

Maria Natália Lima Soares Carneiro

*Desenvolvimento do Pensamento Matemático através
da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas*

Dissertação apresentada na Universidade Portucalense Infante D. Henrique para
obtenção do grau de **Mestre em Supervisão e Coordenação da Educação**

Trabalho realizado sob a orientação da Professora Doutora Jacinta Rosa Moreira



Departamento de Ciências da Educação e do Património

Porto

Dezembro de 2013

À memória dos meus pais

Agradecimentos

Este trabalho é fruto, não só do esforço pessoal como, do contributo, apoio, sugestões e críticas de várias pessoas que de uma forma direta ou indireta, me ajudaram e permitiram que a sua concretização fosse viável. A todas essas pessoas agradeço.

Não posso contudo, deixar de agradecer, de uma forma especial, àqueles que foram a minha âncora ao longo desta investigação.

À minha orientadora, Professora Doutora Jacinta Rosa Moreira, pela sua disponibilidade, pelas suas preciosas sugestões, pelo seu apoio e encorajamento e por todos os seus ensinamentos e transmissão de experiências.

À Professora Doutora Lurdes Lima pela sua disponibilidade em aconselhar sempre que alguma dúvida surgia.

Aos meus colegas de turma, nomeadamente à Conceição, à Fernanda, ao Leandro e ao Paulo que nunca me deixaram desistir nos momentos mais hesitantes.

À minha colega e amiga, Raquel Basto, por toda a colaboração, pela crítica construtiva e todo o apoio que me deu na construção dos materiais para a concretização do trabalho de investigação.

Aos alunos da turma envolvida, pelo interesse e empenho com que participaram e colaboraram na investigação.

Ao meu marido, Mário e aos meus filhos Ana Catarina e João Mário pelo apoio permanente, pelo amor e carinho, pela compreensão demonstrada nos imensos momentos de ausência e má disposição.

Resumo

A resolução de problemas tem vindo a ser reconhecida, pelos diferentes documentos curriculares, como uma atividade relevante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) é um modelo de ensino inovador, que permite aos alunos adquirir conteúdos e desenvolver o seu pensamento matemático de acordo com as orientações curriculares.

O objetivo principal desta investigação foi planificar a abordagem de alguns tópicos/subtópicos matemáticos, utilizando um ensino através da ABRP, selecionar e implementar os materiais necessários para tal e analisar o efeito da aplicação dos mesmos no desenvolvimento do pensamento matemático em alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Optamos por uma metodologia qualitativa assente num estudo de caso e utilizamos como instrumentos de recolha de dados a observação direta, os diários de aula, questionários de opinião aplicados a alunos e a análise documental dos registos realizados pelos alunos no decorrer da investigação. O tratamento das narrativas que constam nos diários de aula e dos registos nas grelhas de observação, foi feito através da análise de conteúdo.

Após a realização deste estudo consideramos que a busca da estratégia adequada para resolverem os problemas, o reconhecimento das dificuldades sentidas e o identificar de eventuais causas, o facto de terem de expor os raciocínios e serem confrontados durante a fase da discussão, tanto pela professora como pelos colegas, são experiências que contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Apesar de nem sempre conseguirem resolver os problemas propostos corretamente, a utilização da ABRP proporcionou-lhes o desenvolvimento, de forma ativa, da capacidade de resolução de problemas em contexto real e no quotidiano. Por seu lado a professora - investigadora teve a possibilidade de utilizar uma metodologia inovadora e desempenhar um papel diferente nas aulas de Matemática o que lhe exigiu uma reflexão profunda a vários níveis, o que contribuiu para o seu desenvolvimento pessoal e profissional.

Palavras-chave: Problema matemático, resolução de problemas, Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas, pensamento matemático

Abstract

Problem solving has been recognized, by various curriculum documents, as an important activity in the teaching and learning of mathematics process. A problem-based learning (pbl) is an innovative model of teaching that allows students to acquire contents and develop their mathematical thinking according to curriculum guidelines. .

The main goal of this research was to plan an approach of some mathematical topics / subtopics, using a teaching through pbl, select and implement the necessary materials for it and analyse the effect of applying them in the development of mathematical thinking in students of middle school.

We chose a qualitative methodology based on a case study and used as instruments, for collecting, direct observation data, lesson diaries, opinion questionnaires applied to students and documentary analysis of records by the students during the investigation. The treatment of the narratives contained in the lesson diaries and in records the observation grids, was done through content analysis.

After this study we believe that the pursuit of appropriate strategy to solve the problems , the recognition of the difficulties encountered and to identify possible causes , the fact of having to expose the reasoning and being confronted during the discussion , both by the teacher and by colleagues , are experiences that contribute to the development of mathematical thinking of students . Although not always get properly solved the proposed problem, the use of pbl provided them with the development, in an active way , of the ability to solve problems in real context and in everyday life. On the other hand the investigator teacher had the possibility of using an innovative methodology and plays a different role in mathematics classes, which demanded a deep reflection, at various levels and contributed to her personal and professional development.

Keywords: mathematical problems, problem solving, problem-based learning, mathematical thinking

Índice

Agradecimentos	5
Resumo	7
Abstract	9
Índice	11
Siglas	15
Índice de Figuras	17
Índice de Gráficos	18
Índice de Quadros	18
Introdução	21
1. <i>Contexto da Investigação</i>	21
2. <i>Questões problema</i>	22
3. <i>Os Objetivos da Investigação</i>	23
4. <i>Caraterísticas do estudo</i>	24
5. <i>Organização da Dissertação</i>	25
Capítulo 1 – A Resolução de Problemas no Ensino da Matemática	27
<i>Introdução</i>	27
1.1. <i>Conceito de problema matemático</i>	27
1.2. <i>Tipos de problemas matemáticos</i>	30
1.3. <i>Modelos de Resolução de Problemas</i>	35
1.4. <i>O Ensino da Matemática através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas</i>	40

Capítulo 2 – Linhas metodológicas da investigação	53
<i>Introdução.....</i>	<i>53</i>
2.1. <i>Estudo de caso.....</i>	<i>53</i>
2.2. <i>Caracterização dos participantes na investigação</i>	<i>56</i>
2.2.1. A turma participante	56
2.2.2. A professora - investigadora.....	58
2.3. <i>Instrumentos de recolha de dados e técnicas de tratamentos de informação ...</i>	<i>59</i>
2.3.1. Observação direta	59
2.3.2. Diários de aula	61
2.3.3. Questionários	62
2.3.4. Análise documental	64
2.3.5. Análise de conteúdo	66
Capítulo 3 – Da seleção dos materiais para a ABRP à sua implementação	69
<i>Introdução.....</i>	<i>69</i>
3.1. <i>A escolha do tema Geometria</i>	<i>69</i>
3.2. <i>Seleção dos materiais para abordagem em sala de aula.....</i>	<i>71</i>
3.3. <i>Operacionalização</i>	<i>76</i>
Capítulo 4 - Apresentação, análise e discussão de dados	81
<i>Introdução.....</i>	<i>81</i>
4.1. <i>A perspetiva dos alunos sobre a ABRP</i>	<i>82</i>
4.1.1. Caraterização dos alunos participantes do ponto de vista da sua relação com a Matemática	82
4.1.2. Análise dos registos escritos efetuados pelos alunos na resolução dos diferentes problemas propostos.....	90
4.1.3. Resultados obtidos através do questionário de recolha da opinião dos alunos sobre o trabalho desenvolvido durante a implementação da ABRP	109
4.2. <i>A perspetiva da professora - investigadora sobre a ABRP</i>	<i>120</i>
4.2.1. Análise das Grelhas de Observação.....	120

4.2.2. Análise dos Diários de Aula	127
4.3. Cruzamento de perspetivas sobre a ABRP	134
Conclusões	139
Bibliografia	149
Anexos	161
<i>Anexo 1 – Grelhas de Observação</i>	163
<i>Anexo 2- Diários de Aula da Professora – Investigadora</i>	171
<i>Anexo 3- Questionário aos alunos</i>	201
<i>Anexo 4- Questionário aos alunos sobre as aulas de implementação da ABRP</i>	207
<i>Anexo 5- Grelha de Análise dos Problemas</i>	211
<i>Anexo 6- Grelhas de Registo da Análise de Conteúdo</i>	221
<i>Anexo 6.1. - Análise de Conteúdo das Grelhas de Observação</i>	223
<i>Anexo 6.2. - Análise de Conteúdo dos Diários de Aula</i>	229
<i>Anexo 7- Problemas Propostos</i>	237
<i>Anexo 7.1. Problema I - Polígonos “Parecidos”</i>	239
<i>Anexo 7.2. Problema II – Medir alturas</i>	243
<i>Anexo 7.3. Problema III – Qual dos terrenos escolher?</i>	247
<i>Anexo 7.4. Problema IV – Caberá o tubo no camião?</i>	251
<i>Anexo 7.5. Problema V – Que tipo de embalagem devemos escolher?</i>	255
<i>Anexo 8 – Planos de Aulas</i>	259

Siglas

ABRP: Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas

APM: Associação de Professores de Matemática

CEB: Ciclo do Ensino Básico

CNEB: Currículo Nacional do Ensino Básico

GAVE: Gabinete de Avaliação da Educação

ME: Ministério da Educação

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics

PISA: Programme for International Student Assessment

OCDE: Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

Índice de Figuras

Figura 1– Esquema do processo da ABRP	49
Figura 2 - Representação esquemática da implementação dos materiais selecionados para a ABRP em sala de aula pela professora - investigadora	78
Figura 3 – Resolução do Problema I elaborada pelo Grupo V.....	91
Figura 4- Resolução do Problema I elaborada pelo Grupo II.....	92
Figura 5- Resolução do Problema I elaborada pelo Grupo IV	92
Figura 6- Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo VII	93
Figura 7- Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo II.....	94
Figura 8 - Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo VI	94
Figura 9 - Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo V	95
Figura 10 - Resolução do Problema III elaborada pelo Grupo VII	96
Figura 11 - Resolução do Problema III elaborada pelo Grupo II.....	97
Figura 12- Resolução do Problema III elaborada pelo Grupo IV	98
Figura 13- Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo V	99
Figura 14- Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo III	100
Figura 15- Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo IV	101
Figura 16 - Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo II	102
Figura 17- Resolução da primeira parte do Problema V elaborada pelo Grupo III.....	104
Figura 18 - Resolução da primeira parte do Problema V elaborada pelo Grupo IV.....	104
Figura 19 - Resolução da primeira parte do Problema V elaborada pelo Grupo II.....	105
Figura 20 - Resolução da segunda parte do Problema V elaborada pelo Grupo II	106
Figura 21- Resolução da segunda parte do Problema V elaborada pelo Grupo IV.....	106
Figura 22 - Resolução da segunda parte do Problema V elaborada pelo Grupo III	107
Figura 23 - Resolução da terceira parte do Problema V elaborada pelo Grupo III	107
Figura 24 - Resolução da terceira parte do Problema V elaborada pelo Grupo VI.....	108

Índice de Gráficos

Gráfico 1 - Causas das dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática sentidas pelos alunos intervenientes na investigação.	83
Gráfico 2 – Opinião dos alunos sobre a Matemática	84
Gráfico 3 - Opinião dos alunos intervenientes na investigação sobre as aulas de Matemática.....	87
Gráfico 4 - Opinião sobre as tarefas realizadas nas aulas de Matemática.....	88
Gráfico 5- Opinião sobre as tarefas realizadas nas aulas de Matemática	88
Gráfico 6 – Dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução de problemas.....	90

Índice de Quadros

Quadro 1 - Cronograma das etapas da Investigação	25
Quadro 2- Opinião dos alunos sobre a Matemática escolar	85
Quadro 3 – Dimensões de Análise das Grelhas de Observação distribuídas pelas duas categorias de análise	121
Quadro 4- Dimensões de Análise dos Diários de Aula distribuídas pelas duas categorias de análise.....	127
Quadro 5 – Cruzamento de perspetivas sobre as dificuldades sentidas na resolução de problemas.....	135
Quadro 6 – Cruzamento de perspetivas sobre os elementos facilitadores da resolução de problemas.....	136

***"Nunca nos tornaremos matemáticos,
mesmo que a nossa memória domine todas as demonstrações feitas por outros,
se o nosso espírito não for capaz de resolver todas as espécies de problemas".***

(Descartes)

Introdução

1. Contexto da Investigação

O Programa do Ensino Básico de Matemática, homologado em 2007, surge como uma oportunidade de mudança no ensino e na aprendizagem desta disciplina. Resulta do reajustamento do programa de 1990 para o 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e do de 1991 para o 2.º e 3.º CEB, introduzindo-lhes modificações significativas em aspetos considerados importantes, nomeadamente nas finalidades e nos objetivos gerais do ensino da Matemática.

Segundo os autores deste documento, o ensino da Matemática, ao longo dos três ciclos deve ser orientado para *“promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.”* (Ponte et al., 2007,p.3).

A capacidade transversal dos alunos resolverem problemas é um dos objetivos gerais deste programa. A resolução de problemas é indicada como uma forma de desenvolver nos alunos a capacidade de pensar matematicamente e como uma metodologia de trabalho na qual, os alunos têm um papel mais ativo e participativo na sala de aula o que contribui para que estes edifiquem aprendizagens mais significativas.

Serrazina e Ribeiro (2012) referem que o uso de um modelo de ensino baseado na resolução de problemas, permite estimular o aluno para a abordagem de novas situações e desenvolver a capacidade de responder a questões das quais se desconhece uma resposta imediata, de elaborar estratégias de pensamento, de questionar-se a si próprio e de aplicar os seus conhecimentos e competências em diferentes situações. Para que tal aconteça, é necessário que na aula se crie um clima

estimulante. Ponte (2009) indica o programa de matemática do Ensino Básico, homologado em 2007, como uma forma de mudança, nas práticas de ensino e de aprendizagem na sala de aula e, em consequência, nas aprendizagens matemáticas dos alunos. É a oportunidade de transformação das práticas de ensino segundo um modelo de ensino expositivo para um modelo de ensino e aprendizagem exploratório. O

mesmo autor caracteriza o ensino expositivo, como aquele, em que o professor começa por explicar os novos conceitos e procedimentos, colocando perguntas aos alunos, exemplificando um ou dois casos e de seguida propõe a resolução de exercícios, em os alunos aplicam os conhecimentos inicialmente apresentados pelos alunos. Em contrapartida, num modelo de ensino e aprendizagem exploratório, o professor em vez de começar por apresentar a “matéria nova”, propõe uma tarefa que utilize os conhecimentos dos alunos, ao mesmo tempo que permite o desenvolvimento de novos conceitos ou processos.

No quadro desta ideia, acreditamos que é importante investigar o desenvolvimento do pensamento matemático apoiados nestes métodos de ensino e aprendizagem inovadores. Por outro lado, sabemos ainda que, na sociedade atual o professor é constantemente desafiado a transformar-se num agente de mudança no seio da comunidade onde desenvolve o seu trabalho, o que exige o desempenho de um papel mais complexo, ou seja, que para além de educador, seja também investigador. Através deste estudo pretendemos determinar os contributos do uso de um modelo de ensino e de aprendizagem através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) no desenvolvimento do pensamento matemático em alunos do 3.ºCiclo do Ensino Básico (3.ºCEB). Para o desenvolvimento deste estudo, tivemos como ponto de partida as questões que passamos a apresentar.

2. Questões problema

Segundo Afonso e Silva (2005), apesar de vários estudos e documentos sugerirem um ensino baseado na resolução de problemas, a realidade continua a não ser essa na maior parte das salas de aula em muitas escolas. Predomina a resolução de exercícios rotineiros e desta forma o ensino e aprendizagem da matemática não utiliza propostas didáticas interessantes e atrativas para os alunos. Perante tal facto, um dos motivos para a implementação desta investigação foi, precisamente, contribuir para o ensino da matemática, de uma forma inovadora, enquadrado numa abordagem ABRP. A este motivo acresce a nossa experiência profissional, que nos tem mostrado que os alunos, ao longo dos ciclos, evidenciam inúmeras dificuldades na resolução de problemas matemáticos.

O ponto de partida para a nossa investigação é encontrar a resposta à seguinte questão:

- De que forma o ensino desenvolvido através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos do 3.ºCEB?

Destas decorrem outras questões:

- Na perspetiva dos alunos, que possibilidades e constrangimentos decorrem da implementação de um ensino através da ABRP para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos do 3.ºCEB?
- Na perspetiva da professora - investigadora, que possibilidades e constrangimentos decorrem de um ensino através da ABRP para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos do 3.ºCEB?
- Quais os contributos, desta investigação, para o desenvolvimento pessoal e profissional da investigadora, enquanto professora?

3. Os Objetivos da Investigação

Para dar resposta a estas questões, esta investigação tem como principal finalidade:

- Planificar a abordagem de alguns tópicos matemáticos utilizando um modelo de ensino e de aprendizagem através da ABRP, implementar e analisar o efeito da aplicação do mesmo no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos do 3.ºCEB.

Esta grande finalidade desdobra-se nos seguintes objetivos:

- Identificar, segundo os alunos, as principais possibilidades e constrangimentos que decorrem da implementação de um ensino através da ABRP para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos

do 3.ºCEB.

- Identificar, segundo a professora - investigadora, as possibilidades e constrangimentos que decorrem durante a implementação de um ensino através da ABRP para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos do 3.ºCEB.
- Refletir sobre a importância desta experiência no desenvolvimento profissional da professora - investigadora.

4. Características do estudo

Neste trabalho, optamos por uma metodologia de natureza qualitativa, concretamente o estudo de caso. Envolvermos, na investigação, alunos do 8.ºano do 3.ºCEB de uma escola básica do litoral norte do país, em ambiente sala de aula.

De acordo com Tuckman, *“a investigação qualitativa desenvolve-se na situação natural, sendo o investigador o instrumento de recolha de dados. A sua preocupação essencial é descrever, referindo o processo, analisando os dados indutivamente e preocupando-se com o significado das coisas”* (2002, p. 532). Para Bogdan e Biklen (1994) na investigação qualitativa em educação, o investigador comporta-se mais como um viajante que não planeia do que como aquele que o faz meticulosamente.

Enquanto a investigação quantitativa utiliza dados de natureza numérica que lhe permitem provar relações entre variáveis, a investigação qualitativa utiliza principalmente instrumentos e técnicas que possam recolher dados descritivos que lhe permitirá observar o modo de pensar dos participantes envolvidos na investigação.

Optamos por um estudo de caso dada a natureza da investigação. Tal como refere Merriam (1988), um estudo de caso é um estudo sobre um fenómeno específico tal como um programa, um acontecimento, uma pessoa, um processo, uma instituição ou um grupo social. Sousa refere ainda que o estudo de caso

visa essencialmente a compreensão do comportamento de um sujeito, de um dado acontecimento, ou de um grupo de sujeitos (...), considerados como uma entidade única, diferente de qualquer outra, numa dada situação contextual específica, que é o seu ambiente natural. (2009, p. 137)

No quadro desta ideia, o estudo de caso adequa-se ao nosso propósito e para o desenvolver usamos, como instrumentos de recolha de dados, a observação direta no contexto sala de aula registada em grelhas de observação, os diários de aula elaborados pela professora - investigadora que submetemos a análise de conteúdo, a análise documental das produções feitas pelos alunos e questionários de opinião aplicados aos alunos.

Esta investigação desenvolveu-se em várias etapas que se encontram registadas no Quadro 1.

Quadro 1 - Cronograma das etapas da Investigação

Etapas	Período
Revisão da literatura	Setembro de 2011 a Junho de 2012
Aplicação do 1.º questionário	Outubro de 2011
Construção das tarefas e materiais didáticos e das grelhas de observação	Outubro a Novembro de 2011
Aplicação do modelo de ensino e de aprendizagem através da ABRP acompanhado pela redação dos diários das aulas	Outubro a Novembro de 2011 e Maio a Junho de 2012
Aplicação do 2.º questionário	Junho de 2012
Análise de dados	Outubro de 2011 a Dezembro de 2012
Redação da dissertação	Janeiro de 2012 a Dezembro de 2013

5. Organização da Dissertação

Esta dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos. No **primeiro capítulo** apresentamos o enquadramento teórico, resultante da recolha e análise da literatura consultada nomeadamente, livros, revistas da especialidade e artigos publicados relacionados com a temática em estudo. Procuramos apresentar as diversas perspetivas sobre as temáticas de diferentes autores.

No **segundo capítulo**, apresentamos e fundamentamos a opção metodológica utilizada na investigação, assim como caracterizamos pormenorizadamente os

instrumentos de recolha de dados utilizados e os procedimentos de análise dos mesmos.

O **terceiro capítulo** é dedicado á implementação da ação didática em sala de aula. Nele, justificamos a escolha do tema matemático Geometria, descrevemos as fases da implementação e caracterizamos os materiais/recursos utilizados neste estudo.

O **quarto capítulo** é destinado à análise e discussão dos resultados, com o intuito de dar resposta às questões de investigação.

Finalizámos este trabalho de investigação com o enunciar de **conclusões** que incluem o resultado da reflexão realizada sobre os resultados obtidos e sobre o modo como estes permitem responder às questões de partida. Indicamos ainda as limitações e os constrangimentos sentidos ao longo da investigação e deixamos recomendações e desafios que consideramos mais pertinentes.

Apresentamos ainda a **bibliografia** que sustentou este estudo. No final surgem os **anexos**, conjunto de documentos utilizados na investigação e que serviram de pilares para o seu desenvolvimento.

Capítulo 1 – A Resolução de Problemas no Ensino da Matemática

Introdução

Com este capítulo, pretendemos contextualizar teoricamente a investigação desenvolvida que apresenta a ABRP como um modelo de ensino e de aprendizagem que permite o desenvolvimento do pensamento matemático em alunos do oitavo ano do terceiro ciclo do ensino básico (3.ºCEB).

Dividimos esta fundamentação teórica em vários tópicos. Começamos por apresentar o conceito de problema matemático, segundo alguns autores, e as diferentes tipologias em que estes são distinguidos. Mencionamos alguns modelos de resolução de problemas, propostos por vários autores. Por fim abordamos a resolução de problemas no ensino da matemática e apresentamos o conceito de ABRP como modelo de ensino e de aprendizagem.

1.1. Conceito de problema matemático

Segundo o dicionário de língua portuguesa contemporânea, um problema é uma questão difícil de resolver ou de explicar, e que por esse motivo causa perplexidade, e deve ser resolvida segundo métodos lógicos e racionais. Um problema pode ser pois considerado como uma dificuldade, uma situação adversa ou incapacitante ou então um desafio, um ponto de partida ou uma oportunidade para inovar. Para Lopes (2002) apoiado em Fisher (1992), um problema é uma tarefa, num determinado contexto que tem um certo número de condições e informações, na qual a meta não pode ser alcançada diretamente porque há um ou mais obstáculos, evidentes ou não, para ultrapassar. Sendo assim, aquilo que é um problema para uma pessoa pode não o ser para outra. Lester (1983) justifica esta afirmação pelas diferenças de conhecimentos, experiências, habilidades e outros fatores inerentes ao resolvidor.

Ainda a este propósito, Menina (2009) afirma que esta relatividade do conceito de problema é-nos apontada por Kantowski (1977), quando refere que *“um individuo*

está perante um problema quando encontra uma questão a que não pode responder, ou uma situação que não pode ser respondida usando os conhecimentos imediatamente disponíveis.” (p. 21).

Já Hayes (1989) considera haver um problema quando se verifica uma descontinuidade ou lacuna entre um estado cognitivo atual e um outro que se pretende alcançar ou quando não se conhece, de início, um caminho para superar essa descontinuidade.

Se existem várias formas para definir o termo problema, a noção de problema matemático também não é consensual e é compreendida de forma diferente consoante o autor:

A dificuldade de definir este termo é que problema é um conceito relativo. As mesmas tarefas que exigem esforços significativos a alguns alunos podem muito bem ser exercícios rotineiros para outros, pois resolvê-los pode ser uma questão de recordar alguns factos matemáticos. (Vale, 1993, p.15)

No quadro desta ideia, Silveira (2001, p. 01) afirma que *“[...] um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado.”* O mesmo autor refere que o fundamental é que quem está a resolver o problema conheça o objetivo a atingir, mas só estará perante um problema se ainda não possui os meios para atingir tal objetivo.

Também Cruz e Carrillo (2004), consideram que,

O conceito de problema deve associar-se à aplicação significativa (não mecânica) do conhecimento matemático em situações que não são familiares, à consciência de tal situação, à existência de dificuldade na hora de a realizar e à possibilidade de o problema ser resolvido, aplicando o dito conhecimento. (p. 105)

Todas estas definições apontam, como objetivo principal para a resolução de um problema, alcançar uma meta – a chegada a uma solução – desconhecendo, no entanto, o caminho imediato para a atingir.

Há autores, que consideram que um problema matemático é uma tarefa, onde é necessário encontrar uma solução, não havendo para tal processos definidos e estilizados. Para Ponte (1992, p.95) *“ um problema consiste numa tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, mas em cuja solução se empenha activamente.”*

Ainda sobre este assunto, Boavida *et al.* (2008), consideram que se tem um problema, quando se está perante uma situação que não se pode resolver utilizando processos conhecidos e standardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução e esta procura envolve a utilização do que se designa por estratégias. Caso contrário, isto é, se a situação pode ser resolvida utilizando processos para nós conhecidos, repetitivos ou mecanizados, que conduzem diretamente à solução, estamos perante um exercício. Deste modo, ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe.

Este é, segundo Matos e Serrazina (1996), um aspeto que suscita alguma discussão. Muitas vezes um problema matemático é confundido com um exercício. Abrantes (1989) adverte para o risco de, por vezes, se usarem critérios menos adequados para estabelecer a distinção entre exercício e problema, ou seja, *“por vezes estabelece-se uma distinção enganadora: no enunciado de um exercício haveria apenas números e operações enquanto o de um problema conteria alguma referência a um contexto concreto.”* (p. 8).

Ponte (1992) distingue-os afirmando que um simples exercício exige apenas a aplicação de um método de resolução já bem conhecido. O mesmo autor procura fazer essa distinção afirmando: *“A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema”* (2005, p. 4).

A este propósito, Fernandes (1990), considera que se distingue um problema de um comum exercício, pelo facto de não existirem algoritmos que o conduzam à solução correta. Já Borralho (1990) refere que um problema para ser efetivo, tem de provocar a curiosidade da pessoa a quem é proposto.

Sendo assim, e de acordo com Ponte e Serrazina (2000), uma questão constitui-se num problema para um dado aluno, se ele não dispuser de nenhum meio para encontrar uma solução num único passo. Situação inversa verifica-se na resolução de um exercício, em que aqui, o aluno conhece uma forma de obter rapidamente uma solução para o mesmo.

Consequentemente há que saber quando se está perante um bom problema. A

este respeito Stewart (1996) afirma:

Os problemas são a força motriz da Matemática. Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos. A maior parte dos bons problemas é difícil: na Matemática, como na vida, raramente se consegue alguma coisa de graça. Mas nem todos os problemas difíceis são bons: o culturismo intelectual pode originar músculos mentais, mas alguém quer um cérebro musculoso? (p. 16)

Em resumo, esta breve análise de como definir e entender um problema mostra que é uma tarefa difícil e pouco consensual entre os investigadores. Aponta-nos para a existência de diferentes tipos de problemas. Porém, no geral, todas as definições de problema apresentam como objetivo principal, a chegada a uma solução desconhecendo contudo, à partida, o caminho imediato para a determinar.

1.2. Tipos de problemas matemáticos

Sempre que pensamos na palavra problema, associamo-la logo a dificuldade, a desafio, a algo que exige reflexão sem contudo pensarmos que existem diferentes tipos de problemas. Conhecer as diferentes categorias, pode ajudar-nos e orientar-nos na sua resolução, pois poderá permitir a criação de analogias entre problemas novos e problemas resolvidos anteriormente. Ao professor, conhecer os diferentes tipos de problemas permite que este organize o processo de ensino e de aprendizagem e oriente-o na escolha do problema a usar de acordo com o que pretende, e sobretudo na perspectiva do enriquecimento do aluno. Assim, de acordo com Boavida:

Se se pretende que a resolução de problemas constitua um eixo organizador do ensino da Matemática, parece pertinente que os alunos contactem, não apenas com tantos problemas quanto possível, mas, mais importante que isso, com uma grande diversidade de problemas de Matemática. (Boavida, 1993, p. 118)

Cada autor baseia-se em aspetos específicos para distinguir os problemas e organizá-los segundo uma dada tipologia. Polya (1981) propõe a seguinte classificação de problemas: (1) problemas que podem ser resolvidos apenas por aplicação de um determinado algoritmo, de uma regra acabada de apresentar ou discutir; (2) problemas de aplicação que possibilitam a escolha de um determinado procedimento ou algoritmo de entre vários estudados previamente; (3) problemas de escolha de uma combinação, que requerem para que se chegue à solução, a combinação correta de

alguns algoritmos conhecidos e (4) problemas que se aproximam de um nível da pesquisa ou da investigação pois para se chegar à solução, é necessário elaborar um novo algoritmo ou procedimento, ou mesmo um novo conhecimento matemático.

Para auxiliar o trabalho em sala de aula e, principalmente permitir que o professor possa identificar ou evitar dificuldades que os alunos possam ter na resolução de problemas, Stancanelli (2001) organiza-os de um modo diferente e salienta que estes, por vezes, podem ser: (1) problemas sem solução, que rompem com a ideia que os dados apresentados devem ser usados na sua resolução e de que todos os problemas têm solução. Estes problemas ajudam a desenvolver no aluno a capacidade de aprender a duvidar, a qual faz parte do pensamento crítico; (2) problemas com mais de uma solução em que, o uso deste tipo de problemas, rompe com a crença de que os problemas têm uma única solução e que ajuda o aluno a compreender que resolvê-los é um processo de investigação do qual ele participa como ser pensante e que é produto do seu próprio conhecimento; (3) problemas com excesso de dados, permitem que o aluno se aperceba que nem sempre tem que utilizar todos os dados contidos no texto o que reforça a importância da leitura e ajuda a aprender a selecionar os dados relevantes para a resolução do problema; (4) problemas de lógica que exigem, para a sua resolução, um raciocínio dedutivo, proporcionando experiências ricas que desenvolvem o pensamento através da formulação de hipóteses, a busca de previsões e suposições, o teste, análise e a classificação dessas hipóteses.

Sobre este assunto, Vale e Pimentel (2004) apresentam também uma classificação de problemas. Consideram a existência de: (1) problemas de processo que, não estão, geralmente, relacionados com os conteúdos programáticos, mas se estão, estes nem sempre são diretamente necessários na sua resolução. Este tipo de problema dificilmente se resolverá pela aplicação direta de um algoritmo, sendo necessário várias estratégias de resolução tais como: descobrir um padrão, trabalhar do fim para o princípio, fazer um esquema ou um desenho, reduzir a um problema mais simples, formular ou testar uma conjectura; (2) problemas de conteúdo que requerem a utilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas matemáticas; (3) problemas de aplicação que utilizam dados da vida real apresentados ao resolvidor ou recolhidos por ele. A tomada de decisões assume aqui um papel

importante e surge conseqüentemente a análise de dados e a resolução deste tipo de problemas passa pela utilização de uma ou mais estratégias, sendo um processo demorado e pode conduzir a mais do que uma solução; (4) problemas de aparato experimental que, como a própria classificação indica, exigem a utilização de um aparato experimental sobre o qual o solucionador exerce as suas ações e que suscita a utilização de métodos de investigação das ciências experimentais.

Também Jonassen (2000) refere que os problemas podem-se dividir de acordo com o seu grau de estruturação, em problemas bem estruturados com soluções corretas e eficientes e em problemas mal estruturados centrados em argumentação e decisões relacionadas nos quais a solução não é possível verificar.

Além de uma estruturação, o mesmo autor refere que os problemas possuem um grau de complexidade determinada pelo número de fatores, funções ou variáveis que o constituem. Os problemas mais complexos exigem ações mais de caráter cognitivo para os solucionar o que corresponde a um maior trabalho de memória. Em contrapartida o autor refere que um problema mais simples não irá despertar a curiosidade dos estudantes por não ser desafiante ou mesmo não estar relacionado com o contexto real do aluno.

O Programa para a Avaliação Internacional dos Alunos (PISA), iniciado em 2000 e patrocinado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) com o objetivo de avaliar a aquisição de conhecimentos e destrezas essenciais para a vida ativa dos alunos dentro da escolaridade obrigatória, nos países onde é aplicado, em 2003, considerou a literacia matemática como principal domínio a ser avaliado. Considerou a resolução de problemas uma área transversal a ser avaliada e definiu para tal três tipos de problemas: problemas de tomada de decisão, problemas de análise e conceção de sistemas e despiste de problemas. Os problemas de tomada de decisão requerem que o aluno tome uma decisão face a várias alternativas e limitações, de tal modo que a solução deverá satisfazer as restrições impostas. Quanto à análise e conceção de sistemas, o aluno terá de perceber a sua lógica e/ou conceber um sistema funcional que lhe permita alcançar uma solução. Neste tipo de problema, as variáveis estão interligadas entre si de forma dinâmica e pode haver mais do que uma solução. Para finalizar, no despiste de problemas, o aluno tem de compreender o funcionamento de um sistema para perceber onde existe um determinado defeito,

incoerência ou inconsistência do sistema.

Ainda a propósito da classificação dos problemas, Palhares (1997), refere que esta deve ser realizada de acordo com os alunos a que o mesmo se destina. Para este investigador, um tipo de problemas, para certos alunos, classifica-se de uma forma que pode não ser a mesma para outros, pois nem todos atuam ou têm de atuar do mesmo modo, perante um determinado problema. *“Note-se que (...) o mesmo problema, dependendo da intenção pedagógica ou da altura da aplicação pode ser classificado de maneiras diferentes. É importante esclarecer a classe de indivíduos para a qual se atribui a classificação, a não ser que seja óbvio no contexto.”* (Palhares, 1997, p. 169).

A classificação de problemas, apresentada por este autor, baseia-se nos procedimentos necessários para os resolver. Se os problemas tiverem como objetivo o uso de estratégias de resolução, serão considerados problemas de processo. Em contrapartida, se os problemas tiverem como objetivo o uso de conhecimentos matemáticos adquiridos recentemente ou em fase de interiorização, serão considerados problemas de conteúdo. O autor considera ainda os problemas de capacidade, ou problemas de cálculo mental ou estimativa, que requerem o uso de capacidades matemáticas. Existem ainda, para o mesmo autor, os problemas tipo puzzle que visam o alargamento do espaço de resolução, os problemas de aplicação que requerem a recolha e tratamento de informação, os problemas abertos, considerados por Palhares (1997) uma subcategoria de todas as outras, que requerem a escolha refletida entre vários caminhos possíveis e por fim, os problemas de aparato experimental que requerem o uso de esquemas investigativos. O autor considera que pode existir uma dupla intenção pedagógica o que origina a combinação de dois tipos de problemas para um determinado grupo de destinatários e que, por outro lado, um mesmo problema pode, de acordo com a intenção pedagógica ou a altura em que é aplicado, ser classificado de diferentes maneiras.

Também Lopes (2002) apresenta uma classificação para os problemas, baseando-se em Proudfit (1980). Dividi-os em problemas *standart* de manual e problemas de processo. Esta classificação é baseada no grau de dificuldade que advém sobretudo do vocabulário usado, do tamanho e estrutura da frase, do tamanho e complexidade dos números e da representação do problema. Os problemas *standart* do manual são aqueles que normalmente introduzem ou seguem o desenvolvimento

de operações aritméticas. Neles aplicam-se diretamente algoritmos já ensinados e a tarefa passa só pela identificação de quais as operações ou os algoritmos adequados para resolver o problema. Os problemas de processo, requerem mais do que o uso de operações, sendo necessário invocar uma estratégia de resolução. O sucesso da resolução destes problemas não depende só da aplicação de conceitos matemáticos específicos, fórmulas ou algoritmos, requerendo também o uso de uma ou mais estratégias combinadas.

Já Boavida *et al.* (2008) optam por uma classificação dos problemas simples: problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos. Para estes autores, os problemas de cálculo são problemas que requerem decisões quanto à operação ou operações a aplicar aos dados apresentados. Os alunos leem o problema, avaliam o que é conhecido e o que é pedido e, finalmente, efetuam uma ou mais operações que consideram apropriadas usando os dados do enunciado. Os problemas de processo diferem dos de cálculo porque não podem ser resolvidos apenas por seleção da(s) operação(ões) apropriada(s). Estão, geralmente, embutidos em contextos mais complexos e requerem um maior esforço com vista à compreensão da Matemática necessária para chegar à solução, uma vez que tem de se recorrer a estratégias de resolução mais criativas para descobrir o caminho a seguir. Requerem persistência, pensamento flexível e uma boa dose de organização. Estes problemas podem ser usados para desenvolver diferentes capacidades, para introduzir diferentes conceitos ou para aplicar conhecimentos e procedimentos matemáticos anteriormente aprendidos. Os problemas abertos, também aqui designados por investigações, podem ter mais do que um caminho para chegar à solução e mais do que uma resposta correta. Para os resolverem, os alunos têm de realizar explorações que lhes permitem descobrir regularidades e formular conjecturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão.

Embora a classificação dos problemas não seja unânime, os diferentes autores concordam que um bom problema tem que ser apelativo e que suscita a curiosidade e o desejo de o solucionar. De acordo com Boavida *et al.* (2008, p.26), “*os bons problemas são aqueles que desafiam os alunos a desenvolver e aplicar estratégias, que são um meio para introduzir novos conceitos e que oferecem um contexto para usar e desenvolver diferentes capacidades.*” Os vários autores referem ainda que os

problemas devem ter as seguintes características: sejam, realmente, compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser diretamente atingível; sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes; possam ter mais do que um processo de resolução e possam integrar vários temas.

Retomando Polya (1981), autor com que iniciamos a abordagem desta temática, os problemas propostos aos alunos devem ser considerados pelos mesmos, como desafios para as suas capacidades matemáticas e formas de experimentar o gosto pela descoberta. Um problema apresenta sempre um grau de dificuldade apreciável. No entanto, não deve ser demasiado difícil, para não conduzir o aluno à desistência e não deve ser demasiado acessível, senão transformar-se-á num mero exercício.

Em suma, verificamos que existem diferentes tipos problemas que podem ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A categorização feita por cada um dos autores, atrás referidos, pode ser útil tanto para quem ensina como para quem aprende. A procura de um método eficaz para resolver um problema tornou-se noutro tema de estudo para alguns matemáticos. Indicamos de seguida alguns modelos de resolução de problemas propostos por alguns investigadores.

1.3. Modelos de Resolução de Problemas

A resolução de problemas, de acordo com Borralho (1990), é concebida por diferentes autores como um processo sequencial no qual se distinguem várias fases. De um modo geral, quase todas as propostas têm como modelo a obra de Polya que apresenta um modelo de resolução dividido em quatro etapas: 1) Compreensão do problema; 2) Estabelecimento de um plano; 3) Execução do plano e 4) Reflexão sobre o que foi feito.

Polya (2003) defende que, em primeiro lugar, temos de compreender o problema, de perceber claramente o que é necessário, pelo que, se um aluno estiver a aprender a resolver problemas deve começar por retirar, assimilar e interpretar as informações fornecidas no enunciado. Deve também conseguir identificar qual é a incógnita e, se possível, organizar as suas ideias, ordenando os dados em gráficos, desenhos, tabelas ou esquemas, entre outros. Precisa ainda de identificar a meta que deseja alcançar para que não se desvie do problema.

Em seguida, para Polya, deve ser estabelecido um plano. Nesta fase, pretende-se que o aluno especule, faça ensaios e conjecture um plano que deve assentar numa ideia adequada para a resolução do problema. Para o efeito, o aluno poderá lembrar-se que já resolveu um problema análogo e adequar as estratégias usadas anteriormente ao problema atual. Poderá até começar por resolver um problema semelhante, mas de resolução mais acessível.

Uma vez estabelecido um plano, este deve ser executado. O aluno deve comprovar sempre se o plano estabelecido anteriormente é eficaz. Não se deve limitar a indicar uma solução, mas deve ser capaz de descrever o procedimento que o levou até à mesma.

Finalmente, a última fase deverá ser a verificação da solução obtida. Nesta fase, pretende-se uma reanálise da resolução do problema. Trata-se de uma etapa muito importante que permite consolidar a resolução efetuada. O aluno poderá tentar uma nova abordagem, mais vantajosa, deverá verificar se a solução é a pretendida e se poderá até generalizar estratégias ou resultados, que se venham a revelar úteis na resolução de novos problemas.

Polya (2003) defende ainda que é útil ensinar aos alunos estratégias gerais (questões heurísticas) que os alunos devem colocar a si próprios em cada etapa de resolução do problema e que se destinam a organizar o pensamento de uma forma mais sistemática e eficaz.

Também Guzmán (1990) propõe, um modelo de resolução de problemas, constituído por quatro etapas similares às do modelo apresentado por Polya : 1) Antes de fazer tente entender; 2) À procura de uma estratégia; 3) Explora a estratégia e 4) Extraí o sumo do jogo e da sua experiência. Ao nível da segunda etapa, Guzmán indica que se pode procurar semelhanças com outros jogos e problemas, começar pelo fácil para tornar o difícil fácil, experimentar e procurar regularidades, fazer um esquema e tentar mudar algo no enunciado para verificar se ocorre um caminho possível; usar a tentativa e erro ou supor o problema resolvido e pensar no raciocínio inverso.

Em contrapartida, Schoenfeld (1979) apresenta um modelo de resolução de problemas no qual considera a existência de alguns princípios gerais na procura das soluções e um número, relativamente elevado, de abordagens heurísticas válidas na resolução de problemas: 1) Análise - fase iniciada com a leitura do problema que

conduz a processos heurísticos tais como classificar e estabelecer um contexto, selecionar ou desenhar representações que ajudem na exploração de dados e objetivos, examinar casos paralelos e/ou particulares; 2) Design - esta fase corresponde ao processo de resolução, ao plano geral em que o aluno controla todos os passos; 3) Exploração - consiste na busca de problemas equivalentes para efetuar procedimentos similares, substituindo as condições por outras equivalentes; 4) Implementação - corresponde à realização de todos os passos previamente delineados; 5) Verificação - esta fase é a mais simples e corresponde à quarta fase do modelo de Polya – reflexão sobre tudo que foi feito. Nesta fase realizam-se testes específicos para a solução, através dos dados e ainda testes gerais para a mesma solução verificando a existência ou não de outras formas para a obter, permitindo verificar, se o processo utilizado, serviu como meio de aprendizagem dos alunos.

