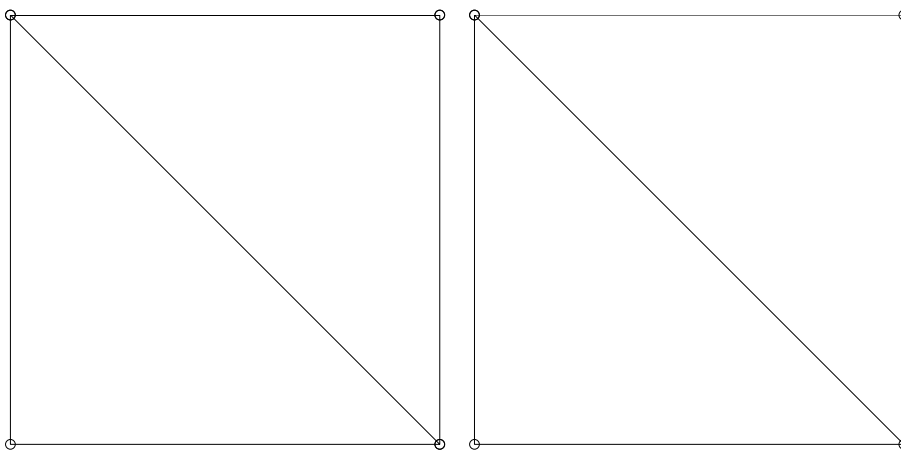


Figura 2.16: Grafo hamiltoniano e semi-hamiltoniano, respectivamente

Pouco se sabe, em termos genéricos, sobre grafos hamiltonianos. Embora se conheça uma condição necessária e suficiente para que um grafo contenha um circuito euleriano, não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para a existência de circuitos hamiltonianos. Existem teoremas sobre condições suficientes para a existência de circuitos hamiltonianos.

Contudo, certas propriedades podem ser usadas para mostrar que um grafo não contém nenhum circuito hamiltoniano. Por exemplo, um grafo com um vértice com grau 1 não pode conter um circuito hamiltoniano, já que, num circuito hamiltoniano, cada vértice é incidente em duas arestas do circuito. Adicionalmente, se um vértice num grafo tem grau 2, então ambas as arestas que são incidentes nesse vértice fazem parte do circuito hamiltoniano. Naturalmente que, quando se constrói um circuito hamiltoniano, e esse circuito passou num vértice, então, de todas as arestas incidentes nesse vértice, só duas podem figurar no circuito.

O teorema que se segue está demonstrado em [11].

Teorema 2.3.3. *Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se $d(v) + d(w) \geq n$ para cada par de vértices v e w não adjacentes, então G é hamiltoniano.*

O corolário seguinte, obtido a partir do teorema 2.3.3, é devido a Dirac, em 1952.

Corolário 2.7 (Teorema de Dirac). *Se G é um grafo simples com $n \geq 3$ vértices, e se $d(v) \geq \frac{1}{2}n$ para cada vértice v , então G é hamiltoniano.*

2.4 Árvores

2.4.1 Definição e propriedades

Definição 2.4.1 (Floresta). *Uma floresta é um grafo que não contém circuitos, ou seja, é um grafo acíclico.*

Definição 2.4.2 (Árvore). *Uma árvore é um grafo conexo que não contém nenhum circuito.*

Então, uma floresta é um grafo cujas componentes são árvores. Também, note-se que, por definição, florestas e árvores são grafos simples; como uma árvore não contém circuitos, conseqüentemente, não contém laços e nem arestas múltiplas. Uma floresta é um grafo que não contém circuitos, mas não é um grafo necessariamente conexo.

Numa árvore, os vértices de grau 1 são as suas folhas. Toda a árvores não trivial tem, pelo menos, duas folhas.

A figura 2.17 contém o exemplo de duas árvores.

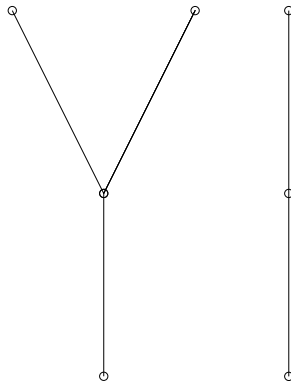


Figura 2.17: Exemplos de árvores

O teorema seguinte sintetiza algumas propriedades das árvores [7, 12, 13, 14].

Teorema 2.4.1 (Propriedades das árvores). *Seja T um grafo com n vértices. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é uma árvore;

- (b) T não contém circuitos e tem $n - 1$ arestas;
- (c) T é conexo e tem $n - 1$ arestas;
- (d) T é conexo e cada aresta é uma ponte;
- (e) quaisquer dois vértices de T estão ligados por, exactamente, um caminho;
- (f) T não contém circuitos, mas a adição de uma qualquer nova aresta cria, exactamente, um circuito.

Corolário 2.8. *Seja G uma floresta com n vértices e k componentes; então, G tem $n - k$ arestas.*

Note-se que pelo teorema dos apertos de mão, a soma do grau dos n vértices de uma árvore é o dobro do número de arestas, nomeadamente, $2n - 2$; então, se $n \geq 2$, uma árvore com n vértices contém, pelo menos, dois vértices terminais ou folhas.

Corolário 2.9. *Um grafo conexo com n vértices é uma árvore se e só se tiver $n - 1$ arestas.*

Em algumas aplicações de árvores, um vértice particular é designado por raiz. Após especificar qual a raiz, pode atribuir-se uma direcção a cada aresta. Pelo teorema 2.4.1, já que existe um caminho único entre cada dois quaisquer vértices de um grafo, pode direccionar-se cada aresta para longe da sua raiz. Uma árvore, juntamente com a especificação da sua raiz, origina um grafo directo chamado de árvore dirigida ou enraizada. Uma árvore não dirigida pode tornar-se uma árvore dirigida por escolher-se uma raiz. Naturalmente que, diferentes escolhas de raízes, produzem diferentes árvores dirigidas. Admita-se que T é uma árvore dirigida e u, v dois vértices. Se v não é a raiz, o pai de v é o único vértice u tal que existe uma aresta directa de u para v ; quando u é o pai de v , v é o filho de u . Vértices com o mesmo pai são irmãos. Um ancestral de um vértice que não seja a raiz são os vértices no caminho entre a raiz e esse vértice, excluindo esse vértice e incluindo a raiz. Os descendentes de um vértice v são aqueles vértices que têm v como ancestral. Um vértice de uma árvore é uma folha caso não tenha filhos. Vértices com filhos são vértices internos. Uma raiz é um vértice interno, a não ser que seja o único vértice no grafo e, nesse caso, será uma folha.

Seja a um vértice numa árvore. Uma subárvore com a como sua raiz é o subgrafo da árvore constituído por a e pelos seus descendentes e todas as arestas aí incidentes.

Definição 2.4.3. *Uma árvore dirigida designa-se por árvore m -ária se cada vértice interno não tem mais do que m filhos. A árvore chamar-se-á árvore m -ária cheia se cada vértice interno tem, exactamente, m filhos. Uma árvore m -ária onde $m = 2$ é uma árvore binária.*

Teorema 2.4.2. *Uma árvore m -ária cheia com i vértices internos tem*

$$n = mi + 1$$

vértices.

Admita-se que T é uma árvore m -ária cheia. Seja i o número de vértices internos e l o número de folhas da árvore. Uma vez definidos n , i , ou l , as outras duas quantidades estão determinadas. O teorema 2.4.3 indica como.

Teorema 2.4.3. *Uma árvore m -ária cheia com*

1. n vértices, tem $i = \frac{n-1}{m}$ vértices internos e $l = \frac{(m-1)n+1}{m}$ folhas;
2. i vértices internos, tem $n = mi + 1$ vértices e $l = (m-1)i + 1$ folhas;
3. l folhas, tem $n = \frac{ml-1}{m-1}$ vértices e $i = \frac{l-1}{m-1}$ vértices internos.

O uso deste teorema pode ser ilustrado como se segue. Admita-se que alguém escreve uma carta e solicita que cada pessoa que a recebe deverá enviá-la a quatro pessoas. Algumas pessoas farão isso, mas outras não. Quantas pessoas viram a carta, incluindo a primeira pessoa, sabendo que ninguém recebe mais do que uma carta e que a cadeia de cartas termina quando existirem 100 pessoas que leram a carta mas não a enviaram? Quantas pessoas enviaram a carta?

Esta cadeia de cartas pode ser representada por uma árvore 4-ária. Os vértices internos representam as pessoas que enviaram a carta e as folhas representam as pessoas que não o fizeram. Como 100 pessoas não a enviaram, tal significa que o número de folhas na árvore dirigida é igual a 100, $l = 100$; conseqüentemente, $n = \frac{4 \times 100 - 1}{4 - 1} = 133$ e $i = \frac{100 - 1}{4 - 1} = 33$.

Então, 133 pessoas viram a carta e 33 enviaram-na.

O nível de um vértice v numa árvore dirigida é o comprimento do caminho único da raiz até esse vértice. O nível da raiz é igual a 0. A altura de uma árvore dirigida é o máximo dos níveis dos seus vértices. Por outras palavras, a altura de uma árvore dirigida é o comprimento do caminho mais comprido, da raiz a um qualquer vértice.

Uma árvore dirigida m -ária, de altura h , diz-se equilibrada se todas as suas folhas estão no nível h ou no nível $h - 1$.

Teorema 2.4.4. *Há, no máximo, m^h folhas numa árvore m -ária de altura h .*

Corolário 2.10. *Se uma árvore m -ária de altura h tem l folhas, então, $h \geq \lceil \log_m l \rceil$, onde $\lceil x \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a x .*

Se a árvore m -ária é cheia e equilibrada, então, $h = \lceil \log_m l \rceil$.

Uma árvore dirigida ordenada é uma árvore dirigida onde os filhos de cada vértice interno estão ordenados. As árvores dirigidas ordenadas são desenhadas de tal forma que os filhos de cada vértice interno são mostrados pela ordem, da esquerda para a direita.

Numa árvore binária ordenada, se um vértice interno tem dois filhos, o primeiro filho é o filho esquerdo e o segundo filho é o filho direito.

Uma organização de grande dimensão pode ser modelada por uma árvore dirigida. Cada vértice representa uma posição dentro da organização; uma aresta de um vértice para outro indica que a pessoa representada pelo vértice inicial é o chefe directo da pessoa representada pelo vértice final ou de chegada. Na teoria da organizações, tais grafos têm o nome de organigramas ou organogramas.

Num computador, o sistema de directorias, subdirectorias e ficheiros pode estar organizado na forma de uma árvore dirigida. A raiz da árvore dirigida será a directoria raiz, as subdirectorias serão os vértices internos e as folhas serão os ficheiros ou as subdirectorias vazias.

Dado um grafo conexo G , pode escolher-se um circuito e remover-se uma das suas arestas, sendo que o grafo resultante permanece conexo. Repita-se o procedimento com um dos

circuitos remanescentes, e prossegue-se até que não haja mais circuitos. O grafo obtido será uma árvore que conecta todos os vértices de G , designada por árvore de ligação de G . Uma árvore de ligação é um subgrafo com $n - 1$ arestas e que não contém circuitos.

Definição 2.4.4 (Árvore de ligação). *Seja G um grafo simples. Uma árvore de ligação de G é um subgrafo de G com as seguintes características: é uma árvore que contém todos os vértices de G .*

A figura 2.18 contém um exemplo de um grafo G e de uma das suas árvores de ligação. O

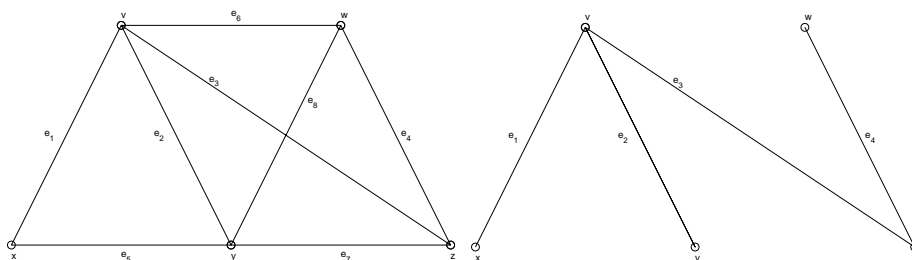


Figura 2.18: Exemplo de um grafo G e de uma das suas árvores de ligação

grafo G representar uma rede de estradas que liga cinco cidades, sendo que as cidades são os vértices e a rede viária as arestas. A determinação de uma árvore de ligação faria todo o sentido se a região onde se situam as cidades fosse propensa à neve, e as autoridades quisessem escolher quais as estradas a estar permanentemente desimpedidas, de forma a que de qualquer cidade se possa chegar a outra qualquer cidade.

Um grafo simples com uma árvore de ligação é conexo, já que existe um caminho na árvore de ligação entre quaisquer dois vértices. O contrário também é verdadeiro, ou seja, todo o grafo simples conexo tem uma árvore de ligação. Tal resultado é sumarizado no teorema que se segue.

Teorema 2.4.5. *Um grafo simples é conexo se e só se contiver uma árvore de ligação.*

Na construção supracitada de uma árvore de ligação, removeram-se arestas de circuitos; ora, tal procedimento é ineficiente, na medida que tal implica a identificação de circuitos. Um procedimento alternativo para construir árvores de ligação é o de, sucessivamente, acrescentar arestas. Um algoritmo é conhecido como *backtracking*, já que o método retorna aos vértices anteriores usados para se adicionar arestas. Segue-se um sumário do

algoritmo.

De forma arbitrária, escolhe-se um dos vértices para raiz da árvore. A partir da raiz, e atendendo ao grafo, forme-se um caminho que se inicie na raiz, e adicionem-se arestas de modo a que o caminho seja o mais longo possível. Se o caminho contiver todos os vértices do grafo, está determinada a árvore de ligação.

Caso o caminho não contenha todos os vértices que constam do grafo, devem adicionar-se mais arestas. Para isso, anda-se para trás para o penúltimo vértice do caminho e, se possível, forme-se um novo caminho, iniciando-se nesse vértice e passando pelos vértices que ainda não foram visitados, seleccionados de forma a construir o caminho mais longo possível. Caso este procedimento não seja possível, anda-se para trás para o antepenúltimo vértice do caminho e repete-se o processo.

Em termos genéricos, após a determinação arbitrária da raiz, define-se o caminho mais longo, iniciando na raiz. Caso o caminho não use todos os vértices do grafo, anda-se sucessivamente para trás e, em cada etapa, forma-se o caminho mais longo possível. O processo termina quando todos os vértices do grafo já foram usados. Como o grafo é conexo e tem um número finito de arestas, o resultado final do algoritmo *backtracking* é uma árvore de ligação. Cada vértice onde o caminho termina, em cada etapa, será uma folha da árvore dirigida, e cada vértice onde um novo caminho é iniciado, será um vértice interno.

De seguida, apresenta-se um exemplo que permite seguir, passo a passo, a construção de uma árvore de ligação a partir deste método. Com esse propósito, considere-se o grafo G da figura 2.19.