Porém Borralho (1990) refere que todos os modelos elaborados com base no modelo de Polya são válidos como guias na organização do processo de instrução da resolução de problemas, mas não possuem uma perspectiva inovadora a nível da análise dos processos mentais envolvidos. Sendo assim, Borralho (1990), apoiado em Lester (1980), apresenta um modelo dentro desta perspectiva constituído por cinco fases:

1) Fase da consciencialização: a situação é colocada ao estudante. Esta é analisada pelo estudante e torna-se um problema quando ele tomar consciência de que a situação apresentada não pode ser resolvida prontamente. Consequentemente há uma tendência em se considerar que não se consegue resolve-lo. Contudo existe uma segunda componente nesta fase, que é o sentimento de desejo de tentar resolver o problema. Se o estudante não reconhecer a dificuldade ou não possuir vontade de tentar resolver o problema, deixará de ter sentido qualquer procedimento.

2) Fase da compreensão: é o momento onde se dá sentido ao problema, ou seja, existe uma representação interna do problema, pelo individuo. Esta fase possui duas subfases. A primeira, a translação, que envolve a interpretação da informação proveniente do problema de modo que, este possa ter significado para o aluno. A segunda, a interiorização, requer do sujeito a seleção da informação relevante, e a forma como essa informação está interligada. A representação do problema, pode inicialmente, não ser precisa, e levar ao estabelecimento de objetivos e de prioridades

de trabalho empobrecidos. Esta fase é de extrema importância, e é neste momento que, a natureza sequencial deste modelo tem sentido. Se não houver uma representação interna e precisa da informação, não se acredita num progresso em direção à solução.

3) Fase da análise do(s) objetivo(s): é o momento no qual se pode saltar, várias vezes, entre esta fase e a fase anterior isto porque, para que haja a identificação do(s) objetivo(s) do problema, é necessário compreendê-lo. Em alguns problemas é aconselhável o estabelecimento de subobjetivos, enquanto noutros não é necessário. A análise dos objetivos pode ser encarada como uma tentativa de reformular o problema onde se possam usar técnicas e estratégias diversas. É nesta fase que é feita a identificação das partes componentes do problema. Esta análise de objetivo(s) inclui a especificação da informação dada, a especificação da inter-relação da informação e a especificação das operações que podem ser necessárias.

4) Fase do desenvolvimento do plano: é nesta fase que o resolvidor do problema dá especial atenção ao projeto de plano para atacar o problema. Desenvolver um plano, envolve mais do que a identificação de potenciais estratégias, como por exemplo, encontrar um padrão ou resolver um problema mais simples, mas relacionado com o problema dado. Esta fase também inclui a ordenação dos subobjetivos e a especificação de operações que podem ser usadas. É provável que seja a fase que cause maiores dificuldades aos estudantes. A dificuldade de aprendizagem ao nível de, como formular um plano de ataque, tem origem no fato dos alunos mostrarem uma certa tendência de que a tarefa não é fácil. Contudo, se os problemas forem fáceis acabam por não serem problemas. Outra dificuldade nesta fase é a ordenação dos subobjetivos e a especificação das operações a serem usadas.

5) Fase de implementação do plano: nesta fase o estudante tenta pôr em ação o plano que projetou. O aparecimento de erros de execução poderá tornar esta fase confusa. Um estudante que decide corretamente na construção de uma tabela e na procura de um padrão, pode falhar no verdadeiro padrão através de um simples erro de cálculo. Erros deste tipo dificilmente se eliminam mas podem ser reduzidos se a introdução o plano de implementação enfatizar a avaliação enquanto este estiver a ser implementado. Assim, as fases cinco e seis devem estar muito interligadas. Juntar, adequadamente, as partes do plano, pode ser uma tarefa difícil pois, implica escolher a

melhor sequência dos passos a percorrer no plano ou a melhor ordenação dos subobjetivos.

6) Fase da avaliação dos procedimentos e da solução: o sucesso na resolução de problemas é muitas vezes, o resultado de uma avaliação sistemática das decisões durante o processo de resolução e do exame atencioso aos resultados obtidos. O papel da avaliação ultrapassa o fato da resposta estar certa ou errada.

Independentemente do modelo de resolução de problemas seguido seja o de Polya ou o proposto por outro autor, os alunos sentem dificuldades ao longo da resolução de problemas. Fernandes, Lester, Borralho e Vale (1997) apontam a compreensão do problema, como a fase em que surgem maiores dificuldades para os alunos. A identificação da informação, dos dados relevantes e o seu relacionamento são fundamentais à compreensão e ao estabelecimento de um plano de resolução.

Sobre este assunto, Polya (2003) apesar de considerar a primeira fase muito importante, pois é dela que depende o sucesso das subseqüentes, atribui maiores dificuldades na segunda fase, principalmente no momento de estabelecer um plano. Considera que esta fase requer algumas capacidades por parte dos alunos nomeadamente, criatividade, hábitos mentais, concentração nos objetivos, conhecimento e experiência. Estas capacidades são adquiridas e desenvolvidas ao longo do tempo através das diversas oportunidades de resolução de problemas e vão influenciar a própria estratégia de resolução. Polya considera ainda que na quarta fase, a retrospeção é muito importante, pois os alunos ao efetuarem a revisão completa de todo o trajeto percorrido, conseguem identificar as dificuldades sentidas, como as conseguiram ultrapassar, consolidando conhecimentos e conexões. Seguindo a linha de pensamento de Polya, a compreensão do problema e a discussão/retrospeção do resultado e do problema são momentos cruciais na resolução de problemas, pois se os alunos não compreendem nem sentem o problema e se não discutem o resultado obtido não solidificam o conhecimento adquirido.

Resumindo, existem vários modelos de resolução de problemas, contudo o modelo apresentado por Polya é o mais conhecido e, conseqüentemente, o mais utilizado na resolução dos problemas propostos nas aulas de Matemática. A resolução de problemas parece ter vindo, ao longo do tempo, a ganhar uma importância e um papel diferente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

1.4. O Ensino da Matemática através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas

Os problemas matemáticos e a sua resolução surgem desde a Antiguidade no ensino da Matemática. No entanto, são os trabalhos de George Polya que pela primeira vez ajudam a clarificar o seu papel educativo. A importância da resolução de problemas na aula de Matemática, não é pois um tema recente. Segundo Abrantes (1989), a Matemática escolar parece ter assumido sempre a resolução de problemas como uma atividade complementar, paralela, geralmente destinada a estimular ou detetar alunos particularmente dotados, por vezes associada a propósitos de popularização da Matemática ou de motivação externa para o seu estudo. O mesmo autor reforça a ideia ao referir que a resolução de problemas nunca terá sido assumida como o centro em volta do qual se processaria a aprendizagem da Matemática, a não ser em projetos isolados ou em estudos experimentais de ponta. Para Carreira (2005) trazer a resolução de problemas para o centro do ensino e da aprendizagem da Matemática tem sido, e continua a ser, uma das preocupações presentes na renovação e no desenvolvimento do currículo de Matemática.

Nos anos oitenta, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) indicou a resolução de problemas como “*uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática*” (NCTM, 2008, p 57). Em Portugal, podemos encontrar indicações análogas em documentos de orientação para o ensino da Matemática da mesma década. A Associação de Professores de Matemática (APM) discute a renovação do currículo de Matemática e propõe: “*A resolução de problemas - tradução de problem solving - deverá constituir o tipo privilegiado das actividades em Matemática*” (APM, 1988, p. 44).

Também no programa de Matemática, publicado no início da década de noventa, e que vigorou no nosso país durante vários anos, podemos ler: “*A resolução de problemas constitui, em Matemática, um contexto universal de aprendizagem. Neste sentido, deve estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação e integrada naturalmente nos diversos tipos de actividade.*” (ME, 1999, p 8).

Em contrapartida, o programa de Matemática, homologado em 2007, (Ponte et.

al. , 2007) apela para uma abordagem do ensino da Matemática, ao longo dos ciclos do ensino básico, que desenvolva progressivamente a capacidade de resolução de problemas matemáticos. No 3.º ciclo esta capacidade deve ser aprofundada com as aprendizagens realizadas nos diferentes temas. Os alunos devem ainda desenvolver neste ciclo, a capacidade de analisarem as consequências para a solução de um problema resultantes da alteração de dados e das condições iniciais. Os alunos devem além disso ser capazes de formular novos problemas em contextos matemáticos e não matemáticos. Nas indicações metodológicas para o 3.º ciclo, os autores do programa apontam para

resolver problemas é fundamental para a construção, consolidação e mobilização de conhecimentos matemáticos dos diversos temas, em conexão com o raciocínio e a comunicação. Possuir a capacidade de resolver problemas matemáticos significa ser capaz de realizar com sucesso actividades como compreender o problema, identificando a incógnita e as condições; seleccionar as estratégias e os recursos apropriados e aplica-los, explorando conexões matemáticas para superar dificuldades; e verificar soluções e rever processos.” (Ponte *et. al.* , 2007, p. 62)

Mas o que significa resolver um problema? Segundo Polya (1949), citado por Lopes (2002, p.9), “*resolver um problema é descobrir um modo desconhecido, encontrar uma forma de contornar um obstáculo, atingir um fim desejado que não é imediatamente atingível através de meios apropriados*”. Além disso, o mesmo autor afirma que, a resolução de problemas matemáticos é uma arte prática que todos podem aprender, é a arte de fazer Matemática,

significa ter a capacidade para resolver problemas não apenas rotineiros mas problemas que requerem algum grau de originalidade e criatividade. Assim, a primeira e mais importante tarefa do ensino da Matemática escolar é dar ênfase ao trabalho matemático na Resolução de Problemas. (Polya, 1981, p. IX).

Sendo assim a resolução de problemas pode ser considerada uma atividade matemática criativa, ou seja,

uma experiência continuada com diversos tipos de problemas (por exemplo, problemas com mais de uma solução, com excesso de dados ou sem solução), solicitando a utilização de diversas estratégias e a sua apreciação, favorece o desenvolvimento da autoconfiança e autonomia dos alunos com situações não familiares. (Ponte *et. al.*, 2007, p. 62)

Além disso, Moreira (1990) refere que a resolução de problemas é o pilar de

todos os conhecimentos matemáticos. A autora considera que na resolução de problemas a combinação dos conceitos, das técnicas e das regras permite a abordagem de situações problemáticas conducentes à formulação de novos e diferentes problemas, cuja resolução potencie a construção de conceitos, o desenvolvimento de estratégias e a aquisição de técnicas.

No que diz respeito às finalidades do ensino da Matemática através da resolução de problemas, Borralho (1990) afirma que, a resolução de problemas permite: desenvolver o hábito e o gosto pela resolução de problemas; incutir confiança nos alunos quanto às suas capacidades de resolver problemas; consciencializar os alunos acerca das estratégias que podem ser usadas na resolução de problemas; consciencializar os alunos acerca das vantagens inerentes a uma abordagem sistemática e organizada dos problemas; contribuir para que os alunos se consciencializem de que o mesmo problema pode ser resolvido por mais que um processo; desenvolver as capacidades dos alunos em selecionar estratégias de resolução adequadas; desenvolver as capacidades dos alunos na implementação correta de estratégias de resolução; desenvolver capacidades metacognitivas e contribuir para que os alunos resolvam mais problemas corretamente.

Já para Garcia (1990), a resolução de problemas vai para além da consolidação dos conhecimentos, desenvolve o raciocínio lógico, a criatividade e aplica a matemática a situações concretas.

Sobre este assunto, os autores do relatório de PISA 2003 adota a seguinte definição de resolução de problemas:

A resolução de problemas é a capacidade de um indivíduo usar processos cognitivos para confrontar e resolver situações reais e interdisciplinares, nas quais o caminho para a solução não é imediatamente óbvio e em que os domínios de literacia ou áreas curriculares passíveis de aplicação não se inserem num único domínio, seja o da matemática, das ciências ou da leitura. (GAVE, 2004, p.10)

O relatório PISA de 2003 indica a resolução de problemas com as várias componentes do ato e com os processos cognitivos a ele subjacentes, incluindo a aplicação da compreensão, da caracterização, da representação, da resolução, da reflexão e da comunicação. A resolução de problemas é ainda vista, nesse mesmo relatório, numa perspetiva mais abrangente, nomeadamente recorrendo a itens que

transpõem os limites das áreas curriculares tradicionais salientando ainda a resolução de problemas da vida real. Tais problemas desafiam os seus resolvedores a moverem-se entre diferentes representações, que por vezes estão relacionadas, e a mostrarem algum grau de flexibilidade no modo como retomam e aplicam os seus conhecimentos. Estes problemas convidam ainda os estudantes a tomarem decisões e a comunicarem decisões que, aparentemente, terão ramificações imediatas para os que estão envolvidos.

Neste sentido, Guimarães *et al.* (2005) referem que, nos últimos anos de escolaridade, a resolução de problemas deve ser encarada como sinónimo aproximado de fazer Matemática, pois é muito mais do que a aplicação de técnicas específicas de resolução de problemas, é o processo pelo qual o edifício da Matemática é simultaneamente construído e reforçado. A resolução de problemas é pois um processo transversal a toda a atividade matemática. Este processo matemático permite uma relação mais direta com a Matemática e com tudo o que ela envolve, contribuindo para a progressiva aprendizagem dos alunos.

Para que os alunos aprendam a resolver problemas o professor deve dar ênfase a esta metodologia em certa temática nas suas aulas, relacionando-a com todas as outras temáticas trabalhadas e exploradas nas aulas. Os alunos ao iniciarem a resolução de um problema devem em primeiro lugar refletir sobre o que vão fazer de modo a estabelecerem o seu plano de ação. No entanto, verificamos que alguns dos enunciados apresentados aos alunos, apesar de se proporem como tal, não são problemas.

Segundo Ponte e Serrazina (2000): *“A resolução de problemas constitui um processo de elevado nível de complexidade, que envolve os processos mais simples de representar e relacionar”* (p.52). Deve, por isso, o professor ter em atenção os conhecimentos que os seus alunos já adquiriram antes de lhes apresentar um problema, para que este não seja por eles encarado como um exercício de rotina. O processo de reflexão merece destaque pelo facto de exigir que os alunos abordem de forma diferente o problema que lhes foi apresentado, desenvolvendo uma atitude crítica face ao processo desenvolvido e resultados obtidos.

Procurando indicar as potencialidades do ensino através da resolução de problemas, Matos e Serrazina (1996) baseados em Hatfield (1978) afirmam que este

pode ser de três tipos: ensinar para; ensinar acerca de e ensinar através da resolução de problemas. No primeiro tipo de ensino valoriza-se a aquisição de técnicas e conhecimentos matemáticos que podem ser úteis na implementação de estratégias de resolução de problemas. No segundo tipo de ensino realça-se os procedimentos e estratégias desenvolvidas com o objetivo de modelar comportamentos capazes de ajudar os alunos a obterem mais êxito na resolução de problemas. No ensino através da resolução de problemas, todos os conteúdos matemáticos são apresentados num contexto de situações problemáticas.

Em relação a esta última potencialidade do ensino através da resolução de problemas e com base na crescente importância dada a este tipo de ensino nos documentos orientadores do ensino da Matemática, surge a oportunidade do professor usar nas suas aulas uma metodologia de ensino e aprendizagem através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP).

O conceito de Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas, designado na língua inglesa por Problem-Based Learning (PBL), não é consensual entre a comunidade científica. A ABRP para Oliveira (2007), apoiando-se em vários autores (Lambros, 2002; Burch, 2001; Hmelo-Silver, 2004), é considerada como um método, uma estratégia ou uma técnica pedagógica, enquanto Leite e Afonso (2001) consideram-na um modelo de ensino.

A origem da ABRP, segundo diversos autores, remonta a 1920. David e os seus colaboradores (1999), citados por Carvalho (2009) atribuem a sua origem a Célestin Freinet, professor francês que combateu na I Guerra Mundial da qual regressou com feridas que lhe dificultavam a comunicação. Para ultrapassar os problemas de comunicação com os alunos, encorajou-os a responsabilizarem-se pela sua própria aprendizagem, incentivando-os a serem cooperativos em vez de competitivos, a avaliarem as suas aprendizagens e a adaptarem-se a viver em sociedade.

Ainda a respeito da origem da ABRP, Leite e Afonso (2001) referem que esta surge na América do Norte (Estados Unidos e Canadá), nos currículos de Ciências da Saúde, por volta dos anos sessenta do século passado e como consequência da insatisfação com o ensino tradicional. A rápida evolução da informação, as novas tecnologias e novas práticas médicas conduziram a uma rápida desatualização dos médicos (Loureiro, 2008).

Adicionalmente, e de acordo com Savin-Baden (2007) sabe-se que Barrows e Tambly (1980) realizaram estudos com estudantes de medicina e chegaram à conclusão que estes podiam aprender conteúdos e desenvolver competências mas, quando confrontados com uma situação real de um paciente, não conseguiam aplicar essas competências. Tornou-se imperativo formar médicos capazes de adquirir conhecimento e, sobretudo, aplicá-lo nas situações inerentes à sua vida profissional.

O sucesso da implementação da ABRP é tal, que é utilizada em mais de sessenta escolas de medicina em todo o mundo, como refere Delisle (2000). Loureiro (2008) acrescenta que o uso da ABRP foi alargado, não só à formação em Educação, como também a outras áreas como a Engenharia, a Economia, o Direito ou a Sociologia e em diferentes níveis de ensino.

Em Portugal, e de acordo com Carvalho (2009), a implementação da ABRP está a dar os primeiros passos, pelo que não existem muitos estudos sobre o tema. A maior parte dos estudos existentes estão ligados à Matemática e às Ciências Físico-Químicas no ensino básico. A ABRP surge no ensino superior, com a criação dos cursos de Medicina na Universidade do Minho e da Beira Interior. Algumas Escolas Superiores de Enfermagem também adotaram a ABRP como prática pedagógica. Assim sendo, no ensino superior surgiram, progressivamente, experiências do uso de ABRP em áreas distintas, embora com predominância no ensino das ciências. Alarcão (2009) refere que a constatação da existência de alunos desmotivados, habituados a um baixo nível de exigência e muito dependentes dos professores nos cursos de Engenharia na Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda, da Universidade de Aveiro, levou a reitoria desta instituição a procurar uma solução que rompesse com o método tradicional expositivo, que residiu na observação por um grupo dos seus docentes do método de ensino praticado na Universidade de Aalborg (Dinamarca).

Note-se que as situações/problemas, de acordo com Leite e Esteves (2005), que se apoiam em diversos autores, podem desempenhar três tipos de funções no contexto dos processos de ensino e aprendizagem:

- Avaliação das aprendizagens dos alunos, sendo para tal utilizados após os processos de ensino e aprendizagem (Dumas-Carré & Goffard, 1997; Lopes, 1994);
- Aprofundamento das aprendizagens dos alunos, sendo neste caso usados

durante os processos de ensino e aprendizagem (Dumas-Carré & Goffard, 1997; Ramirez, J. et al., 1994; Lopes, 1994);

- Ponto de partida para a aprendizagem dos alunos, constituindo o início dos processos de ensino e aprendizagem (Watts, 1991; Boud & Feletti, 1997; Lambros, 2002; Lambros, 2004).

Esta última função, segundo as mesmas autoras, tem sido associada a contextos de ABRP e que consiste na aprendizagem de novos conhecimentos através da resolução de problemas.

Sendo assim, Vlassis e Demonty afirmam que,

Tornou-se absolutamente evidente aos olhos dos responsáveis educativos que uma metodologia tradicional baseada numa simples transmissão de regras e procedimentos, seguida de uma restituição não pode favorecer o domínio do saber fazer, nem também o dos saberes inerentes à matemática. A aprendizagem da matemática por meio da resolução de problemas aparece como um processo que permite que os alunos construam os conhecimentos de forma significativa. (2002, p.9)

Deste modo, o aparecimento da ABRP, conduziu à modificação do processo de ensino e o papel do professor e do aluno na sala de aula é diferente. Tradicionalmente, em contexto de sala de aula, a aprendizagem tende a ocorrer do abstrato para o concreto, onde em primeiro lugar são introduzidos os conceitos e seguidamente resolvidos problemas de aplicação. Este modelo de ensino é centrado no professor.

Sobre o papel do professor, Leite, Costa e Esteves (2008) referem que num ensino para a aprendizagem baseada na resolução de problemas, não se pretende resolver problemas para aplicar conhecimentos (*Problem-Solving*) surgindo estes no final do processo, mas confrontar os alunos com os problemas no início do processo (*Problem Probing*) e levá-los à procura dos conceitos que resolvam o problema. Neste contexto, a posição do professor altera-se de transmissor para gestor/orientador das aprendizagens.

O professor deve propiciar aos estudantes uma maior autonomia na condução da aprendizagem. Um dos fatores que determina o sucesso do processo é os materiais preparados pelo professor. As estratégias que preconiza, conduzem à necessidade do exame desses materiais com espírito crítico, à tomada de decisões e ao delinear de estratégias de ensino, com atividades adequadas ao desenvolvimento das

competências que pretende nos alunos. O professor “transmissor” de conhecimentos e “matérias” dá lugar ao professor supervisor que incentiva à pesquisa e à descoberta.

O aluno perante a situação problemática proposta, sente necessidade de se questionar e conseqüentemente se envolver na busca de resposta(s). Terá necessidade de procurar informação, selecioná-la, sintetizá-la para posteriormente apresentar uma ou mais soluções para o problema proposto. Tem de descobrir estratégias para resolver o problema proposto e explicar e justificar o seu raciocínio. O aluno deixa de ser um mero ouvinte e passa a ser um membro ativo que pensa e age matematicamente. Segundo Ponte (2009), o aluno ao justificar os seus raciocínios de maneira lógica, torna-se numa autoridade na sala de aula. Os alunos, trabalharão em pares ou pequenos grupos e são encorajados a partilhar as suas ideias e a discuti-las com os seus colegas.

Ainda sobre este assunto, Leite e Esteves (2005), apoiando-se em vários autores referem que,

a resolução dos problemas é, assim, um meio não só para a realização de aprendizagens conceptuais, mas também para o desenvolvimento integrado de competências específicas de uma dada área de saber (dos domínios do conhecimento substantivo e processual, do raciocínio e da comunicação) e de competências gerais (relacionadas com resolução de problemas, tomada de decisões, aprender a aprender, pesquisa e utilização de informação, autonomia e criatividade) e, se o processo se realizar em grupo, de competências de relacionamento interpessoal, nomeadamente, cooperação e tolerância (Leite, 2001; Lambros, 2002; Lambros, 2004). Estas últimas têm um papel decisivo na formação dos alunos para a cidadania (Savin-Baden, 2000; Barron *et al.*, 1998). (2005, p.1754)

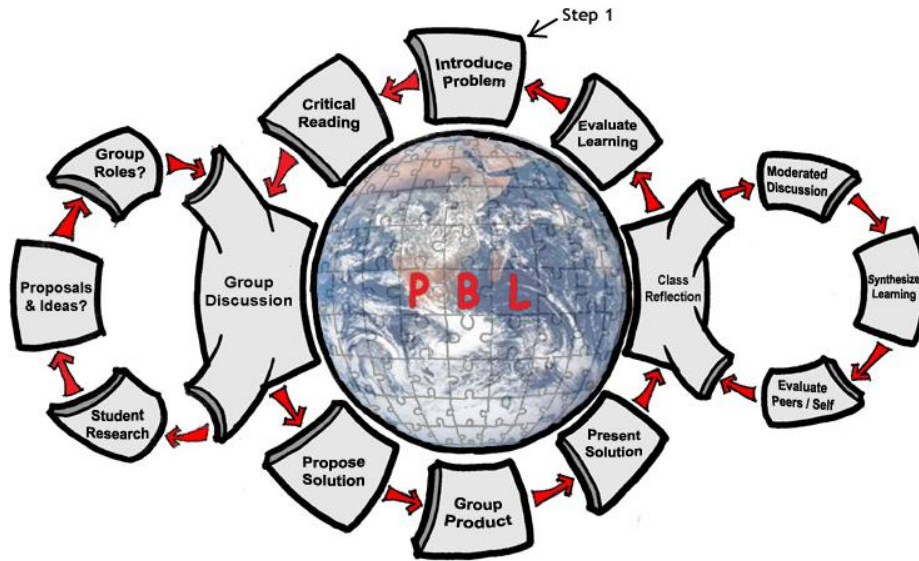
Indo de encontro a esta ideia, Vlassis e Demonty (2002) afirmam que, o uso de um modelo de ensino para ABRP revela-se de valor indiscutível, tanto do ponto de vista matemático, visto que dá às noções o seu verdadeiro sentido, como de um ponto de vista pedagógico, visto que permite que os alunos construam verdadeiramente o seu conhecimento.

Conseqüentemente, e de acordo com Delisle (2000), inspirado no pensamento de John Dewey, a ABRP apoia - se em pressupostos construtivistas. Para este filósofo e pedagogo norte-americano, os alunos aprendem mais e melhor se realizarem tarefas associadas aos conteúdos. Por outro lado, as aprendizagens são mais efetivas se forem partilhadas e refletidas em grupo e não individualmente, isto é, defendia o trabalho

cooperativo. Os conteúdos devem ser apresentados sob a forma de questões ou problemas sem respostas ou soluções, ideias contrárias ao ensino tradicional como já referido. São as vivências fora da escola, os conhecimentos prévios, que fornecem indicações sobre a forma de adaptar as aulas aos interesses dos alunos.

Procurando distinguir a metodologia de trabalho e o tipo de problemas usados na ABRP, Guerra e Vasconcelos (2008), baseando-se em autores como Woods (1994), refere que na ABRP, os problemas, ao contrário de outras metodologias de ensino, surgem no início dos processos de ensino e de aprendizagem, sendo o motor da sua prossecução. Caracterizam-se, também, por serem abertos sendo o processo de resolução e a solução desconhecidos do aluno. As mesmas autoras consideram que o processo de resolução de problemas desenrola-se sobre fatores cognitivos (por exemplo, o aluno como co construtor do conhecimento), motivacionais (por exemplo, aluno experimenta o sucesso na resolução, explora ideias, etc.) e funcionais (por exemplo, mobilização e utilização do conhecimento na resolução do problemas). A aprendizagem não visa só a mobilização de saberes, mas também a integração de saberes recém-construídos, em simultâneo com o desenvolvimento de competências cognitivas (*saber saber*), procedimentais (*saber fazer*), atitudinais (*saber estar*).

Investigadores do Center for Teaching Excellence da Virginia Commonwealth University apresentam o processo da ABRP esquematizado de acordo com a Figura 1. Para estes investigadores, o processo tem início com a apresentação do problema que pode ser introduzido de diversas maneiras. Contudo a chave do sucesso está na provocação que a atividade gera, para garantir o interesse dos alunos e para atraí-los para a resolução do problema desde o início. Normalmente, o problema é apresentado de forma escrita. O professor distribui o problema e pede aos alunos para o lerem individualmente. Depois da introdução e da leitura individual, os alunos passam a trabalhar no seu grupo de discussão. Identificam o que eles já sabem e que pode ajudá-los na resolução de problemas. Formulam hipóteses preliminares sobre as soluções do problema. Pesquisam e examinam a variedade de recursos e informações que podem contribuir para a resolução do problema.



(Center for Teaching Excellence da Virginia Commonwealth University sendo cortesia Eric Ingler, University of Cincinnati¹).

Figura 1– Esquema do processo da ABRP

Discutem as informações e, novas perguntas, podem surgir gerando um novo ciclo de pesquisa e de discussão. Após a resolução do problema, os resultados obtidos pelos alunos em trabalho colaborativo podem ser apresentados, como um produto acabado para classificação e os conhecimentos adquiridos pelos alunos guardados para serem testados mais tarde em momentos de avaliação tais como exames. No entanto a maior parte das vezes são apresentados à turma e discutidos. Em grupo turma, discute-se, tendo o professor o papel de facilitador e de moderador, as soluções encontradas pelos diferentes. Estas experiências proporcionam oportunidades adicionais para os alunos pensarem de uma forma crítica, isto é, para aplicarem, integrarem, avaliarem, analisarem e sintetizarem informações.

Apesar da importância do desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, vários estudos, incluindo o PISA 2003, têm mostrado que os alunos portugueses encaram com grande dificuldade este tipo de atividade, revelando um fraco desempenho. Várias causas são então apontadas para este insucesso. A sobrevalorização do domínio de procedimentos e algoritmos e a pouca experiência com atividades que envolvem o raciocínio e a resolução de problemas não rotineiros

¹ http://www.vcu.edu/cte/resources/nfrg/11_07_problem_based_learning.htm consultado em 23 de Agosto de 2012

são duas das causas mais frequentes. Uma metodologia de trabalho enquadrada numa lógica de ABRP é uma oportunidade de modificar o desenvolvimento habitual das aulas de matemática. O problema é o ponto de partida e tem por meta ajudar os alunos a tornarem-se investigadores diante de uma situação desafiadora, um problema, de forma a compreenderem e a questionarem os conceitos de que irão necessitar.

Os alunos devem compreender que a resolução de problemas não é uma tarefa de aplicação de algoritmos ou fórmulas mas que ela deve assentar num plano que envolva os alunos num processo de elevado nível de complexidade cognitiva onde estejam presentes os processos de representar, relacionar e comunicar (Ponte, 2000).

Como refere Boavida (1993), isto não significa que, na sala de aula, deixem de ser necessárias tarefas que não sejam problemáticas, do mesmo modo que seria limitativo, prejudicial e absurdo, diminuir o valor que tem no processo educativo as exposições do professor que abram novos caminhos e perspectivas de trabalho aos alunos, que os ajudem a clarificar conceitos e a sintetizar trabalho realizado.

De acordo com Ferreira e Santos (2000), cada professor deverá escolher as metodologias segundo as características da turma, o programa a desenvolver, a formação recebida, o trajeto profissional, as características de personalidade, o seu pensar a educação e a sua filosofia de vida. As opções metodológicas devem inscrever-se numa constante observação e reflexão sobre as práticas letivas e numa abertura à introdução de mudança no quotidiano educativo.

Em suma, a crescente importância dada à resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática ao longo do tempo, sobressai na revisão da literatura realizada. Este facto justifica a opção que efetuamos de desenvolver alguns tópicos do tema Geometria numa abordagem orientada para a ABRP com alunos do oitavo ano do ensino básico. Este estudo enquadra-se ainda na filosofia do Programa da disciplina de Matemática que entrou em vigor em 2007 e que valorizava a resolução de problemas não só como objetivo de aprendizagem como metodologia importante para o professor estruturar as atividades a desenvolver na aula. Em Junho de 2013, este Programa é substituído por outro que inclui as Metas Curriculares para a disciplina. Este novo documento apela na mesma para a resolução de problemas em diversos contextos e dá liberdade pedagógica ao professor para escolher as metodologias e os recursos mais adequados de modo a ajudar os seus alunos a alcançar os desempenhos

definidos nas Metas Curriculares. Deste modo este Programa reconhece e valoriza a autonomia dos professores e das escolas, não impondo portanto metodologias específicas continuando a ser válida a utilização de um modelo de ensino e de aprendizagem através da ABRP.

Capítulo 2 – Linhas metodológicas da investigação

Introdução

Neste capítulo iremos apresentar as linhas metodológicas levadas a cabo para desenvolver o estudo descrito no presente trabalho, com a qual pretendemos apreciar de que forma o recurso a um modelo de ensino e de aprendizagem através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) pode contribuir no desenvolvimento de pensamento matemático em alunos do 3.º.Ciclo do Ensino Básico (CEB). Caraterizamos ainda, neste capítulo, os sujeitos participantes na investigação e apresentamos os instrumentos de recolha de dados utilizados e as técnicas e procedimentos de tratamento dos dados recolhidos.

2.1. Estudo de caso

De acordo com Yin (1989), a escolha da metodologia da investigação deve ter em conta a natureza das principais questões do estudo, a possibilidade de controlo dos acontecimentos presentes e o facto de se tratar ou não de um fenómeno que se desenvolve no momento do estudo. Sendo assim, a metodologia de qualquer estudo de investigação é determinada pelos objetivos e pelas questões que se pretendem investigar.

Do ponto de vista clássico, existem dois tipos de abordagem num processo investigativo: a qualitativa e a quantitativa. A investigação social serve-se de ambas. Para Bogdan e Biklen (1994), há questões que ficam melhor elucidadas com o recurso a métodos quantitativos, por permitirem amostras mais amplas e representativas. Por outro lado, temos realidades únicas que interessa desenvolver através de uma abordagem qualitativa. A investigação qualitativa caracteriza-se pelo seu carácter descritivo, procurando a compreensão e não a avaliação, sendo o investigador participante na situação social que está a ser estudada. Enquanto a investigação quantitativa busca as generalizações, a investigação qualitativa interessa-se pelo

particular. Desta forma, a investigação pode adquirir um cariz quantitativo, qualitativo ou ainda a conjugação de ambos pois revela-se pertinente entrecruzar técnicas das diferentes linhas de investigação e usar uma pluralidade metodológica, *“com estratégias interdependentes que se destinam a recolher diferentes perspectivas dos sujeitos sobre o objecto de estudo ou a obter diferentes perspectivas do mesmo fenómeno.”* (Pacheco, 1995 p.72).

A investigação apresentada neste trabalho assenta no estudo de um processo de ensino e de aprendizagem, de natureza subjetiva, complexo e dependente do meio e do ambiente em que se insere, o que justifica a nossa opção por uma metodologia essencialmente de natureza qualitativa.

Como referem Bogdan e Biklen (1994), neste tipo de investigação, os investigadores: *“...privilegiam essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos de investigação.”* (p.16) Este tipo de abordagem tem na sua essência, segundo os mesmos autores, cinco características: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; (5) o investigador interessa-se, acima de tudo, por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Como estratégia de investigação optamos por um estudo de caso. De acordo com Sousa (2009, p. 137) o estudo de caso,

visa essencialmente a compreensão do comportamento de um sujeito, de um dado acontecimento, ou de um grupo de sujeitos (...), considerados como uma entidade única, diferente de qualquer outra, numa dada situação contextual específica, que é o seu ambiente natural.

Por sua vez, Ponte (1994) afirma:

Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objectivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. (1994, p.3)

Para Bell (2008) o estudo de caso é especialmente indicado para investigadores isolados, dado que proporciona uma oportunidade para estudar, de uma forma mais ou menos aprofundada, um determinado aspeto de um problema. Por sua vez, Vale (2004) chama a atenção para o facto de, apesar do estudo de caso constituir uma metodologia de abordagem aparentemente simples, na realidade se revestir de grande complexidade, garantindo os ambicionados critérios de qualidade.

Por outro lado, os críticos desta abordagem alertam para o facto da utilização do estudo de caso não possibilitar a generalização. No entanto, não é uma opinião unânime. Bell (2008, pp. 23, 24), baseada em Denscomb, defende a ideia que *“a possibilidade de generalizar um estudo de caso a outros exemplos depende da semelhança do exemplo em causa com outros do seu tipo”*. Ainda a este propósito, Ponte (2004) refere que, os estudos de caso não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias.

A respeito das vantagens do uso do estudo de caso, Bell (2008) refere que, a grande vantagem deste método consiste no facto de permitir ao investigador a possibilidade de se concentrar num caso específico ou situação e de identificar, ou tentar identificar, os diversos processos interativos em curso. Para Duarte (2008) a vantagem deste tipo de abordagem é a de exigir menos recursos e poder ser adotada por um investigador ou uma pequena equipa.

Os estudos de caso, segundo Ponte (2004), têm sido utilizados na Educação Matemática para investigar, entre outras situações, questões relacionadas com a aprendizagem dos alunos bem como com o conhecimento e as práticas profissionais de professores.

Considerando tudo o que foi aqui referido sobre o estudo de caso e tendo em conta o tema do nosso estudo e a sua natureza, podemos afirmar que a utilização desta abordagem se adequa à nossa investigação.

Em seguida caracterizamos os participantes na investigação assim como os instrumentos, técnicas e procedimentos utilizados para a recolha e tratamento de dados.

2.2. Caracterização dos participantes na investigação

2.2.1. A turma participante

Para a realização desta investigação, foi escolhida uma turma do 8.º ano de escolaridade, do 3.º CEB, à qual a professora - investigadora lecionava a disciplina de Matemática e que lhe foi atribuída pelo Diretor do Agrupamento na distribuição da componente letiva. O fato da professora ter trabalhado com a turma no ano letivo anterior, conhecer as fragilidades e as potencialidades de cada aluno, foram fatores determinantes para esta escolha. Apoiamo-nos pois em Bogdan e Biklen (1994) quando estes afirmam que a investigação em educação pode tirar partido da relação de proximidade existente entre o investigador e o objeto de estudo.

A turma é constituída por 26 alunos, 16 rapazes e 10 raparigas, com idades compreendidas entre os 12 e os 15 anos de idade do que resulta uma média etária de 13 anos.

Os alunos desta turma pertencem a famílias de nível socioeconómico médio/baixo, tendo 9 alunos subsídio escolar (2 escalão A, 7 escalão B). Algumas destas famílias estão a passar por momentos difíceis devido à atual conjuntura económica encontrando-se, neste momento, alguns pais em situação de desemprego. A maioria dos progenitores trabalha no setor secundário e tem poucas habilitações literárias sendo que a maioria apresenta um nível de escolaridade inferior ao 9.ºano.

Quanto às expectativas escolares dos alunos, dez pensam prosseguir estudos para o ensino superior, e um ainda não sabe o que pretende ser no futuro. De realçar que 5 alunos ainda sonham ser futebolistas. As razões que apontam para andar na escola são, em primeiro lugar, o gosto pelo estudo, adquirir mais conhecimentos, fazer amigos e ter um futuro melhor. A maior parte dos alunos diz estudar diariamente em casa e ter o apoio e ajuda dos pais ou dos irmãos mais velhos. As disciplinas preferidas são muito variadas e as disciplinas onde os alunos referem ter mais dificuldades são a Matemática e a Língua Portuguesa.

Em relação ao percurso escolar desta turma, vinte e um alunos transitaram sempre, três ficaram retidos uma vez no 2.ºano, um no 3.ºano e outro no 7.ºano. A

maioria dos alunos, no ano transato, obteve um aproveitamento satisfatório. No entanto, os alunos são irrequietos, bastante faladores e com alguma dificuldade de concentração, o que implicou que o comportamento fosse considerado instável. Frequentemente tinham de ser chamados à atenção e era necessário relembrar-lhes as regras de comportamento em sala de aula.

Os principais problemas identificados pelo Conselho de Turma ao nível das aprendizagens são a existência de:

- Alunos com diferentes ritmos de trabalho e de aprendizagem;
- Dificuldades na aquisição, compreensão e aplicação de conhecimentos a algumas disciplinas, por parte de alguns alunos;
- Dificuldades na compreensão e na expressão oral e escrita;
- Falta de hábitos e de métodos de estudo.

Oito alunos apresentaram três ou mais níveis inferiores a três no final do primeiro período, pelo que o Conselho de Turma delineou um plano de recuperação de acordo com as dificuldades detetadas em cada aluno. Assim, estes alunos foram alvo de um acompanhamento, tanto quanto possível, mais individualizado, um controlo dos seus materiais e uma mais sistemática monitorização dos trabalhos por si realizados.

A nível comportamental a turma, no geral, apresenta um comportamento irrequieto e instável. Os principais problemas detetados são:

- Dificuldade no cumprimento de regras dentro e fora da sala de aula;
- Dificuldade de atenção/concentração nas aulas e tendência para as conversas paralelas;
- Infantilidade que desencadeia algumas dificuldades de relacionamento e tendência a conflitos;
- Participação desordenada;
- Incumprimento de tarefas propostas para casa, por parte de alguns alunos.

Logo no início do ano letivo, o Conselho de Turma uniformizou os critérios de atuação a fim de minimizar e/ou ultrapassar as situações irregulares que pudessem

surgir a nível de aproveitamento e comportamento, com o propósito de responsabilizar quer os alunos quer os encarregados de educação. Nas aulas foi dada especial atenção ao cumprimento rigoroso das regras de funcionamento na sala de aula principalmente no que respeita à atenção, à participação organizada, à realização das tarefas e dos trabalhos de casa. Os docentes tiveram sempre presente a importância de incentivar os alunos, com reforço positivo, e de procurar aumentar a autoestima daqueles que necessitavam.

2.2.2. A professora - investigadora

Como Bogdan e Biklen (1994) afirmam nas investigações qualitativas, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Sentimos pois a necessidade de fazer uma breve caracterização da professora - investigadora.

Pertencemos ao quadro de professores de uma escola pública integrada num Agrupamento de Escolas do distrito do Porto onde exercemos funções. Temos 44 anos e iniciamos a nossa carreira profissional em 1995. Nos primeiros anos desta, lecionamos Matemática e Ciências da Natureza ao 2.º CEB com habilitações próprias. Em 2001 concluímos a licenciatura em Matemática- Ramo Educacional. A partir dessa data passamos a lecionar Matemática ao 3.º CEB e ao Ensino Secundário com habilitações profissionais para a docência ao grupo 500. Possuímos mais de quinze anos de serviço e pertencemos há sete anos ao Quadro do Agrupamento onde desenvolvemos este estudo.

Existem diversos tipos de aulas de Matemática, cada uma com a sua dinâmica própria. Gostamos de diversificar o tipo de tarefas que propomos aos alunos e o modo como elas são exploradas nas nossas aulas. Preferimos as aulas em que os alunos têm um papel mais ativo. Fomentamos o trabalho de pares, e por vezes de grupo, em que os alunos, através das tarefas propostas, colaboram e cooperam na descoberta e construção de conhecimentos. O trabalho desenvolvido pelos alunos é, geralmente, apresentado à turma e discutido de modo a que a professora ajude os alunos a sintetizar os conceitos que advêm do trabalho desenvolvido.

Gostamos no entanto, de reforçar as aprendizagens adquiridas através da resolução de exercícios de aplicação de conhecimentos. Reconhecemos que em determinados conteúdos necessitamos de usar um modelo de ensino mais tradicional em que, o professor transmite os conhecimentos e o aluno é um mero recetor. Procuramos, sempre que possível, recorrer, neste tipo de aulas, a meios audiovisuais e recursos multimédia, nomeadamente o computador, e rentabilizar os recursos disponibilizados através desta ferramenta de trabalho, tais como softwares dinâmicos e animações.

2.3. Instrumentos de recolha de dados e técnicas de tratamentos de informação

Numa metodologia de carácter qualitativo, Bogdan & Biklen, (1994) recomendam a utilização de mais do que uma técnica/instrumento de recolha de dados, para que seja possível a triangulação da informação recolhida, o que confere uma maior validade interna do estudo, reduzindo a subjetividade do observador.

Os instrumentos de recolha de dados e as técnicas de tratamento dos mesmos, utilizados nesta investigação foram: a observação direta com recurso a grelhas de observação e os diários de aula da professora – investigadora que foram submetidos a análise de conteúdo, a análise documental das produções feitas pelos alunos durante as atividades propostas e a análise das respostas dadas pelos alunos aos questionários de opinião aplicados aos mesmos.

2.3.1. Observação direta

No decorrer das aulas, durante as quais foram recolhidos dados com vista à investigação, uma das técnicas à qual professora - investigadora recorreu, foi à observação direta.

Segundo Quivy & Campenhoudt (1998) se considerarmos o contexto dos métodos de recolha de dados, observar significa extrair as primeiras impressões e ideias acerca dos factos observados, no próprio momento em que decorrem ou seja,

permite captar os comportamentos no momento em que se produzem. É pois um método naturalista e direto de recolha de dados.

Por sua vez, Pardal e Correia (1995) destacam duas modalidades de observação que têm mais uso neste tipo de estudos: uma observação que tem como base o grau de estruturação com que se apresenta: observação estruturada, observação semiestruturada e a observação não estruturada; e outra que é função do tipo de participação, do observador, na realidade estudada: observação participante e observação não participante.

Para clarificar a distinção entre os três tipos de estruturação da observação, Cohen *et. al.* (2000) baseiam-se na existência ou não de categorias de observação definidas à partida pelo investigador. Afirmam que na observação estruturada, o investigador sabe previamente o que vai observar e para tal organizou as categorias de observação de acordo com os seus objetivos. Na observação semiestruturada, o observador tem algumas categorias de observação definidas mas está aberto a novas categorias, categorias emergentes. Na observação não estruturada, o observador não sabe o que procura de forma orientada e simplesmente observa para decidir o que pode ser significativo para a sua pesquisa.

Já em relação à distinção entre observação participante e observação não participante, Estrela (1990) refere que : *“Fala-se de observação participante quando, de algum modo, o observador participa na vida do grupo por ele estudado.”* (p. 32). Consequentemente, a observação não participante consiste naquela em que o investigador atua só como espetador não participando na vida coletiva do grupo que está a ser estudado. Ainda sobre a observação participante, Damas & De Ketele (1985) dividem-na em dois tipos: observação participante passiva, em que o observador entra na investigação, faz parte do grupo, observa, mas não altera nada; e observação participante ativa, em que o observador desempenha funções efetivamente suscetíveis de modificar determinados aspetos da vida do grupo em que está inserido e está a observar.

A observação usada na nossa investigação foi estruturada e participante. A professora - investigadora utilizou grelhas de observação (Anexo 1) para registos dos comportamentos observados.

A validade desta técnica, segundo Quivy e Campenhoudt (1998), depende da precisão e do rigor das observações, daí a necessidade de construir à priori as grelhas de observação. Atendendo ao contexto da investigação construiu-se uma grelha de observação (Anexo 1) que permitiu recolher informação sobre a atitude que cada grupo de alunos perante o problema, nomeadamente o interesse e o empenho demonstrado na sua resolução, as dificuldades sentidas pelos alunos que a professora conseguia identificar através das questões colocadas ou pelos comentários tecidos pelos alunos, o número de solicitações feito por cada grupo junto da professora, o tipo de questões colocadas à professora durante essas solicitações, a existência ou não de interação e colaboração entre os diferentes elementos do grupo e ainda as estratégias utilizadas na resolução do problema durante a aula. Cada grelha, contém, um campo destinado ao registo de qualquer observação considerada pertinente pela professora - investigadora.

2.3.2. Diários de aula

Segundo Silva, Leite e Fernandes (2009) apoiados em Cochran-Smith e de Lytle (1993), os diários de aula são *“relatos da vida da classe onde os professores registam as suas observações, analisam as suas experiências e reflectem e/ou interpretam as suas práticas ao longo do tempo. Os diários misturam descrições, registos, comentários e análises.”* (p.3).

Também Schön (1995) destaca a utilização dos diários de aula como dispositivos de reflexão sobre a prática docente. Sendo assim, os diários de aula podem ser em simultâneo dispositivos de formação e instrumentos de investigação, pois contêm narrativas potenciadoras de reflexão sobre a prática docente e, por isso, indutoras de novas leituras sobre essas mesmas práticas. O diário de aula constitui-se como uma estratégia de investigação e de ação, sendo extremamente valorizado na formação de professores pois associa à escrita a atividade reflexiva e possibilita ao professor uma observação mais profunda da sua prática, o que contribui para a melhoria da mesma.

De acordo com Zabalza (1994), o diário de aula consiste num conjunto de narrações que refletem as perspetivas do professor, nas dimensões objetiva e subjetiva, sobre os processos mais significativos da sua ação. A leitura e análise

reflexiva do conteúdo do diário a posteriori, isto é, o ato de escrever e a leitura posterior, possibilita ao professor construir uma visão mais objetiva e completa da realidade que constitui a sua ação. A possibilidade de estabelecer conexões significativas entre o conhecimento teórico e o conhecimento prático, habilitando o professor a tomar decisões mais fundamentadas. Para viabilizar esta possibilidade, é necessário que o professor elabore descrições dos acontecimentos que ultrapassem o nível do simples relato e contemplem a análise das causas que o motivaram e das suas consequências refletindo assim sobre a sua ação.

Como instrumento de recolha de dados em investigações, Zabalza (1994) atribui aos diários de aula a vantagem do imediatismo, da penetração experiencial no facto narrado por quem o narra. No quadro desta ideia, Vázquez e Angulo, (2003) afirmam que o diário é a expressão diacrónica do percurso de investigação. Exibe, por um lado, dados formais e precisos da realidade concreta e, por outro, preocupações, decisões, fracassos, sensações, a valorização das pessoas investigadas e dos processos desenvolvidos, captando a investigação em situação.

No nosso estudo recorreremos à construção de diários de aula após a implementação em sala de aula do modelo de ensino e de Aprendizagem através da ABRP (Anexo 2). A escrita de cada diário, permitiu à professora refletir sobre os acontecimentos decorridos ao longo das aulas, apreciar a evolução do trabalho realizado pelos alunos ao mesmo tempo e refletir sobre as causas e consequências de determinadas opções tomadas ao longo das aulas tanto pelos alunos como pela professora. Tornou-se também num espaço onde a professora pode os sentimentos e constrangimentos vividos ao longo das aulas.

2.3.3. Questionários

Quivy e Campenhoudt (1998) definem questionário como um instrumento de recolha de dados, baseado numa sequência de questões escritas, que são dirigidas a um conjunto de indivíduos, envolvendo as suas opiniões, representações, crenças e informações factuais, sobre eles próprios e o seu meio.

Para Anderson & Arsenaul (1999), os questionários tornaram-se num dos mais usados e abusados instrumentos de recolha de informação. Se bem construído,

permite a recolha de dados fiáveis e razoavelmente válidos de forma simples, barata e atempadamente.

As perguntas que constituem um questionário, segundo Bell (2008), podem ser abertas ou fechadas. As questões abertas permitem plena liberdade de resposta ao inquirido enquanto as perguntas fechadas limitam o informante à opção por uma de entre as respostas apresentadas.

Podemos distinguir vários tipos de questões fechadas:

- Questões de resposta única em que o inquirido escolhe apenas uma modalidade de resposta;
- Questões de resposta múltipla em que o inquirido escolhe de várias modalidades de respostas em número limitado ou não;
- Questões de classificação em que o inquirido ordena as várias modalidades de respostas por ordem de importância;
- Questões em escala que permitem atenuar as respostas quando estamos na presença de questões do tipo concordo/não concordo.

De acordo com Ghiglione e Matalon (1997) todas as questões devem ser claras e nunca devem sugerir nenhuma resposta particular nem devem exprimir expectativas.

Na perspetiva de Vilhena (1999) dar a palavra aos indivíduos, neste caso aos alunos, possibilita a refutação do que pretendemos investigar, a determinação de convergências e/ou divergências, e por vezes a expressão de caminhos invisíveis ao nosso olhar.

Na nossa investigação, os alunos responderam a dois questionários: um no início da investigação, para compreendermos a relação deles com a matemática e com a resolução de problemas (Anexo 3) e outro, no final da investigação para obter a opinião dos alunos envolvidos sobre os efeitos da implementação desta investigação (Anexo 4).

Quando se elabora um questionário, Cohen, Manion e Marrison (2000) referem que deve-se começar por definir quais os objetivos que se pretendem alcançar e adequar o instrumento aos inquiridos, no nosso caso aos alunos. Procuramos formular questões que fossem claras para os alunos, diretas, sem ambiguidade e em número adequado. Procurámos que os questionários não tivessem um n.º excessivo de

questões para evitar a saturação do respondente, mas que permitisse a recolha de dados suficientes. Na elaboração do primeiro questionário (Anexo 3) utilizamos perguntas abertas e perguntas fechadas. Na primeira parte do questionário, pretendíamos obter informações que permitissem caracterizar os participantes na investigação. Incluímos assim questões de carácter pessoal e escolar. Na segunda parte quisemos saber a opinião sobre a disciplina de Matemática, as aulas da disciplina, as tarefas propostas nas mesmas aulas e pretendíamos ainda identificar a etapa em que os alunos sentem mais dificuldade durante a resolução de problemas. Para tal propusemos um conjunto de questões fechadas. A utilização deste tipo de questões fechadas em que os alunos seleccionam uma hipótese de resposta, permite aos alunos uma maior rapidez de preenchimento do questionário e facilita o tratamento dos dados recolhidos. Contudo, as categorias de resposta criadas pode não se revelarem tão exaustivas como o desejado como afirmam Cohen, Manion e Marrison (2000). Para terminar, colocamos neste questionário, duas questões abertas com intuito de conhecer a conceção que os alunos tinham de problema e de problema matemático.

O questionário proposto aos alunos no final do estudo (Anexo 4) é composto por nove questões, todas elas de carácter aberto, dando a possibilidade dos alunos expressarem a sua opinião sobre as aulas e os problemas resolvidos ao longo do estudo. Como afirmam Ghiglione e Matalon (1997), as perguntas abertas possibilitam que o participante responda de um modo mais genuíno e completo utilizando o seu próprio vocabulário, fornecendo pormenores e fazendo os comentários que considera certos. Pretendemos obter com este questionário, dados sobre o grau de dificuldade dos problemas propostos, as dificuldades sentidas durante a sua resolução e a opinião acerca das aulas em que os alunos têm de resolver. Pretendemos desta forma completar uma ou outra informação recolhida através de outros instrumentos.

Os questionários foram aplicados individualmente e foi respeitado o anonimato.

2.3.4. Análise documental

Os documentos escritos podem ser usados para complementar a informação obtida por outras técnicas ou como documentação do estudo e sua preparação.

A análise documental, de acordo com Quivy & Campenhoudt (1998), pode ser usada segundo uma perspectiva empírica e retrospectiva, como forma de angariar informação do que relevante se publicou sobre um determinado tema ou contornos de um problema que serve de base à investigação, indicando as suas possíveis evoluções, num tempo e espaço delimitados.

Já para Bell (2008), a análise documental na maioria das investigações educacionais, pode ser usada segundo duas perspectivas: servir para complementar a informação obtida por outros métodos, esperando encontrar-se nos documentos informações úteis para o objeto em estudo, ou ser o método de pesquisa central, ou mesmo exclusivo, de um projeto e, neste caso, os documentos são o alvo de estudo por si próprios.

Na nossa investigação foram analisados os registos dos alunos onde constam as resoluções realizadas por eles ao longo da investigação e ainda as respostas dos alunos ao questionário após a realização da investigação. Efetuamos a análise das produções dos alunos apoiados em grelhas de análise (Anexo 5). Consideramos, para construir essas grelhas de análise, o modelo de Polya (2003) para a resolução de problemas e dividimos essa análise em três partes: compreensão do problema, estratégia escolhida e obtenção de uma solução. Para a etapa da compreensão do problema, verificamos se os alunos compreenderam completamente o problema ou apenas parte desse problemas ou então não o conseguiram compreender. Em relação à estratégia, verificamos se não aplicaram qualquer estratégia, se a estratégia é desadequada, se é parcialmente adequada ou se definem uma estratégia que quando desenvolvida conduz à solução do problema. Verificamos ainda se foi obtida uma solução ou não, se a solução é a correta, se está errada devido a erros de cálculos ou se é apenas uma resposta parcial ao problema.

De acordo Bardin (1977) a análise documental é uma operação ou um conjunto de operações que visam representar o conteúdo de um documento sob a forma diferente do original, a fim de facilitar num estado ulterior, a sua consulta e referência. De acordo com a mesma autora, a análise e representação de forma condensada das informações provenientes dos documentos, permite-nos obter o máximo de informações pertinentes sobre a temática em estudo.

2.3.5. Análise de conteúdo

Para o tratamento dos dados recolhidos através das grelhas de observação e os diários da professora - investigadora optamos pela análise de conteúdo.

Para Moraes (1999), a análise de conteúdo é uma metodologia usada para descrever e interpretar o conteúdo de todos os dados recolhidos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum. A indução e a intuição são estratégias usadas na análise de conteúdo para atingir níveis de compreensão mais aprofundados dos fenómenos que o investigador se propõe a investigar.

A análise de conteúdo pode ser definida como,

um conjunto de técnicas de análise de comunicações. Não se trata de um instrumento, mas de um leque de apetrechos, ou com maior rigor, será um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto. (Bardin, 1977, p. 31)

Segundo Quivy & Campenhoudt (1998), a análise de conteúdo oferece a possibilidade de tratar de forma metódica e sistemática as informações e discursos que contêm um alto grau de complexidade e profundidade, extraíndo-lhes a essência e tendo como vantagem a possibilidade de trazer a descoberto o implícito.

Para Bardin (1977), a análise de conteúdo processa-se segundo três fases distintas. Numa primeira fase, é realizada a pré-análise que supõe a leitura flutuante, a escolha de documentos, a preparação do material, a referenciação de índices e a criação de indicadores, por sua vez, numa segunda fase, procede-se à exploração do material selecionado anteriormente, e por fim, na terceira e última fase, é elaborado o tratamento dos resultados e a sua interpretação.

Do ponto de vista de Bogdan & Biklen (1994), a análise pressupõe um processo de redução de dados – parte-se de um conjunto amplo e complexo de dados para chegar a elementos manipuláveis que permitam estabelecer relações e obter conclusões – sendo a categorização e a codificação os processos mais representativos.

Sendo assim, segundo estes autores uma das primeiras tarefas deste processo é separação dos dados em unidades relevantes e significativas de acordo com um

determinado critério. A identificação e classificação dessas unidades consistem na procura, por parte do investigador, de determinadas componentes temáticas que permitam ao investigador classifica-las numa determinada categoria de conteúdo. Esta fase designa-se por categorização.

Para Vala (1986) uma categoria é habitualmente composta por um termo chave que indica a significação central do conceito que se quer apreender a par de outros indicadores que descrevem o campo semântico desse conceito. O mesmo autor refere que a inclusão por exemplo de um segmento de texto numa categoria pressupõe a deteção dos indicadores relativos a essa categoria.

Já para Flores (1994), as categorias podem referir-se a situações e contextos, atividades e acontecimento, relações entre pessoa, comportamentos, opiniões, perspetivas sobre um problema, métodos e estratégias e processos.

Segundo Bardin (1977) as categorias, ditas boas, devem possuir determinadas qualidades, tais como: a homogeneidade que apela a um só princípio de classificação; a pertinência do que se vai analisar; a objetividade e fidelidade que se definem como possibilidade de aplicar a mesma grelha categorial quando se submetem a várias análises as diferentes partes de um mesmo material e a produtividade quando um conjunto de categorias fornece resultados férteis.

Por sua vez, Lincoln & Guba (citados por Vale, 2004) recomendam que a construção das categorias deve possuir as seguintes características: (1) devem refletir o propósito da investigação; (2) devem ser exaustivas, isto é, todos os itens dos documentos devem ser contemplados nas categorias; (3) devem ser mutuamente exclusivas, isto é, uma unidade não deve ser colocada em mais do que uma categoria; (4) devem ser independentes, de modo que a distribuição de qualquer um dos dados pelas categorias não afete a classificação de outros dados; e (5) todas as categorias devem resultar de um princípio simples de classificação.

Após a categorização segue-se a codificação que consiste na atribuição a cada unidade estabelecida de um código próprio da categoria em que o investigador a considera incluída. Estes códigos podem ser números ou abreviaturas dos respetivos nomes das categorias.

Por último surge uma outra etapa no processo de análise de conteúdo - a interpretação inferencial, apoiada nos materiais de informação. Surge o momento de

estabelecimento de relações e da reflexão para que o investigador elabore sínteses e conclusões.

A identificação de categorias e dimensões de análise, a seleção das unidades de sentido a codificar, escolhendo segmentos de texto e indicando as ideias-chave de cada categoria foi para nós o passo de mais difícil execução e que exigiu – nos mais tempo.

Uma vez que os documentos de recolha de dados submetidos à análise de conteúdo incidiam sobre o trabalho desenvolvido pelos alunos e do trabalho da professora-investigadora, decidimos logo à partida analisar estas duas vertentes em separado. Procuramos as características comuns entre os vários elementos e à medida que surgiam, definimos as categorias e as dimensões de análise. Para sintetizar a informação obtida construimos as grelhas de registo da análise de conteúdo dos registos contidos nas grelhas de observação (Anexo 6.1.) e nos diários de aula da professora-investigadora (Anexo 6.2.).

Em síntese, neste capítulo definimos as opções metodológicas e descrevemos os procedimentos usados para recolher e tratar os dados obtidos ao longo da investigação. Optamos por uma metodologia qualitativa com abordagem de estudo de caso. Utilizamos como instrumentos e técnicas de recolha de dados a observação direta com recurso a registos em grelhas de observação, diários de aula da professora – investigadora, questionários de opinião e análise documental das produções dos alunos. Para o tratamento dos dados recolhidos através das grelhas de observação e dos diários de aula, recorreremos à análise de conteúdo.

No capítulo que se segue, iremos descrever todo o processo de seleção e implementação em sala de aula, de materiais preparados para a Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas, com vista a recolhermos dados para o nosso estudo.

Capítulo 3 – Da seleção dos materiais para a ABRP à sua implementação

Introdução

Neste capítulo descrevemos todo o processo desde a seleção dos materiais didáticos preparados para a Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) à sua implementação. Começamos por justificar, de entre os quatro temas da Matemática que constam no programa da disciplina, a escolha do tema de Geometria para a realização desta investigação. Descrevemos ainda os procedimentos tidos aquando da implementação das tarefas em sala de aula que são apresentadas pela ordem com que foram realizadas e enunciamos os procedimentos de recolha de dados efetuados.

3.1. A escolha do tema Geometria

É sabido que a Geometria, considerada por alguns como sendo a Matemática do Espaço, está profundamente ligada à vida do Homem, ajudando-o a resolver diversos problemas que enfrenta no seu quotidiano. A Geometria é pois uma das áreas mais antigas da Matemática. Já na arte pré-histórica se encontram representações geométricas. Ao longo da história, vários são os documentos, que relatam trabalhos feitos por diferentes povos e matemáticos, no sentido de se estabelecerem relações geométricas com recurso a experimentação e ao raciocínio indutivo com o intuito de se resolverem problemas de índole prática. Muitos progressos importantes foram feitos na matemática graças aos contributos que a geometria foi fornecendo ao longo do tempo. Apoiamo-nos na perspetiva de Fonseca que considera *“as ideias geométricas são uteis na representação e na resolução de problemas de outras áreas da matemática e de situações reais”* (2004, p. 251).

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que ao longo do tempo, quer pela forma como é abordada quer pela importância que lhe é atribuída, verifica-se que tem havido flutuações no tratamento da Geometria no currículo da Matemática.

No programa de Matemática homologado em 2007, o tema Geometria surge reestruturado ao longo dos três ciclos do ensino básico. Valoriza-se o sentido espacial com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, e reforça-se a compreensão das transformações geométricas, utilizando estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos. Vários autores afirmam que este tema é uma fonte de problemas não rotineiros, que podem propiciar, para além do desenvolvimento de capacidades de visualização espacial, capacidades de raciocínio e de argumentação.

Na aprendizagem da geometria, a capacidade espacial (ou sentido espacial) é essencial, especialmente em tarefas como visualizar objetos, comparar figuras com diferentes orientações ou seguir direções e é um dos assuntos em que os alunos apresentam mais dificuldades. A capacidade espacial, que é mais um conjunto de capacidades, respeita à forma como os alunos, ou as pessoas em geral, percebem o mundo que os rodeia e a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos (Matos e Serrazina, 1996). Este sentido espacial envolve diversas subcapacidades, que Ponte e Serrazina (2000) sistematizam e definem desta forma:

- **Coordenação visual motora** – capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo;
- **Memória visual** – capacidade de recordar objetos que já não estão à vista;
- **Perceção figura-fundo** – capacidade de identificar uma componente específica numa determinada situação e que envolve a mudança de perceção de figuras contra fundos complexos;
- **Constância percetual** – capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas;
- **Perceção da posição no espaço** – capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes;
- **Perceção de relações espaciais** – capacidade de ver e imaginar dois ou mais objetos em relação consigo próprios ou em relação connosco;
- **Discriminação visual** – capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objetos (p. 168).

Breda *et al.* (2011) apontam que a geometria propicia um contexto favorável para que os alunos se envolvam em atividade matemática e desenvolvam a comunicação matemática. A geometria contribui com um vocabulário geométrico que se vai adquirindo, mas, a par disso, espera-se que os alunos desenvolvam a sua capacidade de compreensão dos conceitos e suas relações, da análise da informação, de resolução de problemas, de comunicação, mas também de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações.

Os mesmos autores consideram que a geometria é, por excelência, o tema matemático que permite que os alunos aprendam a ver a estrutura e simetria presentes no mundo à sua volta, nomeadamente nos monumentos históricos ou na própria natureza, e também em outros temas da própria Matemática, aprendendo dessa forma a apreciar o seu valor estético. O sentido espacial é fundamental para elaborar e usar representações de modo a registar ideias matemáticas. A capacidade de raciocínio desenvolvida pelos alunos permite-lhes investigar problemas geométricos de crescente complexidade e, ao mesmo tempo, desenvolver clareza na descrição das propriedades das figuras geométricas a par do desenvolvimento da comunicação matemática.

3.2. Seleção dos materiais para abordagem em sala de aula

A escolha dos materiais a utilizar nesta investigação não foi uma tarefa fácil. Foi necessário estabelecer alguns critérios para a realizar. De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM),

O papel do professor na selecção dos problemas e das tarefas matemáticas relevantes é fundamental. Ao analisar e adaptar um determinado problema, ao antecipar as ideias matemáticas que dele podem emergir e as próprias questões dos alunos, os professores podem decidir se determinados problemas poderão ou não ajudar a sua turma a atingir os objectivos propostos. (NCTM, 2008,p.58)

A este propósito, Ponte (2006) afirma que o professor ao seleccionar ou criar uma tarefa deve, para além de definir claramente os objetivos a atingir, ter em atenção o nível etário e o desenvolvimento matemático dos seus alunos.

Assim, começamos por analisar o programa e identificar no tema da Geometria quais os tópicos ou subtópicos que poderiam abordados com tarefas orientadas para a ABRP. Escolhemos os tópicos: Semelhança, Teorema de Pitágoras e Sólidos Geométricos.

Para efetuar os problemas, consultamos os manuais e os diferentes materiais de apoio, da disciplina de Matemática, para o terceiro ciclo do ensino básico e, as brochuras disponibilizadas pelo Ministério da Educação e que, serviram de apoio aos professores na fase de implementação do Programa de Matemática homologado em 2007.

Reconhecemos que o conceito de problema é relativo e depende do aluno a que se destina. Na escolha dos problemas, para além de termos sempre presente os objetivos que se procuravam atingir, tivemos a preocupação que estes fossem desafiantes de forma a despertar o interesse e a vontade de os resolver e não o desânimo e a vontade de desistir. Procuramos ainda problemas em que os processos e as estratégias utilizadas conduzissem a uma discussão enriquecedora. Para além de desafios, os problemas propostos não podiam indicar nem o caminho nem o procedimento a utilizar na sua resolução exigindo por parte dos alunos a busca de diversos conhecimentos, procedimentos e estratégias para encontrarem a solução com sucesso. Procuramos ainda situações problemáticas contextualizadas e relacionadas com a vida real. Procedemos a algumas adaptações para as aproximar mais da realidade e dos conhecimentos dos alunos.

Para a abordagem do primeiro tópico Semelhança e tendo em conta os objetivos que pretendíamos alcançar, escolhemos os problemas a propor aos alunos, que serviram de base para a aprendizagem do conceito de polígonos semelhantes - Problema I, e de razão de semelhança – Problema II- Medir alturas (Anexos 7.1 e 7.2).

Com a resolução do Problema I pretendíamos, que os alunos, compreendessem a noção de semelhança de figuras e de ampliação/redução de uma figura e que, em Matemática, dizer que duas figuras são semelhantes não é a mesma coisa que dizer que elas são parecidas isto porque duas figuras poderão ser parecidas mas não ser matematicamente semelhantes. Para tal foi apresentada uma sequência de figuras construídas num geoplano. Na primeira figura estava representado um quadrado. Na segunda estavam representados dois quadrados: o inicial e um outro quadrado que se

obtinha construído no interior do primeiro e em que os seus vértices eram os pontos médios dos lados do primeiro quadrado. As figuras seguintes representavam o que se obtinha quando se acrescentava um quadrado no interior do último, seguindo a mesma lógica. Os alunos para além de observarem a sequência das figuras tinham que prestar atenção a um pequeno diálogo no qual eram desafiados a descobrirem a relação ou relações entre os polígonos obtidos de modo a perceberem o que fazem com que eles não sejam iguais mas sim “parecidos”. Os alunos deveriam concluir que os quadrados eram semelhantes porque a forma mantinha-se, uma vez que, os ângulos eram geometricamente iguais e o comprimento dos lados diretamente proporcional.

Para resolverem este problema, os alunos necessitavam de utilizar noções adquiridas em anos anteriores e relacioná-las com esta situação problemática, nomeadamente a noção de quadrado, área e perímetro de um quadrado, razão e grandezas diretamente proporcionais.

Com a resolução do Problema II – Medir alturas pretendíamos que os alunos utilizassem os conceitos de proporcionalidade direta adquiridos em anos anteriores e encontrassem estratégias para determinar medidas reais, de difícil acesso – a altura da fachada da escola. Foi-lhes fornecida uma fotografia da fachada da Escola e a garantia que as janelas da Escola têm todas as mesmas dimensões. Os alunos deveriam desencadear um plano para responderem ao que lhes é solicitado, usando, por exemplo as dimensões reais das janelas da sala de aula e relacioná-las com as dimensões das mesmas janelas na fotografia. A altura real da fachada da Escola é de 6,9 metros.

Para o tópico Teorema de Pitágoras foram escolhidos dois problemas – Problema III e o Problema IV (Anexos 7.3 e 7.4).

A escolha do Problema III enquadrou-se no subtópico da composição e decomposição de polígonos. É um problema que se resolve usando a decomposição de polígonos em quadriláteros e triângulos e ajuda a rever a classificação dos quadriláteros e as fórmulas de cálculo das áreas de alguns quadriláteros e do triângulo. Serve ainda de ponto de partida para determinar a fórmula de cálculo da área de um trapézio. Pretende-se que os alunos determinassem a área de dois terrenos através da decomposição do polígono em quadriláteros e triângulos e escolhessem qual o terreno

que obedecia à condição de ter a área máxima de 500 m^2 . A determinação desta área podia ser feita de diversas formas pois dependia da decomposição efetuada. Os alunos tinham que escolher o terreno B que tinha a área de 500 m^2 enquanto a área do terreno A é de 525 m^2 .

A escolha do Problema IV teve como objetivo aplicar o Teorema de Pitágoras no espaço. Surge depois de os alunos já terem aplicado em diversas situações o Teorema de Pitágoras no plano e estarem familiarizados com o mesmo. Os alunos foram confrontados com uma situação em que para além de identificarem as diferentes diagonais de um paralelepípedo retângulo, verificaram que para determinarem o comprimento de qualquer diagonal facial basta aplicarem o Teorema de Pitágoras e encontram um processo para determinar o comprimento da diagonal espacial desse mesmo paralelepípedo retângulo.

Para resolverem o Problema IV, os alunos tiveram que verificar se um tubo cabia dentro do contentor de um camião. O contentor do camião assemelha-se a um paralelepípedo retângulo e ao resolverem este problema, os alunos aprendiam a distinguir diagonais faciais de diagonais espaciais de um paralelepípedo retângulo. Descobriam ainda a relação entre o comprimento da diagonal espacial e as dimensões do paralelepípedo retângulo e aprendiam a determinar o comprimento das diagonais tanto faciais como espaciais, através da aplicação do Teorema de Pitágoras. Pretendíamos que os alunos para resolver o problema, comesçassem por verificar que o tubo era maior do que as dimensões do contentor do camião e do que o comprimento das diagonais faciais do mesmo. Em seguida os alunos deveriam chegar à conclusão que o tubo só podia ir “enviesado ” no interior do contentor do camião, correspondendo essa posição à diagonal espacial. Para determinarem o comprimento da diagonal espacial, os alunos teriam que visualizar um triângulo retângulo no interior do contentor do camião e aplicar o Teorema de Pitágoras como se pretendessem determinar o comprimento da hipotenusa desse triângulo. Por fim, os alunos deveriam verificar que o tubo era menor que o comprimento da diagonal espacial do contentor do camião, logo cabia.

Para o tópico Sólidos Geométricos, escolhemos o Problema V – Enrolando folhas (Anexo 7.5). Pretendíamos que, os alunos fossem capazes de identificar, qual das embalagens deveriam escolher para obterem o maior volume. Era um problema que

se resume à determinação do volume de dois cilindros e à comparação do mesmo. A argumentação seria um dos aspetos determinantes para o desempenho de cada grupo. Este problema foi enriquecido com o desafio da demonstração proposta na alínea II generalizando as dimensões de valores concretos para variáveis a e b . A demonstração é uma das capacidades que o Programa da Matemática homologado em 2007, pretende que seja desenvolvida de uma forma evolutiva ao longo do ensino básico. No início, os alunos começam a justificar as suas conclusões com base em exemplos particulares, evoluindo para justificações cada vez mais gerais. A demonstração surge quando estas justificações gerais encerram um raciocínio dedutivo.

Esta tarefa estava então dividida em três partes. Na primeira parte, os alunos tiveram que determinar com a ajuda de uma régua as dimensões que considerassem necessários, determinar o volume do cilindro que obtinham enrolando a folha segundo cada uma das dimensões da folha e comparar para determinar aquela que tinha maior volume. O volume, arredondado às unidades, de uma das embalagens do problema proposto é de 1474 cm^3 e da outra de 1042 cm^3 , sendo portanto a segunda embalagem a que tem menor volume. Na segunda parte, os alunos tinham que demonstrar qual o cilindro obtido com maior volume usando uma folha de dimensões a e b em que a é a dimensão maior. Ao efetuar a demonstração, os alunos chegavam à conclusão que a embalagem com maior volume é aquela que considera a dimensão b , dimensão menor, como altura. Na terceira parte, os alunos eram convidados a fazerem uma estimativa do número de bombons iguais ao de uma figura cabiam na embalagem escolhida. Os alunos tinham que medir o diâmetro do bombom fornecido com uma forma aproximadamente esférica e determinar o volume do bombom. O volume do bombom era cerca de $1,8 \text{ cm}^3$, logo a embalagem escolhida leva cerca de 578 bombons.

Procuramos que todos os problemas utilizados nesta investigação tivessem características diferentes, fossem variados, com novas solicitações e que os alunos pudessem utilizar formas de representação diversas aquando a resolução de cada um deles.

3.3. Operacionalização

Esta investigação decorreu ao longo do ano letivo 2011/2012, de acordo com a planificação da disciplina de Matemática para o 8.ºano de escolaridade, elaborada pelo grupo disciplinar da Escola, a que pertencia a turma participante neste estudo. Uma vez que o tema matemático escolhido foi a Geometria, esta investigação ocorreu em duas fases: uma no primeiro período aquando da leção do tópico Semelhança e outra, no terceiro período aquando a abordagem dos tópicos Teorema de Pitágoras e Sólidos Geométricos.

No mês de Outubro, selecionamos, os recursos didáticos, que utilizamos nas aulas, para a leção do tópico Semelhança (Anexos 7.1 e 7.2) e planificamos as respetivas aulas (Anexo 8).

Antes da implementação da ABRP em sala de aula, aplicamos o questionário à turma com o intuito de compreender a relação dos alunos com a matemática e com a resolução de problemas (Anexo 3).

Para a implementação da ABRP, na sala de aula, optamos pela formação de grupos de trabalho de 3 ou 4 alunos, heterogéneos quanto ao sexo e quanto ao aproveitamento. Os grupos formados permaneceram os mesmos ao longo de toda a investigação.

O trabalho de grupo é uma metodologia que pode ser utilizada como alternativa às formas tradicionais de ensino. Na opinião de alguns autores o trabalho de grupo deve ser coordenado com o trabalho individual e com o trabalho em toda a turma, pois o professor ao diversificar estratégias de ensino, vai conseguir responder melhor às necessidades de aprendizagem de cada aluno. Para além disso, o trabalho de grupo permite não só a aprendizagem de conceitos matemáticos através da troca e partilha de conhecimentos entre os alunos, como o desenvolvimento de atitudes, de partilha e de relações sociais e emotivas através da promoção de valores e capacidades transversais tais como a colaboração, a comunicação, a responsabilidade, o espírito de tolerância e cooperação. Para Ferreira e Santos,

O trabalho de grupo pode criar um ambiente ..., mais descontraído, tornando-se mais fácil suportar em conjunto do que individualmente as exigências escolares. Também em grupo a responsabilidade individual pelo resultado das tarefas é mais repartido, o que em si faz diminuir o medo de fracasso. (2000, p.78-79).

Os alunos, em grupo, discutiram e definiram as estratégias de resolução dos problemas de modo a determinarem a solução. Posteriormente, o porta-voz de cada grupo apresentava o raciocínio desenvolvido, para encontrar a solução do problema, enquanto a professora - investigadora, oportunamente, promovia a discussão/debate de ideias pelo grupo turma. No final, a professora, mediante as aprendizagens desenvolvidas e pretendidas com a resolução do problema, sintetizou e esclareceu os conceitos envolvidos.

Durante o trabalho de grupo e o debate de ideias, a professora - investigadora registava as suas observações na grelha criada para o efeito- Grelha de Registo de Observação da Aula (Anexo 1). Nessa grelha, e para cada grupo, eram registadas: a atitude perante o problema, as dificuldades sentidas, o número de solicitações feitas à professora, o tipo de questões colocadas à professora durante a resolução do problema, a interação e colaboração entre colegas de grupo e as estratégias de resolução do problema. No final de cada aula, a docente refletia sobre a implementação do problema na sala de aula através da elaboração do diário de aula (Anexo 2). O trabalho desenvolvido por cada grupo foi analisado através de uma grelha dividida em três parâmetros: compreensão do problema, estratégia escolhida e obtenção de uma solução (Anexo 5). Na compreensão do problema, pretendemos avaliar se o grupo compreendeu ou não o problema. Poder-se-á verificar que o grupo não tenha compreendido ou considerado parte do problema. Em relação à estratégia escolhida, avaliamos se o grupo aplicou ou não uma estratégia de resolução adequada que conduz à solução correta quando desenvolvida. O grupo poderá ainda ter escolhido uma estratégia parcialmente adequada. Por fim, o grupo é avaliado quanto à obtenção de solução. Poderá não ter encontrado a solução ou apresentar uma solução errada. Esta solução errada poderá ser devido a erros de linguagem ou ser apenas uma parte da solução ou então o grupo encontra e apresenta a solução correta. Esta grelha foi criada baseada no modelo de resolução de Polya (2003).

A primeira fase teve início no final do mês outubro de 2011 com a proposta do Problema I (Anexo 7.1). Ainda na primeira fase de recolha de dados e dentro do Tópico semelhança, propusemos o Problema II- Medir alturas (Anexo 7.2).

A segunda fase de recolha de dados ocorreu no terceiro período, no final do mês

de maio de 2012. No intervalo de tempo entre as duas fases, fizemos uma breve reflexão através da análise dos dados recolhidos nas grelhas de observação e de análise da resolução de problemas, do conteúdo dos diários de aula e das produções dos alunos. Investimos o resultado dessas reflexões na escolha e elaboração das tarefas a implementar para os tópicos: Teorema de Pitágoras e Sólidos Geométricos. Verificamos que na primeira fase de recolha de dados, os alunos demonstraram um entusiasmo muito maior na resolução do Problema II, por este estar contextualizado no meio a que pertence. Pierce & Stacey (2009) referem que os problemas contextualizados podem contribuir para que os alunos desenvolvam o seu sentido crítico e adquiram um retrato mais abrangente da Matemática, compreendendo a sua utilidade e aplicações. Sendo assim, através da resolução de problemas os alunos adquirem “*modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática*” (NCTM, 2008, p. 57), como é o caso da vida quotidiana e do trabalho. Na escolha dos problemas para esta segunda fase, tivemos esta preocupação acrescida.

A implementação em sala de aula desta segunda fase, seguiu a mesma metodologia de trabalho que a primeira fase. A Figura 2 apresenta de uma forma esquemática cada momento da implementação dos materiais selecionados para a ABRP em sala de aula pela professora - investigadora.

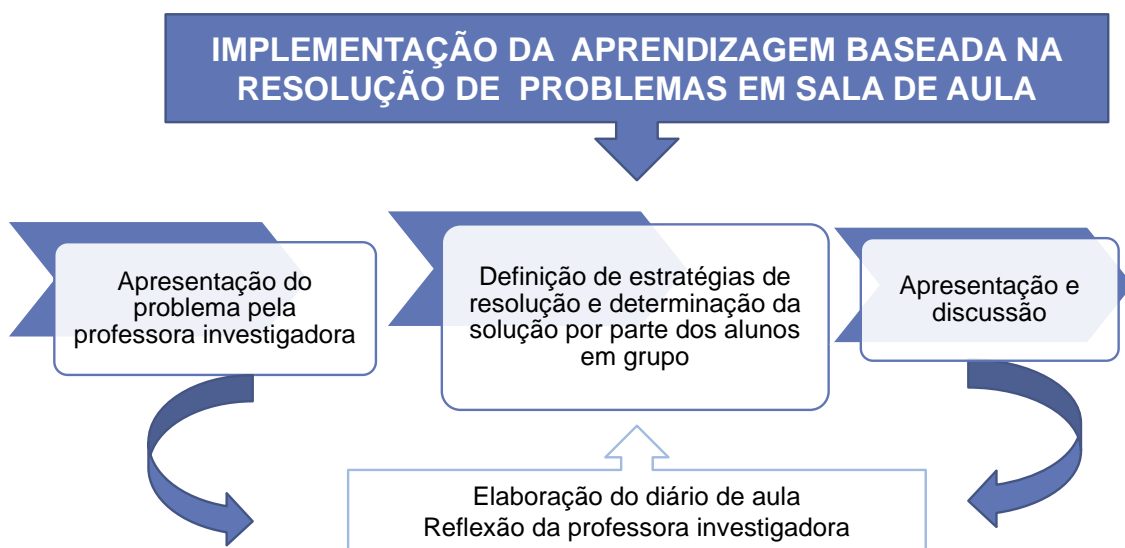


Figura 2 - Representação esquemática da implementação dos materiais selecionados para a ABRP em sala de aula pela professora - investigadora

No final da investigação, os alunos responderam a outro questionário (Anexo 4), de modo a que a professora - investigadora recolhesse a opinião dos alunos sobre as aulas em que foi implementada a ABRP. Cada aluno identifica o problema que mais gostou de resolver, o que considerou mais fácil e aquele em que teve mais dificuldades, justificando a sua escolha em ambas as situações. Identificam ainda as dificuldades sentidas e os elementos facilitadores ao longo da resolução e de que forma facilitavam o trabalho desenvolvido. Procuramos assim saber se os alunos gostam da discussão de resultados em grupo turma e de trabalharem em grupo ou individualmente e as razões das suas preferências. Procuramos também determinar o modo como era encarado as aulas em que os alunos tinham que resolver problemas e se estes consideravam a ABRP uma ajuda para obter sucesso na disciplina de Matemática.

Capítulo 4 - Apresentação, análise e discussão de dados

Introdução

Neste capítulo apresentamos e analisamos os dados recolhidos através dos diferentes instrumentos de recolha usados ao longo da investigação: questionários, grelhas de observação de aula e de análise dos problemas, registo dos alunos e diários de aula.

Após várias leituras dos diferentes documentos, onde se encontram registados os diversos dados da investigação, procedeu-se à seleção dos mesmos de modo a focalizá-los, simplificá-los e organizá-los, sempre com o cuidado de não os descontextualizar, e no sentido de encontrarmos resposta à nossa problemática.

Para facilitar a apresentação dos dados, a sua leitura e a sua interpretação e, em simultâneo, abrir caminho para a discussão e para a obtenção de conclusões, resolvemos organizar e condensar a informação sobre o ensino através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) em duas partes, como se de duas perspetivas se tratasse: a dos alunos e a da professora - investigadora. A perspetiva dos alunos é fundamentada nos dados recolhidos através dos questionários que lhes foram aplicados para melhor compreendermos a relação dos participantes nesta investigação com a Matemática e para obter o feedback sobre as aulas em que foi implementada a ABRP. Utilizamos ainda a análise de conteúdo das produções feitas pelos alunos aquando a resolução dos diferentes problemas nas aulas de implementação da ABRP e das grelhas de análise dos mesmos. A perspetiva da professora - investigadora será evidenciada como resultado da análise de conteúdo dos diários de aula e das grelhas de observação preenchidas nas aulas.