Inicie-se o processo num vértice arbitrário, escolhido para raiz; seja o vértice f . Numa

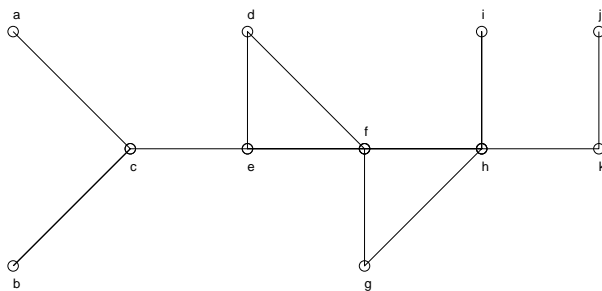


Figura 2.19: Grafo G

primeira etapa, a partir do vértice f , define-se o caminho mais longo possível, que será

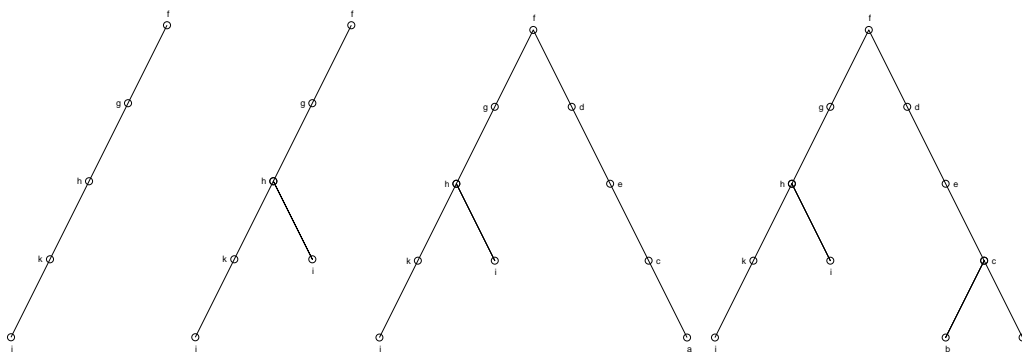


Figura 2.20: Etapas da construção da árvore de ligação do grafo G

$f \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow k \rightarrow j$ (note-se que podiam ter sido definidos outros caminhos). De seguida, volte-se atrás, ao vértice k , mas, atendendo ao grafo G , não existe nenhum caminho que se inicie em k que contenha vértices ainda não visitados; então volte-se, novamente, atrás, ao vértice h . É, então, possível, formar o caminho $h \rightarrow i$. Na etapa seguinte, volte-se atrás, ao vértice g , do qual não se inicia nenhum caminho que contenha vértices ainda não visitados; conseqüentemente, volte-se ao vértice f . A partir de f , forme-se o caminho $f \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow a$. Por fim, voltando atrás, ao vértice c , forme-se o caminho $c \rightarrow b$. Estas etapas de construção de uma árvore de ligação do grafo G estão na figura 2.20.

Agora, considere-se G um grafo arbitrário com n vértices, m arestas e k componentes. Executando o procedimento acima descrito em cada componente de G , obtém-se uma floresta de ligação. O número de arestas removidas é a característica do circuito ou número ciclomático de G , e representa-se por $\gamma(G)$. Tem-se que

$$\gamma(G) = m - n + k,$$

número não negativo.

A característica do conjunto de corte de G , representada por $\xi(G)$, é o número de arestas numa floresta de ligação, e é

$$\xi(G) = n - k.$$

Lema 2.2. *Seja T uma árvore de ligação num grafo conexo G . Então,*

- (i) para cada aresta a de G que não pertença a T , existe um único circuito em G que contém a e arestas somente em T ;
- (ii) para cada aresta b de G que esteja em T , existe um único corte em G que contém b e arestas não somente em T .

O complemento de uma floresta de ligação T de um grafo G é o grafo obtido de G por se removerem as arestas de T .

Teorema 2.4.6. *Seja T uma floresta de ligação de um grafo G . Então*

- (i) todo o conjunto corte de G tem uma aresta em comum com T ;
- (ii) todo o circuito de G tem uma aresta em comum com o complemento de T .

Definição 2.4.5. *O número de árvores de ligação de um grafo G é o seu número de árvore, representado por $\kappa(G)$.*

Se o grafo G é desconexo, $\kappa(G) = 0$. No caso dos grafos conexos, usa-se o teorema que se segue.

Teorema 2.4.7. *Seja \mathbf{Q} a matriz laplaciana $\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{D}^t$. Todo o cofactor de \mathbf{Q} é igual ao número de árvore de G , isto é*

$$\text{adj } \mathbf{Q} = \kappa(G)\mathbf{J},$$

onde $\text{adj } \mathbf{Q}$ representa a matriz adjunta de \mathbf{Q} e \mathbf{J} representa a matriz cujas entradas são todas iguais a 1.

Definição 2.4.6 (Espectro da matriz laplaciana). *Seja $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ os valores próprios da matriz laplaciana \mathbf{Q} . Então:*

- (i) $\mu_0 = 0$, com vector próprio $(1 \ 1 \ \dots \ 1)^t$;
- (ii) se G é conexo, $\mu_1 > 0$;
- (iii) se G é regular de grau k , então $\mu_i = k - \lambda_i$, onde λ_i são os valores próprios de G , em ordem decrescente.

Teorema 2.4.8 (Temperley, 1964). *O número de árvore de um grafo G com n vértices é*

$$\kappa(G) = n^{-2} \det(\mathbf{J} + \mathbf{Q}).$$

O corolário do teorema 2.4.8 apela à definição 2.4.6.

Corolário 2.11. *Seja $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ o espectro da matriz laplaciana \mathbf{Q} de um grafo G com n vértices. Então,*

$$\kappa(G) = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1}}{n}.$$

Se G é conexo e k -regular, com espectro

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ 1 & m_1 & \dots & m_{s-1} \end{pmatrix},$$

então,

$$\kappa(G) = n^{-1} \prod_{r=1}^{s-1} (k - \lambda_r)^{m_r} = n^{-1} \chi'(G; k),$$

onde χ' representa a derivada do polinómio característico χ .

Então, se $G = K_n$,

$$\kappa(G) = \frac{1}{n} \left(\frac{nk}{n-1} \right)^{n-1}; \tag{2.1}$$

se o grafo G é conexo e k -regular, a expressão no segundo membro de 2.1 é um majorante para κ .

No caso de grafos não regulares com m arestas, tem-se que [10]:

$$\kappa(G) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{2m}{n-1} \right)^{n-1}.$$

Um conceito associado ao de floresta de ligação T de um grafo G é construído como se segue. Adicione-se a T uma qualquer aresta de G não contida em T ; então, pelo teorema 2.4.1, obtém-se um circuito único. O conjunto de todos os circuitos construídos desta forma é o sistema fundamental de circuitos associados com T . Os circuitos deste sistema fundamental são todos distintos e o seu número é igual à característica do circuito de G , $\gamma(G)$.

Pelo teorema 2.4.1, a remoção de uma qualquer aresta de T divide o conjunto de vértices de T em dois conjuntos disjuntos, V_1 e V_2 . O conjunto de todas as arestas de G que unem um vértice de V_1 a um vértice de V_2 é o conjunto corte de G ; o conjunto de todos os conjuntos de corte construídos desta forma é o sistema fundamental de conjuntos de corte associados a T . Os conjuntos de corte num sistema fundamental são todos distintos e o seu número coincide com a característica do conjunto de corte de G .

Teorema 2.4.9 (Grafos quase-completos). *Seja G um grafo construído por se remover q arestas disjuntas de K_n , com $n \geq 2q$. Então,*

$$\chi(G) = n^{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^q.$$

Teorema 2.4.10. *Um grafo bloco de um grafo conexo é uma árvore.*

2.4.2 Teorema de Cayley

Quantos grafos não isomorfos existem que possuem uma dada propriedade?

Esta análise foi iniciada em meados do século XIX por Cayley. Actualmente, a esmagadora maioria dos problemas clássicos nesta área já foram resolvidos. Por exemplo, é possível de calcular o número de grafos, digrafos, grafos conexos, árvores e grafos eulerianos que contenham um dado número de vértices e de arestas.

Um grafo etiquetado em n vértices é, grosso modo, um grafo em que os seus vértices estão etiquetados com os inteiros $\{1, \dots, n\}$. Dois grafos etiquetados (G_1, ϕ_1) e (G_2, ψ_2) , onde ϕ_i ($i = 1, 2$) representa as etiquetas do grafo G_i ($i = 1, 2$), são isomorfos se existir um isomorfismo entre G_1 e G_2 que preserve a etiquetagem dos vértices.

O teorema de Cayley indica, de uma forma genérica, quantas maneiras há de etiquetar uma árvore com n vértices.

Teorema 2.4.11 (Teorema de Cayley, 1889). *Existem n^{n-2} maneiras distintas de etiquetar uma árvore com n vértices.*

Corolário 2.12. *O número de árvores ligadas de K_n é n^{n-2} .*

O resultado que se segue pode ser usado para determinar o número de árvores ligadas em qualquer grafo simples conexo.

Teorema 2.4.12 (Teorema Matriz-Árvore). *Seja G um grafo conexo simples com conjunto vértice $\{v_1, \dots, v_n\}$ e seja $\mathbf{M} = (m_{ij})$ a matriz $n \times n$ onde $m_{ii} = d(v_i)$, $m_{ij} = -1$ se v_i e v_j são adjacentes e $m_{ij} = 0$ caso contrário.*

Então, o número de árvores ligadas de G é igual ao cofactor de qualquer elemento de \mathbf{M} .

2.5 Planaridade e dualidade

Considere-se o seguinte cenário - três casas e as respectivas canalizações de gás, água e electricidade. Será possível ligar estas três casas e respectivos serviços, de gás, água e electricidade, sem que as canalizações se cruzem?

Este problema pode ser modelado por um grafo, nomeadamente o grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Então, a questão pode ser reformulada, em termos de se saber se $K_{3,3}$ pode ser desenhado no plano sem que as suas arestas se cruzem.

Um grafo plano é um grafo desenhado no plano de tal forma que nenhum par de arestas (ou melhor, as curvas que as representam) se intersecta geometricamente, excepto num vértice em que ambas são incidentes. Um grafo planar é isomorfo a um grafo plano; dito de outra forma, um grafo planar pode ser imerso no plano e tal imersão é um grafo plano. Há grafos planáveis, mas nem todos o são. Por exemplo, K_4 é planar, mas K_5 e $K_{3,3}$ são não planáveis. Tal significa que não é possível ligar três casas e os seus respectivos serviços de gás, água e electricidade sem que as canalizações se cruzem.

Naturalmente, todo o subgrafo de um grafo planar é planar; também, todo o grafo que contém um grafo não planar como subgrafo é, ele próprio, não planar. Concretizando, qualquer grafo que contenha K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo é não planar.

Formalize-se, agora, o conceito de grafo plano, mas para isso introduzam-se os conceitos de segmento de recta, polígono e arco poligonal. Um segmento de recta no plano euclideo

é um subconjunto de \mathbb{R}^2 tal que

$$\{p + \lambda(q - p) : 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

para pontos distintos $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Um polígono é um subconjunto de \mathbb{R}^2 que consiste na união de um número finito de segmentos de recta e que é homeomorfo ao círculo unitário.

Um arco poligonal é um conjunto de \mathbb{R}^2 que consiste na união de um número finito de segmentos de recta e que é homeomorfo ao intervalo fechado $[0, 1]$. As imagens de 0 e 1, sob o homeomorfismo, são os pontos terminais do arco poligonal.

Definição 2.5.1 (Grafo plano). *Um grafo plano é um par (V, A) de conjuntos finitos, onde V representa o conjunto vértice e A representa o conjunto aresta, com as seguintes propriedades:*

1. $V \subseteq \mathbb{R}^2$;
2. cada aresta é um arco entre dois vértices;
3. diferentes arestas têm diferentes conjuntos de pontos terminais;
4. o interior de uma aresta não contém nenhum vértice e nenhum ponto de uma outra aresta.

Definição 2.5.2 (Grafos homeomorfos). *Dois grafos são homeomorfos se ambos puderem ser obtidos a partir de um mesmo grafo, pela introdução de novos vértices de grau dois nas suas arestas.*

Quaisquer dois grafos circuitos são homeomorfos, sendo que o homeomorfismo entre grafos é uma relação de equivalência.

O teorema de Kuratowski fornece uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja planar.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Kuratowski, 1930). *Um grafo é planar se e só se ele não contém nenhum subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.*

O teorema de Kuratowski, juntamente com a operação contracção, pode ser usado na demonstração de um outro critério de planaridade [14].

Teorema 2.5.2. *Um grafo é planar se e só se ele não contém nenhum subgrafo que seja contraível a K_5 ou $K_{3,3}$.*

Todos os grafos não planáveis contêm um subgrafo que pode ser obtido de $K_{3,3}$ ou K_5 , a partir de operações permitidas.

Desenhando K_5 ou $K_{3,3}$, então, pelo menos um cruzamento de arestas deve ocorrer, já que estes grafos não são planáveis; aliás, tal verifica-se, no mínimo, exactamente uma vez. Diz-se que K_5 e $K_{3,3}$ têm número de cruzamento 1. Reforce-se a ideia de que o cruzamento é para não mais do que duas arestas.

Definição 2.5.3 (Número de cruzamento). *O número de cruzamento $cr(G)$ de um grafo G é igual à menor possibilidade de cruzamentos quando se desenha G no plano.*

O número de cruzamento de um grafo plano G é $cr(G) = 0$; $cr(K_5) = 1$ e $cr(K_{3,3}) = 1$.

2.5.1 Fórmula de Euler para grafos planos

Um ponto x do plano diz-se disjunto de G se x não for um vértice de G nem um ponto numa aresta de G .

Definição 2.5.4 (Face). *Seja x um ponto do plano disjunto de G . A face de G que contém x é o conjunto de todos os pontos do plano que podem ser alcançados a partir de x por uma curva de Jordan, sendo que todos esses pontos são disjuntos de G .*

Teorema 2.5.3. *Uma floresta plana tem exactamente uma face.*

Teorema 2.5.4 (Fórmula de Euler, 1752). *Seja G um grafo plano conexo e sejam n, m e f o número de vértices, arestas e faces de G , respectivamente. Então,*

$$n - m + f = 2.$$

A fórmula de Euler pode ser aplicada ao exemplo que se segue. Considere-se um grafo planar com 20 vértices, cada um exactamente com grau 3. Em quantas regiões (faces) é que a representação do grafo planar divide o plano?

Tem-se que $v = 20$; como a soma do grau dos vértices, $3 \times 20 = 60$, é igual ao dobro das arestas, $2m$, então $m = 30$. Então, o número de regiões é

$$f = 30 - 20 + 2 = 12.$$

Esta fórmula também é conhecida como a fórmula dos poliedros, já que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Basta construir o grafo poliedral da forma que se segue; projecta-se o poliedro numa superfície e usa-se o teorema 2.1.9. O grafo resultante é 3-conexo e cada face é limitada por um polígono.

Corolário 2.13. *Seja G um grafo poliedral e sejam n, m e f o número de vértices, arestas e faces de G , respectivamente. Então,*

$$n - m + f = 2.$$

A fórmula de Euler pode ser generalizada a grafos desconexos.