Por fim será feito o cruzamento das duas perspetivas sobre a ABRP que nos conduzirá à obtenção de conclusões e das respostas às questões de partida da investigação.

4.1. A perspectiva dos alunos sobre a ABRP

A perspectiva dos alunos ao longo da investigação é um dos pilares para obtermos respostas às inquietações que nos conduziram a esta investigação. Iremos começar pela análise dos dados obtidos no questionário (Anexo 3) tratados através de um tratamento estatístico simples com a organização das respostas em quadros e gráficos. Em seguida iremos analisar o conteúdo das produções feitas pelos alunos ao longo da implementação dos materiais para a ABRP em sala de aula e dos registos da professora - investigadora nas grelhas de análise da resolução desses problemas (Anexo 5). Para completar essa perspectiva, analisaremos as respostas dadas ao inquérito de opinião proposto aos alunos sobre as aulas em decorreu a implementação da ABRP (Anexo 4)

4.1.1. Caracterização dos alunos participantes do ponto de vista da sua relação com a Matemática

A opinião que os alunos têm sobre a Matemática e sobre o processo de ensino aprendizagem desta disciplina, influencia o seu comportamento perante as atividades que lhes são propostas. Para Schoenfeld (1992), conhecer as concepções dos sujeitos sobre a Matemática e o modo como estas influenciam o seu desempenho, é fundamental quando se pretende compreender o comportamento matemático dos alunos

Para conhecermos melhor a relação dos alunos participantes na investigação com a Matemática, as causas das dificuldades sentidas na aprendizagem da disciplina, a importância que esta disciplina tem para estes alunos, a opinião dos alunos sobre a Matemática escolar, sobre as aulas desta disciplina e sobre as tarefas realizadas nessas mesmas aulas de Matemática, começamos por apresentar e analisar os resultados do questionário (Anexo 3). Participaram no estudo 26 alunos, contudo apenas validamos as respostas de 25 questionários.

Oitenta por cento dos alunos intervenientes nesta investigação, referiram que têm dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática. Quando quisemos saber junto dos alunos que afirmaram ter dificuldades a que se deviam essas

dificuldades, cinquenta e dois por cento dos inquiridos, apontaram a falta de atenção como a principal causa. O fato de não se interessar pelos estudos (17%) e o não compreender a explicação do professor (14%) foram as causas apontadas pelos restantes (Gráfico 1).

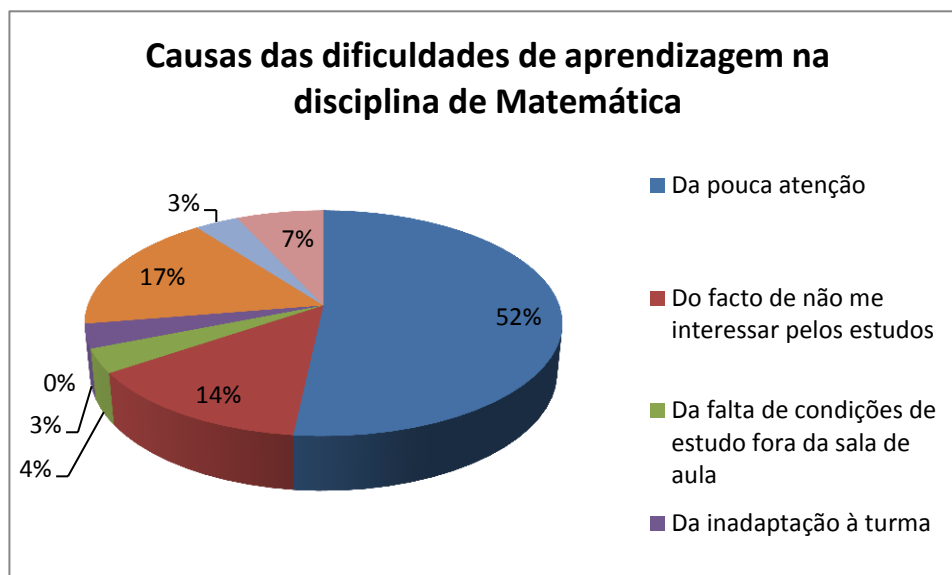


Gráfico 1 - Causas das dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática sentidas pelos alunos intervenientes na investigação.

As concepções que os alunos têm acerca da Matemática, segundo Matos (1992) influenciam o seu desempenho nessa disciplina. Este mesmo autor conclui que estas concepções estão intimamente relacionadas com a forma como os alunos concebem a sua aprendizagem na escola.

Para Ramos (2003) no processo de construção social das representações da matemática estão presentes diferentes aspetos. A forma afetiva como os alunos se relacionam com a disciplina, a influência do meio social a que pertencem, a sua vivência escolar e as expectativas e convicções acerca dos benefícios, diretos ou indiretos, que podem advir dos conhecimentos matemáticos são aspetos condicionantes da opinião que os alunos têm da disciplina. A forma como os alunos percebem a matemática depende do modo como estes se relacionam com a disciplina durante o seu percurso escolar, isto é, pelo sucesso que tenham ou não tido em termos de resultados escolares, pela importância que atribuem à disciplina, e até mesmo pelo tipo de relacionamento estabelecido com os professores que a lecionam. Quisemos então saber a opinião dos inquiridos sobre a Matemática (Gráfico 2). Para

tal usamos aspetos como a importância, o ser agradável, o ser complicada, o ser motivante, o ser útil e o ser interessante.

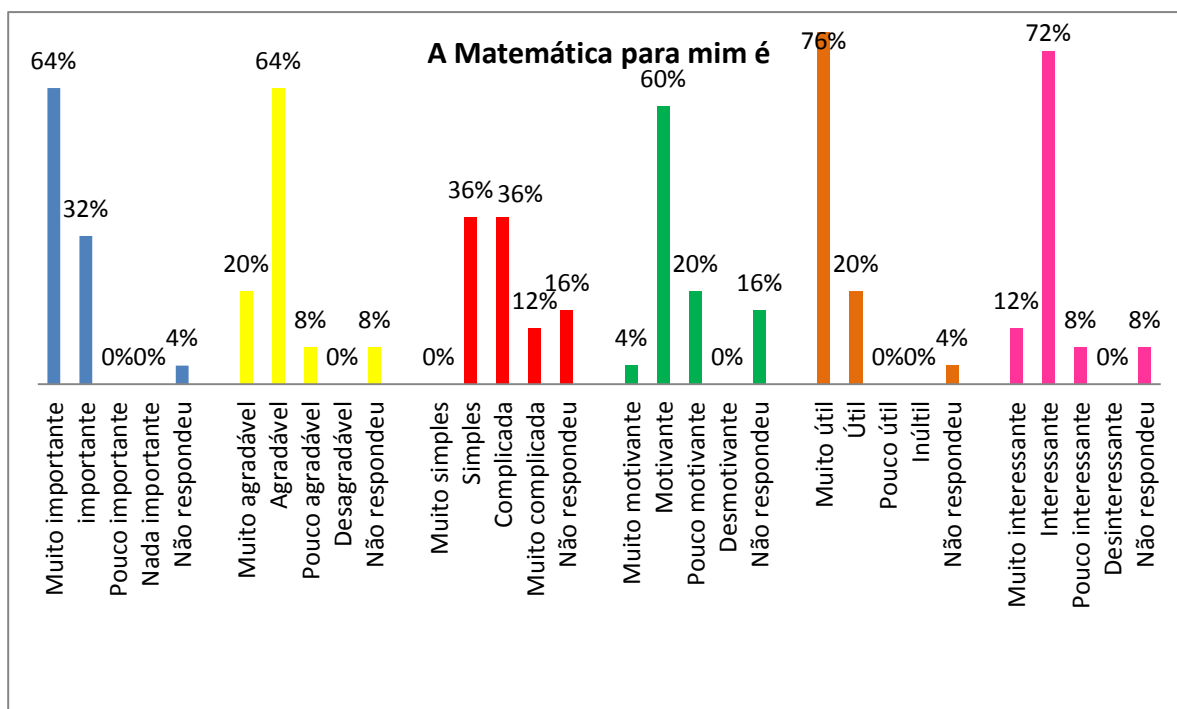


Gráfico 2 – Opinião dos alunos sobre a Matemática

Os alunos consideram a Matemática importante e até 64% dos respondentes são da opinião que é muito importante. Caracterizam-na como uma disciplina agradável. Quanto à sua simplicidade, as opiniões dividem-se. Apenas trinta e seis por cento consideram-na simples, havendo a mesma percentagem a considera-la complicada e não havendo nenhum aluno a referi-la como muito simples. A maioria dos alunos, consideram-na motivante, muito útil e interessante. Há contudo em todas as questões, alunos que não respondem.

Procuramos saber a opinião dos intervenientes na investigação sobre a Matemática escolar. Para tal elaboramos um quadro (Quadro 2), onde registamos o grau de concordância dos alunos sobre as afirmações apresentadas.

À exceção de um aluno, a turma discorda inteiramente com a ideia que aprender é uma perda de tempo. Os alunos consideram que a Matemática ajuda-os a desenvolver a rapidez do seu pensamento e prepara-os para o futuro. Praticamente metade da turma não reconhece que a Matemática é uma herança cultural ou pelo menos não têm opinião sobre este facto.

Quadro 2- Opinião dos alunos sobre a Matemática escolar

	DI	DL	NCND	CL	CI
Aprender matemática é uma perda de tempo	23	1	0	0	1
A Matemática escolar ajuda a desenvolver a rapidez de pensamento	0	0	0	10	15
A Matemática escolar prepara-nos para o futuro	0	0	1	9	15
A Matemática é uma herança cultural	1	0	13	10	1
A Matemática escolar não tem utilidade prática	18	3	1	3	0
A Matemática é importante para o desenvolvimento tecnológico	0	0	5	12	8
A Matemática é uma atividade individual	6	4	13	1	1
A Matemática desenvolve a capacidade para trabalhar em grupo	0	0	6	13	5
Aprender matemática ajuda a desenvolver a capacidade de abstração	0	1	12	9	3
Na Matemática o mais importante é efetuar cálculos	4	9	6	4	2
A maior parte dos alunos não compreendem aquilo que aprendem nas aulas de Matemática, apenas memorizam e aplicam de uma forma mecânica o que aprenderam	0	3	11	9	1
A Matemática ajuda-nos a encontrar respostas para resolver problemas do dia-a-dia	0	0	5	10	10
Os problemas matemáticos têm uma única resposta correta	11	5	4	1	1
Os problemas matemáticos resolvem-se rapidamente	5	9	10	1	0

Legenda: DI- Discordo inteiramente; DL-Discordo ligeiramente; NCND- Nem concordo nem discordo; CL- Concordo ligeiramente; CI- Concordo inteiramente

Três alunos acreditam que a Matemática não tem utilidade prática, quando a maioria discorda desta afirmação. Vinte alunos reconhecem a importância da Matemática para o desenvolvimento tecnológico e os restantes nem concordam nem discordam. Apenas dois alunos da turma veem a Matemática como uma atividade individual e uma grande parte considera que a Matemática ajuda a desenvolver para trabalhar em grupo. Metade da turma não concorda nem discorda sobre a ajuda, que aprender Matemática, pode dar para desenvolver a capacidade de abstração. Dos restantes, à exceção de um aluno, todos concordam com a ajuda que a aprendizagem

da Matemática dá no desenvolvimento da abstração. Metade da turma não considera que o mais importante na Matemática seja efetuar cálculos.

Em relação à afirmação que "a maior parte dos alunos não compreendem aquilo que aprendem nas aulas de Matemática, apenas memorizam e aplicam de uma forma mecânica o que aprenderam", praticamente metade da turma não concorda nem discorda desta opinião, no entanto dos restantes só três alunos é que discordam e de um modo ligeiro.

Talvez estes resultados possam ser explicados pelo pensamento de Ramos (2003) que acredita que na construção das representações sociais da matemática estão também presentes, as expectativas dos indivíduos quanto aos benefícios que advêm, para si e para a sociedade em geral, dos conhecimentos matemáticos. A utilidade que cada um atribui aos conhecimentos matemáticos vai provavelmente condicionar a predisposição face à disciplina e o próprio empenho na sua aprendizagem.

Já Abrantes (1995) refere que as conceções dos alunos sobre a Matemática não se desenvolvem de um modo isolado mas sim de uma forma integrada com os conhecimentos e capacidades, a partir das experiências em que os alunos se envolvem. O tipo de atividades que são propostas pode influenciar a visão que os alunos têm sobre a matemática.

Quisemos então saber a opinião dos alunos envolvidos na nossa investigação sobre as aulas de Matemática. O Gráfico 3 apresenta os resultados obtidos.

Verificamos que os alunos preferem as aulas em que trabalham em grupo e gostam de participar ativamente nas aulas. Em contrapartida, nenhum aluno referiu preferir as aulas em que o professor só expõe a matéria. As aulas em que os alunos trabalham individualmente e as aulas em que os alunos pesquisam e apresentam os trabalhos desenvolvidos são preferidas apenas por um aluno. Este último aspeto preocupou-nos na fase inicial da nossa investigação pois a ABRP tem como principal linha orientadora, o ensino pela descoberta através da pesquisa seguida da apresentação dos resultados obtidos. Com o desenrolar da investigação, verificamos que os alunos aceitavam os problemas propostos como desafios (Anexo 1).

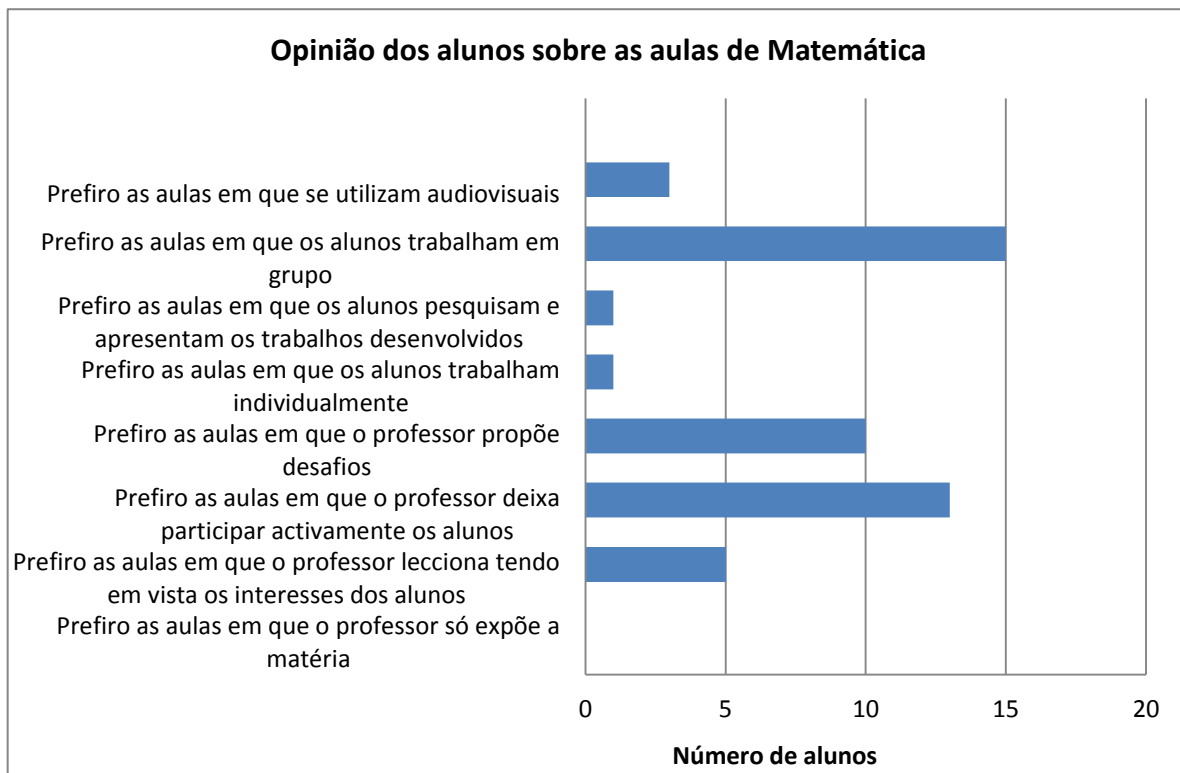
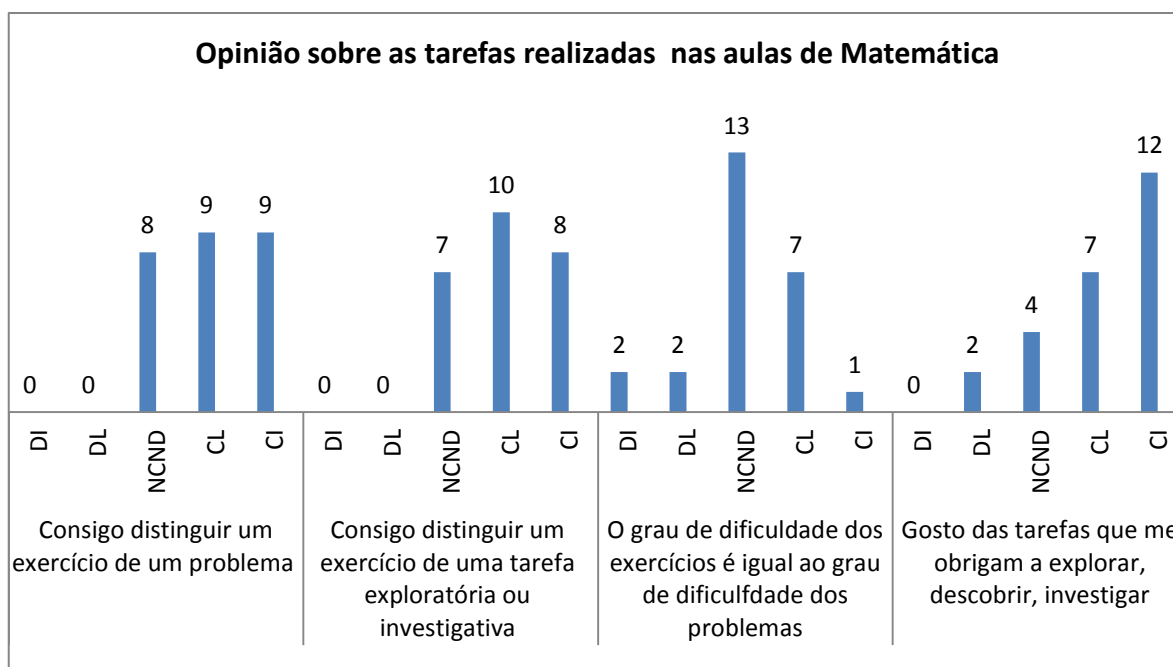


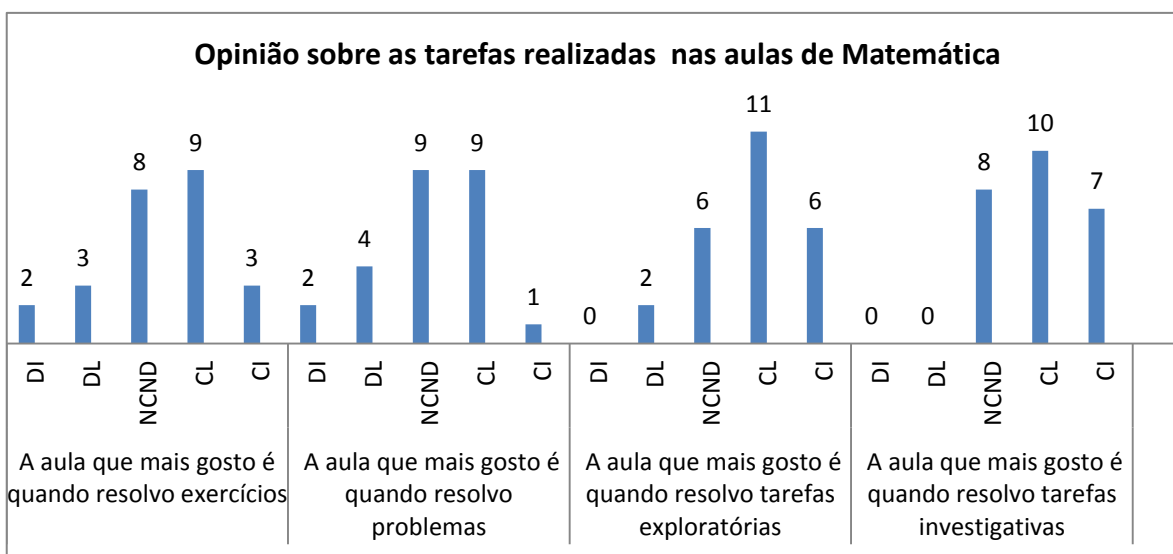
Gráfico 3 - Opinião dos alunos intervenientes na investigação sobre as aulas de Matemática

Em geral, nas aulas de Matemática são propostos, pelos professores vários tipos de tarefas: exercícios, problemas, explorações e investigações. Ponte (2005) refere que uma das ideias que se tem vindo a afirmar é a necessidade da diversificação de tarefas, bem como diversificação de experiências de aprendizagem e de instrumentos de avaliação. Esta diversificação é necessária porque cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares. O professor tem também em conta, naturalmente, os alunos, as suas capacidades e interesses. Há alunos que reagem bem a certo tipo de propostas, outros que preferem outro tipo e ainda outros que têm uma atitude relativamente indiferente. É importante conhecer a opinião dos alunos sobre essas atividades (Gráficos 4 e 5).



Legenda: DI- Discordo inteiramente; DL-Discordo ligeiramente; NCND- Nem concordo nem discordo; CL- Concordo ligeiramente; CI- Concordo inteiramente

Gráfico 4 - Opinião sobre as tarefas realizadas nas aulas de Matemática



Legenda: DI- Discordo inteiramente; DL-Discordo ligeiramente; NCND- Nem concordo nem discordo; CL- Concordo ligeiramente; CI- Concordo inteiramente

Gráfico 5- Opinião sobre as tarefas realizadas nas aulas de Matemática

A análise dos Gráficos 4 e 5 mostra que a maior parte dos alunos refere que consegue distinguir um exercício de um problema e um exercício de uma tarefa exploratória, contudo um terço da turma não concorda nem discorda, o que poderá

ser indicativo que para estes alunos este tipo de atividades são tarefas iguais e nas quais, provavelmente, têm as mesmas dificuldades. A resposta dada à questão sobre o grau de dificuldade ser o mesmo, quer para os exercícios quer para os problemas, em que metade da turma nem concorda nem discorda pode, igualmente, ser indicativo de que os alunos não conseguem fazer essa distinção. Um terço da turma considera que têm o mesmo grau de dificuldade e apenas quatro alunos é que discordam com esta igualdade de grau de dificuldade. O facto de os alunos terem uma opinião idêntica, quer para as aulas em que resolvem exercícios, quer para as aulas em que resolvem problemas, poderá ser um dado que reforça a ideia que para os alunos, este tipo de atividades propostas pelo professor na aula, lhes cria o mesmo tipo de impacto.

Grande parte dos alunos da turma gosta de tarefas que os obriguem a explorar, descobrir, investigar e este gosto é reforçado quando, de acordo com o Gráfico 5, praticamente o mesmo número de alunos afirmam gostarem das aulas em que resolvem tarefas exploratórias ou tarefas investigativas. De salientar que não há nenhum aluno a referir que não gosta de aulas em que resolvem tarefas investigativas.

Para finalizar, pedimos aos alunos que identificassem, em que fases da resolução de problemas sentiam dificuldades. Seguindo o modelo de Polya, quisemos saber se os alunos sentiam dificuldades em compreender o que lhes é pedido; recolher os dados; definir uma estratégia de resolução; explicar essa mesma estratégia ou verificar se a solução ou soluções obtidas são válidas. Os alunos podiam escolher mais do que uma dificuldade. O Gráfico 6 da página seguinte, sintetiza as respostas dadas. Como é possível verificar, um grande número de alunos sentem dificuldades na explicação da estratégia definida e metade da turma na escolha dessa mesma estratégia. A escolha da estratégia exige que o aluno faça a conexão entre os conhecimentos matemáticos apreendidos anteriormente, os conhecimentos adquiridos através das suas vivências diárias e o problema proposto. Muitas vezes os alunos não são capazes de fazerem essa conexão. A comunicação matemática é uma capacidade transversal que está associada à resolução de problemas. Os alunos participantes nesta investigação, e de acordo com a caracterização da turma, revelam dificuldades de expressão oral e escrita que podem reforçar o facto de grande parte da turma afirmar ter dificuldades em explicar a estratégia definida.

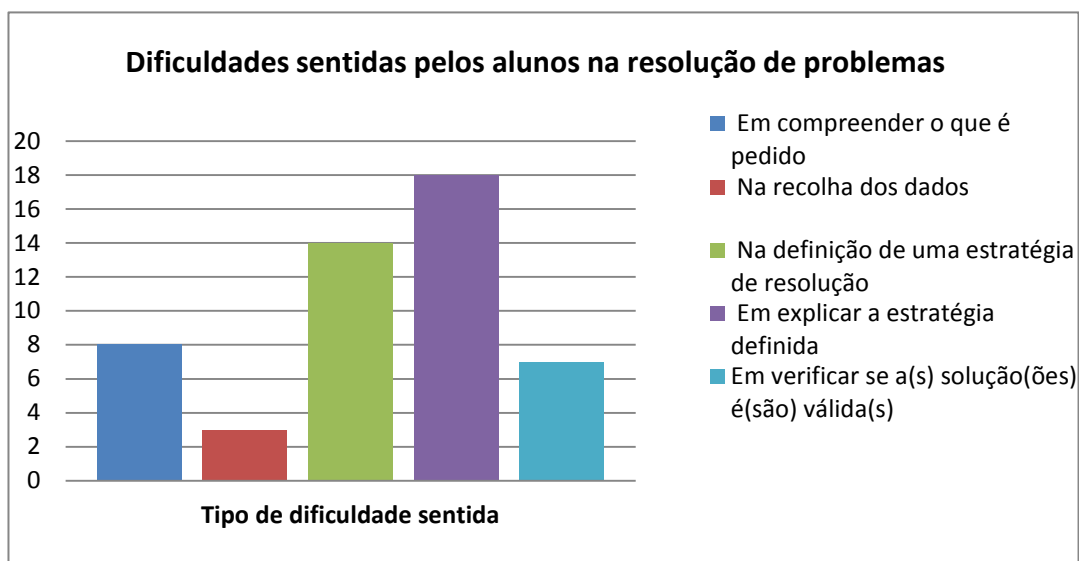


Gráfico 6 – Dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução de problemas

Em jeito de síntese, podemos referir que os alunos participantes nesta investigação consideram a falta de atenção a principal causa das dificuldades sentidas na aprendizagem da Matemática. Salientamos o facto de, em geral, estes alunos considerarem a Matemática uma disciplina muito importante e muito útil que os ajuda a desenvolver a rapidez de pensamento e a encontrar respostas para resolver problemas no dia-a-dia. Preferem as aulas de Matemática em que os alunos trabalham em grupo, que participam ativamente na aula e que lhes são propostos desafios. Estas preferências vão de encontro a toda a dinâmica utilizada durante a operacionalização da investigação e, conseqüentemente, ao uso de um modelo de ensino e de aprendizagem através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas.

Em seguida vamos analisar os registos escritos efetuados pelos alunos durante a resolução dos problemas propostos.

4.1.2. Análise dos registos escritos efetuados pelos alunos na resolução dos diferentes problemas propostos

Os alunos ao longo da investigação resolveram, em grupo, cinco problemas enquadrados em diferentes tópicos do tema Geometria (Anexo 7). Para analisar os

dados recolhidos através das produções dos alunos, foi necessário recorrer a um olhar que exigiu uma certa perícia, sensibilidade e preocupação de modo a focar-nos no essencial. A análise do trabalho desenvolvido pelos alunos foi feita, de forma descritiva, problema a problema. Procuramos exemplificar e documentar as principais dificuldades sentidas pelos alunos, na resolução dos diferentes problemas, ao longo das diferentes etapas. Para completar esta análise, procuramos compreender em qual das fases da resolução de cada problema, segundo o modelo de Polya, os alunos revelaram mais dificuldades. Para tal, recorreremos aos registos nas grelhas de análise da resolução de cada problema, efetuados pela professora - investigadora no final de cada aula (Anexo 5).

- **Problema I**

Perante as resoluções elaboradas pelos alunos para o Problema I (Anexo 7.1), analisemos e salientemos alguns aspetos que nos poderão ajudar a encontrar as respostas às nossas questões da investigação.

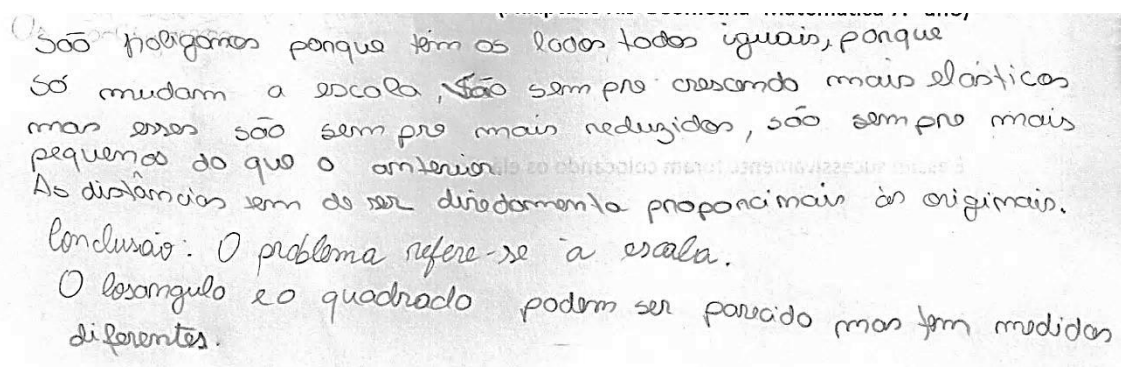


Figura 3 – Resolução do Problema I elaborada pelo Grupo V

A resposta dada pelo grupo da Figura 3 evidencia dois aspetos: os conceitos de polígono, losango e quadrado não estão ainda clarificados ou foram adquiridos de um modo incorreto e, por outro lado, os alunos têm dificuldade em exporem as suas ideias. O grupo começa por referir que são polígonos porque têm os lados todos iguais demonstrando que não sabem o que é um polígono. No final ao referirem que o losango e o quadrado podem ser parecidos mas tem medidas diferentes, dão a

entender que não se aperceberam que estiveram sempre a relacionar quadrados. Ao analisar a resposta, na busca do fio condutor do raciocínio dos alunos, verificamos que os alunos compreenderam que os quadrados estão sucessivamente a ser reduzidos e consequentemente os lados são diretamente proporcionais. Associam esta situação, a outras em que se utilizam escalas no entanto têm dificuldades em comunicar matematicamente de uma forma correta e clara. Verificamos ainda através desta resposta, que este grupo não explorou outras relações para além da dos comprimentos dos lados dos quadrados. O grupo consegue definir uma estratégia, contudo o seu desenvolvimento está condicionado pelas dificuldades apresentadas. Assim sendo, a solução obtida, está bastante incompleta.

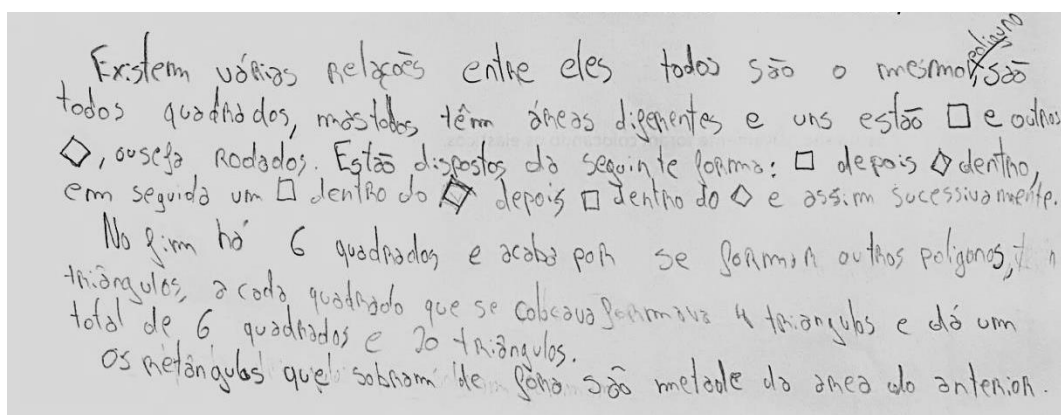


Figura 4- Resolução do Problema I elaborada pelo Grupo II

Já a resposta dada pelo grupo, que apresentamos na Figura 4, demonstra que os alunos ficaram restritos à imagem e aos aspetos visuais que se destacavam. O grupo compreendeu o problema, no entanto não conseguiu definir a estratégia mais adequada e consequentemente não obteve a solução correta.

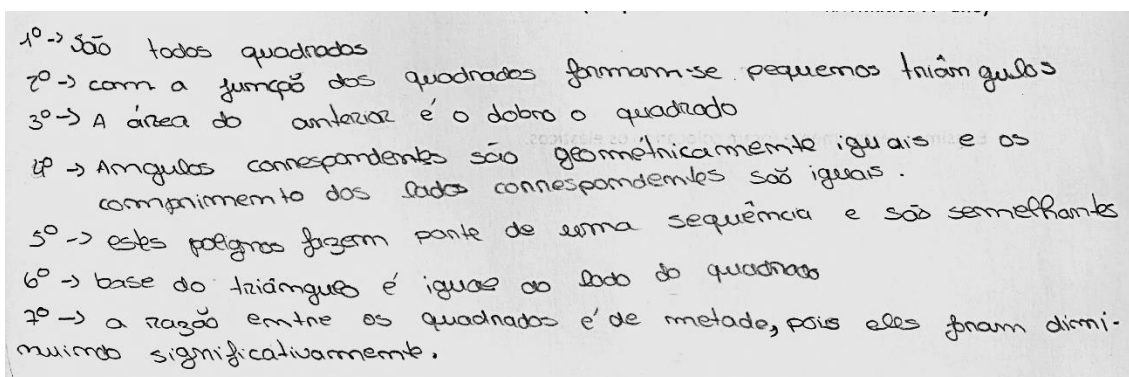


Figura 5- Resolução do Problema I elaborada pelo Grupo IV

Em contrapartida, a resposta dada pelo grupo que apresentamos na Figura 5, evidencia terem procurado várias relações e seguirem um raciocínio organizado e sequencial. Este grupo demonstra ter compreendido o que lhes era solicitado, conseguiram explorar a situação problemática e responderam usando uma linguagem adequada.

Observando a grelha de análise da resolução do Problema I (Anexo 5), verificamos que todos os grupos conseguiram compreender o problema completamente, contudo apenas quatro dos sete grupos desenvolveram uma estratégia adequada que poderia levá-los à solução, dois grupos não encontram a resposta e apenas dois grupos apresentam uma resposta que se pode considerar correta.

Seguindo as etapas do modelo de Polya, os alunos durante o processo de resolução deste problema, conseguiram ultrapassar a primeira etapa, a da compreensão do problema mas, parte da turma, teve dificuldades em desenvolver a estratégia definida e conseqüentemente em obter a resposta ao problema. O facto de alguns conceitos adquiridos no passado estarem pouco claros, o uso de uma linguagem matemática desadequada e/ou restrita e a exploração apenas das características mais evidentes foram condicionantes que limitaram a execução de um modo adequado do plano de resolução definido pelos grupos.

- **Problema II**

Analisemos a resolução do Problema II (Anexo 7.2) apresentada por alguns grupos e que evidenciam aspetos relevantes para o nosso estudo.

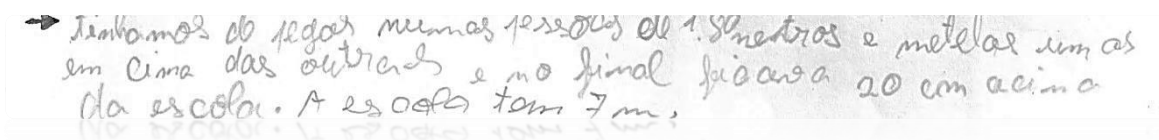


Figura 6- Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo VII

Este grupo, cuja resolução a Figura 6 traduz, utilizou uma estratégia de estimativa para a resolução do problema, não usando a fotografia, mas sim o

conhecimento que tem do local que se pretende determinar a altura. É uma estratégia que pode ser considerada válida, dado que o grupo conhece a fachada, no entanto se fosse uma outra medida real de difícil acesso, que os alunos não conhecessem o local, poderia conduzir a um resultado errado.

da Escola. $1,2 \longrightarrow 120,5$
 $6,9 \longrightarrow x$
 $x = \frac{6,9 \times 120}{1,2} = \frac{824}{1,2} = 690 \text{ cm} = 6,90 \text{ m}$

Figura 7- Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo II

Já este grupo, cuja resolução é ilustrada na Figura 7, escolheu uma estratégia válida, diferente da apresentada na Figura 6. Apresentou, no entanto apenas os cálculos sem descrever o raciocínio efetuado. Esta resolução simples, que conduziu à altura real da fachada da Escola, demonstra que os alunos conseguem compreender os que lhes é pedido no problema, definir uma estratégia de resolução e executá-la. Revelam contudo dificuldades em exporem o(s) raciocínio(s) efetuado(s).

... e raciocínio que utilizaste para resolver este problema.
 A janela mede 120 cm ^{de largura} na realidade enquanto que no desenho mede 1,3 cm de largura.
 A escola de altura mede 6,9 cm : 1,30 = 5,3 cm no desenho
 Então $5,3 \times 120 = 636 \text{ cm}$
 $636 \text{ cm} = 6,36 \text{ m}$
 A - A fachada principal da escola mede 6,36 m.

Figura 8 - Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo VI

Em contrapartida, a resposta do grupo que se observa na Figura 8 demonstra que estes alunos conseguem expor de uma forma sucinta o raciocínio desenvolvido, no entanto cometem um erro comum na resolução: determinam a razão entre a altura da Escola e a altura da janela na fotografia (5,3 cm) e posteriormente usam essa razão para determinar a altura real da Escola a partir da altura real da janela. A razão deveria

ser determinada através da proporcionalidade existente entre comprimentos correspondentes nomeadamente entre as dimensões reais e as dimensões da fotografia da janela. Este erro não condiciona a solução porque a multiplicação de números reais goza das propriedades comutativa e associativa, no entanto o valor encontrado para a altura da Escola está ligeiramente afastado do correto (6,9 m), pois o grupo ao efetuar a medida da largura da janela na fotografia, cometeu um erro de leitura/precisão que condicionou a obtenção da altura real da fachada da Escola. Verificamos que os alunos por vezes conseguem determinar a solução apesar de cometerem alguns erros na execução da estratégia delineada.

Utilizando as longuras da janela, para saber a altura da escola.

1. 1.50cm largura
1.2 cm comprimento
 $1.50 \times 1.2 = 1.8$

$1.8 \times 4 \text{ janelas} = \underline{7.2}$

R A escola tem 7.2 m.

Figura 9 - Resolução do Problema II elaborada pelo Grupo V

O grupo, cuja resolução se encontra representada na Figura 9, apresenta uma estratégia desadequada à resolução do problema. É comum, os alunos obterem os dados e depois efetuarem cálculos com eles sem compreenderem o que estão a fazer e conseqüentemente não conseguirem definir uma estratégia adequada.

Observando a grelha de análise deste Problema II (Anexo 5), verificamos que todos os grupos compreenderam o que era pedido neste problema, dois grupos aplicaram uma estratégia desadequada à sua resolução e apenas dois grupos definiram uma estratégia que os conduzia à solução. Em relação à solução apenas um grupo determinou a solução correta.

Verificamos que os grupos que definiram uma estratégia válida para a resolução deste problema, basearam-se e usaram pressupostos e conhecimentos diferentes. Este facto, do nosso ponto de vista, torna-se importante e demonstra a capacidade que os alunos têm de procurarem de acordo com os seus conhecimentos e vivências, estratégias para definirem e executarem um plano de resolução de um problema.

- **Problema III**

Analisando a grelha de análise da resolução do Problema III (Anexo 5), verificamos que todos os grupos compreenderam o problema, contudo dois dos grupos escolhem uma estratégia que é apenas parcialmente adequada à sua resolução e só três grupos respondem corretamente.

A análise dos raciocínios desenvolvidos pelos diferentes grupos demonstra que, a maioria, apresenta cálculos desnecessários e que iniciam a sua resolução sem refletirem sobre os dados que têm. Perdem por vezes bastante tempo com raciocínios desajustados à situação problemática em causa o que poderá desviar a atenção dos alunos e conduzi-los a soluções completamente erradas e sem sentido para o contexto do problema.

Em seguida são apresentadas algumas resoluções do Problema III (Anexo 7.3) que evidenciam a situação atrás descrita.

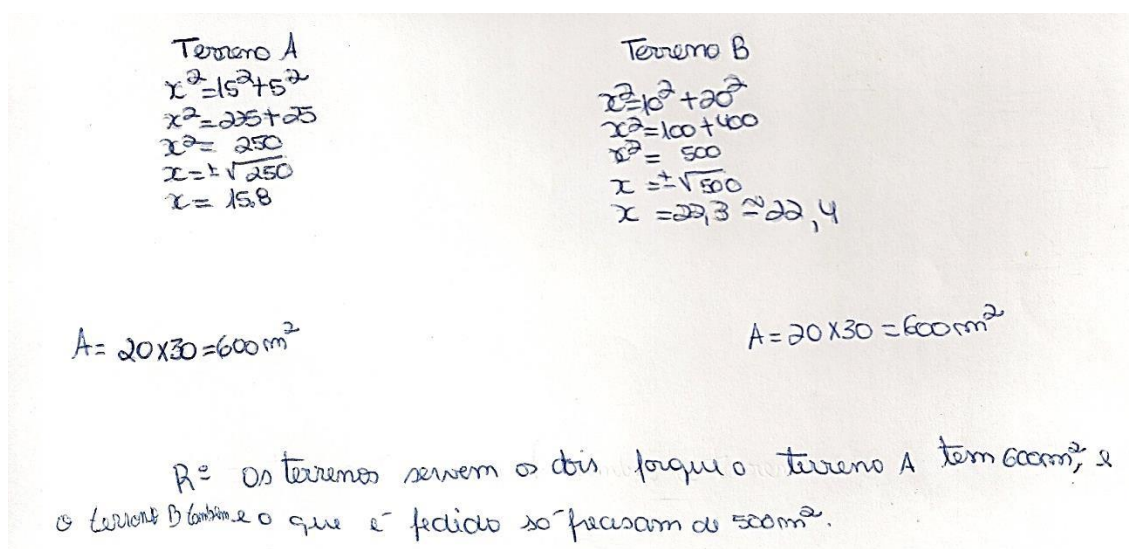


Figura 10 - Resolução do Problema III elaborada pelo Grupo VII

Como os alunos tinham recentemente aprendido o Teorema de Pitágoras, o grupo, cuja resolução se apresenta na Figura 10, aplicaram-no para determinar

dimensões que não necessitavam e que acabaram por não as utilizar. É frequente, os alunos partirem logo para cálculos sem verificar se eles são efetivamente necessários. Posteriormente este grupo determina a área dos dois terrenos como se fossem paralelogramos. Apresenta pois uma resolução que leva a concluir que não sabem que esta fórmula só é válida para os paralelogramos ou que não conseguem visualizar / identificar que estes polígonos não são paralelogramos. É evidente que o grupo tem lacunas na identificação/classificação dos polígonos.

$A_{\text{I}} = 20 \times 15 = 300 \text{ m}^2$
 $A_{\text{II}} = 15 \times 15 = 225 \text{ m}^2$
 $A_{\text{III}} = 20 \times 20 = 400 \text{ m}^2$
 $B_x = x^2 = 20^2 + 10^2$
 $x^2 = 400 + 100$
 $x^2 = 500$
 $x = \pm \sqrt{500}$
 $x \approx 22,4 \text{ m}^2$ porque x é um comprimento.

$A_A = 300 + 225 = 525 \text{ m}^2$
 $A_B = 400 + 22,4 = 422,4 \text{ m}^2$

P: O mais indicado é comprar o terreno B porque o A passa dos 500 m^2 e o B vai até $422,4 \text{ m}^2$ e é o ideal.

Figura 11 - Resolução do Problema III elaborada pelo Grupo II

A resolução apresentada na Figura 11 desenvolvida por outro grupo, exemplifica um erro muito grave: os alunos, na determinação da área do terreno B, adicionam o valor de uma área com o de um comprimento o que leva a pensar que os alunos confundem as grandezas área e comprimento.

Qual dos terrenos interessará mais ao casal? Porquê?

(A) $A_{\square} = c \times p = 20 \times 15 = 300 \text{ m}^2$
 $A_{\square} = l \times p = 15 \times 15 = 225 \text{ m}^2$
 $A_A = 300 + 225 = 525 \text{ m}^2$

(B) $A_{\square} = l \times p = 20 \times 20 = 400 \text{ m}^2$
 $A_{\square} = l \times p = 10 \times 10 = 100 \text{ m}^2$
 $A_B = 400 + 100 = 500 \text{ m}^2$

$A_{\Delta} = \frac{b \times p}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ m}^2$

• Para calcular a área do terreno A, dividimos a figura em duas partes (um retângulo e um paralelogramo). Para calcular mais facilmente a área do paralelogramo dividimos a figura em 2 triângulos e 1 retângulo que originou um quadrado. A soma destas duas áreas ultrapassa o máximo exigido pelo terra e pelo o António.

• Para calcular a área do terreno B, dividimos a figura num quadrado e num triângulo, transformando depois o triângulo em quadrado. A soma dos valores obtidos deu-nos o máximo de m^2 que eles queriam.

Figura 12- Resolução do Problema III elaborada pelo Grupo IV

A resolução apresentada na Figura 12 revela que o grupo não efetuou cálculos desnecessários e consegue descrever de uma forma clara a estratégia desenvolvida, demonstrando que não têm dificuldade em decompor/compor polígonos em retângulos, quadrados e triângulos.

Mais uma vez, verificamos que a determinação da solução do problema, não está condicionada nem pela etapa da compreensão do que é pedido nem na definição de uma estratégia mas sim na etapa da execução do plano por erros cometidos que desviam o trabalho dos alunos da essência do problema em questão.

• **Problema IV**

Analisando os problemas propostos neste estudo, consideramos que o Problema IV (Anexo 7.4), é de todos, o que exige um raciocínio mais abstrato para a sua resolução uma vez que exige a visualização no espaço.

Apresentamos em seguida as respostas que nos permitem identificar algumas dificuldades que os alunos sentiram e que condicionaram a resolução completa e/ou correta do problema.

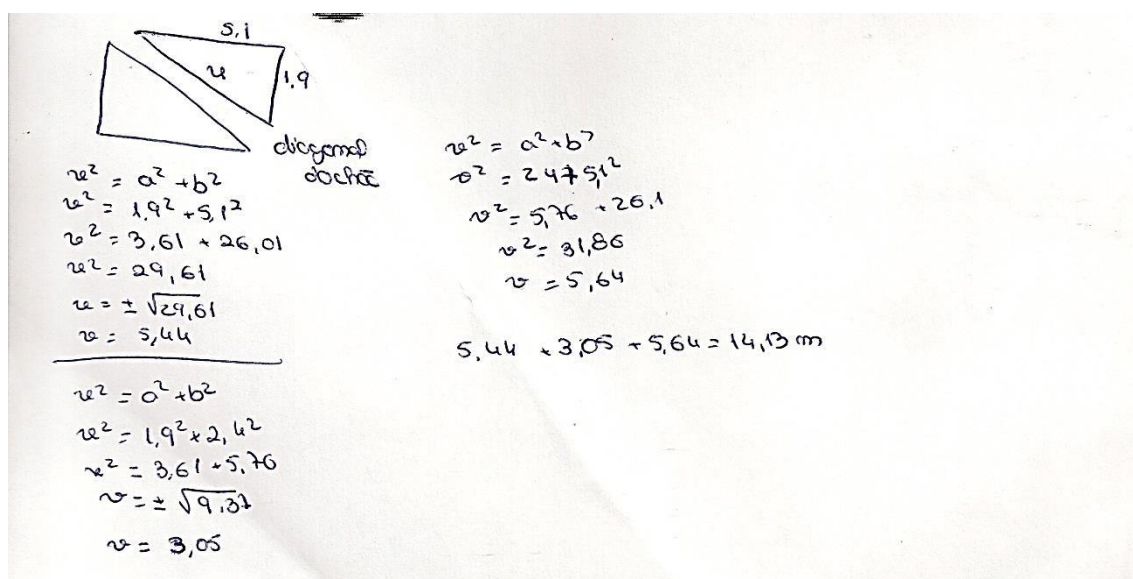
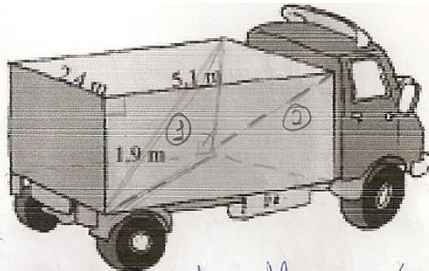


Figura 13- Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo V

É notório, na resolução apresentada na Figura 13, que o grupo deu início à resolução do problema determinando as diagonais faciais do camião, contudo sem uma estratégia definida, pois no final adiciona os comprimentos de três das diagonais faciais sem justificar porque o fez e sem tão pouco compará-lo com o comprimento do tubo para averiguar se cabia no camião.



Tentativa 1

1 - Vamos começar por utilizar o teorema de Pitágoras. E o tubo vai estar encostado ao lado do camião.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$h^2 = 1,9^2 + 5,1^2$$

$$h^2 = 3,61 + 26,01$$

$$h^2 = 29,62$$

$$h = \sqrt{29,62}$$

$h = 5,44$, porque h é uma distância.

Tentativa 2

2 - Vamos calcular o comprimento do tubo de um vértice da frente de cima com um vértice de trás de baixo, mas que os vértices fiquem opostos.

$$A_{\square} = c \times l$$

$$A_{\square} = 5,1 \times 2,4$$

$$A_{\square} = 12,24$$

$12,24 : 2 = 6,12 \rightarrow$ Este valor é o do triângulo

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$h^2 = 5,1^2 + 6,12^2$$

$$h^2 = 26,01 + 37,4544$$

$$h^2 = 63,4644$$

$$h = \sqrt{63,4644}$$

$h = 7,96$, porque h é uma distância.

$5,82 \text{ m} < 7,96 \text{ m}$

Conclusão: O tubo cabe na diagonal (da frente de cima da caixa do camião até a parte de trás).

A segunda tentativa, o tubo maior possível de entrar é de $7,96 \text{ m}$, mas o comprimento do tubo que o problema pede é de $5,82 \text{ m}$. Logo o tubo cabe no camião (e fodesse dizer que cabe sobre espaço 1).

Figura 14- Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo III

Já o grupo, cuja resolução consta na Figura 14, começou a resolver o problema com uma estratégia adequada, determinando o comprimento da diagonal de uma das faces. O grupo chegou à conclusão que o tubo é maior do que o comprimento da diagonal dessa face. É evidente que os alunos escolheram uma face sem contudo terem o cuidado de escolherem aquela que tem maiores dimensões e consequentemente a diagonal facial maior, pois em seguida partem logo para a situação da diagonal espacial sem contudo terem testado se o tubo era maior do que a diagonal da face com as maiores dimensões. A escolha da face parece ter sido feita baseada na visualização da figura: é aquela que se destaca pois está de frente para o aluno. Na sequência do seu raciocínio, o grupo determina a área de um triângulo que corresponde a metade da face debaixo/cima do caminhão e utiliza esse mesmo valor como de um cateto de um triângulo retângulo se trata-se. O grupo não consegue definir ou visualizar um triângulo retângulo que contenha a diagonal espacial e atribui valores, sem lógica, às dimensões desse triângulo. Esta resposta evidencia que os alunos muitas vezes apercebem-se das estratégias dos outros grupos e sem sentido crítico, tentam desenvolver um raciocínio sem tão pouco questionarem-se sobre a validade daquilo que estão a fazer.

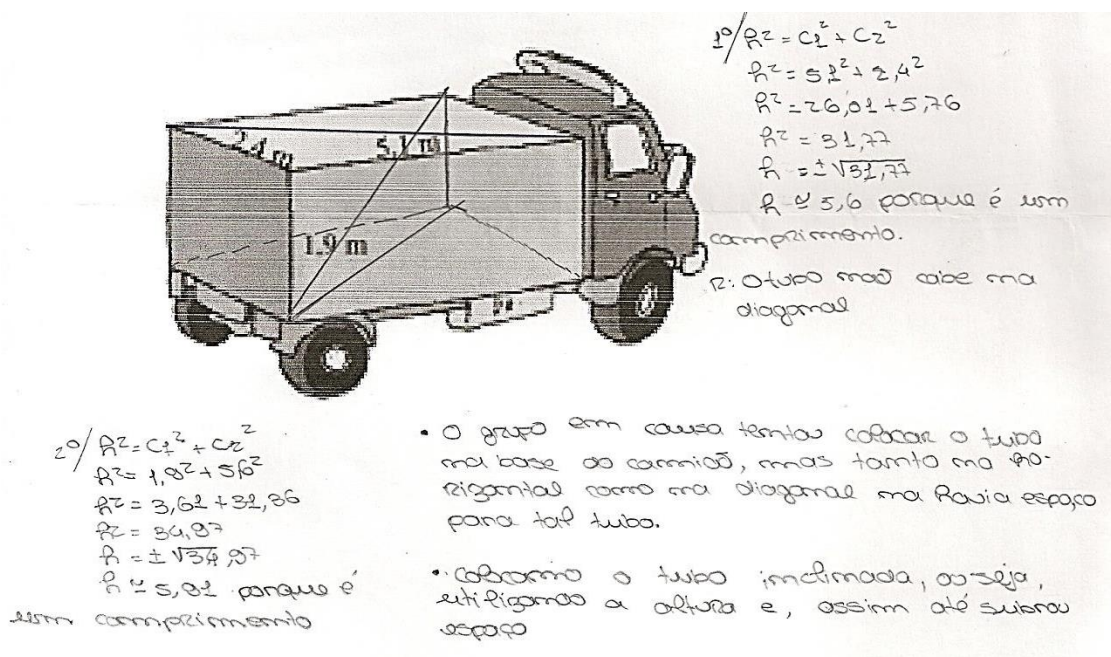


Figura 15- Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo IV

Já o grupo cuja resolução é apresentada na Figura 15, define uma estratégia válida e consegue descrever o raciocínio desenvolvido de uma forma sucinta. O traçado na figura, quer da diagonal facial, quer da diagonal espacial e do triângulo retângulo que permite determinar o comprimento dessa mesma diagonal, evidenciam que o grupo tinha o seu raciocínio bem estruturado, apenas se esqueceram de apresentar a resposta de uma forma evidente.

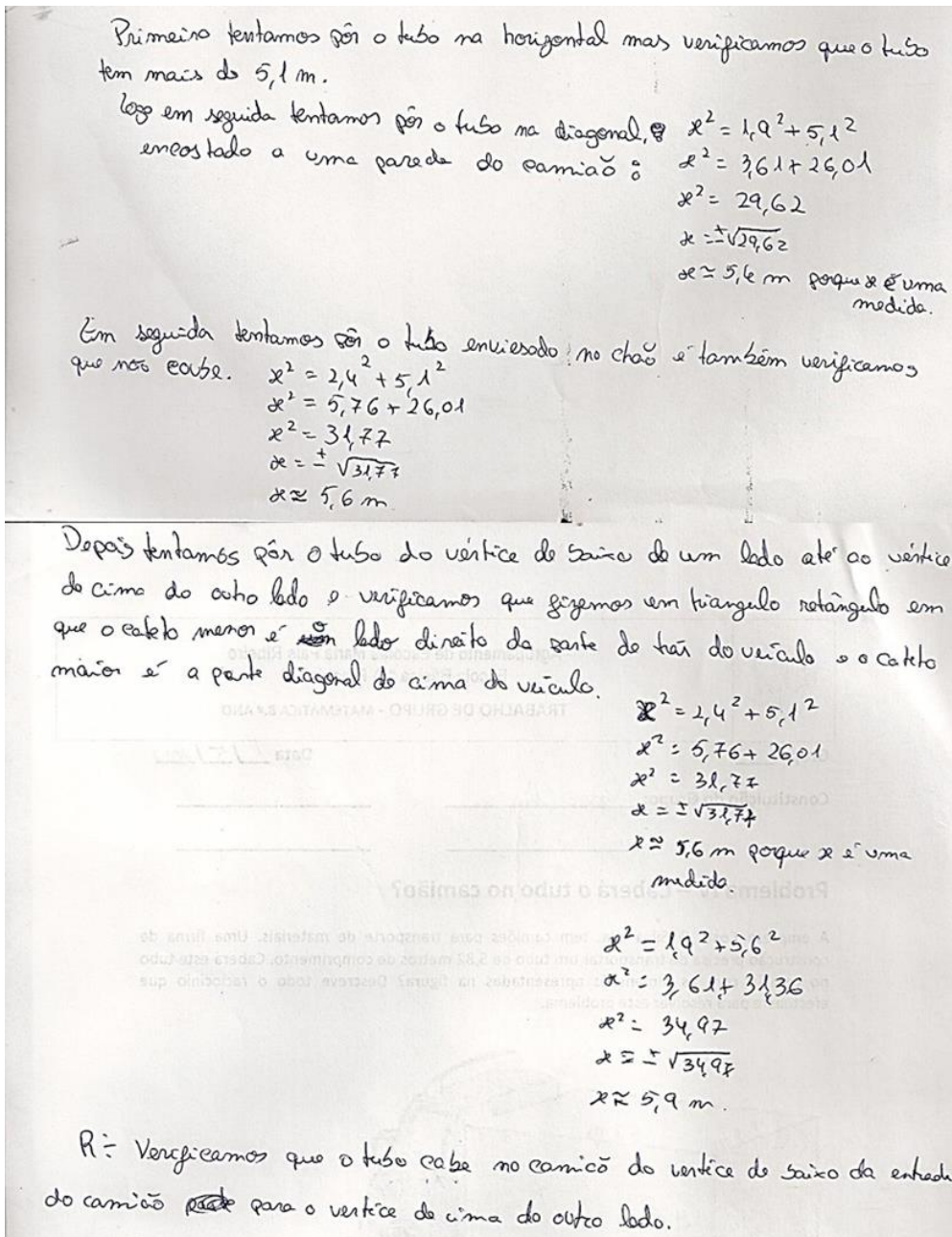


Figura 16 - Resolução do Problema IV elaborada pelo Grupo II

A resolução apresentada na Figura 16 demonstra que, o grupo através da estratégia desenvolvida e a descrição apresentada, conseguiu definir uma sequência de raciocínios que os conduziu à solução do problema. É clara a explicação de cada uma das etapas desenvolvidas pelo grupo. O grupo conseguiu visualizar no espaço todos os elementos geométricos para resolver o problema e demonstra segurança e certeza do que estão a fazer.

Verificamos na grelha de análise do problema IV, (Anexo 5), que todos os grupos compreenderam o problema, contudo um grupo não consegue definir uma estratégia válida e só os três grupos que definiram a estratégia adequada é que conseguiram encontrar a solução correta. Os restantes grupos definem apenas parcialmente adequada não conseguindo obter a solução correta do problema.

Como já esperávamos, a dificuldade de visualização condicionou a resolução do problema. Alguns grupos, influenciados pelo trabalho dos outros grupos e por valores e palavras que ouviam soltas, procuraram a solução do problema delineando um plano que leva-os aos valores escutados mas não que se adequa ao problema.

- **Problema V**

O Problema V (Anexo 7.5) foi dividido em três partes distintas. Verificamos, ao analisar a grelha de avaliação do Problema V (Anexo 5), que os alunos sentiram imensas dificuldades na sua resolução. Na primeira questão três grupos não compreendem bem o problema considerando apenas parte do enunciado. Só quatro dos sete grupos é que compreenderam o que lhes era solicitado. Mediante a interpretação que fazem do enunciado, definem uma estratégia adequada, mas apenas três grupos respondem corretamente. Na parte da demonstração, só dois grupos é que compreendem o enunciado, no entanto só um é que define uma estratégia que o conduz à solução correta. Há questão III apenas três grupos compreendem o problema, definem uma estratégia adequada e encontram uma resposta certa.

Analisemos as respostas dadas à primeira parte da tarefa.

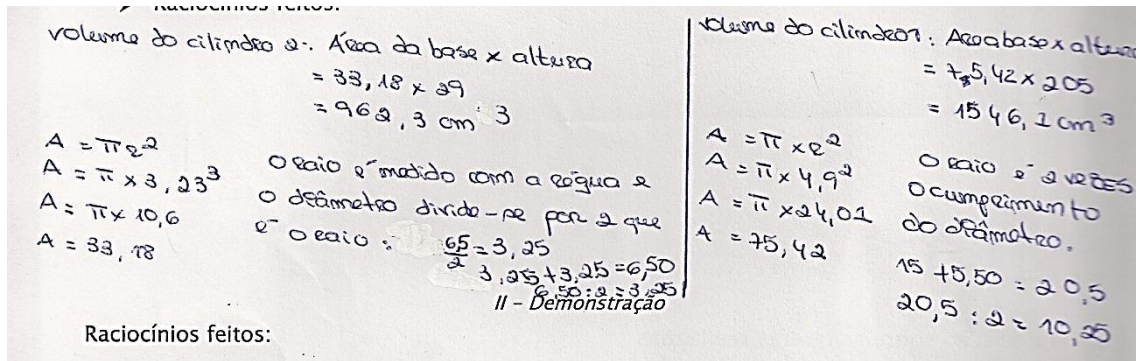


Figura 17- Resolução da primeira parte do Problema V elaborada pelo Grupo III

Através da análise da resolução apresentada na Figura 17, verificamos que o grupo inicia a sua estratégia de resolução enrolando uma folha de papel A4. Determina em seguida o diâmetro e a altura de cada uma das embalagens cometendo erros de precisão nas medições com a régua. Apresenta por exemplo para o cilindro 2 o comprimento do raio como sendo 3,25 cm e a altura do cilindro como 29 cm quando efetivamente são aproximadamente 3,34 cm e 29,7 cm respetivamente. Estes erros no entanto não vão condicionar a resposta. O grupo descreve o raciocínio, efetua os cálculos mas não conclui.

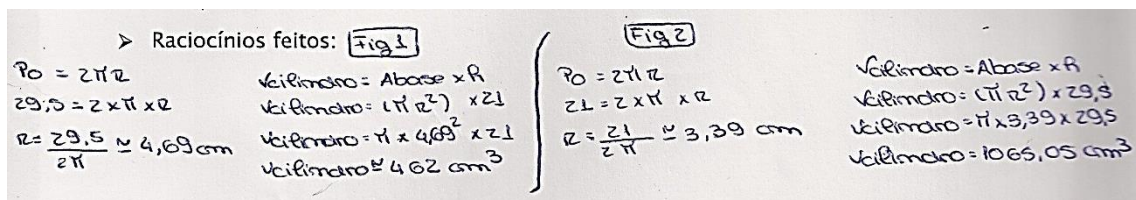


Figura 18 - Resolução da primeira parte do Problema V elaborada pelo Grupo IV

Já o grupo, cuja resolução consta na Figura 18, opta por determinar o raio analiticamente, conseguindo visualizar que a dimensão da folha que não é tomada como altura, corresponde ao perímetro do círculo que forma a base da embalagem. Ao analisar a resposta dada por este grupo, verificamos que obtiveram as dimensões da folha medindo uma folha A4 apesar de não terem referido esse passo, contudo afirmam terem usado uma régua nos materiais utilizados. Mais uma vez se verifica falta de precisão nestas leituras. A resposta deste grupo evidencia ainda que não verificam os resultados obtidos pois o volume obtido para a Fig. 1 do problema (462

cm³) está errado. Os alunos indicaram corretamente os cálculos a efetuar, mas quando os fazem, esquecem-se de multiplicar por π .

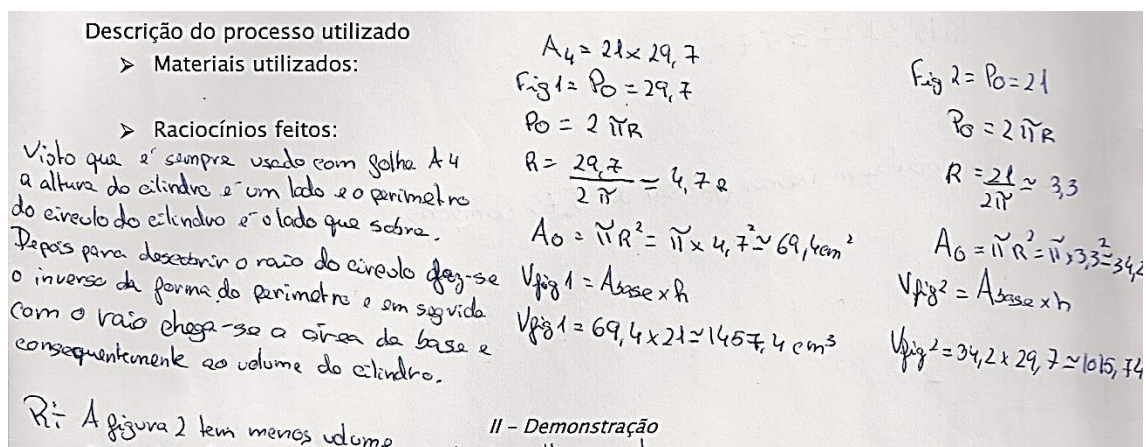


Figura 19 - Resolução da primeira parte do Problema V elaborada pelo Grupo II

A resposta dada na Figura 19 revela que o grupo elaborou um raciocínio bem estruturado e conseguiram descrever razoavelmente a estratégia utilizada para responder ao problema. Os valores encontrados são ligeiramente diferentes dos reais, devido a arredondamentos efetuados ao longo dos cálculos, o que evidencia que os alunos têm dificuldade em trabalharem com os valores exatos

Na parte da tarefa em que é solicitada a demonstração, a maioria dos grupos não responde, o que evidencia a dificuldade que os alunos têm em trabalhar no abstrato com variáveis e até mesmo a sua falta de persistência perante uma situação que à partida mais difícil.

Dos três grupos que apresentam uma resposta, apenas um consegue avançar com algum êxito na demonstração pretendida, verificando-se que compreendeu o que lhe era solicitado. No final, o grupo tenta explicar a conclusão obtida, no entanto com alguma falta de rigor como é possível verificarmos na resolução apresentada na Figura 20.

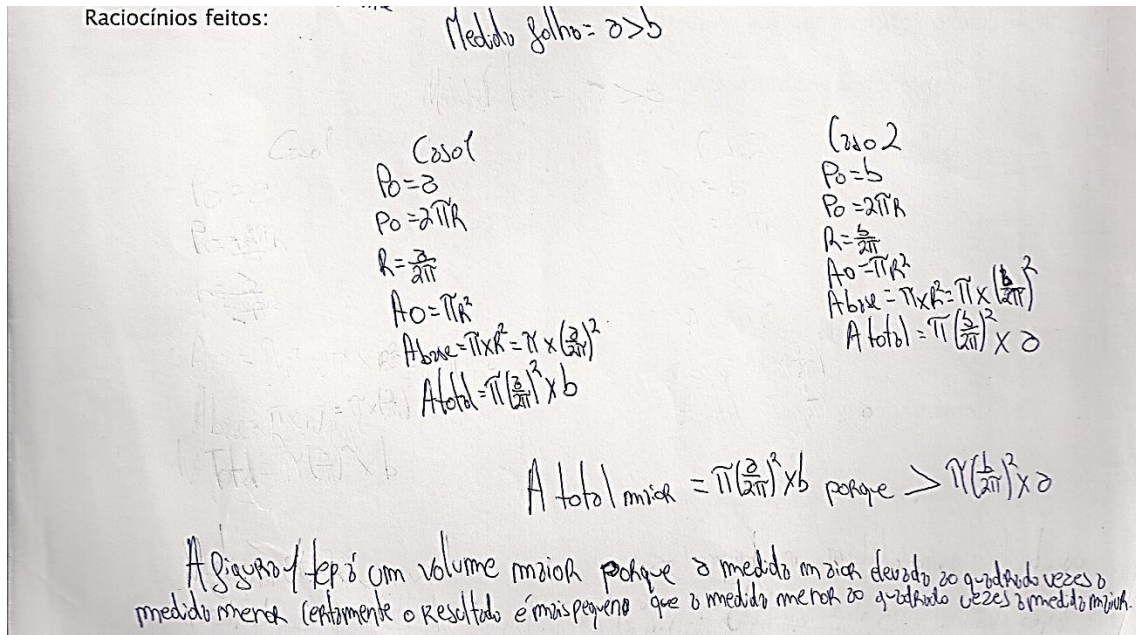


Figura 20 - Resolução da segunda parte do Problema V elaborada pelo Grupo II

Ao analisarmos a resposta do grupo representada na Figura 21, verificamos que este tentou desenvolver a demonstração solicitada. Compreendeu que tinha que trabalhar com variáveis no entanto teve dificuldades em defini-las de uma forma compreensível, clara e correta. Torna-se evidente, com a resposta deste grupo, a dificuldade que os alunos têm em fazerem a analogia entre o concreto e o abstrato.

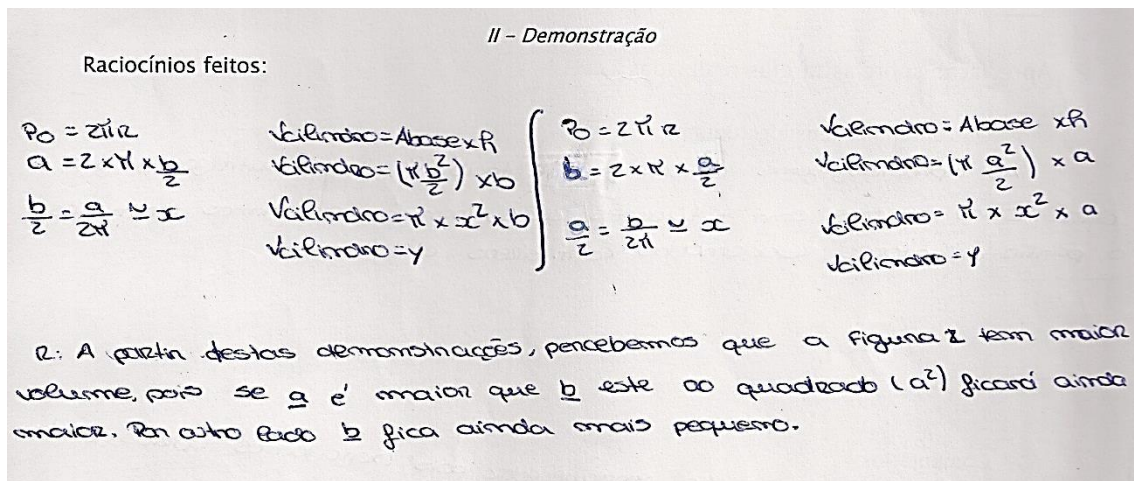


Figura 21- Resolução da segunda parte do Problema V elaborada pelo Grupo IV

O terceiro grupo que apresentou uma resposta, de acordo com a Figura 22, demonstrou claramente que não compreenderam o que lhes era pedido. Apresentaram o produto do comprimento do raio pela altura de cada uma das folhas, obtidos na alínea anterior, sem qualquer introdução ou justificação tornando-se evidente que não compreenderam absolutamente nada do que lhes tinha sido solicitado.

Raciocínios feitos:

$$3,25 \times 29,60 = 96,2$$

$$4,5 \times 20,5 = 92,25 \rightarrow \text{maior}$$

Figura 22 - Resolução da segunda parte do Problema V elaborada pelo Grupo III

Muitas vezes, os alunos efetuam cálculos, sem lógica, dos valores que têm sem tão pouco pensarem no que estão a fazer e evidenciando que não têm a menor noção dos fatos matemáticos envolvidos.

Em relação à terceira parte da tarefa, apenas dois grupos é que não conseguiram desenvolver uma estratégia adequada.

A resolução apresentada na Figura 23 evidencia que o grupo não compreendeu o que lhe é solicitado apresentando cálculos sem lógica e sem qualquer justificação que nos ajudasse a compreender o raciocínio desenvolvido.

III - Quantos bombons iremos precisar por embalagem?

Conclusões tiradas:

$$1,5 \times 96,2 = 144 \text{ bombons}$$

$$1,5 \times 92,25 = 138 \text{ bombons}$$

Figura 23 - Resolução da terceira parte do Problema V elaborada pelo Grupo III

Por sua vez, a resolução apresentada na Figura 24 evidencia que o grupo compreendeu o problema pois desenvolve um plano adequado, no entanto demonstra

que não leu com atenção pois não se apercebe que a embalagem escolhida é apenas a que tem menor volume. Ao determinar o volume do bombom de modo incorreto, conseqüentemente vai determinar o número de bombons errado. Uma vez que o grupo não apresenta os cálculos efetuados é impossível verificar onde ocorreu o erro na determinação do volume do bombom.

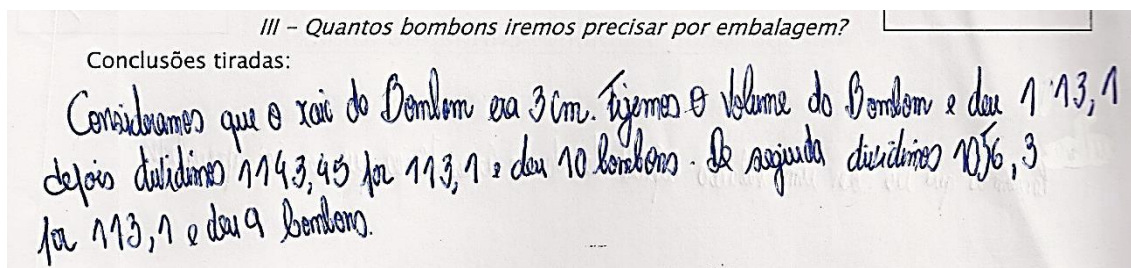


Figura 24 - Resolução da terceira parte do Problema V elaborada pelo Grupo VI

Esta resposta demonstra ainda que muitos alunos não apresentam todos os cálculos, dificultando a deteção do erro ou erros efetuados. Este grupo evidencia ainda que não está a efetuar a relação entre o problema e a realidade, pois não se apercebe que 10 bombons deste tamanho não encheriam uma embalagem com as dimensões de uma folha de papel com o formato A₄. É comum os alunos efetuarem os cálculos e aceitarem os resultados sem se questionarem sobre a validade dos mesmos.

Procurando fazer uma síntese da análise atrás descrita, verificamos que os alunos de um modo geral compreendem o problema. Já a definição de uma estratégia adequada para a resolução do problema por vezes está condicionada por lacunas que os alunos apresentam de conceitos que já deveriam estar apreendidos e clarificados. A execução do plano definido pelos alunos está condicionada por dificuldades que os alunos apresentam em realizarem raciocínios no abstrato. São alunos que revelam problemas de visualização de entes geométricos não só no espaço como no plano. Há ainda alunos que realizam cálculos desnecessários ou mesmo disparatados revelando falta de concentração no que estão a realizar e falta de sentido crítico do trabalho que estão a desenvolver. A reflexão sugerida pelo modelo de Polya não é realizada pelos alunos na maior parte das resoluções.

No entanto, verificamos que proximidade das situações problemáticas proposta da realidade dos alunos, por vezes facilitou o trabalho a desenvolver.

O trabalho desenvolvido por alguns grupos ao longo do estudo revela que há alunos nesta turma que conseguem desenvolver raciocínios matemáticos estruturados e apresentá-los com clareza.

4.1.3. Resultados obtidos através do questionário de recolha da opinião dos alunos sobre o trabalho desenvolvido durante a implementação da ABRP

Após a resolução de todos os problemas propostos foi aplicado aos alunos intervenientes nesta investigação um pequeno questionário com o objetivo de recolher a opinião da turma sobre os problemas resolvidos e as aulas em que decorreu a sua resolução (Anexo 4).

Uma vez que os questionários são anónimos, a análise das respostas foi feita, questão a questão.

Apresentamos apenas as respostas a cada questão que evidenciam dados importantes para responder às questões que deram origem a este estudo.

Na primeira questão, as opiniões dos alunos sobre o problema que mais gostaram de resolver, dividiram-se. O Problema II – Medir alturas e o Problema IV- Caberá o tubo no camiãõ?, foram os que mais agradaram aos alunos.

Várias são as razões apontadas para esta situação. Uma das razões indicadas relaciona-se com o facto de estes problemas fazer os alunos pensar ao mesmo tempo que se divertem, como se pode ler nas respostas,

O problema que mais gostei de resolver foi o Problema II, porque foi interessante e fez-me pensar qual seria a altura da escola

O problema que mais gostei de resolver foi 'caberá' o tubo no camiãõ? Escolhu este pois diverti-me a fazê-lo e acima de tudo fez-nos pensar.

Os alunos mencionam ainda o facto de poderem relacionar o problema preferido com algo que conhecem, encontrarem uma relação deste com o quotidiano ou então este lhes despertar a curiosidade, como se pode confirmar através das respostas que se apresentam em seguida.

O que eu mais gostei de resolver foi "cobera' o tubo no camiãõ" porque ~~er~~ foi um problema que ainda não tinhamos feito algum exercicio do género no aula e podemos associar a' estrutura de solo de aula.

O problema que mais gostei de resolver foi o problema V por este tipo de problema e o que mais utilizamos diariamente para comprarmos produtos.

O problema que eu gostei mais de resolver o problema IV - cobera' o tubo no camiãõ porque esse um problema muito interessante exigiu que não descobriamos de varias maneiras como é que o tubo cobria a esse um problema que despertou a curiosidade.

Há no entanto alunos que respondem que gostam de determinado problema por o considerarem fácil ou por gostarem dos conteúdos aplicados na sua resolução como se pode ler nas respostas

Eu gostei mais de I porque se mais fácil nos também se divertido.

O problema que gostei mais de fazer foi o ~~primeiro~~ ^{primeiro} pois achei que a matéria era fácil por isso compreendi melhor.

Eu gostei mais do Problema III, porque gosto da matéria que se tem de aplicar nesse problema, e também porque tenho mais facilidade nesta matéria.

Quisemos saber, em que problema, os alunos sentiram mais dificuldades e porquê. As opiniões, dividiram-se entre os problemas II- Medir alturas, IV- Caberá no camião e V- Que tipo de embalagem escolher?

As justificações dos alunos para essa escolha são praticamente as mesmas: dificuldades em compreender o que é pedido ou dificuldades em definir uma estratégia como se pode verificar através das próximas respostas,

Que tipo de embalagem devemos escolher, porque não estava a perceber o que o problema queria dizer.

O problema que senti mais dificuldades foi o problema IV, porque tínhamos de descobrir a diagonal espacial. Porque eu não tinha percebido muito bem como fazer-lo.

O problema que senti mais dificuldade na sua resolução foi o problema II - Medir alturas, pois ao início o meu grupo estava um pouco encoado sobre o que fazer pois não sabíamos por onde, nem como começar a medir.

O que senti mais dificuldades foi realmente o de saber se cabe o todo no camião, por isso ao início não sabia como é que se resolveu e pelo que não todos iriam estar.

O problema que mais senti dificuldades foi o problema V - Que tipo de embalagem devemos escolher?, porque para mim e para nós (o meu grupo) tivemos de fazer muitas "discussões" entre nós, debates para ver quem estava certo dentro do grupo. Depois, começámos a calcular as embalagens, era muito difícil, mas fizemos.

Há alunos que referem ainda, a associação dos problemas a conteúdos mais difíceis fazer aumentar as dificuldades sentidas na sua resolução. São exemplo desta situação as respostas,

O problema em que senti mais dificuldades foi o problema IV, porque foi o problema ~~III~~ que estava relacionado com a matéria que eu considero mais difícil.

Foi o último porque talvez o material fosse mais difícil e as fórmulas são difíceis de saber

Com a terceira questão quisemos saber, de um modo geral, quais as dificuldades sentidas na resolução dos problemas. Uma das dificuldades apontadas foi compreensão do que lhes é pedido. Uma das razões mencionadas pelos alunos para sentirem esta dificuldade, e de acordo com as respostas que apresentamos em seguida, é considerarem a linguagem usada no enunciado do problema pouco clara e os problemas não serem diretos.

As dificuldades sentidas na resolução destes cinco problemas penso que tenha sido por vezes não estar com muita atenção a problema e por isso não conseguir entender o que o professor pede para a sua resolução.

Os problemas serem confusos não são diretos

Outra das dificuldades apontadas pelos alunos é a interpretação das figuras. Pensamos que esta dificuldade se prende com o facto de os alunos não conseguirem visualizar no plano e no espaço.

Num modo geral as dificuldades que senti, foi por vezes interpretar as figuras.

Há alunos que para além de terem dificuldades de compreensão do que lhes é pedido no enunciado do problema referem sentirem dificuldades em fazer a analogia do problema com a realidade para definir a estratégia a adotar, como se pode ler na resposta.

Senti dificuldades na aplicação de fórmulas e adaptar à realidade, aquilo que o problema pede. Também percebi o que o problema pedia, pois depois de descobrir, o resto era muito fácil.

Verificamos ainda que há alunos que consideram ter dificuldades na definição da estratégia adequada à resolução do problema, pois escrevem,

As dificuldades foi mesmo a resolução,
Como fazer.

As maiores dificuldades foram em sair os contos,
e escolher o caminho a seguir, por resolução dos
problemas.

Em alguns trabalhos foi a escolha de por onde começar a fazer a resolução.

Constatamos ainda que, há alunos que, referem sentir dificuldades na organização e troca de ideias de modo a determinar e verificar qual a estratégia adequada à resolução de problemas pois respondem,

Na resolução destes problemas, senti dificuldades no
facto de ter de organizar e trocar ideias com os
meus colegas.

Os problemas (difíceis) que senti na resolução
destes problemas é que no grupo existiam vários
maneiras de descobrir-mos as respostas e tínhamos
de verificar qual delas se enquadrava no pedido.

Em contrapartida, na questão quatro quisemos saber, qual o problema considerado pelos alunos mais fácil e os motivos para o classificarem dessa forma. Mais uma vez as opiniões dividiram-se referindo dois problemas: o Problema I- Serão iguais ou parecidos? e o Problema III- Qual dos terrenos escolher?

Os motivos apontados pelos alunos são, de um modo geral, a compreensão dos conteúdos associados ao problema, o facto de terem conseguido chegar rapidamente à solução do problema com poucos cálculos e ser, para os alunos, um problema simples. Podemos confirmar esta situação pois os alunos respondem,

O problema mais fácil foi o III porque era fácil e eu sentia a vontade naquela matéria.

No meu ponto de vista o mais fácil foi "serão iguais ou parecidos?" porque neste caso através de imagens consegui a mais tirar as conclusões necessárias.

No meu ponto de vista, o problema mais fácil foi o I porque a matéria não era muito difícil por isso era fácil. Compreendi bem a matéria.

O mais fácil foi o problema I porque não tínhamos que pensar muito e o que precisávamos era simples.

Do problemas propostos que foi mais fácil foi de medir as áreas dos terrenos porque tínhamos de pensar pouco e fazer poucas contas.

Na questão cinco, quisemos que os alunos apontassem os aspetos facilitadores na resolução dos problemas propostos. Os alunos referem, conforme as respostas que se seguem, o trabalho de grupo, as imagens, a manipulação de materiais e a orientação dada pela professora.

Os aspetos que facilitaram foram, em alguns casos, também fazer o que aconteceu nos problemas no sala de aula. Tal como aconteceu no último problema com as caixas pois podíamos visualizar as caixas se enrolássemos umne folha de papel.

Os aspetos que me facilitaram foram os seguintes: as imagens, nos ser-mos um grupo e fazer mais ideias e opiniões, quando da-mos uma sugestão para o grupo de lado e tenta-mos ver se estão certos ou errados.

Os aspetos que me facilitaram a resolução destes problemas foram o facto de a professora explicar claramente o que temos de fazer em cada problema.

Por vezes as imagens ajudam, # também possibilita podermos fazer as figuras com os materiais presentes no aula mas também a parte de estermos em grupo.