Teorema 2.5.5. *Seja G um grafo plano com n vértices, m arestas, f faces e k componentes. Então,*

$$n - m + f = k + 1.$$

O resultado que se segue aplica-se, somente, a grafos simples.

Corolário 2.14. *Seja G um grafo plano, simples e conexo com n vértices (≥ 3) e m arestas. Então,*

$$(i) \quad m \leq 3n - 6;$$

$$(ii) \quad \text{se } G \text{ não tem triângulos, } m \leq 2n - 4.$$

Este corolário pode ser usado para mostrar que K_5 não é planar. K_5 tem 5 vértices e 10 arestas. A desigualdade $m \leq 3n - 6$ não é satisfeita já que $m = 10$ e $3n - 6 = 9$.

Note-se, no entanto, que o facto da desigualdade poder ser satisfeita, não significa que o grafo será planar. Por exemplo, $K_{3,3}$ é não planar, mas satisfaz esta desigualdade; tem 6 vértices e 9 arestas e, então, $m = 9 \leq 12 = 3 \times 6 - 6$. Contudo, a segunda desigualdade do corolário, já permite afirmar que $K_{3,3}$ é não planar. O grafo não tem triângulos, já que é bipartido; $m = 9$ e $2n - 4 = 2 \times 6 - 4 = 8$.

O teorema que se segue é bastante usado em aplicações práticas, nomeadamente, no contexto do coloramento dos grafos.

Teorema 2.5.6. *Todo o grafo plano simples contém um vértice cujo grau é, no máximo, 5.*

2.5.2 Dualidade

As ideias de dualidade não são recentes; por exemplo, já Euclides mencionava que o dual de um cubo é o octaedro e que o dual de um dodecaedro é um icosaedro.

Dado um grafo plano G , o seu dual G^* , é construído em duas etapas:

1. em cada face F_i de G , escolhe-se um ponto v_i^* ; tais pontos são os vértices de G^* .
2. correspondendo a cada aresta a de G , desenha-se uma linha a^* , a qual cruza a (mas mais nenhuma aresta de G) e une os vértices v_i^* que estão na faces F_i ; estas são as arestas de G^* .

Note-se que cada vértice terminal de G origina um laço para G^* , assim como qualquer ponte; também, se duas faces de G têm mais do que uma aresta em comum, então G^* contém arestas múltiplas.

No caso de grafos planos conexos, existe uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de G e G^* .

Lema 2.3. *Seja G um grafo plano e conexo com n vértices, m arestas e f faces, e seja G^* o seu dual com n^* vértices, m^* arestas e f^* faces. Então, $n^* = f$, $m^* = m$ e $f^* = n$.*

Como o dual G^* de um grafo plano é, ainda, um grafo plano, pode repetir-se a construção, obtendo-se o grafo G^{**} . Se G for um grafo conexo, a relação entre G e G^{**} é a que se segue.

Teorema 2.5.7. *Seja G um grafo plano conexo. Então, G^{**} é isomorfo a G .*

Seja G um grafo planar; o seu dual pode ser definido por se fazer a imersão no plano e, aí, construir o seu dual. Já que duais foram somente definidos para grafos planares, é trivial dizer-se que um grafo é planar se e só se tiver um dual. Por outro lado, dado um grafo

arbitrário, não há maneira de dizer se ele é ou não planar. Neste sentido, será desejável encontrar uma definição de dualidade que generalize o conceito de dualidade apresentado e, em simultâneo, permita determinar se um dado grafo é ou não planar.

Teorema 2.5.8. *Seja G um grafo planar e G^* o seu dual geométrico. Então, o conjunto das arestas de G forma um circuito em G se e só se o correspondente conjunto das arestas em G^* forma um conjunto de corte em G^* .*

Corolário 2.15. *Um conjunto de arestas de G forma um conjunto de corte em G se e só se o correspondente conjunto das arestas em G^* forma um circuito em G^* .*

O conceito de dualidade, em termos abstractos, apresentado de seguida, não apela a nenhuma propriedade dos grafos planáveis, mas apenas invoca uma relação entre dois grafos. Um grafo G^* é um dual, no sentido abstracto, de um grafo G se existir uma correspondência biunívoca entre as arestas de G e as de G^* , com a propriedade que um conjunto de arestas de G forma um circuito em G se e só se o correspondente conjunto de arestas de G^* forma um conjunto de corte em G^* .

Diz-se que o conceito de dualidade, em termos abstractos, generaliza o conceito de dualidade, em termos geométricos, no sentido que se G é um grafo planar e G^* é o seu dual geométrico, então G^* é um dual abstracto de G .

Teorema 2.5.9. *Se G^* é um dual abstracto de G , então G é um dual abstracto de G^* .*

Note-se que não se exige que G seja um grafo conexo.

Teorema 2.5.10 (Whitney, 1933). *Um grafo é planar se e só se ele tiver um dual abstracto.*

2.6 Coloramento de grafos

Esta secção debruça-se sobre o coloramento de grafos e de mapas, com uma particular referência ao teorema das quatro cores. Responder-se-á à questão de saber sob que condições os vértices de um grafo podem ser pintados de tal forma que cada aresta é incidente em vértices de cores diferentes.

2.6.1 O número cromático

Seja G um grafo sem laços, sendo irrelevante a presença de arestas múltiplas.

Definição 2.6.1 (Grafo k -colorável). *Um grafo G sem laços diz-se k -colorável se a cada um dos seus vértices se puder atribuir uma de k cores, de tal forma que não há dois vértices adjacentes com a mesma cor.*

Se G é k -colorável, mas não é $(k - 1)$ -colorável, diz-se que G é k -cromático ou que o número cromático de G , representado por $\chi(G)$, é k .

Definição 2.6.2 (Número cromático). *O número cromático de um grafo é o número mínimo de cores necessárias para o colorir, no sentido k -colorável.*

O número cromático do grafo K_n é igual a n , isto é, $\chi(K_n) = n$. Note-se que K_n já não é planar para $n \geq 5$ e, por este motivo não há contradição com o teorema das quatro cores, o teorema 2.6.5.

Se G for um grafo nulo, o seu número cromático é igual a um, $\chi(N_n) = 1$.

Se G for um grafo bipartido completo $K_{m,n}$, então, $\chi(G) = 2$. Pinta-se o conjunto dos m vértices com uma única cor e o conjunto dos n vértices numa segunda cor. Como as arestas unem, somente, vértices do conjunto com m elementos com vértices do conjunto com n elementos, não há vértices adjacentes com a mesma cor.

Todo o grafo simples bipartido conexo tem número cromático igual a 2 ou 1. Por outro lado, todo o grafo com número cromático igual a 2 é bipartido.

Toda a árvore com, pelo menos, dois vértices é 2-cromática, assim como qualquer grafo circuito com um número par de vértices.

Grafos circuitos com um número ímpar de vértices, o grafo roda com um número ímpar de vértices e o grafo Petersen são exemplos de grafos 3-cromáticos. No entanto, no contexto dos grafos 3-cromáticos, não passam de exemplos, já que se desconhece sob que condições um grafo é 3-cromático.

As rodas com um número par de vértices são 4-cromáticas.

Sobre um grafo G arbitrário e o seu número cromático pouco se pode dizer. Por exemplo, se o grafo tem n vértices, então o seu número cromático não excede n ; se o grafo contiver K_r como seu subgrafo, então o seu número cromático não pode ser menor do que r . No entanto, conhecendo-se o grau de cada vértice, pode ir-se um pouco mais além.

Teorema 2.6.1. *Se G é um grafo cujo maior grau dos vértices é d , então, o grafo G é $(d + 1)$ -colorável.*

O teorema 2.6.1 permite concluir que todo o grafo cubo é 4-colorável.

Teorema 2.6.2 (Teorema de Brooks, 1941). *Se G é um grafo simples conexo mas que não é completo, e se o maior grau dos vértices de G é d (≥ 3), então G é d -colorável.*

O teorema 2.6.2 permite concluir que todo o grafo cúbico conexo, à exceção de K_4 , é 3-colorável.

Ambos os teoremas são úteis se o grau de todos os vértices for, aproximadamente, igual; no entanto, se o grafo tiver poucos vértices e com um grau elevado, estes teoremas perdem a sua utilidade. Por exemplo, o grafo estrela $K_{1,s}$, segundo o teorema 2.6.2, é s -colorável, mas, na realidade é 2-cromático.

Contudo, a restrição a grafos planares, permite ultrapassar estas debilidades em resultados. Tal é evidente no teorema que se segue.

Teorema 2.6.3. *Todo o grafo planar é 6-colorável.*

É possível aprofundar este teorema, embora a sua demonstração seja mais complexa, no resultado seguinte.

Teorema 2.6.4. *Todo o grafo planar é 5-colorável.*

Ainda é possível ir mais além, questão colocada pela primeira vez em 1852, resultado conhecido como teorema das quatro cores.

Teorema 2.6.5 (Teorema das quatro cores). *Todo o grafo planar é 4-colorável.*

Este teorema, proposto como conjectura em 1850, e finalmente demonstrado em 1976, após diversas tentativas infrutíferas, afirma que o número cromático de um grafo planar não excede 4.

Saliente-se que o teorema das quatro cores só se aplica a grafos planares; grafos não planares podem exibir números cromáticos arbitrariamente grandes.

2.6.2 O coloramento de mapas

Admita-se que se tem um mapa com vários países, e que se pretende saber quantas cores são necessárias para pintar os diferentes países, mas sujeito à restrição que dois países vizinhos não partilhem a mesma cor. A resposta toma forma na versão do teorema das quatro cores aplicada a mapas - qualquer mapa pode ser pintado usando, exactamente, quatro cores.

Por que motivo, para um mapa contendo n países, não se usam n cores diferentes para os colorir? Tal procedimento é considerado ineficiente, já que em mapas com muitos países seria muito difícil distinguir as cores; ao invés, é desejável usar o mínimo número de cores possível.

O que se entende por mapa? Um mapa é um grafo planar conexo que não contém qualquer ponte.

Definição 2.6.3 (Mapa k -colorável(f)). *Um mapa diz-se k -colorável(f) se as suas faces puderem ser pintadas com k cores, de tal forma que não há duas faces adjacentes (faces cuja fronteira têm uma aresta em comum) com a mesma cor.*

Saliente-se a diferença entre a noção k -colorável(v), isto é, no sentido dos vértices, apresentada na subsecção anterior, e a noção de k -colorável(f), apresentada agora.

Teorema 2.6.6 (Teorema das quatro cores para mapas). *Qualquer mapa é 4-colorável(f).*

A figura 2.21 mostra um mapa que é 3-colorável(f) - para colorir as faces são necessárias três cores diferentes - e 4-colorável(v) - para colorir os vértices são necessárias quatro cores diferentes, α , β , δ e τ .

Em que condições é que um mapa pode ser pintado usando, somente, duas cores?

Teorema 2.6.7. *Um mapa G é 2-colorável(f) se e só se G é um grafo euleriano.*

Teorema 2.6.8. *Seja G um grafo planar sem laços, e seja G^* o geométrico-dual de G . Então, G é k -colorável(v) se e só se G^* é k -colorável(f).*

Tal significa que pode dualizar-se qualquer teorema no coloramento de vértices de um grafo planar, reescrevendo-se o teorema em termos do coloramento das faces de um mapa, e vice-versa.

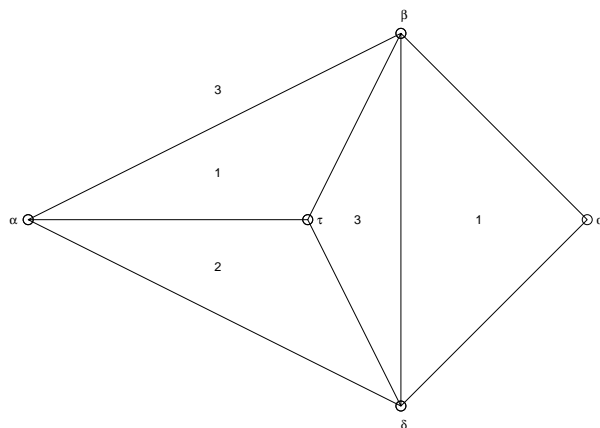


Figura 2.21: Mapa 3-colorável(f) e 4-colorável(v)

Corolário 2.16. *O teorema das quatro cores para mapas é equivalente ao teorema das quatro cores para grafos planares.*

A dualidade pode ser usada para provar o teorema que se segue [14].

Teorema 2.6.9. *Seja G um mapa cúbico. Então, G é 3-colorável(f) se e só se cada face é limitada por um número par de arestas.*

A restrição inicial no teorema 2.6.9, que o mapa é cúbico, pode ser retirada, sem se perder generalidade.

Teorema 2.6.10. *Para provar o teorema das quatro cores, é suficiente provar que cada mapa cúbico é 4-colorável (f).*

2.6.3 Coloramento de arestas

O teorema das quatro cores para grafos planares é equivalente ao resultado do coloramento de arestas em mapas cúbicos.

Definição 2.6.4 (Grafo k -colorável(a)). *Um grafo G diz-se k -colorável(a) se as suas arestas puderem ser pintadas com k cores, de tal forma que nenhum par de arestas adjacentes têm a mesma cor.*

Se G é k -colorável(a) mas não é $(k - 1)$ -colorável(a), diz-se que o índice cromático de G é k , e representa-se por $\chi'(G) = k$.

Seja d o grau máximo dos vértices em G ; então, $\chi'(G) \geq d$. O resultado que se segue fornece um minorante e um majorante para o índice cromático de um grafo simples G .

Teorema 2.6.11 (Vizing, 1964). *Se G é um grafo simples cujo grau máximo dos vértices é d , então,*

$$d \leq \chi'(G) \leq d + 1.$$

Sabe-se que $\chi'(C_n) = 2$ ou 3 , dependendo se n é par ou ímpar, e $\chi'(W_n) = n - 1$, se $n \geq 4$. para grafos completos, usa-se o teorema seguinte.

Teorema 2.6.12. $\chi'(K_n) = n$ se n é ímpar ($n \neq 1$), e $\chi'(G) = n - 1$ se n é par.

Qual a relação entre o teorema das quatro cores e o coloramento das aresta de um grafo? O resultado seguinte lança luz sobre a questão.

Teorema 2.6.13. *O teorema das quatro cores é equivalente à afirmação que $\chi'(G) = 3$, para todo o mapa cúbico G .*

O teorema de König relaciona o conceito de grafos bipartidos e o índice cromático.

Teorema 2.6.14 (Teorema de König). *Se G é um grafo bipartido com grau máximo dos vértices d , então $\chi'(G) = d$.*

Corolário 2.17. $\chi'(K_{r,s}) = \max(r, s)$.

2.6.4 Polinómios cromáticos

Seja G um grafo simples, e seja $P_G(k)$ o número de maneiras diferentes de colorir os vértices de G com k cores, de tal forma que nenhum par de vértices adjacentes tenha a mesma cor, designado por função cromática de G .

Mostra-se que se T é uma qualquer árvore com n vértices, então,

$$P_T(k) = k(k - 1)^{n-1}.$$

Também, se G é o grafo completo K_3 , então,

$$P_G(k) = k(k - 1)(k - 2);$$

no caso do grafo K_n , vem,

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1).$$

O teorema das quatro cores é equivalente à afirmação que se G é um grafo planar simples, então, $P_G(4) > 0$.

Dado um grafo simples arbitrário, em geral, é difícil determinar a função cromática, meramente por inspeção. Os resultados seguintes fornecem um método sistemático para obter a função cromática de um grafo simples.

Teorema 2.6.15. *Seja G um grafo simples, e sejam G_1 e G_2 os grafos obtidos a partir de G , por apagar e contrair uma aresta a . Então,*

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k).$$

Corolário 2.18. *A função cromática de um grafo simples é um polinómio.*

Por este motivo, a função cromática $P_G(k)$ é conhecida como o polinómio cromático de G .

Se G tem n vértices, então $P_G(k)$ é de grau n , o coeficiente de k^n é 1, o coeficiente de k^{n-1} é $-m$, onde m representa o número das arestas de G , e os coeficientes alternam de sinal. Não havendo cores disponíveis, não se pode colorir o grafo e, tal implica, que o termo constante do polinómio cromático é igual a 0.

Capítulo 3

Teoria dos grafos - algumas aplicações

A literatura contém uma ampla variedade de aplicações práticas da teoria dos grafos. Este capítulo é dedicado a um sumário de algumas delas, as quais ilustram a relevância e a actualidade desta teoria. A elencação que se segue não é, de forma alguma, exaustiva, mas corresponde a uma escolha pessoal, visando não ficar aquém dos objectivos da tese, mas pretendendo ir mais além, mostrando o longo alcance da teoria dos grafos e a sua aplicabilidade nas mais variadas áreas do conhecimento.

3.1 O problema do caminho mais curto

3.1.1 Grafos ponderados

Muitos problemas podem ser modelados por grafos cujas arestas têm associadas a si uma determinada ponderação. Por exemplo, considere-se uma companhia de aviação, onde o grafo básico tem como vértices as cidades para onde a companhia voa e os voos são as arestas. A ponderação nas arestas pode ser feita de variadas formas, nomeadamente, atendendo às distâncias entre as cidades, o tempo dos voos ou o custo de cada voo.

Um grafo que tenha associado a cada aresta um número é um grafo ponderado. Um caso análogo ao da companhia aérea é a de uma rede de computadores em várias cidades; a cada aresta pode ser associado a distância entre os computadores, o tempo de resposta ou o custo da comunicação.

Qual o caminho mais curto entre dois vértices? Note-se que no caso de o grafo ser ponderado, o critério não é o caminho que tenha o número mínimo de arestas, mas o que tiver a mínima soma das ponderações das arestas. No caso da companhia de aviação mencionado, para chegar da cidade A à cidade B , qual a combinação de voos onde se percorre uma distância mínima? Qual a combinação de voos que usa o menor tempo possível (ignorando os tempos de espera entre os voos)? Qual a combinação de voos onde se paga menos?

3.1.2 O algoritmo Dijkstra

Em 1959, o matemático holandês Dijkstra construiu um algoritmo que permite determinar o caminho mais curto entre dois vértices de um grafo ponderado, ao qual deu o seu nome. O exemplo que se segue introduz o algoritmo e, em simultâneo, ilustra o seu espírito. Considere-se o grafo da figura 3.1 - qual o caminho mais curto entre os vértices a e z ?

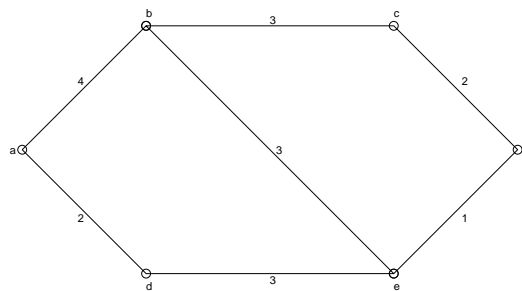


Figura 3.1: Ilustração do algoritmo Dijkstra

O problema é abordado de uma forma sistemática, determinando-se o comprimento do caminho mais curto, partindo do vértice a e escolhendo-se sucessivos vértices, até que z seja atingido.

Qual o vértice mais próximo de a ? A resposta é o vértice d , já que a outra opção possível, o vértice b , não define o caminho mais curto, já que o comprimento do caminho $a - d$ é 2 e o comprimento do caminho $a - b$ é 4.

Qual é o segundo vértice mais próximo de a ? As possibilidades são o vértice b ou o vértice e . O caminho $a - b$ tem comprimento 4, e o caminho $a - d - e$ tem comprimento 5, de forma que o segundo vértice mais próximo de a é o vértice b .

Qual é o terceiro vértice mais próximo de a ? Há um caminho de comprimento 7, até ao

vértice c ($a-b-c$), e um caminho de comprimento 5 até e , ou seja, o vértice e é o terceiro vértice mais próximo de a , pelo caminho $a-d-e$.

Qual é o quarto vértice mais próximo de a ? As possibilidades são o vértice c , com um caminho de comprimento 7, e o vértice z , com um caminho de comprimento 6. Consequentemente, o vértice z é o quarto vértice mais próximo de a , utilizando o caminho $a-d-e-z$, o qual constitui o caminho mais curto entre os vértices a e z .

Note-se o espírito que subjaz ao algoritmo - o algoritmo Dijkstra determina o caminho mais curto de a a um primeiro vértice, o caminho mais curto de a a um segundo vértice, e assim sucessivamente, até que o caminho mais curto entre a e z seja determinado.

Em termos genéricos, o algoritmo assenta em sucessivas iterações. Um conjunto de vértices é construído por adicionar um vértice em cada iteração; procede-se a uma etiquetagem, de forma que um vértice w é etiquetado com o comprimento do caminho mais curto de a a w , caminho que contém apenas vértices desse conjunto. O vértice adicionado ao conjunto é aquele com o caminho mais curto entre os outros vértice que ainda não pertencem ao conjunto.

O algoritmo Dijkstra é inicializado por etiquetar a com 0 e os outros vértices com ∞ , usando-se a notação $L_0(a) = 0$ e $L_0(v) = \infty$. O método forma um conjunto de vértices, o conjunto S_k , após k iterações, iniciando-se com $S_0 = \emptyset$. Este conjunto S_k é formado a partir de S_{k-1} , adicionando-lhe um vértice u , ainda não pertencente a S_{k-1} , com a etiqueta de caminho mais curto. Quando u é adicionado a S_k , actualizam-se as etiquetas de todos os vértices que não estão em S_k , de forma que $L_k(v)$, a etiqueta do vértice v na iteração k , é o comprimento do caminho mais curto de a a v , contendo vértices apenas em S_k .

Seja v um vértice que não pertence a S_k . Para actualizar a etiqueta de v , note-se que $L_k(v)$ é o comprimento do caminho mais curto de a a v , contendo apenas vértices em S_k . Deve levar-se em conta o seguinte: o caminho mais curto de a a v contendo apenas elementos de S_k é o caminho mais curto de a a v que contém elementos apenas de S_{k-1} (o conjunto dos vértices antes de adicionar-se o vértice u), ou o caminho mais curto de a a u na iteração $k-1$, com a aresta (u, v) adicionada. Tal significa que

$$L_k(a, v) = \min\{L_{k-1}(a, v), L_{k-1}(a, u) + w(u, v)\}.$$

Este procedimento é iterado sucessivamente, adicionando-se vértices até que o vértice z faça parte de S_k . A formalização do algoritmo Dijkstra está no algoritmo 1.

Seja G um grafo ponderado, com vértices $a = v_0, v_1, \dots, v_n = z$ e ponderações $w(v_i, v_j)$, onde $w(v_i, v_j) = \infty$ se $\{v_i, v_j\}$ não é uma aresta em G .

Uma questão que se coloca em qualquer algoritmo é o de saber quão caro ele é, questão respondida pelo teorema 3.1.1

Algoritmo 1 Algoritmo Dijkstra

```

for  $i = 1$  to  $n$  do
     $L(v_i) \leftarrow \infty$ 
end for
 $L(a) \leftarrow 0$ 
 $S \leftarrow \emptyset$ 
while  $z \notin S$  do
     $u \leftarrow$  um vértice não pertencente a  $S$  com  $L(u)$  mínimo
     $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
    for todos os vértices  $v \notin S$  do
        if  $L(u) + w(u, v) < L(v)$  then
             $L(v) \leftarrow L(u) + w(u, v)$ 
        end if
    end for
end while

```

Teorema 3.1.1. *O algoritmo Dijkstra usa $O(n^2)$ operações (adições e comparações) para determinar o caminho mais curto entre dois vértices num grafo conexo ponderado.*

Finaliza-se a descrição deste algoritmo por apresentar o exemplo da determinação do caminho mais curto entre os vértices A e L , do grafo da figura 3.2. O algoritmo Dijkstra permite determinar o caminho $A - B - E - H - F - I - K - L$, com comprimento 17, como o caminho mais curto entre A e L .

3.2 O problema do carteiro chinês

O problema do carteiro chinês deve-se ao matemático chinês Mei-ko Kwan, e consiste no que se segue. Um carteiro deseja entregar todas as suas cartas de tal forma que percorra a menor distância possível, retornando ao ponto de partida. Naturalmente que ele deseja

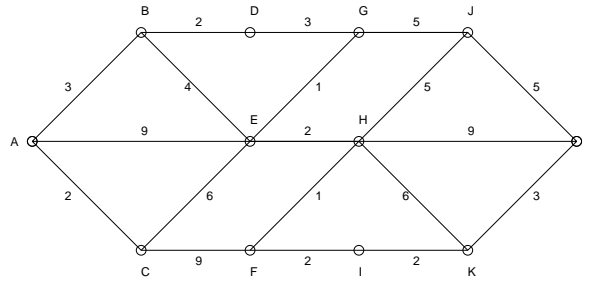


Figura 3.2: Qual o caminho mais curto entre A e L ?

percorrer cada uma das ruas do seu itinerário apenas uma única vez e, em simultâneo, quer evitar passar por muitas ruas mais do que uma vez.

O problema pode ser modelizado em termos da teoria dos grafos, usando um grafo ponderado, no sentido que o grafo corresponde à rede de ruas, e que a ponderação de cada aresta corresponde ao comprimento da rua. Neste cenário, pretende-se determinar um percurso fechado que inclua todas as arestas, pelo menos uma vez, e cuja ponderação seja a menor possível.

Evidentemente, se o grafo pretendido for euleriano, então qualquer trajecto euleriano será um percurso fechado adequado ao exigido. Tal trajecto euleriano pode ser determinado pelo algoritmo Fleury 2.3.2.

Caso contrário, o problema é muito mais complexo, embora seja possível determinar uma solução [2].

Ilustre-se a primeira situação, considerando-se a figura 3.3, que contém um grafo com exactamente dois vértices de grau ímpar, os vértices B e E . Por este motivo, é possível

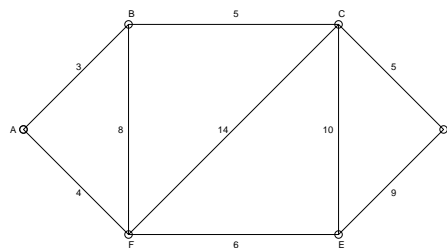


Figura 3.3: Grafo ponderado ilustrativo do problema do carteiro chinês

determinar um trajecto semi-euleriano de B para E que percorra cada aresta apenas uma vez. Para retornar ao ponto inicial, de E para B , percorrendo a menor distância possível,

a solução é $E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow B$; adicionando a distância do trajecto semi-euleriano, 13, com o caminho mais curto para retornar ao ponto inicial, 64, obtém-se a distância total de 77. Saliente-se que combinando um trajecto semi-euleriano com um caminho mais curto, resulta um grafo euleriano.

3.3 O problema do caixeiro viajante

Um caixeiro viajante pretende visitar diversas cidades e retornar ao ponto de partida, de tal forma que faça o seu itinerário na mínima distância possível.

Este problema também pode ser esquematizado apelando à teoria dos grafos, usando, novamente, a noção de grafo ponderado. O exigido é determinar um circuito hamiltoniano com a ponderação total mínima, no contexto de um grafo ponderado completo.

Uma opção possível é calcular a distância total para todos os circuitos hamiltonianos possíveis; no entanto, é evidente que tal opção, para mais do que 4 ou 5 cidades é impraticável. A literatura contém vários algoritmos a aplicar neste problema clássico, mas ou consomem demasiado tempo ou são demasiado complicados. Será então, preferível, determinar uma solução aproximada; tal é feito recorrendo ao algoritmo de Kruskal 3.4.1.

3.4 O problema da conexão mínima e o algoritmo Kruskal

O problema da conexão mínima pode ser descrito como se segue. Admita-se que se pretende construir uma rede ferroviária que ligue n determinadas cidades, de tal forma que se possa viajar de qualquer cidade para qualquer cidade. Para que os recursos gastos sejam mínimos, nomeadamente em termos de combustível, o grafo formado a partir das n cidades como vértices e da rede ferroviária como arestas, deve ser uma árvore.

O algoritmo Kruskal é um método eficiente na selecção de uma das n^{n-2} árvores possíveis que liguem estas cidades com um mínimo de recursos (assume-se que as distâncias entre as cidades são previamente conhecidas).

Reformule-se o problema em termos de um grafo ponderado, e o problema resume-se a determinar a árvore ligada T com ponderação associada mínima.

Teorema 3.4.1 (Algoritmo Kruskal). *Seja G um grafo conexo com n vértices. Então, a construção que se segue fornece uma solução para o problema da conexão mínima:*

- (i) *seja a_1 uma aresta de G com a menor ponderação;*
- (ii) *defina-se a_2, a_3, \dots, a_{n-1} por escolher em cada etapa a possibilidade de menor ponderação, sujeita à condição que não se forme nenhum circuito com as arestas precedentes a_i .*

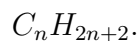
A árvore ligada requerida é o subgrafo T de G cujas arestas são a_1, \dots, a_{n-1} .

O algoritmo Kruskal também pode ser usado para obter uma solução aproximada do problema do caixeiro viajante, nomeadamente, fornecendo um minorante para a solução. Considere-se um qualquer circuito hamiltoniano num grafo completo ponderado e remova-se um qualquer vértice arbitrário v ; obtém-se um caminho semi-hamiltoniano, e tal caminho deve ser uma árvore ligada. Então, qualquer solução do problema do caixeiro viajante deve consistir numa árvore de ligação deste género, juntamente com duas arestas incidentes em v . Consequentemente, obtém-se um minorante para o problema por, através do algoritmo Kruskal, determinar uma árvore ligada com ponderação mínima, e adicionar-lhe as duas arestas com menor ponderação incidentes em v .

3.5 Enumeração de moléculas

Grafos podem ser usados para representar moléculas, onde os átomos são representados pelos vértices e as suas ligações pelas arestas.