Com a questão seis pretendíamos saber se os alunos gostam de apresentar os resultados e os raciocínios efetuados à turma e porquê. Grande parte respondeu afirmativamente justificando com a importância dessa apresentação para a partilha e o debate de raciocínios. As apresentações, segundo os alunos, permitem para além de verificar a existência de outras estratégias de resolução do problema, por vezes mais simples e eficazes, a compreensão de determinados aspetos e a clarificação de ideias. As respostas que se seguem demonstram estas ideias.

Sim, Porque é bom ver o raciocínio de cada um para também podermos melhorar com as ideias dos outros.

~~Sim~~ Sim, porque a turma depois de resolver os problemas explica^o o raciocínio, e quem não sabe, fica sempre a saber.

Sim por que assim vemos diferentes resoluções e discutimos e também podemos perceber novos métodos e como é que se resolve.

Sim, porque assim ficamos a saber como é que os meus colegas chegaram à resposta por outros caminhos se calhar mais fácil ou mais difíceis.

sim, no fim da resolução dos problemas é importante o debate sobre as respostas de cada grupo aos problemas, pois assim vamos os nossos erros, novas estratégias para chegar à resposta e como melhorar e resolver os nossos problemas.

Verificamos, no entanto, que há alunos que não gostam de apresentarem à turma os raciocínios que desenvolveram, provavelmente por se sentirem inseguros pois respondem,

Prefiro não mostrar porque pode estar mal, mas por outro lado vejo em a turma os erros que cometi.

Não, porque tenho medo de ~~ser~~ errar e ao mesmo tempo ouvir risos de outras pessoas.

Não porque pono erro e os meus colegas podem gozar-me na aula mas sim nos intervalos.

Para nós e de acordo com a nossa experiência profissional é diferente um aluno trabalhar individualmente ou em grupo. Na questão sete, quisemos saber como os alunos preferem desenvolver o seu trabalho e as razões dessa preferência. A maior parte dos alunos prefere trabalhar em grupo. Podemos ler algumas razões apontadas pelos alunos para essa preferência nas respostas que se seguem.

Prefiro trabalhar em grupo, porque muitas cabeças pensam melhor do que uma sozinho.

Prefiro trabalhar em grupo porque os outros colegas ajudam-me a resolver os problemas propostos.

Em grupo, porque assim são mais cabeças a pensar e não só podemos discutir os nossos ideias e chegar a uma conclusão.

Prefero trabalhar em grupo porque assim podemos apresentar as nossas propostas aos outros e completá-las, se for necessário.

Prefero trabalhar em grupo, porque as ideias surgem mais rápido e assim em vez de uma pessoa fazer o trabalho todo, assim cada elemento do grupo faz uma tarefa.

Os alunos apontam a interajuda como uma das razões para essa preferência, a discussão e o enriquecimento das ideias. Referem ainda a possibilidade de divisão de tarefas.

No entanto há alunos que preferem trabalhar individualmente. Esses alunos referem, nas suas respostas, que o trabalho de grupo proporciona nas aulas barulho, brincadeiras e por vezes há alunos que não colaboram no trabalho que está a ser desenvolvido.

Individualmente, porque o ruído é menor e não me distraio.

Individualmente porque em grupo é sempre confusão e nem todos fazem o trabalho todo os outros se fogem por eles.

Não sei bem em grupo é bom porque há mais gente a pensar e é mais porque também há muita brincadeira.

O modo como os alunos encaram as aulas em que resolvem problemas foi outro dos parâmetros que os alunos tiveram que refletir na oitava questão. Nas respostas que se seguem, estão registadas algumas opiniões.

Encaro como se fosse uma aula normal porque na disciplina de Matemática é uma coisa normal. Mas eu gosto das aulas, principalmente quando são em grupo pois assim pode-se confrontar as ideias de diferentes pessoas.

As aulas onde é necessário resolver problemas, encaro como mais um desafio, supero as minhas próprias dificuldades, interaccio como grupo para um resultado positivo

Encaro como uma aula de quebra cabeças, porque não gosto de resolver problemas a não ser que seja em grupo.

Para mim, não gosto de resolver problemas, porque tem que se fazer muitos cálculos e pensar muito.

Eu não gosto muito mas também depende da matéria.

Encaro as aulas de matemática porque gosto de desenvolver o meu raciocínio.

Há pois alunos que consideram a resolução de problemas uma tarefa habitual nas aulas de Matemática. Outros alunos consideram estas aulas de quebra-cabeças ou de desafios. Existem alunos que consideram a resolução de problemas como uma forma de desenvolver o raciocínio. Os alunos que não gostam de resolver problemas consequentemente não gostam das aulas em que lhes é proposto essa atividade.

Para finalizar, quisemos saber se os alunos consideravam que a ABRP os podia ajudar a obter sucesso na disciplina de Matemática. A maioria dos alunos responde referindo a importância da resolução de problemas. Os alunos salientam o facto de poderem adquirir conteúdos, aplica-los e desenvolver o raciocínio com a resolução de problemas. Referem ainda que com este tipo de tarefas desenvolvem a capacidade de resolução de problemas em contexto real e no quotidiano. As respostas que se seguem, exemplificam estas ideias.

Sim, porque assim melhora o raciocínio e assim, no futuro
podrá resolver problemas mais facilmente

Sim porque são coisas úteis para o dia a dia e sabendo fazer
problemas é meio caminho andado para ter sucesso o matemático

Sim, pois ajuda-nos a aplicar a matemática à
vida real, o que nos poderá ajudar no nosso futuro
e assim compreender melhor as matérias dadas nas
aulas.

Sim porque é uma forma de aplicarmos os nossos conhecimentos.

Considero que me podem ajudar pois estes problemas
são matéria de a professora dá ou fa deus.
E encaro isto como um desafio, por me alabrar
a mim mesma, não como mais trabalho.

Em jeito de síntese, verificamos que os alunos envolvidos neste estudo gostam de resolver problemas, e até consideram uma tarefa divertida, se conseguirem relacioná-los com o seu dia-a-dia e com aquilo que conhecem e se lhes despertar a curiosidade. A resolução de problemas é uma tarefa habitual nas aulas de Matemática que lhes permite por um lado desenvolver o raciocínio e, por outro, adquirir e aplicar conteúdos. Esta tarefa torna-se ainda mais enriquecedora para eles, quando é finalizada com a apresentação e debate do trabalho desenvolvido, pois são gerados momentos de partilha que permitem a verificação da existência de outras estratégias, e a clarificação de conteúdos e ideias.

Existem contudo alunos que sentem dificuldades ao longo do processo de resolução de problemas. Essas dificuldades, por vezes, são sentidas logo na fase inicial da compreensão do que lhes é pedido por considerarem a linguagem usada no enunciado pouco clara e indireta. As dificuldades de visualização, no plano e no espaço e/ou a não associação do problema a outros já resolvidos ou a conteúdos

matemáticos, condicionam a definição de uma estratégia de resolução e o desenvolvido dos raciocínios necessários. O uso de imagens, manipulação de materiais, o trabalho de grupo e as orientações do professor podem ajudar a colmatar essas dificuldades.

O trabalho de grupo é considerado importante não só pela interação existente mas por permitir a divisão de tarefas, a discussão e o enriquecimento de ideias. Contudo há sempre alunos que preferem trabalhar individualmente pois o trabalho de grupo gera barulho, momentos de brincadeira e há sempre alunos que não colaboram.

4.2. A perspetiva da professora - investigadora sobre a ABRP

A perspetiva da professora - investigadora baseada na análise de conteúdos das grelhas de observação e dos diários de aula, é outro dos pilares para obtermos as respostas às questões postas no início deste estudo.

4.2.1. Análise das Grelhas de Observação

Reis (2011) considera que os dados recolhidos durante a observação de uma aula descrevem comportamentos dos alunos como se, “retratos” fossem, de acontecimentos isolados do contexto em que estavam inseridos. A análise desses dados, permite ao professor, a identificação de padrões e, conseqüentemente, a criação de uma imagem holística do ensino observado.

Decidimos usar na análise do conteúdo das grelhas de observação duas categorias: o trabalho desenvolvido pelos alunos e o trabalho desenvolvido pela docente, nas aulas em que se usou a ABRP.

O Quadro 3 sintetiza as dimensões de análise escolhidas para o tratamento da informação recolhida nas grelhas de observação.

Quadro 3 – Dimensões de Análise das Grelhas de Observação distribuídas pelas duas categorias de análise

Categorias	Dimensões de Análise
Trabalho desenvolvido pelos alunos durante as aulas de ABRP	<ul style="list-style-type: none"> • Dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas e durante a apresentação dos resultados. • Estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas • Motivos que condicionam os alunos na resolução de problemas • Elementos que facilitam a resolução de problemas
Trabalho desenvolvido pela docente durante as aulas de ABRP	<ul style="list-style-type: none"> • Papel do professor na sala de aula

Analisando as grelhas de observação (Anexo 1) e seguindo o Quadro 3 como fio condutor dessa análise, elaboramos uma grelha de análise de conteúdo (Anexo 6.1.).

Na análise do trabalho desenvolvido pelos alunos, começamos por identificar algumas das dificuldades comuns, sentidas pelos diferentes grupos, ao longo da resolução dos problemas propostos.

Muitas das vezes os alunos não conseguem resolver um problema, pois têm logo à partida dificuldade em interpretar os enunciados e consequentemente em compreender o que lhes é pedido. Quando a professora - investigadora regista, como uma das dificuldades sentidas pelos alunos ser em “ *Compreender o que é uma demonstração*”, é um exemplo de que os alunos envolvidos no estudo não estavam a compreender os que lhes estava a ser pedido no enunciado.

Outra dificuldade sentida pelos alunos, logo no início da resolução dos problemas, é na obtenção ou na seleção dos dados necessários para iniciarem a definição de uma estratégia de resolução. Os registos da professora evidenciam que os alunos tiveram dificuldades em,

“Obter as dimensões da folha A4.”

“Obter as dimensões da caixa cilíndrica e do bombom.”

“Seleção de dados.”,

Esta situação pode impedir que os alunos prossigam de uma forma correta o processo de resolução do problema pois podem não estão a usar os dados certos ou estão a usar dados incompletos.

Outra das dificuldades sentidas pelos alunos é na definição de uma estratégia adequada à resolução dos problemas. Sabemos que nem sempre os grupos o conseguiram fazer:

“...Traçam uma estratégia, no entanto nem sempre a mais correta.”

“...Todos os grupos, exceto um, traçam a estratégia adequada.”

Este facto é reforçado quando verificamos os registos efetuados pela professora nas grelhas de análise da resolução dos problemas (Anexo 5).

Uma vez que, uma das fases da ABRP é a apresentação e discussão do trabalho desenvolvido, decidimos analisar as dificuldades sentidas pelos alunos nesta fase. O uso de uma linguagem matemática correta durante a apresentação dos raciocínios desenvolvidos na execução da estratégia definida para a resolução dos problemas, foi a dificuldade mais evidenciada pelos alunos. Encontramos, por exemplo, nas grelhas de observação (Anexo 1), registos da professora - investigadora que considera que os alunos têm dificuldade em,

“ Usar a linguagem correta.”

“Expor o raciocínio oralmente para o grupo turma com linguagem correta.”

“Explicar que o triângulo formado para determinar o comprimento da diagonal espacial é retângulo.”

Depois de identificadas algumas dificuldades sentidas pelos alunos ao longo das diferentes etapas de resolução de um problema, fomos analisar as estratégias utilizadas ao longo do estudo. Sabemos que existem várias estratégias de resolução de problemas, nomeadamente: descobrir um padrão ou regularidade; reduzir a um problema análogo mais simples; trabalhar do fim para o princípio; usar a tentativa acerto e erro; fazer um esquema/desenho/tabela; fazer uma dedução lógica; desdobrar em problemas com questões mais simples; explorar casos particulares ou

criar um problema equivalente. Analisando as grelhas de observação verificamos que os alunos para cada um dos problemas usaram uma estratégia de resolução diferente.

Na resolução do Problema I, os grupos tentam descobrir uma regularidade/regra pois a professora refere que como estratégias utilizadas na resolução do problema: *“...Procurar relações entre os lados, os ângulos e as diagonais de cada quadrado”* Há contudo o Grupo V que procura reduzir o problema a um análogo mais simples pois: *“Interpretação do problema como exemplo de aplicação de uma escala”*

A estratégia utilizada na resolução do Problema II resume-se à identificação de um problema equivalente de modo a usar processos já conhecidos pois a professora refere que o trabalho dos grupos passa por *“Procurar relação entre os comprimentos da fotografia e da sala de aula. Uso da regra de três simples”*

Desdobrar o problema em questões mais simples, foi a estratégia utilizada na resolução do Problema III, uma vez que os grupos usaram a *“Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos”* e o *“ Cálculo das áreas parciais dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição”*.

Para a resolução do Problema IV, os grupos usaram uma estratégia de tentativa acerto e erro, uma vez que o problema foi resolvido através de tentativas de um modo orientado e, em cada caso, os alunos verificaram se a solução encontrada satisfazia as condições do problema. A professora refere que os alunos resolveram o problema através com a *“Determinação das diagonais faciais e da espacial e comparação do comprimento obtido com o do tubo”*.

O Problema V é composto por três partes. Nem todos os grupos resolveram-no na totalidade. Tanto para resolver a primeira como a terceira parte, os grupos que o fizeram, utilizaram uma estratégia já desenvolvida quando resolveram o Problema II – identificação de um problema equivalente. Os grupos que tentaram resolver a segunda parte que consistia numa demonstração, procuraram encontrar a solução através da generalização da solução obtida na primeira parte do problema, o que revela que os alunos procuraram descobrir uma regra. A professora refere que um grupo inicia *“ a demonstração escrevendo as fórmulas”* e outro grupo resolve a questão ao *“Generalizar os volumes”*.

Através desta análise, constatamos que os alunos usaram diferentes estratégias de resolução de problemas tornando a experiência diversificada e enriquecedora.

A nossa experiência profissional leva-nos a reconhecer que existem condicionantes que criam constrangimentos e entraves na evolução do trabalho dos alunos e na concretização dos objetivos pretendidos com a resolução dos problemas propostos. Por detrás de muitas das dificuldades identificadas, tanto na fase de resolução de problemas como na da apresentação de resultados ao grupo turma, estão presentes razões comuns e evidenciadas pelos alunos. As condicionantes aqui apresentadas são comuns a outras tarefas desenvolvidas em qualquer aula de Matemática para além da resolução de problemas. Aspetos registados pela professora nas Grelhas de Observação tais como, dificuldades em,

“Distinguir quadriláteros.”,

“Classificação dos quadriláteros.”,

“Determinar a área de um paralelogramo.”

“Utilidade do Teorema de Pitágoras”,

demonstram que o trabalho dos alunos está por vezes condicionado por lacunas em conhecimentos prévios necessários e na aplicação dos mesmos.

As imagens são utilizadas muitas vezes para complementar os enunciados dos problemas. Os alunos nem sempre as conseguem interpretar e retirar delas todas as informações importantes. Esta situação condiciona a resolução dos problemas e é provocada muita das vezes por dificuldades que os alunos têm de visualização no plano e no espaço. Encontramos nos registos da professora dificuldades sentidas pelos alunos em,

“Relacionar corretamente os comprimentos correspondentes.”

“ Visualizar as dimensões da face de trás.”

“Visualizar o triângulo formado para determinar o comprimento da diagonal espacial.”

que são exemplos de situações observadas que poderão ter condicionado os alunos na definição da estratégia e/ou no desenvolvimento da estratégia adequada que permita a determinação da solução correta dos problemas propostos.

A falta de persistência dos alunos perante um determinado problema pode condicionar a sua resolução com êxito. Os alunos nem sempre tiveram uma atitude

empenhada para concluírem o que lhes era proposto Esta situação torna-se evidente quando a professora refere:

“...Em relação à demonstração facilmente desistiram e alguns grupos passaram à questão III sem se dedicarem à demonstração.”

Em contrapartida, existem sempre elementos que facilitam qualquer trabalho desenvolvido tanto pelo professor como pelos alunos numa aula de Matemática. Um dos elementos facilitadores no desenvolvimento deste estudo, foi o interesse e empenho dedicado à resolução dos problemas propostos que a professora observou na maioria dos grupos ao longo das aulas. O Grupo VII foi o único que apresentou ao longo das aulas uma atitude apenas de interesse. Esta situação talvez se justifique por ser um grupo formado por alunos que não se identificam. A professora - investigadora sentiu que os grupos estiveram menos empenhados na resolução do último problema, provavelmente, como ela regista na grelha de Observação da aula em que propôs o Problema V, porque *“Os alunos nesta fase final do ano já se encontram cansados e têm dificuldades em se concentrarem no que estão a fazer”*.

Outro elemento facilitador no trabalho desenvolvido pelos alunos na resolução dos problemas foi, sem dúvida, o facto desse trabalho ter sido desenvolvido em grupo. A professora - investigadora considera nas diferentes grelhas de observação a existência de um trabalho colaborativo e espírito de entre ajuda que facilita o trabalho desenvolvido.

Em relação ao trabalho desenvolvido pela docente durante as aulas de implementação, um aspeto que pode ser analisado com a ajuda das grelhas de observação, é o papel desempenhado pela mesma. Sabemos que quando um professor adota como metodologia a resolução de problemas, o seu papel deverá ser de incentivador, facilitador e mediador de modo que as ideias apresentadas pelos alunos se tornem produtivas. Verificamos que a professora durante as aulas era solicitada, frequentemente, mais do que uma vez, pelos diferentes grupos. Houve aulas em que foi solicitada mais vezes do que outras. Este facto talvez se justifique pela simplicidade ou complexidade da tarefa proposta. As questões colocadas pelos grupos à docente durante as aulas estão relacionadas com *“Esclarecimento de conceitos”*, *“Confirmação de dados”*, esclarecimento de situações e ou ideias:

“Se o tubo era transportado inteiro...O tubo pode ir enviesado... Se o tubo era transportado dentro do camião”

“Onde estão as dimensões da folha...Como podem obter as dimensões ... Se podem usar a régua para obterem as dimensões da folha... Confirmar se o formato A4 é o da folha do enunciado.”

“O que é uma demonstração”

Outras questões estão relacionadas com a incerteza que os alunos sentem ao definirem uma estratégia:

“Confirmação do caminho traçado.... Confirmação do raciocínio.”

“Confirmação do raciocínio. Ajuda na estimativa.”

“ Confirmar se tinham que usar o Teorema de Pitágoras”

“Confirmação da estratégia usada. “

A confirmação da estratégia iniciada ao longo do estudo foi diminuindo, o que pode transmitir a ideia de os alunos estarem mais seguros e confiantes do trabalho que estão a desenvolver.

Ao analisar o papel desempenhado pela docente podemos considerar que esta era vista pelos alunos como um suporte disponível que os apoiava e lhes dava garantias no trabalho que estavam a desenvolver. Ajudava-os a ultrapassar alguns obstáculos que surgiam para iniciarem a sua estratégia, ao mesmo tempo que lhes transmitia a certeza necessária para avançarem ou continuarem o seu trabalho.

A análise do conteúdo dos registos contidos nas Grelhas de Observação permitiu-nos verificar que, apesar de algumas dificuldades sentidas pelos alunos no processo da resolução de problemas provocadas por vezes por determinadas situações, existem elementos que podem ajudá-los a ultrapassar essas dificuldades e a tornar o processo um momento de esclarecimento, de partilha e de aquisição de conhecimentos matemáticos.

4.2.2. Análise dos Diários de Aula

Para Marcelo Garcia (1999) os diários de aulas podem ser entendidos como a narração de experiências dos professores, onde estes registam as suas observações, analisam, interpretam e refletem as suas experiências pedagógicas ao longo do tempo. Analisando os diários de aula elaborados pela professora - investigadora durante as aulas em que decorreu o estudo e implementou um modelo de ensino e de aprendizagem através da ABRP (Anexo 2), podemos recolher informação que nos auxilie a responder às questões da nossa investigação.

Procuramos identificar aspetos relevantes, tanto no trabalho desenvolvido pelos alunos como pela professora nas aulas em que decorreu este estudo que completassem e confirmassem os dados recolhidos com a análise de conteúdo das Grelhas de Observação. O Quadro 4 sintetiza por sua vez a categorização definida para o tratamento da informação recolhida nos diários de aula.

Quadro 4- Dimensões de Análise dos Diários de Aula distribuídas pelas duas categorias de análise

Categorias	Dimensões de Análise
Trabalho desenvolvido pelos alunos durante a implementação da ABRP	<ul style="list-style-type: none"> • Dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas • Elementos facilitadores na resolução dos problemas
Trabalho da docente na implementação da ABRP	<ul style="list-style-type: none"> • Papel da professora • Constrangimentos sentidos pela professora • Fatores de Desenvolvimento Profissional

Para facilitar a organização do tratamento de dados foi elaborada uma grelha de análise de conteúdo dos diários de aula (Anexo 6.2.).

Começamos por analisar o trabalho desenvolvido pelos discentes durante a implementação da ABRP em sala de aula. Procuramos determinar em que fase, do modelo proposto por Polya para resolver um problema, os alunos sentiam

dificuldades. Verificamos que os alunos revelam dificuldades na definição de uma estratégia adequada. Nem sempre os grupos foram capazes de definir logo uma estratégia e muitas vezes “copiaram” o que viam os outros grupos fazerem.

“Ainda não tinham percebido que a estratégia deles, através das áreas na fotografia, não era válida para determinar a altura da Escola.”

“O RC do Grupo I começou por explicar que quando os colegas começaram a fazer medidas resolveram também medir, mas inicialmente não sabiam o que medir.”

“A R do Grupo IV começou por dizer que tinham inicialmente feito muitas medidas, sem saberem como as iam utilizar. Depois decidiram determinar ao comprimento da sala que seria a altura da Escola... o C respondeu logo que não se podia dizer que a altura da Escola era igual ao comprimento. Perguntei ao grupo o que as tinha levado a concluir daquela maneira e a R respondeu-me que o valor era aceitável e sabia que tinha dado mais ou menos isso ao T logo acharam que estava correta a sua estratégia.”

Os alunos revelaram também dificuldades na fase em que é necessário a avaliação da solução obtida para a validar. Estas dificuldades são consequência da falta de concentração e de sentido crítico dos alunos. A professora relata algumas situações que evidenciam essa dificuldade.

“...verifico que são empenhados, mas a excitação é tanta que não param para refletirem...”

“...desta forma a altura da escola era 23,52 m (muito longe dos 6,9 m reais). Perguntei ao grupo se eles estavam convencidos daquela altura. Responderam prontamente que sim.... Aqui se nota a falta de sentido crítico.”

“Uma das falhas tinha sido não verificarem os cálculos.”

“...esqueceram-se de concluir qual a embalagem que tinha menor volume. A desculpa deles, foi que não tinham lido com atenção o enunciado...”

A resolução de problema e a comunicação matemática são duas capacidades transversais que se encontram associadas. O uso de uma linguagem matemática pouco

clara e mesmo incorreta pelos alunos condiciona a apresentação dos raciocínios desenvolvidos na estratégia escolhida. A professora sentiu essas dificuldades e refere:

“ Os alunos têm muita dificuldade em exporem as suas ideias, de comunicarem matematicamente.”

“... no entanto a principal dificuldade foi em exporem as suas conclusões com uma linguagem correta.”

O trabalho de grupo pode ser considerado um elemento facilitador na resolução de problemas. Sabemos que permite trocar e enriquecer ideias para além de aumentar os conhecimentos que cada um tem. O sucesso de todos, resulta, do trabalho cooperativo dos elementos do grupo. Permite ainda a interação entre alunos e a participação até dos mais tímidos. Nos seus diários a professora - investigadora refere:

“Era um grupo que dividia tarefas.”

“Surpreendeu-me a D que é uma miúda muito tímida. Questionava a C quando não entendia o que ela queria dizer.”

“O RP ajudou o M a esclarecer uma das propriedades que distingue o losango propriamente dito de um quadrado.”

“Era visível o entusiasmo desse grupo a procurar mais relações apesar de serem alunos com muitas dificuldades. Surpreendeu-me o trabalho e o esforço deles.”

“...o grupo de RP já consegue trabalhar e os colegas já ouvem o raciocínio do RP. Compreenderam que lucravam se ouvissem o colega que tinha sempre uma estratégia, às vezes não era a mais direta mas dava para arrancarem.”

Outro elemento facilitador é a motivação que os alunos sentem para executar este tipo de tarefas. Os alunos participantes nesta investigação gostavam deste tipo de tarefas matemáticas. A docente sentiu e descreve em alguns dos seus diários esse gosto.

“Quando soou o toque de saída, houve alunos que perguntaram se iríamos repetir mais vezes a experiência pois tinham gostado.”

“Ficaram todos entusiasmados, pois eles consideram as tarefas proponho desafios e eles gostam de os resolver e até há um pouco de competição”

O uso de elementos do dia-a-dia, para esquematizar as situações, facilita a concretizar algumas situações mais abstratas. A docente e os alunos recorreram a alguns artefactos e isso facilitou a resolução dos problemas.

“Justificarem que o triângulo era retângulo, tornou-se outro obstáculo para a maioria da turma. Voltamos a usar a sala como referência. Todos percebiam que a aresta resultante da junção das duas paredes era perpendicular ao chão.”

“...com a ajuda do lápis e da esferográfica concretizarem a aresta e a diagonal espacial, foi uma ideia rudimentar mas que resultou.”

“Tinham construído uma espécie de modelos e fizeram as medições necessárias.”

O incentivo, o reforço positivo e até o elogio por parte do professor é uma mais-valia para ajudar os alunos na sua tarefa. A professora - investigadora, nas aulas de implementação da ABRP, recorreu a esses artefactos.

“Em voz alta elogiei a turma por estarem a trabalhar bem e a tirarem conclusões “maravilhosas”... Tinha consigo espicaça-los.”

“Eu sorri e disse-lhes que conseguiam, só tinham que pensar um bocadinho.”

“Sorri e esse sorriso deu-lhes confiança para continuarem pois, perceberam que estavam no caminho certo.”

Os alunos sentirem o seu trabalho valorizado, permite motivá-los para a resolução de problemas e torna-se um elemento facilitador neste tipo de metodologia. A professora - investigadora procurou dentro do possível fazê-lo:

“... valorizei todas as intervenções corrigindo aquelas que usavam uma linguagem menos correta. Os alunos desta forma verificavam que estavam todos a contribuir para a descoberta que eu queria que eles fizessem”

Na ABRP o papel desempenhado pelo professor deixa de ser de transmissor para ser um gestor/orientador das aprendizagens. A professora - investigadora procurou desempenhar esse papel ao longo das aulas. O início do trabalho do professor começa fora da sala de aula, na busca de problemas criativos e estimuladores para desafiar as estruturas conceituais dos alunos e desenvolver as

aprendizagens pretendidas. Se os problemas forem situações do dia-a-dia, os alunos identificam-se com o problema e ficam mais motivados para a sua resolução. A docente demonstra essa preocupação e esse cuidado na escolha dos problemas quando refere:

“Quando preparei o problema, julguei que os alunos só iriam ver os quadrados e eles estavam a ir mais além.”

“Queria que eles sentissem que o problema proposto era diferente do exercício de trabalho de casa e o exercício feito na primeira parte da aula.”

“Ter escolhido a determinação da altura da Escola, edifício que conhecem tão bem, foi um fator que aumentou a curiosidade e o interesse pelo desafio.”

“Ao preparar esta atividade tive a preocupação de arranjar uma situação mais próxima da realidade destes alunos. No meio a que pertencem é-lhes familiar a situação de compra de terreno para fazerem casa.”

“É necessário ter cuidado com a linguagem utilizada nas questões para que os alunos não sejam induzidos em situações erradas.”

O professor deve informar os alunos do objetivo da tarefa que propõe. A professora - investigadora preocupou-se em dar essa informação aos alunos:

“... expliquei-lhes que iriam resolver um problema durante os primeiros 45 minutos que os levaria à descoberta de conceitos importantes para a aprendizagem que iriam realizar nas próximas aulas.”

Durante o processo, o professor deve atuar, conduzindo os alunos na descoberta da/das soluções por si mesmo, tendo o cuidado de não interferir demais. É evidente que a professora - investigadora procurou que os alunos revessem o seu raciocínio e refletissem para terem a certeza que, o trabalho que estava a ser desenvolvido, estava correto:

“ Perguntei-lhes o que era isso de “virados” terem a mesma forma para verificar se eles estavam a utilizar bem o conceito de forma.”

“Perguntei-lhes então o que eram figuras semelhantes, o que o T respondeu... Pedi então que descobrissem como é que isso acontecia.”

“Respondi-lhes que verificassem se era válido o raciocínio.”

“Perguntei ao grupo se eles estavam convencidos daquela altura.”

“Para facilitar, aconselhei-os a fazerem divisões na horizontal e na vertical. Desta forma iria evitar perdas de tempo...”

O trabalho de grupo tem por vezes momentos de tensão criados ou pela liderança excessiva de um dos elementos, ou pela falta de empenho de outros ou mesmo por dificuldades de cooperação causadas muitas vezes por problemas externos à sala de aula. O professor necessita de intervir de modo a atenuar essas situações, desenvolver a responsabilização e o respeito pelos outros. A turma que participou nesta investigação foi dividida em grupos e um dos grupos formados era composto por alunos que demonstraram dificuldades em cooperar. A professora necessitou de intervir algumas vezes de modo a gerir alguns conflitos para que tudo corresse bem.

“O L agressivamente respondeu-lhe que eram quadrados, bastava virá-los. Tive que pedir calma ao L.”

“... a A do Grupo VII, levantou-se e disse que queria fazer o exercício sozinho, Pois o L e o M estavam com conversas paralelas e não queriam resolver o problema com ela e o RP... procurei que eles sentissem que juntos poderiam chegar lá mais rápido com a colaboração de todos.”

Na fase da apresentação por parte dos grupos ao grupo turma e da discussão, o professor desempenha um papel de moderador e orientador da discussão procurando que se atinja as metas definidas. Necessita de promover a interação entre os alunos de modo a focar a atenção destes no essencial e concluir com sucesso a construção das aprendizagens pretendidas. Podemos verificar que a professora - investigadora procurou orientar a discussão dos alunos pois,

“Ordenadamente os alunos começaram a apresentar as suas conclusões. Optei por registá-las no quadro e separá-las pois haviam ideias que estavam de acordo com os objetivos da aula...”

“Estimulei ainda a participação mais ativa dos porta-vozes dos grupos.”

“Questionei a turma se achavam correto o raciocínio dos colegas.”

“Pedi ao RP do Grupo VII para explicar a estratégia do grupo dele pois sabia que era diferente e queria gerar discussão.”

“Alertei-os para o perigo de se desviarem quando levam estratégias menos diretas.”

“Costumo deixar grupo a grupo o porta-voz apresentar a sua resolução e argumentar quando questionado por mim ou pelos colegas. “

“Aproveitei para discutir outras variáveis que podiam ser condicionantes da escolha.”

“O C do Grupo li voluntariou-se para ajudar a corrigir o erro das colegas. Fez a substituição certa mas não conseguiu convencer os colegas de qual a caixa que tinha maior volume. Ajudei-o a concluir o seu raciocínio e então os alunos compreenderam.”

Na implementação da ABRP, a professora sentiu alguns constrangimentos e até deceções, nomeadamente:

“Senti que o facto de os alunos não saberem o que era pretendido com o problema poderia os ter levado a tirarem conclusões diferentes das pretendidas.”

“ O inconveniente desse tipo de tarefas é o tempo, pois é difícil prever o tempo que os alunos demoram a resolvê-la.”

“É de lamentar que o programa seja tão extenso e não permita mais vezes este tipo de trabalho.”

“ Como tinha sido eu a ensinar-lhes este subtópico fiquei surpreendida por ninguém se lembrar.”

O processo de ensino e de aprendizagem é um processo que permite não só o enriquecimento dos alunos como do professor. Este deve estar atento, analisar, refletir e avaliar, potenciando a sua criatividade, renovação e evolução, de modo a permitir o seu crescimento e desenvolvimento profissional. Ao analisar os diários de aula da professora - investigadora, verificamos que esta refletiu sobre o que se estava a passar, reconheceu as potencialidades dos acontecimentos e as contrariedades. Por vezes mudou o que tinha planificado para rentabilizar os factos e as evidências com que se deparava. Refere nos seus diários de aula:

“Estas notas, foram importantes para me aperceber das dificuldades dos alunos, da confusão de alguns conceitos e algumas lacunas”

“Fiquei satisfeita. A ideia deste grupo daria para introduzir a noção de razão de semelhança.”

“Refletindo sobre o trabalho desenvolvido, o receio que tinha do problema não ser eficaz logo se desvaneceu e até verifiquei que posso usá-lo para explorar outros conteúdos. “

“Fiquei preocupada com algumas ideias erradas de alguns conceitos que os alunos apresentam. Irei elaborar uma ficha para esclarecer esses conceitos. “

“Terei que ter mais cuidado na escolha do próximo problema.”

“Aproveitei para fazer a revisão dos quadriláteros. Não podia permitir que esta confusão continuasse.”

“Tenho consciência que há alunos que apesar de considerarem este subtópico acessível nem sempre vão resolver com sucesso as tarefas propostas sobre o assunto.”

A análise de conteúdo dos diários de aula permitiu-nos identificar os constrangimentos sentidos pelos alunos e pela professora nas aulas em que decorreu o estudo e aspetos que facilitaram o trabalho desenvolvido tanto pelos alunos como pela professora nas aulas em que se utilizou um modelo de ensino e de aprendizagem através da ABRP. Esta análise permitiu-nos ainda caracterizar o papel e o trabalho da professora - investigadora antes, durante e depois das aulas em que decorrer o estudo.

4.3. Cruzamento de perspetivas sobre a ABRP

A triangulação dos dados obtidos durante a investigação permite-nos o cruzamento de dados que contribuem para a obtenção de respostas às nossas questões de partida e para a reflexão que nos ajuda a edificar conclusões sobre o estudo efetuado. Verificamos que existem dois elementos comuns referidos nas perspetivas dos alunos e da professora-investigadora: as dificuldades sentidas na resolução de problemas e os elementos facilitadores nesse processo. Resolvemos cruzar as informações obtidas, sobre como se tratasse de dois olhares diferentes mas no mesmo sentido. Para facilitar a leitura, organizamos a informação nos Quadros 5 e 6.

Quadro 5 – Cruzamento de perspetivas sobre as dificuldades sentidas na resolução de problemas

	Perspetiva dos alunos			Perspetiva da professora	
	Questionário de opinião sobre a disciplina e as aulas de Matemática	Produções dos alunos durante a resolução dos problemas propostos	Questionário de opinião sobre as aulas de ABRP	Grelhas de observação	Diários de aula
Dificuldades sentidas na resolução de problemas	Na definição de uma estratégia de resolução	Na compreensão do que lhes é pedido	Na compreensão do que lhes é pedido	Na compreensão do que lhes é pedido	Na interpretação do enunciado do problema
	Na explicação da estratégia definida	Na definição de uma estratégia adequada	Na definição de uma estratégia	Na seleção de dados	Na apresentação da estratégia e do raciocínio desenvolvidos
		Na explicação do raciocínio desenvolvido		Na utilização de uma linguagem matemática correta na explicação oral ou por escrito do raciocínio desenvolvido	Na validação da solução obtida
		Na utilização de uma linguagem matemática adequada			
		Na validação da solução			

Quadro 6 – Cruzamento de perspetivas sobre os elementos facilitadores da resolução de problemas

	Perspetiva dos alunos			Perspetiva da professora	
	Questionário de opinião sobre a disciplina e as aulas de Matemática	Produções dos alunos durante a resolução dos problemas propostos	Questionário de opinião sobre as aulas de ABRP	Grelhas de observação	Diários de aula
Elementos facilitadores	Gosto de trabalharem em grupo Gosto de resolverem desafios Gosto de aulas em que os alunos participam ativamente		O trabalho de grupo As imagens A manipulação de materiais A orientação dada pela professora	Atitude de interesse e empenho dos alunos durante a resolução dos problemas	Trabalho desenvolvido em grupo Motivação dos alunos O uso de elementos do quotidiano para exemplificar determinadas situações O reforço positivo e valorização por parte da professora

Interpretando as informações contidas nestes quadros verificamos que existem pontos comuns em ambas as perspetivas nomeadamente, os alunos sentem durante o processo de resolução de problemas, dificuldades na compreensão do que lhes é pedido no enunciado dos problemas, na apresentação da estratégia e do raciocínio desenvolvido, com o uso de uma linguagem matemática adequada e na validação da solução encontrada. Encontramos ainda, em ambas as perspetivas, referencia ao

trabalho de grupo como um elemento facilitador no processo de resolução de problemas.

Há no entanto, aspetos que foram apontados em cada uma das perspetivas que não são comuns, mas que são importantes para as nossas conclusões, pois de uma maneira ou doutra complementam-se. Esses aspetos, são nomeadamente, o facto de os alunos referirem que durante o processo de resolução de problemas sentem dificuldades em definir a estratégia adequada e a professora - investigadora mencionar que os alunos têm dificuldades em selecionarem os dados necessários para a resolução do problema. Por outro lado, em relação aos elementos facilitadores da resolução de problemas, os alunos apontam o gosto de resolverem desafios e o gosto por participarem ativamente nas aulas, as imagens, a manipulação de materiais e a orientação dada pela professora enquanto, a professora- investigadora considera a atitude de interesse e de empenho, a motivação demonstrada pelos alunos, o uso de elementos do quotidiano para exemplificar determinadas situações e o reforço positivo e a valorização por parte da professora.

Conclusões

Neste capítulo, apresentamos algumas reflexões finais sobre o trabalho desenvolvido e as conclusões deste estudo de modo a dar resposta às questões que serviram de ponto de partida para a sua realização. Mencionamos ainda algumas limitações e constrangimentos que surgiram durante o estudo. Por fim, sugerimos alguns temas que podem ser desenvolvidos em investigações futuras.

Reflexões Finais e Principais Conclusões

O estudo realizado e apresentado neste trabalho, visa determinar de que forma um modelo de ensino desenvolvido através da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP), pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático em alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico. Para o concretizar, planificamos a abordagem de alguns tópicos matemáticos, do tema da Geometria, utilizando um modelo de ensino desenvolvido através da ABRP. Implementamos os materiais que selecionamos e adaptamos para esse fim, na sala de aula. Por último, analisamos o efeito dessa aplicação no desenvolvimento do pensamento matemático em alunos de uma turma do oitavo ano de escolaridade. Os problemas propostos, foram sempre resolvidos em grupo, de modo a que os alunos pudessem interagir, partilhar e confrontar ideias. Pretendíamos, com esta estratégia, organizar o ensino de modo a mobilizar o pensamento dos alunos, tornando-os mais críticos, autónomos e interventivos.

Estamos de acordo com Leite e Afonso (2001), quando estas autoras baseadas em Margetson (1997), referem que implementar um ensino desenvolvido através da ABRP coloca desafios muito grandes aos intervenientes e especialmente aos professores, dadas as diferenças que existem entre este e outros tipos de ensino. Os alunos e a professora desempenharam papéis diferentes dos de uma aula de ensino mais tradicional e, conseqüentemente, o método de trabalho e o modo de estar no processo de ensino aprendizagem de cada um dos intervenientes são diferentes.

No trabalho desenvolvido pelos alunos, durante este estudo, procuramos

identificar os constrangimentos que surgiram, durante a resolução dos problemas propostos e a apresentação dos resultados, fruto das dificuldades sentidas pelos alunos. Tentamos ainda reconhecer os elementos que facilitaram o trabalho desenvolvido pelos alunos durante a resolução dos problemas propostos. No trabalho desenvolvido pela professora, procuramos identificar a importância do papel desempenhado por esta durante a implementação da ABRP, as suas preocupações, as dificuldades e constrangimentos sentidos para e durante a implementação deste tipo de ensino. Procuramos ainda determinar quais os aspetos que permitiram o crescimento e desenvolvimento profissional da professora.

Após a análise dos dados e reflexão sobre a mesma, podemos concluir que ao recorreremos a um ensino através da ABRP, contribuimos para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos participantes. De acordo com Polya (2003), este desenvolvimento passa não só por raciocínios rigorosos ou formais mas também por processos informais como argumentar e generalizar a partir de observações, efetuar comparações/analogias, reconhecer ou descobrir o conceito matemático subjacente. Durante a implementação da ABRP, os alunos foram confrontados e enriquecidos por experiências similares a estas situações. A busca de estratégias para resolverem os problemas, o reconhecimento das causas das dificuldades sentidas em definir a estratégia adequada ou até na determinação da solução correta e o facto de serem confrontados durante a discussão da sua resolução, tanto pela professora como pelos colegas, são experiências que contribuem, no nosso de vista, para o desenvolvimento do pensamento matemático. Os próprios alunos, quando questionados sobre o trabalho que desenvolveram durante este estudo referem que a resolução de problemas é uma tarefa habitual nas aulas de Matemática que lhes permite por um lado desenvolver o raciocínio e, por outro, adquirir e aplicar conteúdos. Esta tarefa torna-se, do ponto de vista deles, mais enriquecedora quando é finalizada com a apresentação e debate do trabalho desenvolvido e dos resultados obtidos. São criados momentos de partilha que lhes permite reconhecer outras estratégias, e clarificar conteúdos e ideias. Reconhecem ainda a possibilidade deste tipo de tarefas desenvolver a capacidade de resolução de problemas em contexto real e no quotidiano.

Através do questionário de opinião sobre a Matemática e as aulas desta

disciplina, verificamos que a turma escolhida, tem uma percepção positiva da Matemática. Consideram-na uma disciplina motivante, interessante e muito útil, que ajuda-os no desenvolvimento da abstração e da rapidez do pensamento e prepara-os para o futuro. Por outro lado é uma turma que gosta de trabalhar em grupo e de participar ativamente nas aulas. Gostam das aulas em que lhes são propostas tarefas que os obriguem a explorar, descobrir e investigar. Ora, a turma reúne um conjunto de características que demonstra estar recetiva a esta metodologia e isso torna-se um fator favorável para o sucesso do estudo.

Nos problemas propostos à turma, para desenvolver a ABRP, de um determinado subtópico, nem sempre, todos os grupos, conseguiram determinar a solução. No entanto, não consideramos que este facto seja indicador que tenhamos falhado no nosso objetivo principal – determinar, de que forma o uso deste tipo de abordagem, contribui para desenvolver o pensamento matemático dos alunos.