O uso de árvores remonta a problemas relacionados com a enumeração de moléculas. O hidrocarbono, uma molécula constituída, apenas, por átomos de carbono e de hidrogénio pode ser representada por um grafo; cada átomo de carbono figura como um vértice de grau 4, e cada átomo de hidrogénio figura como um vértice de grau 1. Considere-se, agora, a classe de moléculas com a fórmula química



Quantas moléculas diferentes existem, mas que partilham esta fórmula? Note-se que moléculas com a mesma fórmula química podem ser díspares, já que os átomos podem

ser arranjados de forma diferente dentro da molécula.

Em primeiro lugar, saliente-se que o grafo de qualquer molécula com fórmula C_nH_{2n+2} é uma árvore, por aplicação do teorema 2.4.1, já que é um grafo conexo, tem $n + (2n + 2) = 3n + 2$ vértices e $\frac{1}{2}[4n + (2n + 2)] = 3n - 1$ arestas. Em segundo lugar, a molécula fica completamente determinada quando se sabe como os átomos de carbono estão arranjados, já que os átomos de hidrogénio podem ser adicionados de tal forma a que cada átomo de carbono seja de grau 4. Consequentemente, podem ignorar-se os átomos de hidrogénio, reduzindo-se o problema a determinar o número de árvores com n vértices, cada um com grau 4 ou menor.

As árvores não isomorfas com n vértices de grau 4, e $2n + 2$ de grau 1, representam os diferentes isómeros de C_nH_{2n+2} . Por exemplo, se $n = 4$, existem, exactamente, duas árvores não isomorfas deste tipo; então, existem exactamente dois isómeros diferentes de C_4H_{10} , chamados de butano e isobutano. As árvores do butano e do isobutano, onde somente figuram os átomos de carbono, estão na figura 3.4. Em termos genéricos, este

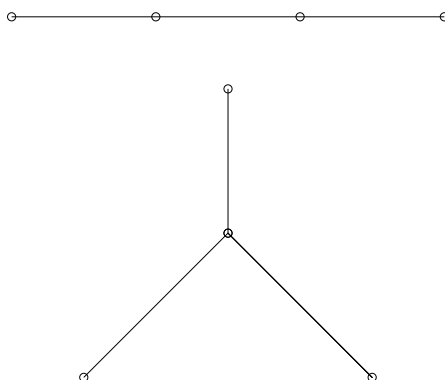


Figura 3.4: Árvores do butano e isobutano, onde apenas figuram os átomos de carbono

problema foi resolvido, em 1875, por Cayley.

3.6 Aplicações de árvores

Os problemas descritos nesta secção podem ser resolvidos pelo uso de árvores. As questões colocadas são:

- (i) Qual a melhor forma de armazenar itens numa lista, de forma a que qualquer item seja facilmente localizado?

- (ii) Que decisões devem ser tomadas para encontrar um objecto com determinada propriedade, dentro de uma colecção de objectos de um certo tipo?
- (iii) Como é que um conjunto de características podem ser eficientemente codificadas por uma cadeia de bits?

3.6.1 Árvores binárias - algoritmo de procura

Uma das tarefas mais importantes realizadas por um computador é a procura de itens numa lista. Caso a lista esteja totalmente ordenada, um algoritmo de procura eficiente é a construção de uma árvore binária, descrita como se segue.

O algoritmo de procura passa pela construção de uma árvore com as seguintes especificações:

- (a) a árvore é binária;
- (b) cada filho de um vértice será o seu filho esquerdo ou o seu filho direito;
- (c) cada vértice tem, no máximo, um filho esquerdo e um filho direito;
- (d) cada vértice terá associado a si uma etiqueta, a qual corresponderá a um dos itens da lista totalmente ordenada;
- (e) cada novo vértice é adicionado na árvore de tal forma que a etiqueta desse novo vértice é maior (em termos da lista totalmente ordenada) do que as etiquetas de todos os vértices na subárvore esquerda e menor do que a etiqueta de todos os vértices na subárvore direita.

A construção da árvore a partir da lista totalmente ordenada passa por um procedimento recursivo.

1. O procedimento inicial é definir a raiz da árvore como o primeiro item da lista.
2. Onde se coloca um novo item da lista? Deve comparar-se a etiqueta desse novo vértice com as etiquetas dos vértices já existentes na árvore, começando pela raiz. O movimento será para a esquerda de um vértice se a etiqueta do novo vértice for menor do que a etiqueta do um filho esquerdo desse vértice. O movimento será para

a direita de um vértice se a etiqueta do novo vértice for maior do que a etiqueta do filho direito desse vértice.

Caso o movimento seja para a esquerda de um vértice, mas esse vértice ainda não tenha filho esquerdo, o vértice a ser adicionado tornar-se-á esse filho esquerdo. Caso o movimento seja para a direita de um vértice, mas esse vértice não tenha filho direito, o vértice a ser adicionado tornar-se-á esse filho direito.

Por exemplo, admita-se que se quer construir uma árvore binária seguindo estes critérios, a partir das entradas sucessivas: Maria, Paula, Joana, Sandra, Mário, João, Pedro, Ana, usando como critério da ordem alfabética para ordenar totalmente a lista.

- (i) A Maria, por ser a primeira da lista, será definida como a raiz da árvore binária.
- (ii) A segunda entrada, a Paula, será o seu filho direito, já que, segundo o critério da ordem alfabética, $Paula > Maria$.
- (iii) A terceira entrada, a Joana, em virtude de $Joana < Maria$, será o seu filho esquerdo.
- (iv) A quarta entrada, Sandra, será um filho direito da Paula, na medida em que, por um lado, $Sandra > Maria$ e $Sandra > Paula$.
- (v) A quinta entrada, o Mário, será o filho esquerdo da Paula, uma vez que, em simultâneo, $Mário > Maria$ e $Mário < Paula$.
- (vi) A sexta entrada, o João, será um filho direito da Joana, em virtude de $João < Maria$ e $João > Joana$.
- (vii) A sétima entrada, o Pedro, será um filho esquerdo da Sandra, uma vez que, $Pedro > Maria$, $Pedro > Paula$ e $Pedro < Sandra$.
- (viii) A oitava entrada, a Ana, será um filho esquerdo da Joana, já que $Ana < Maria$ e $Ana < Joana$.

A figura 3.5 sintetiza a árvore binária obtida com este algoritmo.

O algoritmo 2 fornece um pseudocódigo para localizar um item numa árvore binária e para adicionar um novo vértice etiquetado com um novo item, caso essa etiqueta ainda

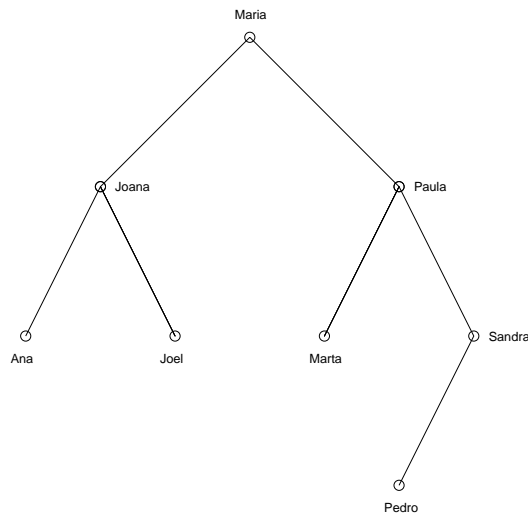


Figura 3.5: Exemplo de um algoritmo de procura

não exista. Neste algoritmo, v representa o vértice associado ao item x , e $\text{eti}(v)$ representa o item associado ao vértice v .

Qual o custo de implementação deste algoritmo? Admita-se que T representa uma árvore binária construída conforme a descrição acima, para uma lista com n itens. Pode construir-se uma árvore binária completa U , a partir de T , por adicionar vértices sem etiqueta quando necessário, de forma a que cada vértice tenha dois filhos. Assim, é possível localizar ou adicionar um item sem ter de adicionar um vértice.

Os vértices internos de U são os vértices de T , ou seja, U tem n vértices internos. Então, pelo teorema 2.4.3, U tem $n + 1$ folhas, e pelo corolário 2.10, a altura de U é $h \geq \lceil \log(n + 1) \rceil$. Consequentemente, são necessárias, pelo menos, $\lceil \log(n + 1) \rceil$ comparações para adicionar um item. Se U for equilibrada, para se localizar e adicionar um vértice, serão necessárias não mais do que $\lceil \log(n + 1) \rceil$ comparações.

Naturalmente, sempre que se adiciona um vértice, a árvore torna-se não equilibrada; neste sentido, há algoritmos que reequilibram a árvore, já que uma árvore equilibrada constitui o pior cenário ótimo.

Algoritmo 2 Árvore binária - algoritmo de procura

```
 $v \leftarrow$  raiz de  $T$ 
{um vértice não presente em  $T$  tem valor nulo}
while  $v \neq$  nulo e  $\text{eti}(v) \neq x$  do
  if  $x < \text{eti}(v)$  then
    if filho esquerdo  $v \neq$  nulo then
       $v \leftarrow$  filho esquerdo de  $v$ 
    else
      adiciona novo vértice como filho esquerdo de  $v$  a  $T$  e faz-se  $v \leftarrow$  nulo
    end if
  else if filho direito de  $v \neq$  nulo then
     $v \leftarrow$  filho direito de  $v$ 
  else
    adiciona novo vértice como filho direito de  $v$  a  $T$  e faz-se  $v \leftarrow$  nulo
  end if
end while
```

3.6.2 Árvores de decisão

Árvores dirigidas podem ser usadas para modelizar problemas nos quais uma sucessão de decisões origina uma solução. Uma árvore dirigida onde cada vértice interno corresponde a uma decisão, com uma subárvore em cada vértice para cada decisão possível, é designada por uma árvore de decisão. As soluções possíveis de um dado problema correspondem aos caminhos para as folhas da árvore dirigida.

Um exemplo clássico é a questão de saber, para um cenário de oito moedas, sete com peso idêntico e uma mais leve, quantas pesagens são necessárias efectuar para determinar qual a mais leve. Em cada pesagem, há três possibilidades - os dois pratos da balança podem estar equilibrados, inclinação para a esquerda (mais peso na esquerda) ou inclinação para a direita. Tal implica que a árvore de decisão para a sequência de pesagens é uma árvore 3-ária. A árvore terá, no mínimo, oito folhas, já que há oito possibilidades de selecção (qualquer uma das oito moedas pode ser a mais leve), e cada decisão possível deve ser representada, pelo menos, por uma folha. O maior número de pesagens necessárias para a identificação da moeda mais leve corresponde à altura da árvore de decisão. Pelo corolário 2.10, a altura da árvore é, no mínimo, de $\lceil \log_3 8 \rceil = 2$, de forma que são necessárias, pelo menos, duas pesagens.

Por mera curiosidade, descreva-se o processo neste caso concreto. Seleccionam-se, de forma arbitrária, seis moedas, colocando três moedas no prato da esquerda e três moedas no prato da direita, as moedas 1, 2, 3 e 4, 5, 6, respectivamente.

- (i) Se existir equilíbrio, tal significa que a moeda mais leve é a moeda 7 ou a moeda 8; tal será aferido numa segunda pesagem, onde os resultados possíveis reduzem-se a inclinação para a esquerda ou inclinação para a direita.
- (ii) Existe inclinação para a direita, indicando que uma das moedas 1, 2, 3 será a mais leve. Efectua-se uma segunda pesagem, por exemplo com as moedas 1 e 2, colocando-se a moeda 1 no prato da esquerda e a moeda 2 no prato da direita; ou existe inclinação para a esquerda, indicando que a moeda 2 é a mais leve, ou existe inclinação para a direita, indicando que a moeda 1 é a mais leve, ou existe equilíbrio, indicando que a moeda 3 é a mais leve.
- (iii) Para as moedas 4, 5, 6, o procedimento é análogo a (ii).

3.6.3 Códigos com prefixo

Imagine-se o problema de usar cadeias de bits para codificar as letras do alfabeto português. Cada letra poderá ser codificada por uma cadeia de comprimento, no máximo, cinco, já que há vinte e três letras e $2^5 = 32$ cadeias de zeros e uns com comprimento cinco (por exemplo, usando comprimento quatro, só se conseguiria codificar dezasseis letras). Se cada letra for codificada por cadeias de comprimento cinco, tal implica que o número de bits usados para codificar um texto será o quádruplo do número de caracteres do texto. Neste contexto, a questão que surge é sobre a possibilidade de arranjar um esquema de codificação para as vinte e três letras do alfabeto português, de forma a que, quando o texto for codificado, se use o mínimo de bits possíveis. Este problema é, de todo, pertinente, já que usando o mínimo de bits na codificação, poupa-se memória e reduz-se o tempo de transmissão da informação.

A codificação das letras pode usar diferentes comprimentos das cadeias; por exemplo, letras que apareçam com muita frequência devem ser codificadas com cadeias de comprimento mais curto do que as letras que aparecem com menos frequência. No entanto, a codificação deve ser feita de forma a não existir ambiguidade entre o fim da codificação

de uma letra e o início da codificação de uma outra. Por exemplo, admita-se a seguinte codificação: 0, 1, 01, para as letras a , b , c , respectivamente. Neste caso, a cadeia 0101 poderia corresponder a abc , cab , $abab$ ou cc .

Para garantir-se que uma cadeia de zeros e uns corresponde, unicamente, a uma sequência de letras, a cadeia de zeros e uns para uma letra nunca pode ocorrer como a primeira parte da codificação de uma outra letra. Os códigos que partilham desta propriedade chamam-se códigos com prefixo; a codificação 0,10,11 para as letras a , b , c , respectivamente, pertence a esta classe de código.

Um código com prefixo pode ser representado por uma árvore binária, onde os caracteres correspondem às etiquetas das folhas. As arestas da árvore são etiquetadas de tal forma que uma aresta que direcione para um filho esquerdo é um 0 e uma aresta que direcione para um filho direito é um 1. A cadeia de zeros e uns utilizada para codificar um caracter é a sequência de etiquetas das arestas no caminho único da raiz até à folha assinaladas com esse caracter.

Admita-se a seguinte codificação: 0, 10, 110, 111, para as letras a , b , c , d , respectivamente. A figura 3.6 representa uma árvore binária com um código com prefixo.

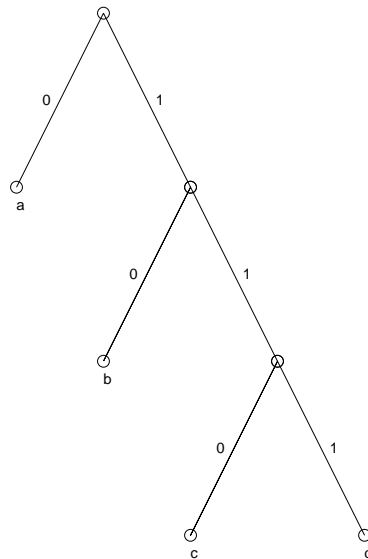


Figura 3.6: Árvore binária com um código com prefixo

3.6.4 Árvores e ordenação

Admita-se que um conjunto é totalmente ordenado, segundo um determinado critério. Inicialmente, os elementos desse conjunto podem estar numa ordem qualquer, sendo necessário, então, ordená-los. As árvores podem ser usadas para descrever algoritmos de reordenação e na análise da complexidade desta tarefa.

Caso se usem árvores como modelos para estes algoritmos de ordenação, é possível determinar um minorante para a complexidade do pior caso. Há métodos de reordenação que fazem comparações de dois elementos de cada vez, ou seja, fazem comparações binárias. Este género de método pode ser representado por uma árvore de decisão binária, no qual cada vértice interno representa a comparação de dois elementos. Cada folha representa uma das $n!$ permutações dos n elementos.

Teorema 3.6.1. *Um algoritmo de reordenação baseado na comparação binária requer, no mínimo, $\lceil \log n! \rceil$ comparações.*

Como $\log n! > \frac{n \log n}{4}$, para $n > 4$, então, nenhum algoritmo de reordenação que use comparações pode ter uma complexidade, em termos de pior cenário possível, maior do que $O(n \log n)$. Consequentemente, um algoritmo de reordenação é tão eficiente quanto possível se tiver $O(n \log n)$ em termos de complexidade temporal.

Um dos métodos mais simples para reordenar, mas não mais eficiente, é aquele que consiste reordenar uma lista por ordem crescente por, de forma sucessiva, comparar elementos adjacentes, permutando a sua posição caso estejam na ordem errada. A operação básica deste algoritmo é trocar a posição de dois elementos adjacentes, caso estejam mal ordenados; esta operação é repetida de forma iterativa até que a reordenação esteja completa. O pseudocódigo para este método está descrito no algoritmo 3.

Quão eficiente é este algoritmo? Uma vez que são usadas $n - i$ comparações durante a i -ésima etapa, o número total de comparações usadas numa lista de n elementos é

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Consequentemente, o método tem complexidade na ordem $O(n^2)$, significando que não tem a desejada complexidade na ordem $O(n \log n)$.

Algoritmo 3 Reordenação - método *bubble*

```

for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
  for  $j = 1$  to  $n - i$  do
    if  $a_j > a_{j+1}$  then
       $a_j \leftarrow a_{j+1}$ 
    end if
  end for
end for
 $\{a_1, \dots, a_n$  em ordem crescente $\}$ 

```

Um algoritmo que tem uma complexidade $O(n \log n)$ é o chamado algoritmo de fusão ou junção. Em termos gerais, um método desta natureza divide a lista em duas sublistas de igual tamanho (ou, em caso de necessidade, uma das sublistas terá mais um elemento do que a outra), até que cada sublista contenha, somente, um elemento. Esta sucessão de sublistas pode ser representada por uma árvore binária equilibrada.

Após cada sublista conter apenas um único elemento, o procedimento continua por, de forma sucessiva, juntar ou fundir pares de listas; cada uma das listas já está ordenada e o par será transformado, por junção, numa única lista ordenada. A sucessão de junções ou fusões termina quando a lista original estiver ordenada. A sucessão de listas que são fundidas pode ser representada numa árvore binária equilibrada.

Como se processa a fusão de listas? Considere-se o problema genérico de fundir duas listas ordenadas, L_1 e L_2 , numa lista ordenada L . O procedimento é o que se segue. Inicialmente, a lista L está vazia. Comparam-se os menores elementos das duas listas, L_1 e L_2 , e coloca-se o menor deles em L , na última posição, removendo-se este elemento da lista onde figurava. Nesta fase, se L_1 ou L_2 estiverem vazias, adiciona-se a lista não vazia a L , completando-se a fusão. Caso nem L_1 nem L_2 estejam vazias, repete-se o processo. O pseudocódigo que descreve este processo é o algoritmo 4.

Os dois resultados seguintes permitem avaliar a complexidade do processo.

Lema 3.1. *Dois listas ordenadas com m elementos e n elementos pode ser fundida numa lista ordenada por usar não mais do que $m + n - 1$ comparações.*

Teorema 3.6.2. *O número de comparações necessárias para fundir uma lista ordenada com n elementos é $O(n \log n)$.*

Algoritmo 4 Fusão de listas

 $L = \emptyset$ **while** $L_1 \neq \emptyset$ e $L_2 \neq \emptyset$ **do**remove o menor elemento de L_1 e L_2 da lista correspondente e coloca-o na última posição de L **if** a remoção deste elemento origina um conjunto vazio **then**remove todos os elementos do outro conjunto e adiciona-o a L **end if****end while** $\{L \text{ é a fusão dos dois conjuntos, por ordem crescente}\}$

3.6.5 Construção de árvores de ligação

O algoritmo *backtracking* usado na construção das árvores de ligação de um grafo pode ser usado na resolução do problema das n -rainhas. A questão que se levanta é a de saber como posicionar n rainhas num tabuleiro de xadrez de dimensão $n \times n$, de forma a que nenhum par de rainhas se ataque mutuamente (isto é, não podem estar nem na mesma coluna, nem na mesma linha, nem em diagonal).

A resolução deste problema é ilustrada para o caso $n = 4$, ou seja, pretende-se posicionar 4 rainhas num tabuleiro 4×4 , sem que as rainhas se ataquem.

Considere-se um tabuleiro 4×4 , onde a posição no tabuleiro será representada por a_{ij} , com $i, j = 1, \dots, 4$. O processo pode iniciar-se por se colocar a primeira rainha na posição a_{11} . A segunda rainha já só pode ser colocada nas posições a_{23} , a_{24} , a_{32} , a_{34} , a_{42} ou a_{43} ; escolha-se a segunda coluna, na posição a_{32} . Neste momento, a terceira rainha já não consegue ser colocada na terceira coluna e, por este motivo, volta-se atrás, e recoloca-se a rainha na segunda coluna, mas na posição a_{42} . Agora, a terceira rainha pode ser posicionada em a_{23} ; no entanto, é impossível colocar a quarta rainha.

Assim sendo, conclui-se que não existe solução quando a primeira rainha é colocada em a_{11} e, por este motivo, reinicia-se o processo com o tabuleiro vazio. Coloca-se a primeira rainha em a_{21} , a segunda rainha em a_{42} , a terceira rainha em a_{13} e a quarta rainha em a_{34} .

3.6.6 Árvores de ligação minimais

Considere-se o cenário que se segue. Uma companhia tem delegações em Lisboa, Porto, Coimbra, Faro e Viseu, e pretende ligar essas cidades através de uma rede de computadores. Qualquer par de cidades pode ser ligada através da linha telefónica, mas o seu custo varia entre cada par. Para modelizar este cenário, construiu-se um grafo ponderado, onde os vértices representam os computadores em cada uma das cidades, as arestas representam as linhas telefónicas e as ponderações nas arestas o custo mensal da ligação. Que cidades devem estar ligadas de forma a que exista um caminho entre duas quaisquer cidades e que, em simultâneo, o custo das linhas seja minimizado?

Para resolver este problema, deve determinar-se a árvore de ligação cuja soma das ponderações das arestas seja mínima. Tal árvore de ligação designa-se por árvore de ligação minimal e pode ser determinada pelo algoritmo de Prim. De seguida, formalizam-se este conceitos.

Definição 3.6.1 (Árvore de ligação minimal). *Uma árvore de ligação minimal num grafo conexo ponderado é uma árvore de ligação que exhibe a menor soma das ponderações das suas arestas.*

O algoritmo de Prim, apresentado em 1957, possibilita a construção de tais árvores minimais por, de forma sucessiva, adicionar arestas de menor ponderação que ainda não foram usadas. Neste sentido, faz uma escolha óptima em cada passo; embora a escolha óptima em cada passo não garanta, por si só, a solução óptima global, mostra-se que o algoritmo Prim o faz.

Em termos mais precisos, o algoritmo de Prim inicia-se por escolher qualquer aresta com ponderação mínima, e coloca-a na árvore de ligação. Então, e de forma sucessiva, adiciona à árvore arestas de ponderação mínima que são incidentes num vértice que já pertença à árvore e que não forme um circuito com as arestas já presentes. O algoritmo termina após a adição de $n - 1$ arestas.

O algoritmo 5 contém um pseudocódigo que descreve o método.

O algoritmo Kruskal é, também, um algoritmo como os mesmos objectivos do algoritmo Prim, ou seja, a determinação de uma árvore de ligação minimal.

A diferença entre os algoritmos reside no seguinte. No algoritmo Prim, são seleccionadas

Algoritmo 5 Prim

```
 $T \leftarrow$  aresta com ponderação mínima  
for  $i = 1$  to  $n - 2$  do  
   $a \leftarrow$  aresta com ponderação mínima incidente num vértice em  $T$  e que não forma um  
  circuito em  $T$ , quando adicionada a  $T$   
   $T \leftarrow T + a$   
end for  
{ $T$  é uma árvore de ligação minimal de  $G$ }
```

arestas com ponderação mínima que são incidentes num vértice já presente na árvore, mas que não formem um circuito; no algoritmo Kruskal, as arestas com ponderação mínima não são, necessariamente, incidentes num vértice que já figure na árvore e que não formem um circuito.

Por fim, note-se que quando se executa o algoritmo Prim, se as arestas não estão ordenadas, pode existir mais do que uma aresta em condições para ser seleccionada; tal implica que as arestas têm que ser ordenadas, para que não se verifiquem ambiguidades e o processo seja, então, determinístico.

3.7 Coloramento de grafos e construção de horários

Admita-se que se pretende construir um horário para uma universidade, indicando a que horas funcionarão as diferentes disciplinas, sujeito à restrição que algumas das disciplinas não poderão funcionar em simultâneo.

Tal tarefa é concretizada por construir-se um grafo cujos vértices representam as várias disciplinas e cujas arestas representam os pares de disciplinas que não podem funcionar em simultâneo. Se, para cada tempo disponível, se associar uma cor, então, o coloramento dos vértices do grafo corresponde ao horário de todas as disciplinas. Neste caso, o conhecimento do polinómio cromático do grafo indica se a elaboração do horário é possível e, em caso afirmativo, quantas maneiras possíveis há de o construir.

Problema análogo é o de marcar os exames numa universidade de forma a que nenhum aluno tem dois exames à mesma hora.

Constrói-se um grafo, onde os vértices representam as diferentes disciplinas e onde existirá uma aresta entre dois vértices caso exista pelo menos um aluno que frequente essas

duas disciplinas. A cada dia/hora para a realização do exame corresponde uma cor e a elaboração do horário dos exames corresponde a colorir o grafo.

3.8 O problema do casamento

O problema do casamento consiste no que se segue. Considere-se um conjunto finito de rapazes, onde cada um deles conhece várias raparigas; sob que condições pode, cada um dos rapazes, casar com uma rapariga que conheça?

Tal problema pode ser modelado por um grafo bipartido G , onde o conjunto dos vértices está partido em dois subconjuntos disjuntos, V_1 e V_2 (correspondendo aos rapazes e às raparigas, respectivamente), e no qual cada aresta une um rapaz com uma rapariga que ele conhece.

Uma combinação completa de V_1 para V_2 , num grafo bipartido $G(V_1, V_2)$, é uma correspondência de um para um, entre os vértices em V_1 e um subconjunto dos vértices em V_2 , com a propriedade que vértices correspondentes estão unidos.

Então, o problema do casamento pode ser reformulado: se $G(V_1, V_2)$ é um grafo bipartido, quando é que existe uma combinação completa de V_1 para V_2 em G ?

Uma condição necessária para a solução do problema do casamento é que cada k rapazes conheça, pelo menos, k raparigas, para todos os k inteiros que satisfaçam $1 \leq k \leq m$, onde m representa o número total de rapazes. Esta condição é conhecida como a condição do casamento e Hall mostrou que esta condição também é suficiente.

Teorema 3.8.1 (P. Hall, 1935). *Uma condição necessária e suficiente para a solução do problema do casamento é que cada conjunto de k rapazes, em termos colectivos, conheça, pelo menos, k raparigas ($1 \leq k \leq m$).*

No capítulo três fizemos a apresentação de várias aplicações possíveis da teoria dos grafos. Importa, agora, ver quais destas aplicações se mostram mais adequadas para introduzir a temática da teoria dos grafos no ensino não universitário. Será este o objectivo que pretendemos atingir no capítulo quatro.

Capítulo 4

A teoria dos grafos no ensino não universitário

Uma das grandes vantagens do ensino da teoria dos grafos reside no facto de os alunos não necessitarem de bases matemáticas específicas, os chamados pré-requisitos, cuja ausência tanto hipoteca o processo de ensino-aprendizagem. Aliás, numa fase embrionária do seu estudo, tem um cariz intuitivo. Quando se apresenta um problema elementar aos alunos, estes não revelam grandes dificuldades em modelizar a situação por meio de um grafo, e indicar o significado dos vértices e das arestas. De facto, o estudo da teoria dos grafos no ensino secundário, que consta dos programas oficiais, é, grosso modo, apelativo para os alunos. Em certo sentido, pode comparar-se a teoria dos grafos à teoria dos números: ausência de pré-requisitos, o que a torna compreensível para os alunos, mesmo aos mais novos e, também, aos menos expeditos nas lides matemáticas.

Curiosamente, mas sem surpresa, os alunos não associam a teoria dos grafos ao estudo da matemática. Quando um aluno pensa na disciplina da Matemática, em geral, associa-a ao Cálculo, à Álgebra, à Geometria, à Trigonometria e, em alguns casos, à Estatística. Os alunos compreendem que para estudar Matemática necessitam de um professor/orientador e, cumulativamente, de muitas horas de estudo. Só os mais audazes e os mais ambiciosos em termos académicos, juntamente com trabalho árduo e sistemático, têm a Matemática como companheira agradável, misteriosa e intrinsecamente interessante. No entanto, mesmo os alunos sem grande bagagem e cultura matemática, sentem-se capazes para resolver um problema no âmbito da teoria dos grafos. Por isso, um factor de atractividade do estudo da teoria dos grafos talvez seja a sua acessibilidade sem pré-condições.

Naturalmente, será de realçar que a simplicidade mencionada é visível numa fase introdutória; à medida que se progride no seu estudo, a sua complexidade aumenta. Mas, o estudo previsto, mesmo no ensino secundário, não contempla conceitos de grande complexidade; em geral, qualquer aluno conseguirá compreender e aplicar os conceitos com relativa facilidade.

Neste capítulo faz-se uma reflexão, a título pessoal, baseado na experiência de docência e na partilha de experiências com outros professores, sobre o valor e a adequação do ensino da teoria dos grafos no ensino secundário, e questiona-se a sua ausência do programa de Matemática A. Numa fase prévia, são formulados alguns comentários sobre o ensino na teoria dos grafos no ensino básico.

4.1 Ensino básico

A necessidade de facultar aos alunos vivências que lhes permitam desenvolverem a capacidade e competência para utilizar representações matemáticas distintas, compreender a sua equivalência e, também, a consciencialização da importância desta capacidade em actividades futuras, são metas defendidas pelo Ministério da Educação [3, 4, 5, 8, 6].

A partir da utilização de pontos e linhas podem modelizar-se situações da vida real e, então, explorar essas situações, o que passa pela sua resolução e discussão desse processo, o que permitirá que os alunos adquiram as capacidades e competência mencionadas.