Do nosso ponto vista e, de acordo com investigadores americanos do Center for Teaching Excellence da Virginia Commonwealth University referidos no Capítulo 1 deste trabalho, a implementação da ABRP é um processo que se pode desenvolver em três fases: apresentação do problema pelo professor aos alunos/grupos; definição de uma estratégia adequada, por parte dos alunos/grupos, que permita a determinação da solução ou soluções e por fim a apresentação e discussão em grande grupo turma. Existem sempre constrangimentos que podem impedir que o processo seja bem sucedido resultantes das dificuldades sentidas tanto no trabalho desenvolvido pelo professor e/ou pelos alunos. Convém refletirmos sobre este aspeto.

Seguindo o modelo de Polya (2003), a resolução de problemas divide-se em quatro etapas: 1) Compreensão do problema; 2) Estabelecimento de um plano; 3) Execução do plano e 4) Reflexão sobre o que foi feito. Os alunos referiram que, por vezes têm dificuldades em compreenderem o que lhes é pedido, no entanto, à exceção do último problema, verificamos que esta não era a sua principal dificuldade. Os alunos têm sim dificuldades em definirem ou desenvolverem a estratégia que os conduza à solução. Estas dificuldades geram situações constrangedoras para os alunos no desempenho das tarefas propostas no estudo.

Estas dificuldades estão relacionadas com lacunas que os alunos apresentam, e que acumulam ao longo do tempo, em conhecimentos adquiridos previamente e que

necessitam mobilizar para a resolução do problema.

Outra situação que condiciona a definição de uma estratégia, ou o seu desenvolvimento correto, é a dificuldade sentida pelos alunos, e evidenciada ao longo do estudo, na visualização no espaço. A visualização corresponde a transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. Para ultrapassarem esta dificuldade, os grupos recorreram a representações com elementos do dia-a-dia.

Depois de definida uma estratégia e de encontrada uma solução, os alunos nem sempre refletem sobre a validade da mesma, acabando por aceitar o primeiro valor que determinaram, por vezes disparatado. Esta situação surge devido à falta de sentido crítico, associada à falta de atenção e concentração na execução da tarefa. Muitos dos casos de solução incorreta são consequência de cálculos intermédios errados, ou de terem sido levados em conta dados incorretos. Ao longo da resolução dos diferentes problemas o sentido crítico foi “espicaçado” pela professora, para que os alunos o desenvolvessem e estivessem mais atentos aos resultados que obtinham.

Concordamos com Polya (2003), sobre a importância de os alunos refletirem sobre resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que os levou até este. Só assim poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.

Outras situações constrangedoras, vividas pelos alunos neste estudo, ocorreram na fase da apresentação e discussão em grupo turma, geradas pelo uso, por parte dos alunos, de uma linguagem matemática pouco desenvolvida e por vezes incorreta. Muitos dos significados usados em Matemática são bem diferentes daqueles que usamos diariamente em linguagem corrente. A fase da apresentação e da discussão em grande grupo, de modo a filtrarmos os diferentes raciocínios e obtermos os conhecimentos principais que, se pretendia aprender com a resolução do problema, demonstrou que os alunos tinham grandes dificuldades em comunicar com uma linguagem matemática correta e por vezes o que diziam afastava-se do que efetivamente deveriam dizer.

A comunicação escrita e oral dos alunos torna-se parte integrante da resolução de problemas, uma vez que permite aos alunos argumentar e consequentemente organizarem o seu próprio pensamento. Verificamos que, por escrito a maior parte das resoluções resumiam-se a cálculos sem qualquer justificação adicional e oralmente, os

alunos tinham dificuldade em apresentarem os seus raciocínios com uma linguagem adequada. Ao longo das aulas, sentimos uma evolução significativa, na comunicação dos seus raciocínios. Esta fase de apresentação e discussão também se torna num momento constrangedor para os alunos mais tímidos que não gostam de se expor com receio de errarem.

Podemos então concluir que, o principal constrangimento que surgiu aos alunos durante a implementação da ABRP foi, por vezes, não conseguirem resolver os problemas propostos. Esta situação é fruto das dificuldades sentidas pelos alunos ao longo das diferentes fases do processo de resolução de problemas e que são causadas por diversas limitações que condicionam a aprendizagem e o progresso dos alunos. Reconhecemos ainda que estas causas estão presentes em qualquer aula de Matemática, independentemente do modelo de ensino e de aprendizagem utilizado. No entanto, outros constrangimentos foram sentidos pelos alunos, nomeadamente na fase de apresentação e discussão de resultados.

Identificados os constrangimentos e os motivos aparentes para a sua existência, torna-se necessário identificar os mecanismos que facilitaram o desenvolvimento das tarefas. Já atrás referimos que os alunos para ultrapassarem as dificuldades sentidas na visualização, concretizaram a situação com elementos do dia-a-dia. A concretização através do uso de materiais, ou de situações do quotidiano é um dos elementos facilitadores evidenciados neste estudo.

No cruzamento das perspetivas dos alunos com a da professora - investigadora, verificamos que o trabalho de grupo é considerado um elemento facilitador na resolução de problemas. Para Matos e Serrazina (1996), o trabalho de grupo permite aos alunos trocar ideias, discutir conjeturas e raciocínios, processos de resolução e provocar uma maior reflexão sobre os resultados/soluções no contexto do problema com o conseqüente desenvolvimento de competências sociais. Os alunos trabalharam de colaborativa e cooperativa o que permitiu a interação, a partilha e a negociação de significados entre todos incluindo os alunos mais tímidos e os que revelam mais dificuldades e menos predisposição para a resolução de problemas. O trabalho da professora e o papel desempenhado pela mesma na implementação da ABRP, segundo a discussão de dados pode ser considerado um elemento facilitador para o sucesso que os alunos conseguiram obter durante a resolução dos problemas propostos.

Na ABRP, o aluno é um construtor de aprendizagens dinâmico e o professor deixa de ser comunicador do conhecimento para ser observador, organizador, gestor, monitor e incentivador dessas mesmas aprendizagens. O trabalho desenvolvido pela professora, foi outro dos aspetos em que se focou este estudo.

Neste modelo existem três fases distintas no trabalho do professor. Na primeira fase, o professor seleciona os problemas e planifica as aulas. A segunda fase corresponde à aula, enquanto os alunos resolvem o problema e o professor acompanha o trabalho, servindo de suporte, mas nunca fornecendo a resposta. O terceiro momento corresponde à fase da discussão em que o professor é um incentivador e moderador da mesma, focalizando a mesma para o aspeto(s) relevante(s) e sistematizando as aprendizagens.

Os dados revelam que a principal preocupação e dificuldade da professora foi na escolha dos problemas a propor. Matos e Serrazina (1996) afirmam que os problemas devem ser apresentados como desafios de modo a estimular o raciocínio e a criatividade na descoberta de estratégias adequadas e tratar o mais possível, situações reais. A professora revela, em alguns momentos dos seus diários de aula, que na escolha dos problemas propostos teve a preocupação de proporcionar a resolução de problemas diferentes, desafiantes, relacionados, dentro do possível, com o quotidiano ou com situações que fossem familiares aos alunos. Os alunos reforçam o quanto é importante este tipo de preocupação, quando justificam a escolha do problema que mais gostaram de resolver com o facto de os fazer pensar, ao mesmo tempo que se divertem, de poderem relacionar com algo que conhecem, encontrarem relação com o quotidiano ou lhes despertar a curiosidade ou, simplesmente, por o considerarem fácil ou por gostarem dos conteúdos aplicados na resolução desse problema. Não podemos esquecer que o que representa um problema fácil para alguns alunos não será necessariamente para outros, dependendo das suas experiências e, como é evidente, dos seus conhecimentos.

A professora teve ainda a preocupação de escolher problemas em que os alunos não usassem sempre o mesmo tipo de estratégia. Houve mesmo problemas, em que os grupos usaram estratégias diferentes, o que nos permite concluir que neste ponto, os alunos foram confrontados e obrigados a nem sempre pensarem da mesma forma.

Verificarem assim que há estratégias diferentes que podem levar à solução correta. Esta situação contribuiu para o desenvolvimento do pensamento matemático.

De acordo com a análise de dados, a professora esteve atenta e conseguiu ser motivadora, incentivadora e facilitadora, do trabalho dos alunos, ao longo do processo de resolução de problemas estando sempre disponível para as solicitações dos alunos. Na fase da discussão desempenhou o seu papel de moderadora e incentivadora de modo a selecionar e a focar os alunos nos conceitos e conhecimentos que pretendia que os alunos adquirissem.

Podemos concluir que o uso deste modelo de ensino e de aprendizagem, permitiu que a professora desempenhasse diferentes funções durante a aula distintas da tradicional transmissão de conhecimentos. Contudo o não conseguir concretizar os objetivos definidos com o problema, a definição do tempo necessário para resolver o problema nem sempre ter sido a mais adequada e a própria gestão do programa foram constrangimentos sentidos na implementação da ABRP nas suas aulas.

É importante referir ainda que este estudo permitiu o desenvolvimento pessoal e profissional da professora - investigadora. A utilização da ABRP nas aulas de Matemática ainda não é comum. A professora - investigadora ao implementar esta metodologia não ensino da Matemática ousou inovar as suas práticas pedagógicas. Os momentos de reflexão na ação e sobre a ação tornaram-se mais frequentes e possibilitaram-lhe a compreensão, não só dos processos usados pelos alunos na resolução de problemas, como identificar os aspetos a alterar e a melhorar na sua prática pedagógica.

Limitações e Constrangimentos

Ao longo do estudo sentimos algumas limitações e constrangimentos. O facto de se estar a usar problemas para a descoberta de novos conhecimentos torna difícil prever o tempo que os alunos demoram a desenvolver o seu trabalho eficazmente. Estamos limitados por um programa extenso que restringe o tempo disponível para a abordagem de cada tópico e conseqüentemente para a implementação da ABRP nas aulas.

A resolução de problemas em grupo, permitiu verificar o desenvolvimento do pensamento matemático da turma e não em cada um dos alunos participantes.

O facto de estarmos a utilizar durante este estudo, uma metodologia essencialmente de carácter qualitativo, dada a sua subjetividade é outra limitação sentida. Na tentativa de a ultrapassar, utilizamos vários instrumentos de recolha de dados e diversos processos de tratamento de dados.

Um dos constrangimentos que surgiu durante o estudo, foi a alteração dos documentos orientadores do ensino da matemática ao longo do estudo. No início da investigação, nas duas primeiras aulas de implementação da ABRP, o Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais, ainda era válido. Deixou de ser documento orientador e de referência, no ensino, a partir de meados de dezembro de 2011.

Uma vez que os tópicos do tema matemático Geometria, escolhido para desenvolver o estudo, estarem em termos temporais, bastante espaçadas devido à planificação da disciplina, foi outro dos constrangimentos que sentimos.

A resolução de problemas é uma das tarefas comuns nas aulas da professora - investigadora no entanto, a maior parte das vezes, tem como finalidade a aplicação de conhecimentos e não a aprendizagem de novos conhecimentos. A experiência da professora - investigadora no uso desta metodologia na sala de aula é pouca e isso fez-la sentir-se por vezes insegura nas suas opções e na gestão da planificação da aplicação das tarefas. Os professores nem sempre estão sensibilizados para o uso de determinadas metodologias. A formação contínua poderá desempenhar um papel importante na sensibilização dos professores e no desenvolvimento de competências que os ajude a enfrentar estes novos desafios pois de acordo com Day

há dados que demonstram que a formação contínua pode produzir, e de facto produz, um forte impacto no pensamento e na prática dos professores e, conseqüentemente, de uma forma indirecta, na qualidade das experiências de aprendizagem dos alunos na sala de aula. (2001:213)

Recomendações para Futuros Estudos

Optamos por realizar um estudo de caso, contudo considerarmos que uma investigação-ação, sobre a mesma temática, poderia ter sido mais enriquecedora,

tanto para a professora como para os alunos. A investigação ação é um processo sistémico que se apresenta sob a forma de ciclo repetido de fases: planificação, ação, observação e reflexão. Em cada ciclo haveria Investimento das reflexões da docente na construção/implementação do ciclo anterior. A limitação do tempo e da planificação da disciplina não permitiu o uso deste tipo de metodologia.

Neste estudo determinamos algumas formas da ABRP contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático em alunos do 3.ºCiclo do Ensino Básico. Foi feita a abordagem de tópicos no tema da Geometria. Sugerimos o mesmo estudo com tópicos de outro tema matemático e/ou com alunos do ensino secundário.

Para finalizar, não nos podemos esquecer que um problema é:

uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio de criar ambientes de aprendizagem que formem sujeitos autónomos, críticos e com capacidade de apresentar propostas, capazes de questionar factos, interpretações e explicações, de terem critérios, revelando-se, ao mesmo tempo, abertos aos critérios das outras pessoas. (Corts & Vega; 2006, p. 7)

logo, a resolução de problemas é um tema que poderá ser explorado em diversas vertentes abrindo um leque enorme de possibilidades de estudos.

Bibliografia

- Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Revista Educação e Matemática*, Nº 8, 7-10 e 35. Acedido em <http://www.esev.ipv.pt/mat1Ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf>
- Abrantes, P. (1995). *O Trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: A experiência do projecto MAT789*. (Tese de Doutoramento), Universidade de Lisboa, Lisboa: Associação de Professores de Matemática
- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.
- Afonso, P., & Silva, R. (2005). Análise do perfil de resolvedores em geometria quando utilizam um software específico – O Geometer's Sketchpad. In *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Évora, 7-8 Nov. 2005 (pp. 169-181).
- Alarcão, I. (2009). Formação e supervisão de professores. Uma nova abrangência. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação*, N.º8, pp. 119-128. Acedido em <http://sisifo.fpce.ul.pt>
- Anderson, G., & Arsenault, N. (1999). *Fundamentals of educational research*. London: Falmer Press Teachers Library.
- Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: Gabinete de Estudos e do Planeamento do Ministério da Educação.
- Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70

- Bell, J. (2008). *Como realizar um projecto de investigação: um guia para a pesquisa em ciências sociais e educação* (4.ª ed.). Lisboa: Gradiva.
- Boavida, A. M. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.
- Boavida, A.M., Paiva, A.L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGiDC
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação* (2.ª ed.). Porto: Porto Editora.
- Borrvalho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática: Proposta de um programa de intervenção*. Lisboa: APM.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: DGIDC. Acedido em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm
- Carreira, S. (2005). Erros de Amesterdão: O ambiente de aprendizagem e o potencial da relação entre a matemática e as situações do mundo real. In *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas: Actas do Encontro Internacional em homenagem a Paulo Abrantes*, Lisboa, 14 -15 de Jul. 2005 (pp.121-138). Lisboa: APM
- Carvalho, C.J. (2009). *O ensino e a aprendizagem das ciências naturais através da aprendizagem baseada na resolução de problemas: Um estudo com alunos do 9º ano, centrado no tema sistema digestivo*. (Dissertação de Mestrado). Acedido em Repositório Institucional da Universidade do Minho (<http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9792/1/tese.pdf>)

- Cohen, L. , Manion, L., & Marrison, K. (2000). *Research methods in education*. (5.ª ed.)
Londres: Routledge.
- Conceição, A. & Almeida, M. (2011). *Matematicamente falando 8*. Porto: Areal Editores.
- Corts, A. V. & Vega, M. L. C. (2006). *Matemática para aprender a pensar*. Porto: ASA Editores.
- Cruz, J. & Carrillo, J. (2004). Qué aprenden los alumnos para la resolución de problemas? In J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (oords.), *La actividad matematica en la aula*, (p. 103-115). Barcelona: Biblioteca de Uno.
- Damas, M.J. & Ketele, J.M. (1985). *Observar para avaliar*. Coimbra: Livraria Almedina.
- Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores. Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora
- Delisle, R. (2000). *Como realizar a aprendizagem baseada em problemas*. Porto: Editora ASA
- Dicionário de Língua Portuguesa Contemporânea (2001), Academia das Ciências de Edição, Lisboa: Editorial Verbo. II volume.
- Duarte, J. (2008). Estudos de caso em educação. Investigação em profundidade com recursos reduzidos e outro modo de generalização. *Revista Lusófona de Educação*, 11, 113-132. Acedido em <http://www.scielo.gpeari.mctes.pt/pdf/rle/n11/n11a08.pdf>.
- Estrela, A. (1990). *Teoria e prática de observação de classes - Uma estratégia de formação de professores* (2.ª ed.). Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica.

Fernandes, D. (1990). Organizar o ensino da resolução de problemas. In H. Guimarães & E. Veloso (Eds.) *ProfMat 89: Actas, Viana do Castelo 1989* (pp. 169-176). Lisboa: APM

Fernandes, D., Lester, F. , Borralho, A. M. & Vale, I. (1997). *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas*. Aveiro: GIRP.

Ferreira, M.S. & Santos, M.R. (2000). *Aprender a ensinar, ensinar a aprender* (3.ª ed.). Porto: Edições Afrontamento.

Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos – Aplicaciones a la investigación educativa*. Barcelona: PPU

Fonseca, L. (2004). Geometria no plano. In P. Palhares, P. (Coord.), *Elementos de matemática para professores do ensino básico* (pp. 251-302). Lisboa: Lidel

GAVE (2004). *PISA 2003 Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de resolução de problemas*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação

Garcia, M. R. (1990). Os alunos e a resolução de problemas e de exercícios: Dificuldades; preferências; comparação de resultados e influências dos vários tipos de problemas na sua resolução. In H. Guimarães & E. Veloso (Eds.) *ProfMat 89: Actas, Viana do Castelo 1989* (pp. 189-200). Lisboa: APM.

Ghiglione, R. & Matalon, B. (1997). *O inquérito: teoria e prática* (3.ªed.). Oeiras: Celta Editora.

Guerra, A. & Vasconcelos, C. (2008). Aprendizagem baseada na resolução de problemas: A reabilitação das ribeiras de Gaia. In A. Calonge Garcia (Org.) , *Actas del XV Simposio sobre Enseñanza de la Geología* (p. 225- 232). Acedido em

http://books.google.pt/books?id=5_WB6F_hi-8C&pg=PA225&hl=pt-PT&source=gbs_toc_r&cad=4#v=onepage&q&f=false

Guimarães, H., Silva, A., Ponte, J.P., Santos, L., Abrantes, M. & Abrantes, P. (Org) (2005). *Paulo Abrantes – intervenções em educação matemática*. Lisboa: APM

Guzmán, M. (1990). *Aventuras matemáticas*. Lisboa: Gradiva

Hayes, J. R. (1989). Creative and cognitive processes in creativity. In J. Glover, R. R. Ronning & C.R. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity* (pp. 33–52). New York: Plenum Press

Jonassen, D. H. (2000). Toward a metatheory of problema solving. *ETR&D*, Vol. 48 n.º4 (p. 63-85). Acedido em <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02300500#page-1>

Leite, L., & Afonso, A. S. (2001). Aprendizagem baseada na resolução de problemas. Características, organização e supervisão. *Boletim das Ciências* 48, pp. 254-260.

Leite, L. & Esteves, E. (2005). Ensino orientado para a aprendizagem baseada na resolução de problemas na licenciatura em ensino de física e química. In B. Silva & L. Almeida (Orgs.). *Actas do VIII Congresso Galaico Português de Psicopedagogia*, Braga, 14-16 Set. 2005. Braga: Universidade do Minho.

Leite, L., Costa, C., Esteves, E. (2008). *Os manuais escolares e a aprendizagem baseada na resolução de problemas: Um estudo centrado em manuais escolares de ciências físico-químicas do ensino básico*. Acedido em <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9863/1/Leite%2c%20Laurin%20da%20manuais%20escolares%20e%20a%20aprendizagem%20basead.pdf>

- Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 229-261). Orlando: Academic Press.
- Lopes, C.A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em matemática*. Porto: Asa Editores
- Loureiro, I. M. (2008). *A aprendizagem baseada na resolução de problemas e a formulação de questões a partir de contextos problemáticos*. Dissertação de Mestrado. Braga: Universidade do Minho.
- Marcelo García, C. (1999). *Formação de professores para uma mudança educativa*. Porto: Porto Editora.
- Matos, J.F. (1992). Atitudes e concepções dos alunos: Definições e problemas de investigação. In M. Brown, D. Fernandes; J.F. Matos & J.P. Ponte (Eds), *Educação Matemática (Seminário de 22-23 de Maio de 1992, Ericeira)*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional e Secção de Educação Matemática de SPCE.
- Matos, J.& Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta
- Menina, F. (2009). *Compreensão e interpretação em matemática: Dificuldades de alunos do 9º ano na resolução de problemas*. (Dissertação de Mestrado). Acedido em Repositório Institucional da Universidade do Algarve
<https://sapiencia.ualg.pt/bitstream/10400.1/256/1/TeseFernandadefinitiva.pdf>
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers
- Moraes, R. (1999). Análise de conteúdo. *Revista de Educação*, 22 (37), 7-32.

- Moreira, L. (1990). Resolução de problemas. In H. Guimarães & E. Veloso (Eds.) *ProfMat 89: Actas*, Viana do Castelo 1989 (pp. 155-157). Lisboa: APM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2.ª ed). Lisboa: APM.
- Neves, M.A, Silva, A.P., Raposo, M.J. & Silva, J.N. (2011). *Matemática 8*. Porto: Porto Editora
- Oliveira, R. (2007). *A robótica na aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do 8.º ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado). Universidade da Madeira, Portugal. Acedido em http://dme.uma.pt/projects/droide/portal/A_robotica_na_aprendizagem_da_Matematica.pdf
- Pacheco, J. A. (1995). *O pensamento e a acção do professor*. Porto: Porto Editora
- Pardal, L. & Correia, E. (1995). *Métodos e técnicas em investigação social*. Porto: Areal Editores
- Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídos por futuros professores de matemática. In D. Fernandes Lester, F. , Borralho, A. M. & Vale, I. (Coords.), *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática* (p. 159-188). Aveiro: GIRP.
- Pereira, P.P. & Pimenta, P. (2010). *Xis- Matemática 7.º ano*. Lisboa: Texto Editores
- Pierce, R. & Stacey, K. (2009). *Using dynamic geometry to bring the real world into the classroom*. Acedido em http://128.250.151.11/sme/research/Pierce_Stacey_GGB.pdf

- Polya, G (1981). *Mathematical learning and understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley.
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva
- Ponte, J. P. (1992). Problemas de matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, 2(2) , 95 – 108.
- Ponte, J.P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Revista Quadrante*, 3 (1), 3-18.
- Ponte, J.P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. Acedido em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/Ponte%2005_GTI-tarefas_gestao2.pdf
- Ponte, J. P. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Revista Interações*, Nº12, 96-114. Acedido em <http://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/340/1/L7.pdf>
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Graça Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Quivy, R. & Campenhoudt, L. (1998). *Manual de investigação em ciências sociais* (2.ªed.). Lisboa: Gradiva
- Ramos, M. (2003). *Matemática: A bela ou o monstro? Contributos para uma análise das representações sociais da matemática dos alunos do 9º ano de escolaridade*.

- (Tese de Doutoramento). Acedido em Repositório Institucional da Universidade de Lisboa http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3114/2/ulsd044553_Tese.pdf
- Reis, P. (2011). Avaliação de aulas e avaliação do desempenho docente. *Cadernos da CCAP-2*. Lisboa. Ministério da Educação-Conselho científico para a avaliação de professores. Acedido em [http://www.ccap.min-edu.pt/docs/Caderno CCAP 2-Observacao.pdf](http://www.ccap.min-edu.pt/docs/Caderno_CCAP_2-Observacao.pdf)
- Savin-Baden, M. (2007). *A practical guide to problem-based learning online*. Londres: Routledge.
- Schoenfeld, A. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance In *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 10, No. 3 (May, 1979), pp. 173-187. Acedido em <http://www.jstor.org/stable/748805>
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Schön, D. A. (1995). Formar professores como profissionais reflexivos. In: A. Nóvoa (Coord.). *Os professores e a sua formação* (2.ª ed.). 77-91. Lisboa: D. Quixote.
- Serrazina, M. L. & Ribeiro, D. (2012). As interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. *Bolema*, 2012, vol.26, n.º 44, 1367-1394. Acedido em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103636X2012000400012&lng=en&nrm=iso
- Silva, D., Leite, C. & Fernandes, P. (2009). *Diários de aula como procedimento de investigação no domínio da biologia e geologia: uma ilustração*. Acedido em <http://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/26318/2/69255.pdf>

Silveira, J. (2001). *O que é um problema matemático?* Acedido em <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>.

Sousa, A. B. (2009). *Investigação em Educação* (2ª ed.). Lisboa: Livros Horizonte.

Stancanelli, R. (2001). Conhecendo diferentes tipos de Problemas. In K.S. Smole & M.I. Diniz. *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 103-120). Porto Alegre: Artmed Editora.

Stewart, I. (1996). *Os Problemas da Matemática* (2.ªed.). Lisboa: Gradiva.

Sousa, A. B. (2009). *Investigação em Educação* (2ª ed.). Lisboa: Livros Horizonte.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual de Investigação em Educação* (2.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vala, J. (1986). A análise de conteúdo. In A. S. Silva & J. M. Pinto (Orgs) (1986). *Metodologia das Ciências Sociais* (9.ª ed.) (pp 101-128). Porto: Ed. Afrontamento.

Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: Um estudo longitudinal de dois casos*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre Investigação Qualitativa em Educação Matemática, O Estudo de Caso. In I. Vale, J. Portela & J. Subtil. *Revista da Escola Superior de Educação* 5.º Volume (pp. 171-202). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In Pedro Palhares (Coord.). *Elementos de Matemática para professores do ensino básico* (pp.7-51). Lisboa: Lidel.

Vázquez, R. & Angulo, R. (2003). *Introducción a los estudios de casos. Los primeros contactos con la investigación etnográfica*. Málaga: Ediciones Aljibe

Vilhena, T. (1999). *Avaliar o extracurricular: A referencialização como nova prática de avaliação*. Porto: Edições Asa.

Vlassis, J. & Demonty, I. (2002). *A Álgebra ensinada por situações- problemas*. Lisboa. Instituto Piaget

Zabalza, M. (1994). *Diários de aula*. Porto. Porto Editora

Yin, R.K. (1989). *Case Study Research: Design and Methods*. California: SagePublishing.

Anexos

Anexo 1 – Grelhas de Observação

GRELHA DE REGISTO DE OBSERVAÇÃO DA AULA

Problema proposto: Problema I

Data 26/10/2011

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Atitude perante o problema	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados
Dificuldades sentidas	Distinguir quadriláteros Usar a linguagem matemática correta	Usar a linguagem matemática correta	Expor o raciocínio oralmente para o grupo turma com linguagem matemática correta.	Uso da linguagem matemática correta Visualização	Distinguir os quadriláteros	Usar a linguagem matemática correta	Usar a linguagem matemática correta Distinguir quadriláteros
Nº de vezes que solicita o professor	2	1	1	1	1	1	2
Tipo de questões colocadas ao professor	Pedido de autorização para consultar o manual Pedido de esclarecimento de conceitos	Confirmação do caminho traçado	Esclarecimento de conceitos	Confirmação do raciocínio	Esclarecimento de conceitos Confirmação do raciocínio.	Pedido de autorização para consultar o manual	Esclarecimento de conceitos Confirmação do raciocínio.
Interação e colaboração entre colegas do grupo	RG é o aluno que menos interage no grupo	Liderança notória do C com colaboração de todos	Liderança notória da C. Os alunos	Divisão de tarefas	Espírito de entreatajuda	Espírito de entreatajuda	O RP é quem trabalha. Dificuldades de

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Interação e colaboração entre colegas do grupo	Esclarecem os raciocínios com o espírito de entreajuda		explicam as suas ideias quando os outros não entendem				relacionamento. L. demonstra falta de tolerância para com os colegas.
Estratégias utilizadas na resolução do problema	Classificar os polígonos Procurar relações entre os lados, os ângulos e as diagonais de cada quadrado	Classificar os polígonos Sequência de posição das figuras Comparação das áreas dos quadrados (incompleta) Contagem de quadrados e triângulos da 6.ª figura Procura de relação das áreas do exterior da figura.	Classificar os polígonos. Relação entre o número de elásticos e o tamanho dos triângulos exteriores a um quadrado. Identificar a situação como uma sequência de quadrados.	Classificar os polígonos Comparação das áreas dos quadrados Relação entre os lados e os ângulos dos quadrados Identificar a situação como uma sequência de quadrados. Relação entre os lados dos triângulos e os quadrados	Interpretação do problema como exemplo de aplicação de uma escala. Relação entre o n.º de elásticos e o tamanho dos lados dos quadrados	Relação entre os lados e os ângulos das figuras.	Identificar o polígono. Procurar relação entre os ângulos
Observações: Os alunos compreenderam o problema e o que lhes é pedido, traçam uma estratégia, contudo têm dificuldades em encontrar a resposta certa. Confusão de conceitos							

GRELHA DE REGISTO DE OBSERVAÇÃO DA AULA

Problema proposto: Problema II

Data: 2/11/2011

e 4/11/2011

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Atitude perante o problema	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Pouco Interessados
Dificuldades sentidas	Relacionar comprimentos correspondentes Sentido crítico	Expor por escrito o raciocínio desenvolvido	Relacionar corretamente os comprimentos correspondentes.	Seleção de dados	Relacionar corretamente os comprimentos correspondentes.	Relacionar corretamente os comprimentos correspondentes	Relacionar comprimentos ente a fotografia e a realidade
Nº de vezes que solicita o professor	1	2	1	2	0	1	3
Tipo de questões colocadas ao professor	Verificar o raciocínio	Confirmar dados Solicitar material para efetuar medidas.	Confirmar dados	Confirmar dados		Solicitar material para efetuar medidas.	Confirmação do raciocínio Ajuda na estimativa
Interação e colaboração entre colegas do grupo	Espírito de entreajuda	Espírito de entreajuda, no entanto é notória a liderança do C.	Espírito de entreajuda	Espírito de entreajuda	Espírito de entreajuda	Espírito de entreajuda	Dificuldades de relacionamento Trabalho realizado apenas por um elemento do grupo

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Estratégias utilizadas na resolução do problema	<p>Uso da Escala</p> <p>Procurar uma relação entre comprimentos da fotografia e da sala de aula.</p> <p>Uso da regra de três simples</p>	<p>Procurar uma relação entre comprimentos da fotografia e da sala de aula.</p> <p>Uso da regra de três simples</p>	<p>Definição de uma suposta escala</p> <p>Uso da regra de três simples</p>	<p>Procurar uma relação entre comprimentos da fotografia e da sala de aula.</p> <p>Uso da regra de três simples</p>	<p>Relação entre comprimentos calculando áreas</p>	<p>Procurar uma relação entre os comprimentos na fotografia.</p> <p>Relação válida entre os mesmos comprimentos na realidade</p>	<p>Estimativa</p>
<p>Observações: Os alunos compreenderam o problema e o que lhes é pedido. Traçaram uma estratégia, no entanto nem sempre a mais correta. Dificuldades em determinar os comprimentos correspondentes. Falta de algum sentido crítico.</p>							

GRELHA DE REGISTO DE OBSERVAÇÃO DA AULA

Problema proposto: Problema III

Data 23/05/20

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Atitude perante o problema	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados
Dificuldades sentidas	Determinar a área de um paralelogramo Utilidade do Teorema de Pitágoras	Determinar a área de um paralelogramo Utilidade do Teorema de Pitágoras	Determinar a área de um paralelogramo	Determinar a área de um paralelogramo	Determinar a área de um paralelogramo Utilidade do Teorema de Pitágoras Selecionar a opção	Determinar a área de um paralelogramo Utilidade do Teorema de Pitágoras Selecionar a opção	Visualização Classificação dos quadriláteros Determinar a área de um paralelogramo Utilidade do Teorema de Pitágoras
Nº de vezes que solicita o professor	1	0	0	0	1	0	0
Tipo de questões colocadas ao professor	Confirmar se tinham que usar o teorema de Pitágoras				Confirmar se tinham que usar o teorema de Pitágoras		

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Interação e colaboração entre colegas do grupo	Trabalho colaborativo	Espírito de entreatajuda	Espírito de entreatajuda	Trabalho colaborativo	Espírito de entreatajuda	Espírito de entreatajuda	Tentativa de colaboração entre os elementos do grupo
Estratégias utilizadas na resolução do problema	Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos Calculo das áreas dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição Comparação das áreas obtidas com o pretendido	Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos Calculo das áreas dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição	Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos Calculo das áreas dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição Comparação das áreas obtidas com o pretendido	Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos Calculo das áreas dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição Comparação das áreas obtidas com o pretendido	Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos Calculo das áreas dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição	Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos Calculo das áreas dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição	Determinar o comprimento dos lados oblíquos através do Teorema de Pitágoras Calculo da área como se os terrenos fossem retangulares.
Observações: Os alunos compreenderam o problema e o que lhes é pedido. Todos os grupos, exceto um, traçam uma estratégia correta. Note-se que há grupos que se esquecem de concluir não indicando qual o terreno que deve ser escolhido.							

GRELHA DE REGISTO DE OBSERVAÇÃO DA AULA

Problema proposto: Problema IV

Data: 1/06/2012

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Atitude perante o problema	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados
Dificuldades sentidas	Determinar o comprimento da diagonal espacial Visualizar o triângulo formado para determinar o comprimento da diagonal espacial	Explicar que o triângulo formado para determinar o comprimento da diagonal espacial é retângulo.	Visualizar as dimensões da face de trás	Explicar que o triângulo formado para determinar o comprimento da diagonal espacial é retângulo.	Compreender o que é uma diagonal espacial e visualizá-la na figura Determinar o comprimento da diagonal espacial	Explicar que o triângulo formado pela altura e a diagonal da base do camião é retângulo	Determinar o comprimento da diagonal espacial Visualizar o triângulo formado para determinar o comprimento da diagonal espacial
Nº de vezes que solicita o professor	1	1	0	1	2	1	1
Tipo de questões colocadas ao professor	Se o tubo era transportado inteiro Podem consultar o livro	Se o tubo pode ir enviado		Se o tubo era transportado todo dentro do camião.	Confirmar se tinham que usar o teorema de Pitágoras	Confirmação da estratégia iniciada	

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Interação e colaboração entre colegas do grupo	Trabalho colaborativo	Espírito de entreaajuda Liderança do C	Espírito de entreaajuda	Trabalho colaborativo	Espírito de entreaajuda	Espírito de entreaajuda Liderança do T	Colaboração entre os elementos do grupo
Estratégias utilizadas na resolução do problema	Determinação das diagonais faciais e da espacial e comparação do comprimento obtido com o do tubo	Determinação das diagonais faciais e da espacial e comparação do comprimento obtido com o do tubo	Determinação das diagonais faciais e da espacial e comparação do comprimento obtido com o do tubo	Determinação das diagonais faciais e da espacial e comparação do comprimento obtido com o do tubo	Determinação das diagonais faciais e comparação do comprimento obtido com o do tubo	Determinação das diagonais faciais e da espacial e comparação do comprimento obtido com o do tubo	Determinação das diagonais faciais e comparação do comprimento obtido com o do tubo
<p>Observações: Os alunos compreenderam o problema e o que lhes é pedido. Traçaram uma estratégia, no entanto têm imensas dificuldades em visualizar no espaço. Apesar de alguns grupos terem obtido o comprimento da diagonal espacial nem sempre seguiram a estratégia adequada, dando a sensação que "falsificaram" o caminho para chegarem á solução.</p>							

GRELHA DE REGISTO DE OBSERVAÇÃO DA AULA

Problema proposto: Problema V

Data 8/06/2012

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
Atitude perante o problema	Interessados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e empenhados	Interessados e	Interessados	Interessados
Dificuldades sentidas	<p>Obter as dimensões da folha A4</p> <p>Obter as dimensões da caixa cilíndrica e do bombom</p> <p>Fazer a demonstração</p>	Confirmar as dimensões do formato A4	<p>Medições com rigor</p> <p>Fazer a demonstração usando apenas letras</p>	Fazer a demonstração usando apenas letras e concluí-la	<p>Medições com rigor</p> <p>Compreender o que é uma demonstração</p> <p>Compreenderem que o bombom é idêntico a uma esfera</p>	<p>Compreender o que é uma demonstração</p> <p>Obterem as dimensões do bombom</p>	Compreender o que é uma demonstração
Nº de vezes que solicita o professor	2	1	2	1	2	2	1
Tipo de questões colocadas ao professor	<p>Onde estão as dimensões da folha</p> <p>O que é uma demonstração</p>	O que é uma demonstração	Se podem usar uma régua para obterem as dimensões da folha	O que é uma demonstração	<p>Como podem obter as dimensões</p> <p>O que é uma demonstração</p>	Confirmar se o formato A4 é o da folha do enunciado	O que é uma demonstração

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
			O que é uma demonstração			O que é uma demonstração	
Interação e colaboração entre colegas do grupo	Espírito de entreaajuda	Liderança do C	Liderança da C	Trabalho colaborativo	Espírito de entreaajuda	Liderança do T	Colaboração entre os elementos do grupo
Estratégias utilizadas na resolução do problema	Determinar as dimensões da caixa enrolando as folhas e efetuando as medições necessárias Determinar o volume das caixas	Identificar que as dimensões de uma folha A4 são o perímetro da base e a altura da caixa cilíndrica. Determinar o raio a partir do perímetro da base do cilindro. Determinar e comparar os volumes. Generalizar os volumes Efetuar a medida do diâmetro do	Determinar as dimensões da caixa enrolando as folhas e efetuando as medições necessárias Determinar o volume das caixas Comparação dos volumes Determinar o volume de cada bombom e verificar quantas vezes cabe no volume da caixa	Identificar que as dimensões de uma folha A4 são o perímetro da base e a altura da caixa cilíndrica. Determinar o raio a partir do perímetro da base do cilindro. Determinar e comparar os volumes. Iniciar a demonstração escrevendo as fórmulas	Determinar as dimensões da caixa enrolando as folhas e efetuando as medições necessárias Determinar o volume das caixas Comparação dos volumes	Determinar as dimensões da caixa enrolando as folhas e efetuando as medições necessárias Determinar o volume das caixas Comparação dos volumes Supor as dimensões de um bombom e determina o seu volume. Verificar quantos bombons cabe em	Determinar as dimensões da caixa enrolando as folhas e efetuando as medições necessárias Determinar o volume das caixas Comparação dos volumes

Grupo	I	II	III	IV	V	VI	VII
		<p>bombom da figura</p> <p>Determinar o volume de cada bombom.</p> <p>Verificar quantas vezes cabe no volume da caixa pretendida.</p>	pretendida.	<p>Efetuar a medida do diâmetro do bombom da figura</p> <p>Determinar o volume de cada bombom.</p> <p>Verificar quantas vezes cabe no volume da caixa pretendida.</p>		cada caixa	
<p>Observações: Os alunos nesta fase final de ano já se encontram cansados e têm dificuldades em se concentrarem no que estão a fazer. Em relação à demonstração facilmente desistiram e alguns grupos passaram à questão III sem se dedicarem à demonstração.</p>							

Anexo 2- Diários de Aula da Professora – Investigadora

<i>Diário de Aula</i>			
Data: 26/10/2011	Hora: 8h25m	Aula Nº 27/28	Sala: 206
Descrição			
<p>Dei início à aula pedindo aos alunos que se distribuíssem por 5 grupos de 4 elementos e 2 grupos de 3 elementos. Os alunos ao formarem os grupos colocaram 3 alunos de parte que tiveram que formar um dos grupos de 3. Já me tinha apercebido que o R.P. era de certa forma colocado de parte pela turma e a situação já tinha sido falada em conselho de turma, agora o M. e o L. surpreendeu-me. Terei que estar atenta. Fiquei logo a pensar que aquele grupo ia ter dificuldades em se entender, o que se veio a confirmar com o desenrolar da aula.</p> <p>Antes de distribuir o enunciado, expliquei-lhes que iriam resolver um problema durante os primeiros 45 minutos que os levaria à descoberta de conceitos importantes para as aprendizagens que iriam realizar nas próximas aulas. Pedi-lhes para registarem todo o raciocínio que elaborassem e elegessem um porta-voz pois na segunda parte da aula iríamos expor e debater as ideias de cada grupo com a finalidade de chegamos a um consenso e a conclusões válidas. Houve grupos que elegeram o melhor aluno, mesmo não sendo aquele que tem mais à vontade para falar, outros elegeram aquele que é menos tímido. Informei-os que iria levar o registo de cada um dos grupos para analisar em casa e que era importante registarem todo o raciocínio elaborado.</p> <p>Em seguida distribui o enunciado pelos alunos e optei por fazer a leitura em voz à alta para que todos os grupos iniciassem o trabalho ao mesmo tempo. No final da leitura perguntei à turma se havia dúvidas sobre o que lhes era pedido. Os alunos responderam que não. Estranhei a resposta, mas como esta turma costuma gostar de tarefas exploratórias e desafios fiquei na expectativa.</p> <p>Comecei a circular pelos grupos para os ouvir a trocar ideias e avaliar a forma como interagem, registar as observações na grelha criada para o efeito e anotar algumas notas de campo que considere importantes, nomeadamente algumas conversas que os alunos estavam a ter. Estas notas foram importantes para me aperceber das dificuldades dos alunos, da confusão de alguns conceitos e algumas lacunas.</p>			

O Grupo I discutia se os polígonos eram quadrados e losangos. Verifiquei que ainda não sabiam distinguir um losango propriamente dito de um quadrado. Verifiquei que o que os confundia era o facto de alguns quadrados estarem inclinados, apoiados nos vértices. Perguntei-lhes o que o que era um losango, o que o JM respondeu logo que era ter os lados iguais mas os ângulos não era necessário serem iguais. Rapidamente concluíram que eram quadrados e começaram a procurar diferenças. O PT pergunta se pode consultar o manual o que eu prontamente lhe respondi que não havia restrições. Reparei que o RG era quem menos interagira neste grupo, mas também tenho reparado que este menino anda muito triste. Vou falar com a Diretora de Turma para perguntar se sabe de alguma coisa.