4.1.1 1º Ciclo

Ao nível do 1º Ciclo, as actividades propostas, embora enquadradas na teoria dos grafos, são levadas a cabo a partir da intuição dos alunos. No entanto, saliente-se que, apesar de se trabalhar a um nível informal, tal não invalida a introdução de conceitos básicos da teoria dos grafos.

Uma actividade do agrado dos alunos é a seguinte. Observe-se a figura 4.1 e 4.2. Quais das figuras é possível desenhar sem levantar o lápis e sem repetir duas vezes a mesma linha? Os alunos, em caso afirmativo, devem demonstrar como o fazem.

Podem, também, indicar quais os grafos que desenham com início e fim no mesmo vértice e com o início e fim em vértices distintos.

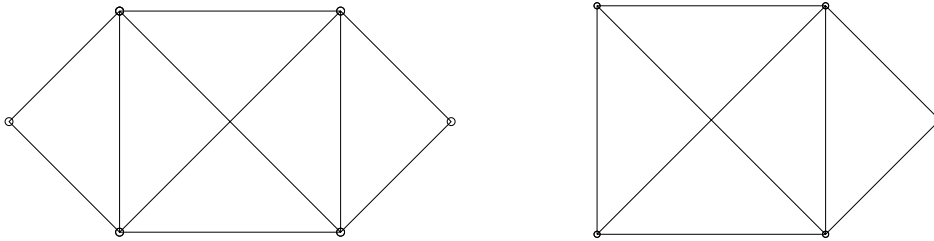


Figura 4.1: Grafos a desenhar, sem levantar o lápis e sem repetir a mesma linha

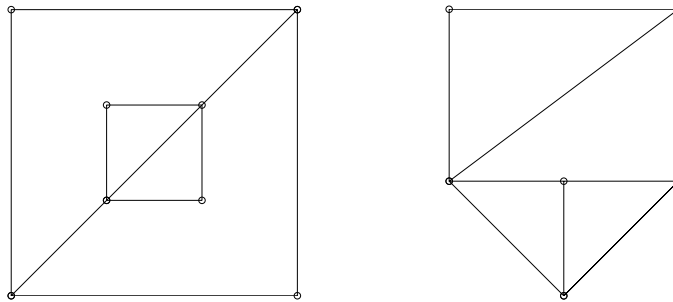


Figura 4.2: Grafos a desenhar, sem levantar o lápis e sem repetir a mesma linha

Esta actividade também pode ser lançada aos alunos do 2º Ciclo, acrescentando-se o pedido: qual a regra que, perante uma nova figura, permite decidir se é ou não possível desenhá-la com um só traço? Pode fornecer-se a tabela seguinte:

Grafos	Nº vértices de grau par	Nº vértices de grau ímpar	Início e fim no mesmo vértice	Início e fim em vértices distintos
A				
B				
C				
D				

Uma outra actividade que pode ser lançada aos alunos do 1º Ciclo, em articulação com a área da Expressão Plástica é descrita a seguir. Observem-se as figuras constantes na figura 4.3. Os alunos podem, por experimentação, pelo método de tentativa e erro, resolver o problema.

4.1.2 2º Ciclo

Uma proposta de actividade é a modelização do aquecimento, com uma bola, efectuado na disciplina de Educação Física. Pretende-se que os alunos registem de que forma um qualquer aluno, de um grupo de quatro, pode passar a bola para os colegas e, posteriormente,

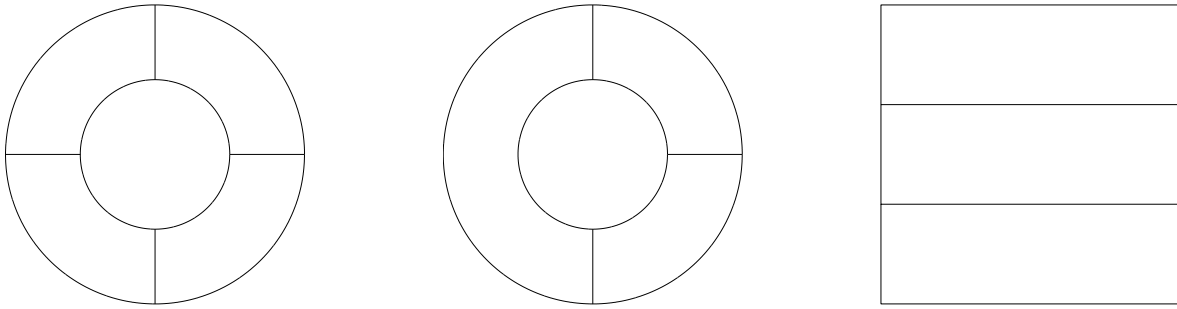


Figura 4.3: Quantas cores são precisas?

as eventuais viagens da bola entre os elementos do grupo. Mesmo sem o professor enfatizar que é de evitar a linguagem escrita, os alunos terão tendência a usar uma representação com quatro pontos (os elementos do grupo) e linhas a unir os pontos, representando as viagens da bola. Tal uso da modelização matemática, evitando uma descrição por meio de palavras, indica aos alunos que a matemática está presente nas mais variadas situações. Na esmagadora maioria das vezes, o aluno constrói um grafo sem que o professor tenha introduzido tal conceito.

Já ao nível do 2º Ciclo, os alunos estão aptos a resolver a questão seguinte. Admita-se que se vai realizar um torneio de futebol e que podem ser inscritas cinco equipas. Pretende-se que os alunos elaborem o calendário dos jogos, em termos de se saber que equipas jogam com quem.

Um conteúdo programático abordado no 2º Ciclo é o teorema 2.5.4. No tema dos sólidos geométricos e sua classificação, quando se contabilizam o número de arestas, vértices e faces dos prismas e das pirâmides, pede-se aos alunos que concluam sobre a relação entre o número de arestas, vértices e faces de cada um dos sólidos; em geral, os alunos enunciam a relação apresentada no teorema 2.5.4.

Uma actividade com interesse para os alunos, podendo ser realizada em Estudo Acompanhado é a seguinte. Admita-se que um jogo de dominó está incompleto, existindo somente as seguintes peças: 0-1, 0-3, 0-6, 1-1, 1-2, 1-4, 2-3, 3-3, 3-4, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6 e 5-6. Em que condições será possível dispor todas as peças deste jogo numa sequência contínua?

Uma outra proposta de trabalho interessante é o seguinte jogo. Para jogar são necessários

dois jogadores. Cada jogador tem à sua disposição quatro cores. O primeiro jogador desenha uma região fechada. O segundo jogador pinta essa região e desenha outra. Não é permitido desenhar uma região de tal forma que contenha totalmente uma outra região. Perde o primeiro jogador que não consiga colorir adequadamente a região proposta (não pode fazer fronteira com região pintadas da mesma cor).

4.1.3 3º Ciclo

Uma actividade que pode ser proposta aos alunos do 3º ciclo está descrita de seguida. Um conhecido hipermercado efectua o transporte gratuito de clientes em 4 localidades do concelho do Porto, partindo e terminando a sua viagem no hipermercado. Pretende-se determinar o percurso que esse autocarro terá que fazer para recolher os clientes em cada uma das localidades, de modo a efectuar o mínimo de quilómetros possível. Será fornecido aos alunos um mapa que contenha as localidades e o hipermercado (com a respectiva escala), e material de medição e de escrita. Note-se que na fase prévia de transformar as distâncias no mapa em distâncias reais, existe interdisciplinaridade, já que as escalas são um conteúdo programático da disciplina de Geografia, e articulação entre ciclos, já que o mesmo tema é abordado na Matemática de 6º ano.

Os alunos podem seguir duas estratégias:

1. de forma exaustiva, determinam todos os percursos que o autocarro pode fazer e, então, seleccionam o percurso mínimo;
2. podem procurar sempre a cidade mais próxima do local onde, actualmente, se encontram.

Saliente-se que tem sido observado que, mesmo alunos do 3º ciclo, conseguem decidir como procurar a solução, resolvendo a questão de forma intuitiva, não necessitando da orientação do professor.

Admita-se que o Jardim Zoológico da Maia pretende adquirir seis novos animais: um papagaio, uma girafa, um macaco, um leão, um elefante e um mocho. Nesta fase, o professor pode optar por uma das seguintes alternativas:

1. ou abre a discussão à turma, para que eles decidam quais os animais que não podem viajar na mesma jaula;
2. indica, de forma arbitrária, essas incompatibilidades.

Em qualquer das opções, será desejável que os alunos compreendam a vantagem de representar tais situações numa tabela de dupla entrada e, então, modelizar a situação através de um grafo.

Pretende-se que os alunos acomodem os animais para o transporte no número mínimo de jaulas, garantindo que todos os seis animais chegam sãos e salvos ao Jardim Zoológico.

Uma outra actividade possível ser resolvida pelos alunos do 3º Ciclo é a que a seguir se descreve. A Manuela tem três camisolas (uma azul, uma branca e uma vermelha), duas saias (uma preta e uma rosa) e quatro pares de sapatos (uns azuis, uns pretos, uns roxos e uns brancos). De quantas maneiras diferentes é que a Manuela se pode vestir?

Note-se que o mesmo género de problema é abordado na Matemática do 9º ano, de uma forma introdutória, e no 12º ano, em Matemática A, na introdução ao princípio fundamental das contagens. O curioso é que, quando o problema é lançado aos alunos de uma forma informal, sem ser no contexto da exposição de um conteúdo programático, eles conseguem resolver o problema, muitas vezes por usar, sem o saber, o conceito de árvore; no entanto, quando lançado numa situação formal de sala de aula, como os alunos associam a Matemática a cálculos e fórmulas, ficam como que paralisados e esperam pela resolução do professor.

4.2 Ensino secundário

Ao nível do ensino secundário, os alunos devem ser expostos a uma introdução teórica sistematizada da teoria dos grafos. Tal introdução deve ser complementada por algumas aplicações práticas, que ilustrem o valor prático da teoria.

4.2.1 Matemática Aplicada às Ciências Sociais

O programa oficial de Matemática Aplicada às Ciências Sociais explicita o papel da disciplina no percurso escolar do aluno, tal como se segue [9].

«A Matemática Aplicada às Ciências Sociais pretende desempenhar um papel incontornável para os estudantes, contribuindo para uma abordagem tão completa quanto possível de situações reais, ao desenvolver a capacidade de formular e resolver matematicamente problemas e ao desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas - os estudantes devem saber ler e escrever textos com conteúdo matemático descrevendo situações concretas.»

Mais do que pretender que os alunos dominem questões técnicas e de pormenor, pretende-se que eles tenham experiências significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas actividades futuras.

No âmbito desta disciplina, pretende mostrar-se como os alunos, após uma introdução teórica, devem interpretar algumas situações de sistemas de distribuição e explorar diversas soluções para problemas que lhes sejam colocados. Note-se que o objectivo é o de introduzir e desenvolver alguns conceitos matemáticos através de problemas da vida real, mais numa perspectiva de formação cultural do que de formação estritamente técnica.

A teoria dos grafos abordada a este nível pretende apresentar modelos úteis para enfrentar e solucionar problemas de gestão, e iniciar intervenções sociais ao nível da compreensão dos sistemas de distribuição ou recolha, nomeadamente, distribuição de bens alimentares, de correio e de recolha do lixo. Pretende-se que os alunos interpretem algumas situações de sistemas de distribuições e explorem diversas soluções para problemas que lhes sejam apresentados. As situações seleccionadas devem ser susceptíveis de ser modelizadas por um sistema de pontos e de linhas a unirem alguns desses pontos.

Considera-se que uma introdução teórica com a abrangência dos capítulos prévios é, para o ensino secundário, demasiado ambiciosa. No entanto, será adequado apresentar aos alunos problemas dos circuitos de Euler e de Hamilton. Definições formais e notação podem ser introduzidas à medida que forem sendo necessárias e pertinentes.

Os problemas clássicos podem ser apresentados nas aulas e ampliados em trabalhos de projecto.

Então, em concreto, que propostas de trabalho se podem apresentar aos alunos?

Podem apresentar-se situações que sejam modelizadas por grafos, tais como, sistemas de distribuição (por exemplo, carteiro, estafetas), patrulhamento e controle de equipamentos

sociais (por exemplo, parcometros), sistemas de limpeza de ruas e de recolha de lixo. Naturalmente que as situações propostas devem ser problemas de pequenas distribuições mas, na medida do possível, concretizadas a situações da vida real, evitando-se os problemas meramente académicos.

Os alunos devem ser capazes de esboçar o grafo que modeliza a situação apresentada, evidenciando que extraíram o essencial do enunciado. Orientados pelo professor, devem encontrar estratégias para encontrar soluções possíveis; devem ser capazes de passá-las ao discurso escrito e concretizá-las em etapas elementares. Após a resolução do problemas apresentado, devem ser críticos quanto à qualidade da solução encontrada, no sentido da sua unicidade e da sua optimalidade. Como objectivo último, seria desejável que os alunos conseguissem passar do particular para o geral, do concreto para o abstracto, ou seja, que conseguissem enunciar resultados gerais.

Será de privilegiar níveis crescentes de exigência nos problemas apresentados. Um problema de patrulhamento ou distribuição postal pode ser proposto sobre um mapa; por exemplo, pode pedir-se aos alunos que determinem quaisquer caminhos possíveis. De seguida, podem impor-se restrições ao problema, tais como, determinar caminhos sem repetir arestas e que o ponto inicial e terminal coincidam.

Com a introdução de problemas desta natureza, as noções de vértice, arestas, caminho e circuito são intuitivas. O que despertará o interesse dos alunos e será de valor acrescentado será saber quais as condições para que um grafo admita circuitos de Euler e o conhecimento de algoritmos que permitam determinar uma solução.

Uma outra tipologia de problemas a abordar são os que consistem em planos de viagens, problemas de caixeiros viajantes, localização de sedes ou grandes equipamentos que carecem de abastecimento a partir de vários pontos de uma região.

Além da sugestão de abordagem supramencionada quanto aos problemas de distribuição, neste género de problema, os alunos, em cada modelo, devem procurar esquemas combinatórios (árvores) que permitam calcular pesos totais de caminhos possíveis. Após a determinação de uma solução, mesmo que óptima, o problema não está encerrado, já que é fundamental o exercício do espírito crítico dos alunos sobre a utilidade e a viabilidade

económica de tal solução.

No contexto de problemas de planos de viagem, podem apresentar-se algumas situações que sejam modelizadas por grafos, em que se pretende visitar todos os vértices, preferencialmente sem repetições, e com partida e chegada no mesmo ponto. Consequentemente, será imperativa a abordagem dos circuitos hamiltonianos e um exemplo que introduza o clássico problema do caixeiro viajante.

A familiarização com as árvores facilitará as somas das ponderações atribuídas às arestas, de forma a possibilitar a comparação das ponderações totais das várias soluções possíveis. A procura de algoritmos próprios para obter soluções aceitáveis será um exercício com importante utilidade formativa.

A atribuição de ponderações às arestas deve ser explicitada, no sentido de indicar se, por exemplo, a ponderação associada à aresta representa o número de quilómetros, o consumo de combustível ou o preço. Tal discussão será relevante em situações que envolvam a localização de grandes armazéns de uma cadeia de distribuição comercial, utilizando uma frota de camiões num dado território, a localização de equipamentos sociais (por exemplo, unidades de tratamento de resíduos, aterros sanitários), em que faz todo o sentido associar às arestas os factores de deslocação.

Um problema clássico a apresentar aos alunos é o problema das pontes de Königsberg. Conforme já mencionado no capítulo 2, não é possível percorrer todas as sete pontes, passando apenas uma vez por cada uma delas, e terminar a viagem no ponto de partida. Pode lançar-se aos alunos a questão de saber onde construir uma ponte adicional, de forma a transformar a resposta negativa de Euler numa resposta afirmativa. Naturalmente, deve orientar-se a resposta aos alunos, pela aplicação do teorema 2.3.1 ao problema original. Deve procurar-se os vértices com grau ímpar e ligá-los por uma nova aresta, de modo a que estes dois vértices passem a ter grau par. Este procedimento é designado por euleração de um grafo.

Um outro problema clássico é o do carteiro chinês, o qual pode ser apresentado aos alunos. Um carteiro tem que fazer a distribuição da correspondência de determinada localidade; será que consegue efectuar essa distribuição passando apenas uma vez por cada

rua e terminar no posto dos correios? Caso não seja possível, o carteiro agradecerá saber qual o menor percurso possível. Um problema equiparável é o dos roteiros de vigilância de parâmetros.

Ao nível do ensino secundário, poderá ser introduzida o caso particular da eulerização de redes viárias rectangulares. A eulerização de grafos desta natureza é feita da forma que se segue.

1. Parte-se sempre de um canto e segue-se no sentido dos ponteiros do relógio.
2. Sempre que se chega a um vértice de grau ímpar, faz-se uma ligação ao próximo vértice, acrescentando uma aresta.
3. Se esse próximo vértice ficar:
 - (a) par, segue-se para o próximo vértice;
 - (b) ímpar, liga-se ao vértice seguinte, acrescentando uma aresta.
4. Continua-se, sucessivamente, aplicando um raciocínio análogo, até chegar ao ponto de partida.

Um exercício a lançar à turma é o seguinte. Considere-se o grafo da figura 4.4. Os pedidos

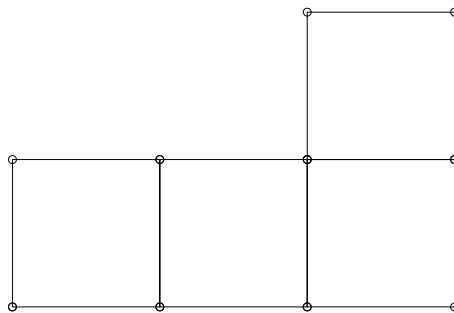


Figura 4.4: Grafo que representa uma rede viária rectangular

são:

1. Justifique que, neste grafo, não há circuito de Euler.
2. Determine uma eulerização para o grafo.

No caso da rede viária não ser rectangular, a sua eulerização é feita como se descreve.

1. Localização de todos os vértices de grau ímpar.
2. Formação de vértices de grau ímpar.
3. Procura do comprimento do caminho menor entre cada par.
4. Se necessário, proceder à reorganização dos pares, de forma a que a soma do número de arestas que se adiciona seja mínima.

A proposta de trabalho a ser lançada à turma pode ser a que se segue. Os moradores de um bairro contrataram um segurança que deverá percorrer todas as ruas a partir das 21h. Sabendo que só pagam ao segurança para, em cada ronda, percorrer cada rua uma única vez, qual a melhor opção de ronda para o segurança?

O grafo correspondente, a fornecer aos alunos, é o que consta da figura 4.5. Os vértices

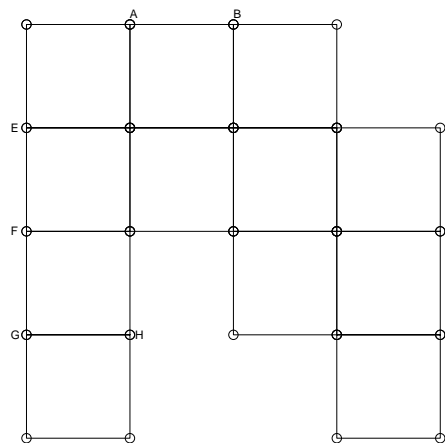


Figura 4.5: Grafo que representa as ruas de um bairro

A, B, \dots, H assinalados no grafo são os grafos com grau ímpar. Tal significa que não será possível ao segurança percorrer todas as ruas sem repetir uma ou mais. A eulerização do grafo passa por unir com uma aresta os seguintes pares de vértices: A e B , C e D , E e F , e G e H . Após tal procedimento, todos os vértices são de grau par, o que significa que existe um circuito euleriano.

Note-se que se o segurança não quisesse finalizar a ronda onde a iniciou, poderia ter deixado dois vértices com grau ímpar. Este processo é a semieulerização de um grafo.

E se os vértices de grau ímpar não forem consecutivos? Neste caso, há várias possibilidades para a eulerização. Por exemplo, considere-se o grafo da figura 4.6. Os pedidos

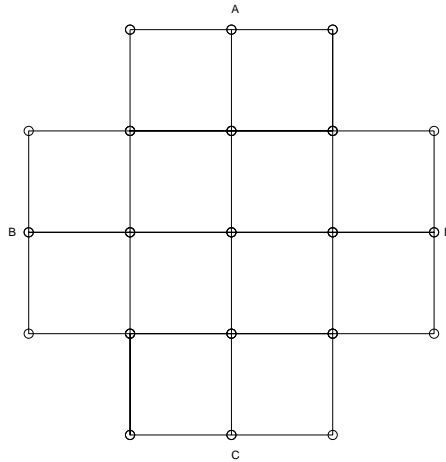


Figura 4.6: Grafo com vértices de grau ímpar não consecutivos

aos alunos podem ser:

1. Faça duas eulerizações do grafo.
2. Qual das duas eulerizações é a melhor? Justifique.

Um outro tipo de problema a introduzir aos alunos é o problema do caixeiro viajante. Conforme já mencionado anteriormente, quando o número de cidades a visitar é superior a 5, é impraticável determinar o itinerário a percorrer pelo método da exaustão. Os algoritmos estudados no ensino secundário, o método do vizinho mais próximo e o método das arestas ordenadas, permitem determinar uma solução, não necessariamente ótima, mas aproximadamente ótima.

O método do vizinho mais próximo é composto pelas seguintes etapas:

1. Selecção da cidade de partida.
2. Segue-se de cidade em cidade. A opção é a cidade mais próxima ainda não visitada:
 - (a) evitando retornar à mesma cidade. Se o próximo passo indicar o retorno à cidade anteriormente visitada, escolhe-se a cidade ainda não visitada a que corresponde a menor ponderação possível;

- (b) obrigando a visita a todas as cidades e voltando, finalmente, à cidade de partida.

O método das arestas ordenadas passa pelas seguintes etapas:

1. Ordenação das arestas, segundo a sua ponderação.
2. Escolha, de forma sucessiva, das arestas com menor ponderação que verifiquem:
 - (a) um vértice nunca pode aparecer três vezes;
 - (b) nunca se fecha um circuito havendo arestas por visitar.
3. Ordenação da solução, conforme o vértice de partida seleccionado.

O exercício que se segue pode ser lançado à turma como proposta de trabalho.

O Manuel é um vendedor e, no exercício da sua profissão, tem de visitar periodicamente as cidades de Aveiro, Braga, Coimbra, Porto e Viseu. As distâncias, em quilómetros, entre estas cidades figuram na tabela seguinte:

Cidades	Aveiro	Braga	Coimbra	Porto	Viseu
Aveiro	–	122	58	68	95
Braga	122	–	170	53	186
Coimbra	58	170	–	117	96
Porto	68	53	117	–	133
Viseu	95	186	96	133	–

Sabendo que o Manuel parte do Porto, tem que visitar todas as cidades e regressar ao Porto, qual a menor distância que poderá percorrer?

1. Resolva o problema, recorrendo:
 - (a) ao método do vizinho mais próximo.
 - (b) ao método das arestas ordenadas.
2. Compare os resultados obtidos.

No âmbito do algoritmo de Kruskal, pode propor-se o exercício seguinte. Vai ser construída um pavilhão desportivo e surgiu a questão sobre a forma de gastar o mínimo de tubagem

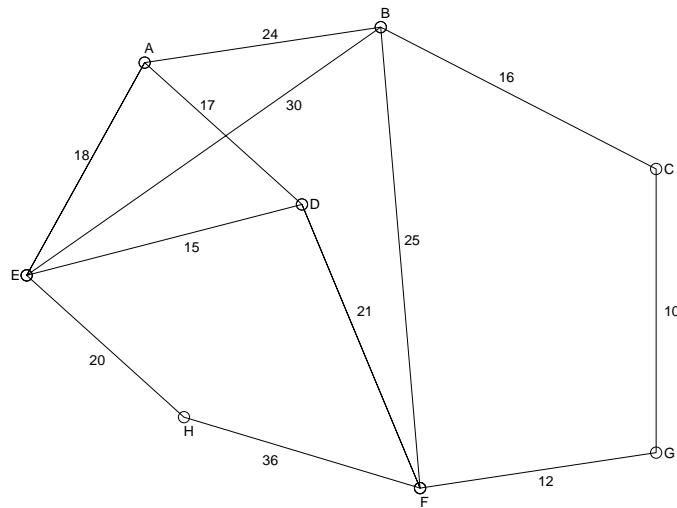


Figura 4.7: Esquema de um pavilhão, saídas de águas e respectivas distâncias

para levar a água a todos os pontos do pavilhão. A figura 4.7 contém o esquema do pavilhão, assim como os pontos onde são necessárias saídas de águas e as distâncias entre elas (em metros). Os alunos devem apresentar os seus raciocínios, os seus cálculos e a conclusão.

4.2.2 Matemática A

Por que é que a teoria dos grafos não está incluída no programa oficial da disciplina de Matemática A?

Naturalmente, e em particular no 12º ano, onde os alunos estão sujeitos a um exame nacional, como o tempo de aulas ao longo do ano é finito, os temas a abordar também são em número finito. Será uma questão de prioridade e de hierarquia. Em grande medida, compreende-se porque é que os autores do programa do 12º ano optaram pelo ensino do Cálculo e da Álgebra, da Trigonometria, dos Complexos e da Estatística e Combinatória; afinal, estes conteúdos funcionam como pré-requisitos para a frequência de um qualquer curso universitário. Sem o conhecimento destes temas, o aluno verá o seu percurso universitário fortemente comprometido. Definidas as competências finais do ensino secundário, as competências a demonstrar no 10º e 11º anos ficam condicionadas; evidentemente, que os três anos do ensino secundário concorrem, de forma articulada e consistente, para o adquirir de competências ao nível das Funções, da Geometria, da Estatística e do Cálculo

Combinatório.

Ao longo dos tempos, o programa de Matemática A do 12º ano foi sendo reformulado. Neste nível de ensino já se ensinaram as cónicas, os integrais e as estruturas algébricas, e hoje não fazem parte do programa obrigatório; fez-se a opção da introdução da Estatística e do Cálculo Combinatório. Tal opção faz sentido quando se pensa que a Estatística foi incluída nos programas oficiais de todo o ensino básico e secundário, incluindo já uma pequena abordagem no 1º Ciclo. Quem defende a articulação entre ciclos de ensino e uma construção faseada de um corpo de conhecimento não discordará de tal opção. Afinal, a disciplina de Estatística é transversal a uma série de cursos do ensino universitário, desde as matemáticas, as engenharias, a economia e a gestão, mesmo passando pelas psicologias, ao passo que as cónicas e as estruturas algébricas não gozam dessa particularidade.

Mas, em rigor, a teoria dos grafos não está ausente, por completo, dos conteúdos abordados em Matemática A. Um exercício familiar aos alunos do 12º ano é o que se segue. Calcule a probabilidade de, quando se lança uma moeda perfeita ao ar, três vezes seguidas, de sair pelo menos uma cara. Como, segundo a lei de Laplace, é necessário contar os casos favoráveis e os casos possíveis, uma maneira bastante expedita de o fazer é por considerar uma árvore; a observação de tal árvore permite resolver o exercício com toda a facilidade. Quando se questiona qual a probabilidade, no lançamento de dois dados equilibrados, que a soma dos pontos das faces seja igual a cinco, um aluno do 12º ano, e já mesmo no 9º ano, saberá, a partir de uma árvore, quantos casos favoráveis e casos possíveis se contabilizam.

4.3 Comentários finais

Os alunos do ensino não universitário reagem de uma forma extraordinariamente positiva a actividades da teoria dos grafos. Tal é consequência da grande vantagem do estudo deste tema - a ausência de pré-requisitos, de bagagem matemática, de forma que os exercícios são resolvidos por intuição. Os alunos dos diversos graus do ensino não universitário encaram as actividades relacionadas com este tema, não como Matemática, mas como um desafio ao alcance de ser superado por todos.

Os alunos estão sempre disponíveis para este tipo de actividades, e revelam grande motivação e vontade de aprender mais. Em particular, como as situações apresentadas são

do quotidiano, e não meramente académicas e abstractas, elas possuem significado para os alunos, os quais conseguem apresentar e justificar os processos utilizados e resultados finais. Ao longo da resolução dos exercícios os alunos têm evidenciado capacidades e competências para simplificar e modelizar as diversas actividades propostas, usando estratégias tais como, esquemas, tabelas e contagens, como auxílio para o seu raciocínio, e dispensando a presença activa do professor. De facto, os alunos demonstram uma forte autonomia e auto-confiança na resolução de exercícios enquadrados na teoria dos grafos, o que contribui para que se tornem adultos matematicamente competentes.

Esta é, sem dúvida, uma outra face da Matemática, a ser explorada pelos intervenientes no processo ensino-aprendizagem.

Bibliografia

- [1] Norman Biggs. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge Mathematical Library, Second edition, 1996.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. American Elsevier, 1976.
- [3] Departamento de Educação Básica. *Organização Curricular e Programas - Ensino Básico - 1º Ciclo*. Ministério da Educação, 1991.
- [4] Departamento de Educação Básica. *Programa de Matemática Ensino Básico - 3º Ciclo: Plano de Organização de Ensino-Aprendizagem*, volume II. Ministério da Educação, 5ª edition, 1991.
- [5] Departamento de Educação Básica. *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais*. Ministério da Educação, 2001.
- [6] Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação, 2007.
- [7] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.
- [8] Direção Geral do Ensino Básico e Secundário. *Programa de Matemática Ensino Básico - 2º Ciclo: Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*, volume II. Ministério da Educação, 1991.
- [9] Departamento do Ensino Secundário. *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Ministério da Educação, 2001.
- [10] G. R. Grimmet. An upper bound for the number of spanning trees of a graph. *Discrete Math.*, 16:323–324, 1976.

- [11] Oystein Ore. *Theory of Graphs*, volume 38 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 1962.
- [12] Kenneth H. Rosen. *Discrete mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, Inc., Second edition, 1991.
- [13] Edward A. Bender & S. Gill Williamson. *Foundations of Combinatorics with Applications*. Dover, 2006.
- [14] Robin J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Longman Scientific & Technical, Third edition, 1985.