No Grupo II era notória a liderança do C. Já tinham concluído que eram todos quadrados mas com áreas diferentes. Eram todos polígonos que virados tinham a mesma forma. Perguntei-lhes o que era isso de virados terem a mesma forma para verificar se eles estavam a utilizar bem o conceito de forma. O JA respondeu logo que se mantinha o mesmo tipo de imagem. Continuaram a procurar relações.

No Grupo III já tinham concluído que eram sempre quadrados. A C era quem liderava. Surpreendeu-me a D que é uma miúda muito tímida e questionava a C quando não entendia o que ela queria dizer. Exploravam agora os triângulos e a relação destes quando se juntam. Verifiquei que não utilizavam a palavra parecidos mas sim semelhantes. Fiquei entusiasmada pois deu-me a sensação que a troca de ideias em grande grupo iria bem-sucedida para alcançar os objetivos pretendidos nesta aula. Perguntei-lhes porque estavam a usar a palavra semelhante em vez de parecido e a C respondeu que achavam que em Matemática era mais correto. Questionei-me: Será que algum deles tem apoio fora da escola e já lhes falaram em figuras semelhantes? Não seria a primeira vez que isso acontecia o que eu não considero vantajoso para os alunos. O R estava um pouco apagado. De repente ouvi-o a dizer que os quadrados de dentro estão mais reduzidos. O RA apenas repete o que os colegas dizem. Este aluno tem imensas dificuldades contudo parece interessado e a assimilar o que o grupo faz.

Em voz alta elogiei a turma por estarem a trabalhar bem e a tirarem conclusões “maravilhosas”. Fiz este comentário pois sei que esta turma é muito vaidosa e gostam

de serem os melhores. O M respondeu logo que no final ia ficar surpreendida com o que eles pois eram bons quando eram postos à prova. Tinha conseguido espicaçá-los. O Grupo IV procurava relações nos quadrados e nos triângulos. Quando preparei o problema, julguei que os alunos só iriam ver os quadrados e eles estavam a ir mais além. Já tinham encontrado uma relação entre as áreas de 2 quadrados sucessivos. Verificavam que os ângulos também eram geometricamente iguais e a CI dizia por isso é que continuavam a ser quadrados. A R e a CI exploravam agora a relação dos lados dos quadrados enquanto a AR e a IF a relação entre os triângulos e os quadrados. Era um grupo que dividia tarefas.

No Grupo V ouvi os alunos dizerem que as figuras são iguais mas com escalas diferentes. A V dizia que aquilo não era polígonos porque já dizia no enunciado. Fiquei preocupada com esta afirmação da V. Ela não sabe o conceito de polígono. Esclareci logo a V pois as ideias dela estavam todas baralhadas. A IP dizia que sempre que acrescentavam elásticos os quadrados ficam mais reduzidos. O JD acrescentava que eles diminuam à escala. Questionei-os sobre o que era diminuir à escala e a IP disse que era proporcional. Fiquei satisfeita. A ideia deste grupo daria para introduzir a noção de razão de semelhança.

O Grupo VI estava mais adiantado. O JP afirmava que os polígonos não são iguais porque têm os comprimentos diferentes, mas a amplitude dos ângulos iguais. O JC dizia que aquelas figuras eram simétricas. Pensei logo que o JC não sabia o que eram figuras simétricas. Mais um conceito a ser esclarecido posteriormente. O T rejeitou logo a sugestão do JC e começou logo a consultar o manual. Entusiasmado chama-me a dizer que já tinha descoberto. Eram semelhantes. Perguntei-lhe então o que eram figuras semelhantes o que o T respondeu que eram figuras que mantinham os ângulos e os lados eram proporcionais. Este grupo estava a trabalhar no sentido certo. Pedi então que descobrissem como é que isso acontecia.

O Grupo VII era o que estava mais atrasado. Eram alunos que tinham formado o grupo porque foram as “sobras”. O M estava desanimado porque não conseguia encontrar nenhuma relação. O RP afirmava que os polígonos eram todos iguais mas com dimensões diferentes. Novamente a ideia de igualdade com comprimentos diferentes que já tinha sido exposta por outro grupo. Estranho a noção de igualdade que os

alunos têm. A medo RP questionou-me se eram quadrados. O L agressivamente respondeu-lhe que eram quadrados, bastava virá-los. Tive que pedir calma ao L. Questionei-os, como é que podiam ser quadrados iguais se tinham os comprimentos diferentes. O M precipitadamente respondeu-me que eram losangos e por isso é que eram quadrados. Mais uma vez a definição de losango confusa. O RP respondeu logo que nem todos os losangos eram quadrados, só os que têm os ângulos iguais. O RP ajudou o M a esclarecer uma das propriedades que distingue o losango propriamente dito de quadrado. Pensei logo que teria que rever os quadriláteros numa aula futura. O L finalmente diz que, o que os meninos do problema queriam dizer, não era parecidos era semelhantes. Questionei então o grupo sobre o que eram polígonos semelhantes e deixei-os.

Continuei a circular entre os grupos e o grupo V explorava agora os perímetros dos quadrados. A IP dizia que o n.º de pontinhos era o mesmo mas que os da figura menor estavam mais “apertados” logo os lados eram menores. O JD questionou-me se não chegar já as conclusões que tinham tirado. Pediu-me para os ajudar pois estava com medo de não conseguir ver tudo. Era visível o entusiasmo deste grupo a procurar mais relações apesar de serem alunos com muitas dificuldades. Surpreendeu-me o trabalho e o esforço deles. A V tentava-lhes dizer que os lados eram proporcionais.

O Grupo VII solicitou a minha ajuda. O M estava a explorar os triângulos e a classificá-los mal. Mais um assunto a ser revisto na aula. O RP sempre calmo, lá o corrigia.

O Grupo III explorava agora as figuras do ponto de vista de sequências de quadrados e de triângulos. Achei interessante essa abordagem do problema.

Como já estava satisfeita com o trabalho por eles desenvolvido e alguns grupos já começavam a brincar, resolvi partir para o debate de ideias. Ordenadamente os alunos começaram a apresentar as suas conclusões. Optei por registá-las no quadro e separá-las pois haviam ideias que estavam de acordo com os objetivos da aula e outras, que apesar de estarem corretas, iam de encontro a outros assuntos, nomeadamente sequências geométricas e propriedades dos quadriláteros e classificação dos triângulos. Desta forma valorizei todas as intervenções corrigindo aquelas que usavam uma linguagem menos correta. Os alunos desta forma verificavam que estavam todos a contribuir para a descoberta que eu queria que eles

fizessem. Estimulei ainda a participação mais ativa dos porta-vozes dos grupos.

Facilmente, chegamos à conclusão que os polígonos eram semelhantes porque mantinham a forma pois tinham os ângulos iguais e os lados diretamente proporcionais. Eram obtidos à escala.

Os alunos registaram no caderno a noção de semelhança a que tínhamos chegado. Em seguida explorei a ideia de ampliação e “diminuição” com a ajuda das figuras projectadas, corrigindo esta última e designando-a por redução.

Em seguida recolhi os registos dos grupos para analisar em casa.

Para esclarecer as ideias de alguns alunos apresentei-lhes o PowerPoint sobre o tema onde os alunos com a figura do Pai Natal conseguiam verificar em que condições as figuras eram semelhantes.

Gostei de ouvir os alunos a referirem se as figuras não eram semelhantes é porque estavam deformadas. Pode ser que assim eles compreendam que as figuras são semelhantes porque mantêm a forma. Pelo entusiasmo geral na resolução do exercício seguinte, a noção de semelhança foi adquirida.

Tão envolvidos que estavam que quando eu lhes pedi para registarem o sumário é que se aperceberam que a aula estava a terminar e que, ao contrário do que é habitual, estavam escrever o sumário no final da aula.

Quando soou o toque de saída, houve alunos que perguntaram se iríamos repetir mais vezes a experiência pois tinham gostado.

Refletindo sobre o trabalho desenvolvido, o receio que tinha do problema não ser eficaz logo se desvaneceu e até verifiquei que posso usá-lo para explorar outros conteúdos. Os resultados obtidos foram além das perspectivas mas esta turma também noutras situações já me demonstrou que é capaz de trabalhar em grupo e de conseguir resultados bons.

Fiquei preocupada com algumas ideias erradas de alguns conceitos errados que os alunos apresentam. Irei elaborar uma ficha para esclarecer esses conceitos.

Num próximo trabalho de grupo terei que verificar a situação dos elementos do Grupo VII, pois foi o que mais dificuldade apresentou em interagir.

Senti que o facto de os alunos não saberem o que era pretendido com o problema podia os ter levado para conclusões diferentes das pretendidas. Terei de ter mais cuidado na escolha do próximo problema. Os alunos têm muita dificuldade em exporem as suas ideias, de comunicarem matematicamente. Eles perceberam que tinham que procurar relações, deram início a uma estratégia nem sempre a mais correta no entanto a principal dificuldade foi em exporem as suas conclusões com uma linguagem correta.

<i>Diário de Aula</i>			
Data: 2/11/2011	Hora: 8h25m	Aula Nº 31/32	Sala: 206
Descrição			
<p>Ainda antes de entrar na sala de aula e dar início à aula, alguns alunos vieram ter comigo no corredor, para me informarem que não tinham feito o trabalho de casa completo pois tinham sentido dificuldades. Fiquei preocupada, pois o problema proposto como trabalho de casa (Exercício 4 da página 77) era sobre escalas, conteúdo leccionado no 2.º ciclo na disciplina de Matemática e posteriormente aplicado na disciplina de Geografia.</p> <p>Será apenas uma questão de esquecimento por parte dos alunos ou eles ainda não adquiriram os conhecimentos necessários para aplicar as escalas?</p> <p>Após o registo do sumário, registei quem fez o trabalho de casa completo, quem não fez e porquê e quem tinha feito parcialmente, anotando as alíneas que tinham ficado por fazer e as razões pela sua não realização (ver registos do TPC). Verifiquei logo, que os alunos com menos dificuldades tinham feito o exercício todo. Os alunos que não fizeram, foi por esquecimento. Fiquei preocupada, quando verifiquei que, os restantes não tinham sentido todos, dificuldades na mesma alínea. Tinha para além de alunos que não sabiam aplicar escalas na resolução de problemas, outros com outras dificuldades inerentes, nomeadamente a interpretação do enunciado e à compreensão do que lhes era pedido. A IP dizia mesmo: "Professora, li tudo e não percebi nada."</p> <p>No decorrer da correção, revi novamente o significado de escala (já o tinha feito na aula anterior) e a estratégia mais eficaz para esquematizar a resolução - a regra de três simples.</p> <p>Havia alunos que não fizeram a 2.ª alínea - determinação das medidas reais do chão, pois não leram a nota do exercício e não tinham percebido que eram eles que tinham que efetuar as medições necessárias na planta. Argumentavam que faltavam dados. Ainda no decorrer da correção desta alínea, verifiquei que os alunos continuam sem saber efetuar reduções no Sistema Métrico. Voltei a explicar como se fazia, mas pensava comigo mesmo, que esta lacuna vem do 1.º Ciclo, se calhar porque os alunos</p>			

sentem aversão às reduções. Depois de explicar, fiquei com a sensação que alguns alunos continuam sei o saber fazer. Terei que propor mais exercícios que obriguem às reduções, para não se esquecerem e praticarem.

Na resolução das alíneas 4.3. e 4.4. optei por fazer a leitura em voz alta, para desta forma ajudar os alunos a interpretarem o que lhes é pedido. Continuo a pensar que eles fazem a leitura desconcentrados de tal maneira que quando chegam ao fim, já não se lembram do início. Fiquei com esta sensação, pois alguns alunos, mal terminei a leitura, exclamaram: " Ah, já sei como se faz!" Conclusão: Grande parte dos alunos que não fizeram estas alíneas do trabalho de casa foi pois, por não conseguem sozinhos lerem com atenção o enunciado e interpretar o que lhes é pedido.

Para reforçar os conhecimentos relativos às escalas e sua aplicação, fizeram o exercício 5 da mesma página. Com este exercício, os alunos voltaram a praticar as reduções no Sistema Métrico. Alguns alunos demonstraram entusiasmo, pois agora já sabiam fazer.

Em seguida, pedi aos alunos para se reunirem em grupo da mesma forma que na aula do dia 26 de Outubro. A AC que tinha faltado nesse dia, perguntou-me a que grupo pertencia e eu dei-lhe a oportunidade de escolher entre os grupos que apenas tinham 3 elementos. Escolheu o grupo de L, M e RP. Era o grupo que, mais dificuldades de relacionamento, tinha demonstrado. Talvez ela conseguisse fazer o equilíbrio.

Distribui-lhes o enunciado do Problema II: Medir alturas e fiz a leitura em voz alta para ter a certeza que todos o faziam ao mesmo tempo. Os alunos mostraram logo entusiasmo, mas tão depressa o entusiasmo veio como se esmoreceu. Começaram a fazer medidas na fotografia. Desta vez viram que faltavam as medidas e desenrascaram-se logo com a régua contudo verifiquei que mediam, mediam mas ainda não tinham definido nenhuma estratégia para determinar a altura da Escola a a partir da fotografia sem puderem sair da sala de aula. Esta turma, já em várias situações de resolução de problemas, verifico que são empenhados, mas a excitação é tanta que eles não param para refletirem e traçarem com calma uma estratégia.

Desta vez optei por ficar junto à secretária para ter uma visão mais ampla de como os grupos trabalhavam.

O Grupo IV, foi o primeiro a pedir a minha intervenção. A R perguntava se podiam

resolver o problema por tentativa erro, pois faltava a escala. Sorri e não lhes respondi.

O Grupo tinha definido uma estratégia e teria que averiguar se era válida.

O Grupo II, pediu-me em seguida a minha intervenção. Queriam saber se as janelas da fachada eram iguais às da sala. Como não podiam ir verificar essa situação, pois não podiam sair da sala de aula, disse-lhes que sim. Então quiseram saber se a estratégia que estavam a traçar estava bem. O C dizia: " Não temos a escala, mas se soubermos a relação entre as medidas reais das janelas, das portas e as janelas e as portas da fotografia podemos utilizá-la para a altura." Respondi-lhes que verificassem se era válido o seu raciocínio. Os alunos estão à espera que eu lhes diga se é válida a sua estratégia e como eu não lhes digo que sim nem que não, ficam com receio de testarem. Os outros grupos continuavam com medidas, mas aparentemente ainda não tinham definido nenhuma estratégia. O Grupo III chamou-me e a C muito baixinho perguntou-me se eu não me tinha esquecido da escala pois não conseguiam resolver o problema sem ela. Eu sorri e disse-lhes que conseguiam só, tinham que pensar um bocadinho.

O Grupo IV, insistiam com a escala mas constatavam que tinham dois valores desconhecidos e não sabiam como fazer pois era valores diferentes, a medida pretendida e a relação da fotografia com a realidade. Escreviam $1/x=6,9/y$. A R afirmava que tinham a certeza que era por escalas só que agora não sabiam como sair dali.

Estavam ainda muito agarrados no geral à fotografia e á falta da escala. O JM do Grupo I, tentou verificar se a falta da escala sentida pelo grupo dele era geral e perguntou-me: " Oh professora, alguém já descobriu a escala?" Encolhi-lhe os ombros e não lhes respondi. Queria que eles sentissem que o problema proposto era diferente do exercício de trabalho de casa e o exercício feito na primeira parte da aula.

Entretanto a AC do Grupo VII, levantou-se e disse que queria fazer o exercício sozinho, pois o L e o M estavam com conversas paralelas e não queriam resolver o problema com ela e o RP. Afinal ela não conseguiu equilibrar o grupo e fazer a interação. Fui lá e disse-lhes que eles estavam a ser avaliados e que tinham que saber trabalhar em grupo, coisa que eles até agora ainda não tinham conseguido. O M e o L não

respeitavam os outros elementos do grupo, nem demonstravam interesse em o fazer, o que estavam a prejudicar o trabalho de quem queria trabalhar naquele grupo. Em termos de atitudes estavam a ser medíocres. O RP, a medo disse que já tinha descoberto uma estratégia que não sabia se era válida e eles só estavam interessados em falar de futebol e não o queriam ouvir. Ameacei o L e o M, se queriam continuar a falar de futebol que iria convidá-los a fazê-lo na direção da Escola, pois ali estavam para trabalhar em colaboração com os restantes elementos do grupo. O M estava tão corado que pediu logo desculpa e que iria prestar atenção ao colega o que eu lhe respondi: " Atenção e ajuda". O L apenas ficou cabisbaixo e não disse nada. Este grupo é o mais complicado. Vão ter que aprender a trabalharem uns com os outros. Está a ser difícil.

Entretanto quis ouvir a estratégia do RP e pedi aos outros elementos do grupo para escutarem. O RP estava a estimar a altura da Escola através da altura de um aluno, comparando-as. Era uma estratégia curiosa, mas válida. Perguntei ao restante grupo o que eles achavam e o M disse logo que era necessário escolher a pessoas, pois dependia de quem utilizavam para estimar. Então discutissem entre eles pois com 4 cabecinhas a pensar seria mais fácil.

Desta forma procurei que eles sentissem que juntos poderiam chegar lá mais rápido com a colaboração de todos. O M. sugeriu logo utilizar a altura do C para estimar. Fiquei com a sensação que o M tinha aprendido qualquer coisa com a repreensão. Pelo menos estava a tentar.

Os Grupos V e VI ainda não me tinham pedido ajuda. Procurei verificar o que estavam a fazer. O Grupo V calculava áreas na figura. Não percebi a estratégia deles, mas também não interferi. Estava a estranhar o facto do Grupo VI ainda não ter definido nenhuma estratégia. O T e o JP que costumam ser rápidos e aqueles que trabalham muito bem em colaboração a definirem estratégias ainda não me tinham interpelado. Quando me aproximei, verifiquei que afinal eles tinham uma estratégia semelhante à do Grupo II. Entretanto o JA do Grupo II perguntou-me se eu não tinha uma fita métrica. Quando eu lhes respondi que não mas que podiam ir buscar à funcionária (Tinha-as lá deixado estrategicamente, pois não levaria pistas para a sala de aula), o T do Grupo VI pediu o mesmo. Lá autorizei a irem ambos buscar. Os outros grupos

aperceberam-se da saída dos colegas e o PT do Grupo I perguntou se afinal podiam sair da sala para irem tirar medidas e eu respondi-lhe que não. Ficaram intrigados.

Quando o T e o JA regressaram, começaram a medir a largura da janela e a altura da mesma. Os alunos ficaram curiosos e de repente os outros grupos, exceto o Grupo V e VII, também começaram a fazer medidas. Mediam as dimensões da janela, o espaço entre as janelas, a parede da sala, ... Apercebi-me que estavam a medir, porque os Grupos com os 2 melhores alunos o faziam mas ainda não tinham percebido para que é que eles o faziam, pois fiquei com a sensação que mediam por medir sem uma lógica válida.

O Grupo V, chamou-me e perguntou-me se era necessário fazer medidas na sala pois não estavam a perceber o que os colegas estavam a fazer. Ainda não tinham percebido que a estratégia deles, através das áreas na fotografia, não era válida para determinar a altura da Escola.

Como a aula estava a terminar, pedi-lhes para registar rapidamente as medições que tinham feito e na próxima aula iríamos continuar. Entretanto o Grupo II e o Grupo VI já tinham determinado a altura da Escola. Disse-lhes que agora teriam que explicar, por escrito, o plano que tinham traçado para resolver o problema.

Tocou e os alunos arrumaram a sala e saíram.

Fiquei satisfeita, pois pelo menos 2 grupos conseguiram chegar à solução do problema. Na próxima aula, irei dar mais algum tempo para terminar a tarefa e posteriormente iremos fazer a apresentação e discussão de resultados.

O único inconveniente deste tipo de tarefas é o tempo, pois é difícil prever o tempo que os alunos demoram a resolvê-la.

<i>Diário de Aula</i>			
Data: 4/11/2011	Hora: 8h25m	Aula Nº 33/34	Sala: CN2
Descrição			
<p>Os alunos mal entraram na sala de aula, perguntaram-me se era para se sentarem em grupo. Eu respondi-lhes afirmativamente e disse-lhes para terminarem a tarefa da aula anterior. Todos os grupos já tinham terminado. Fiquei surpreendida pois não os estava a imaginar a juntarem-se num intervalo para trabalharem. Perante a minha cara surpreendida, a AR esclareceu logo que na quarta-feira passada, logo a seguir à aula de Matemática tiveram aula de substituição na mesma sala e pediram à professora para concluírem a tarefa. Era sinal que os alunos tinham ficado entusiasmados, no entanto corria o risco que o C ou o T tivessem explicado aos colegas o porquê das medições. Se lhes perguntasse era lógico que iriam negar. Fiquei à espera da discussão da tarefa.</p> <p>O RC do grupo I começou por explicar que quando os colegas começaram a fazer medidas resolveram também medir, mas inicialmente não sabiam o que medir. Mediram a altura da janela. Depois consideraram que a janela do piso inferior é igual à do piso da sala e o espaço entre as janelas corresponde à altura de uma janela. Então poderiam fazer a correspondência entre a foto e a realidade. Para mim, estavam a usar muitas suposições, mas deixei-os continuar. A estratégia não estava longe da mais viável, apenas estavam a complicar provavelmente por não estarem seguros do que faziam. O RC pediu se podia ir ao quadro explicar os cálculos que tinham feito. Disse-lhe que sim. O RC começou a escrever os valores e verifiquei que estavam a relacionar comprimentos não correspondentes, a altura da janela na fotografia com o triplo dessa altura. Deixei o RC concluir os cálculos e desta forma a altura da escola era 23,52 m (muito longe dos 6,9 m reais). Perguntei ao Grupo se eles estavam convencidos daquela altura. Responderam-me prontamente que sim, mas logo o C do Grupo II, os desafiou, questionando-os se eles não achavam exagerado. O PT respondeu-lhe que não, mais metro menos metro estariam lá. Aqui se nota a falta de sentido crítico.</p> <p>Questionei a turma se achavam correto o raciocínio dos colegas. O JP apontou logo o</p>			

dedo para o quadro e indicou a correspondência errada entre a altura da janela na fotografia e a soma da altura de 2 janelas e o espaço estimado entre elas na realidade. O Grupo estava a fazer corresponder coisas diferentes na fotografia e na realidade, daí a altura exagerada.

Perguntei à turma se concordavam com o JP, o que a maior parte dos alunos acenou que sim. Pedi então ao JP que apresentasse a estratégia seguida pelo seu grupo. O aluno afirmou que fizeram na mesma uma "proporção" entre a realidade e a fotografia, mas usaram a largura da janela. A palavra proporção não é a correta mas sim relação. Achei por bem corrigir logo e pedir mais cuidado na linguagem matemática. Os alunos devem saber comunicar matematicamente de uma forma correta senão os termos são confundidos.

A altura obtida pelo grupo foi de 6,36m. Perguntei à turma se aceitavam aquela altura, o que disseram que este valor era aceitável. O C do Grupo II disse logo que o Grupo dele tinha feito da mesma maneira e que lhes tinha dado 6,9 m.

Perguntei à turma como era possível seguirem o mesmo raciocínio e usarem a largura da janela e dar valores diferentes (cerca de 50 cm). O T colocou logo o dedo no ar e disse que era por causa dos arredondamentos. Perguntei-lhe onde tinham feito arredondamentos e ele respondeu-me nas medições. Mais uma vez corriji a linguagem pois não era arredondamentos mas erros de leitura ou falta de precisão nas medições.

Pedi ao RP do Grupo VII para explicar a estratégia do grupo dele pois sabia que era diferente e queria gerar discussão. Ele tinha usado a altura de uma pessoa para estimar a altura da escola. Quando ele acabou de explicar. O PT disse logo que tinha sido a "olhómetro", mas que há pessoas que fazem isso e dá certo. Perguntei-lhes se seria válida a estratégia do Grupo e a R respondeu logo que teria sido mais seguro com elementos da fotografia ou então se essa pessoa estivesse na fotografia.

A C do Grupo IV quis explicar a estratégia do grupo dela. Considerou que 1 cm na fotografia correspondia a 100 cm na realidade. Quis que ela justificasse aquela afirmação e ela respondeu que ao medir a largura da janela real o valor levou a concluir isso pois a régua não tem a mesma precisão da fita métrica (1,5 cm na fotografia e 120 cm na realidade). A aluna conseguiu uma justificação aceitável. A C

tem demonstrado ao longo das aulas menos timidez e a ser persistente nas suas estratégias quando está segura delas. Usou essa relação com a altura da janela e depois o grupo complicou, pois estimou que a altura da escola seria 4 vezes a janela mais um “bocado” quando poderiam ter feito diretamente a correspondência da altura da escola na fotografia com a altura real. Perguntei ao grupo porque não tinham feito isso e a C respondeu-me que pesavam que era direto de mais e tentaram demonstrar que estava certo. Alertei-os para o perigo de se desviarem quando levam estratégias menos diretas.

Faltavam os Grupo IV e V. A R do Grupo IV começou por dizer que tinham inicialmente feito muitas medidas, sem saberem como as iam utilizar. Depois decidiram determinar o comprimento da sala. Essa seria a altura da Escola. Meu Deus, que confusão naquelas cabecinhas. Questionei a turma para saber se estava alguma coisa mal e o C respondeu logo que não se podia dizer que a altura da Escola era igual ao comprimento. Perguntei ao grupo o que as tinha levado a concluir daquela maneira e a R respondeu-me que o valor era aceitável e sabia que tinha dado mais ou menos isso ao T logo acharam que estava correta a sua estratégia. Esclareci o Grupo no sentido de compreenderem que lá pelo valor dar “parecido” devemos verificar se a estratégia é a adequada. Fiquei admirada pela R e a CI, alunas com capacidades fazerem esta confusão.

Por fim o Grupo V apresentou a estratégia deles. Para eles a estratégia era válida. Calcularam a área de uma janela e multiplicaram por 4 janelas e tinham a altura da Escola. O JA mal a V explicou o raciocínio do grupo disse que era uma estratégia “esquisita” e que não percebia o que é que a área das 4 janelas tinha a ver com a altura da Escola. Este grupo desde o início, que teve imensas dificuldades em definir uma estratégia para resolver o problema.

Estava satisfeita com o trabalho da maioria dos grupos. Expliquei-lhes que nem sempre é necessário saber a escala e quis saber se tinham percebido qual a estratégia a seguir então. O RG explicou que era fazendo uma correspondência entre a figura e a realidade. Quis perceber se essa correspondência podia ser uma qualquer o que o RG respondeu logo que teria de ser entre “coisas” iguais: por exemplo a largura da janela na fotografia com largura da janela real e depois usar a regra de três simples.

Para verificar se tinham compreendido perguntei qual seria a altura na fotografia de uma pessoa com 1,80 m.

Mais uma vez houve quem se esquecesse das reduções. Mas a maior parte dos alunos percebeu como fazer. Perceberam que poderiam saber quantas vezes a fotografia reduzia a realidade se determinassem a razão entre comprimentos correspondentes.

Fiquei satisfeita pois tinham percebido o que é a razão de semelhança. Espero que agora percebam com a construção de figuras pelo método da quadrícula, dada a razão de semelhança, quando é uma ampliação e quando é uma redução.

Aparentemente estavam a conseguir fazer a tarefa proposta, sem nenhuma explicação. O trabalho de grupo também pode ajudar no esclarecimento das dúvidas.

A aula terminou e os alunos estavam empenhados no que estavam a fazer.

É de lamentar que o programa seja tão extenso e não permita mais vezes este tipo de trabalho, pois demorasse muito tempo. Fiquei satisfeita, quando vejo os alunos entusiasmados e a conseguirem, lentamente, chegarem aos resultados pretendidos.

Seria utópico esperar que todos conseguissem.

Ter escolhido a determinação da altura da Escola, edifício que conhecem tão bem, foi um fator que aumentou a curiosidade e o interesse pelo desafio.

Diário de Aula			
Data: 23/05/2012	Hora: 8h25m	Aula Nº 139	Sala: 206
Descrição			
<p>Após a leitura do problema pelos grupos apercebi-me que os alunos associaram logo ao cálculo de áreas. A AC, na sua inocência pediu-me as fórmulas para calcular as áreas daqueles terrenos. Respondi-lhe que queria que ela calculasse as áreas com as fórmulas que conhecia: retângulo, quadrado, triângulo e paralelogramo. Queria saber se era necessário também o Teorema de Pitágoras. Aprendem qualquer coisa, no entanto não sabem distinguir quando é para aplicar. Qual o interesse de saberem o Teorema de Pitágoras, se não sabem quando o aplicar!</p> <p>Quando circulei entre os grupos, vi que estavam a dividir os terrenos em polígonos que sabiam calcular a área. No entanto nem sempre as divisões eram as mais corretas.</p> <p>Para facilitar, aconselhei-os a fazerem divisões na horizontal e na vertical. Desta forma iria evitar perdas de tempo, pois com divisões erradas não iriam conseguir resolver este problema que considerava extremamente fácil.</p> <p>Discutiam de uma forma harmoniosa e esperava que os grupos do T, da AR e do C fossem os primeiros a terminarem, mas para meu espanto foi o grupo da C.</p> <p>Tinha estipulado 20 minutos para esta tarefa e foi o que aconteceu. Estamos atrasadas na planificação da disciplina, logo é necessário estimar bem o tempo para a execução das tarefas. Conheço bem a turma e isso facilita-me.</p> <p>Desta vez a apresentação oral/discussão processou-se de forma diferente. Costumo deixar grupo a grupo o porta-voz apresentar a sua resolução e argumentar quando é questionado por mim ou pelos colegas. Desta vez chamei os porta-vozes para junto do quadro. Enquanto os grupos trabalhavam tinha dividido o quadro em 7 partes e reproduzidas mais ou menos as figuras do terreno. Cada grupo teria uma parte do quadro para utilizar na sua apresentação.</p> <p>Comecei por perguntar, qual o terreno a escolher para verificar se todos tinham chegado à solução. O grupo VII não tinha chegado. Afirmava que tanto fazia. Pedi ao RP para explicar como tinham chegado a essa conclusão. A primeira ideia que tive foi</p>			

que talvez tivessem errado nos cálculos. Fiquei pasmada. Achavam que a figura do terreno A podia-se transformar num retângulo e a do B era um paralelogramo. Ao explicar como transformava a figura A num retângulo, logo se apercebeu que tinha errado pois faltava um bocado. Em relação à figura B pedi-lhe a definição de paralelogramo. Ele não sabia e pediu ajuda ao grupo que também não sabia. Aproveitei para fazer a revisão da classificação dos quadriláteros. Não podia permitir que esta confusão continuasse. Havia um grande grupo de alunos que colaborou nessa revisão oral o que me tranquilizou. Afinal não estava assim tão esquecida. A justificação dos L que eram todos tão parecidos, leva-me a acreditar que estes alunos não se esforçam para compreenderem as definições e verifica-las nos quadriláteros.

Resolvi pedir aos outros grupos que fizessem os “cortes”. Eram todos aceitáveis e o único diferente era o do Grupo IV. Estava à espera de mais dispersão, mas não. Pedi à AR, porta-voz do grupo IV que explicasse o raciocínio do grupo. Em vez de dividirem o terreno B num quadrado e num triângulo, fizeram-no mas depois transformaram o triângulo num quadrado. Sorri, pois estavam com medo de terem feito asneira. Não só tinham feito um raciocínio mais “elaborado” que o esperado.

Perguntei à AR como tinha calculado a área do terreno A. Tinha transformado o paralelogramo num retângulo e depois calculou a área deste. Ao abordar os outros grupos verifiquei que em vez de aplicarem a fórmula do cálculo da área do paralelogramo, ou transformaram-no num retângulo para posteriormente aplicarem a fórmula da área do retângulo ou dividiram-no num retângulo e em dois triângulos, calcularam a área parcial e depois a total.

Como tinha sido eu a ensinar-lhe esse subtópico fiquei surpreendida por ninguém se lembrar. No entanto o importante é que tenham descoberto um processo para contornar o esquecimento.

Ao preparar esta atividade tive a preocupação de arranjar uma situação próxima da realidade destes alunos. No meio a que pertencem é-lhes familiar a situação de compra de terreno para fazerem casa. Se fosse na cidade se calhar já não era tão próxima pois o tipo de habitação é mais o apartamento.

Aproveitei para discutir outras variáveis que podiam ser condicionantes da escolha. O preço e a localização foram duas condicionantes que os alunos apontaram facilmente.

Aproveitei a atividade para rever a classificação dos trapézios e o recurso multimédia, discutido passo a passo, aproveitando as intervenções dos alunos, foi uma mais-valia para os alunos perceberem a fórmula do cálculo da área do trapézio

O alerta sobre as varias possibilidades de decompor um polígono em triângulos e quadriláteros. Os exercícios resolvidos permitiram precisamente isso e a discussão da escolha da decomposição mais correta mediante os dados foi fundamental.

Tenho consciência que há alunos que apesar de considerarem este subtópico acessível nem sempre vão resolver com sucesso as tarefas propostas sobre o assunto

<i>Diário de Aula</i>			
Data: 1/06/2012	Hora: 10h10m	Aula Nº 145/146	Sala: CN2
Descrição			
<p>Logo no início da aula, verifiquei que os alunos estavam bastante ansiosos. Queriam saber a data de entrega do teste. Estavam preocupados. Havia alunos que sabiam que a nota da disciplina de Matemática dependia da classificação deste teste. Quis saber se lhes tinha corrido mal. De um modo geral a turma afirma que lhes tinha corrido bem mas consideravam o teste grande e nem todos tinham conseguido terminar. Tinham razão. Desta vez o teste era extenso, contudo algumas questões eram de resposta imediata. Com o desenrolar da conversa, verifiquei que alguns alunos tinham perdido tempo pois nem sempre tinham optado pelo processo mais rápido. A questão da solução do sistema é um exemplo. Era de escolha múltipla e a primeira opção era a resposta. Se os alunos tivessem verificado se algum dos pares ordenados era solução através da concretização das variáveis, eram rápidos a dar a resposta. Houve alunos que optaram pela resolução pelo método da substituição, erraram pelo caminho e depois nunca mais chegaram à opção certa. Alertei-os tantas vezes nas aulas para esta situação e eles continuaram a percorrer o caminho mais logo e com maior probabilidade de errar.</p> <p>Procurei tranquiliza-los e fiquei curiosa em relação aos resultados. Com a correção irei compreender toda esta ansiedade.</p> <p>Enquanto ouvia os alunos, fui ligando o computador e preparei para projetar o PowerPoint que iria servir de base para o trabalho de uma parte da aula. Perde-se tanto tempo, pois o computador demora uma “eternidade” a arrancar. Tenho consciência que as novas tecnologias facilitam o trabalho do professor, mas estes contratempos podem por vezes estragar a planificação da aula.</p> <p>Lembrei-me de levar a caixa de bombons e foi um bom modelo de um paralelepípedo retângulo. À questão do n.º de diagonais faciais daquela caixa, mais uma vez (não foi surpresa), o JC precipitado como é toca a responder errado. Este aluno gosta de ser o primeiro a responder, contudo não pensa e erra muitas vezes. Mais uma vez pedi-lhe calma e atenção.</p>			

O pedido da IP para lhe explicar o que era uma diagonal facial também não me surpreendeu. A IP é assim mesmo, se não compreender pede logo para lhe explicar e não se envergonha. Gosto que ela seja assim. Ajuda às vezes os colegas que não estão a compreender, pois nem todos os alunos o conseguem dizer.

O C disponibilizou-se logo para o fazer. Esta turma tem também esta peculiaridade. Há sempre um voluntário para explicar. O espírito de entreajuda é visível.

Também fiquei satisfeita, pois um grande n.º de alunos, após a explicação do C, colocou o dedo no ar para responder. Pedi ao R para responder e explicar como tinha chegado à resposta. Foi com facilidade que ele o fez e o JC comentou logo que tinha percebido onde tinha errado. Tinha-se esquecido das diagonais da face inferior e da face de trás. Não fiquei surpreendida. Mais uma vez, os alunos demonstram ter dificuldade em visualizar no espaço.

Confirmei junto dos alunos se eles sabiam determinar o comprimento de cada diagonal. O Teorema de Pitágoras tinha sido aplicado para determinar o comprimento das diagonais de um retângulo. Os alunos no geral demonstraram que ainda tinham presente esse exercício.

Quando eu lhes perguntei, se havia alguma alteração se, em vez de um paralelepípedo, fosse um cubo, senti alguma hesitação, e não responderam tão rápido como eu esperava. Depois é que verifiquei que, os alunos ainda não se tinham apercebido que, o comprimento das diagonais do paralelepípedo não era todo igual, dependiam da face que estavam a considerar. Fui-lhes passando o PowerPoint para que os alunos que ainda não tinham visualizado as diagonais faciais o pudessem fazer e foi aí que verifiquei que, como as diagonais das faces com dimensões diferentes apareciam com cores diferentes é que os alunos se manifestaram sobre esta situação. A visualização através da concretização e usando cores diferentes ajuda nestas situações.

Pedi-lhes para formarem os grupos habituais. Ficaram todos entusiasmados, pois eles consideram as tarefas que eu lhes proponho desafios e eles gostam de os resolver e até há um pouco de competição.

Distribui-lhes enunciado e fiz a leitura em voz alta.

O JM perguntou logo, em voz alta, se o tubo podia dobrar. O enunciado devia referir

que o tubo era de material rígido logo não podia ser dobrado.

Pelo menos um elemento da turma já tinha verificado que o tubo tinha as dimensões superiores às do camião.

A CR quis saber se a ponta do tubo podia ir com a ponta de fora com uma fita a sinalizar. Quis justificar-se desta pergunta dizendo que às vezes via camiões que transportavam coisas maiores e colocavam uma fita branca ou vermelha a sinalizar. Era evidente que esta situação era familiar aos alunos e eles estavam a transpor para a vida real.

Enquanto circulava pela sala, verifiquei que todos os grupos procuravam determinar as diagonais faciais do camião aplicando o Teorema de Pitágoras. Associaram o problema aos conteúdos que tinham aprendido na primeira parte da aula. Tinham traçado um plano, mas fiquei com dúvidas se iriam conseguir reformular a estratégia quando se apercebessem que não era o caminho suficiente para chegarem à solução.

Quando vi o T com o dedo no ar, pensei que era impossível que o grupo tivesse resolvido tão rápido, mas afinal o grupo só queria ter a certeza se estavam a seguir a estratégia certa. Tinham começado por verificar se o tubo cabia na diagonal da face com as dimensões maiores. Se o tubo fosse menor que esta diagonal cabia senão não cabia, pois os outros dois pares de diagonais teriam dimensões inferiores. Tinham encontrado uma estratégia e eliminado hipóteses usando um raciocínio lógico. Sorri, e esse sorriso deu-lhe confiança para continuarem pois, perceberam que estavam no caminho certo.

Verifiquei que todos os grupos estavam empenhados na resolução. Até o grupo do RP já consegue trabalhar e os colegas já ouvem o raciocínio do RP. Compreenderam que lucravam se ouvissem o colega que tinha sempre uma estratégia, às vezes não era a mais direta mas dava para arrancarem. O L deixou de boicotar o trabalho do colega e o M está mais maduro.

O tempo passava e os grupos começaram a aperceber que o tubo era maior do que qualquer diagonal facial. Tinham que reformular a estratégia.

Estudavam alternativas. O C colocou o dedo no ar e perguntou se podiam enviesar o tubo dentro da caixa de um canto de um lado ao oposto do outro lado. Para me certificar da ideia dele pedi-lhe que se explicasse melhor. O C fez a analogia com a sala

para exemplificar mostrando os cantos que estava a considerar. Sorri e disse “Força”.

O grupo ficou todo contente pois tinham descoberto algo que os conduzia à solução.

Os outros grupos continuavam empenhados. O único grupo que estava mais desiludido era o Grupo V pois é o grupo mais “fraco”.

Deixá-los prosseguir até ao final da aula, permitiu que tentassem verificar a sua estratégia.

Recolher o que tinham feito, não vai permitir que alterem o que fizeram.

Estou ansiosa para verificar o que fizeram e como defendem oralmente as suas conclusões na próxima aula.

<i>Diário de Aula</i>			
Data: 5/06/2012	Hora: 9h10m	Aula Nº 147	Sala: 203
Descrição			
<p>Os alunos sentaram-se em grupo. É mais fácil a troca de ideias em grupo durante o debate grupo turma. Sempre podem ajudar o porta-voz.</p> <p>Todos os grupos acabaram por confirmar aquilo que eu previa: tinham delineado uma primeira estratégia: verificar se o tubo era menor que as diagonais faciais do camião.</p> <p>Todos os grupos chegaram à conclusão que a primeira estratégia não permitia o transporte do tubo.</p> <p>À exceção do Grupo V, todos os grupos chegaram ao conceito de diagonal espacial e aproveitei a explicação da AR para clarificar o conceito através de uma linguagem corrente. Aproveitei para a contagem das diagonais espaciais. A ideia da analogia à sala de aula foi ótima para a visualização e contagem.</p> <p>Penso que os alunos também compreenderam que estas diagonais tinham o mesmo comprimento.</p> <p>O problema foi mesmo a determinação do comprimento da diagonal espacial.</p> <p>Ouvi tanta ideia errada. A ideia de terem de aplicar o Teorema de Pitágoras estava lá. O pior era formarem o triângulo retângulo. Só quatro grupos é que o fizeram.</p> <p>Como tinha o problema projetado no quadro, foi uma ajuda para o C vir ao quadro explicar aos colegas como esboçar o triângulo.</p> <p>Justificarem que o triângulo era retângulo, tornou-se outro obstáculo para a maioria da turma. Voltamos a usar a sala como referência. Todos percebiam que a aresta resultante da junção das duas paredes era perpendicular ao chão.</p> <p>Aproveitei para enunciar o critério de perpendicularidade entre uma reta e um plano. Para o ano iremos voltar a falar no assunto.</p> <p>Essa aresta era um dos catetos do triângulo e o outro era a diagonal do chão. Tenho a certeza que houve alunos na sala que não conseguiram visualizar esse triângulo. Para os convencer acho que a ideia de desenharem um retângulo no caderno, traçarem a diagonal desse retângulo e com a ajuda do lápis e da esferográfica concretizarem a aresta e a diagonal espacial, foi uma ideia rudimentar mas que resultou.</p>			

A visualização no espaço é um dos maiores obstáculos destes alunos, Só com a concretização é que conseguem lá chegar. Fazer raciocínios sobre faces ou arestas que não são visíveis torna-se complicado.

Fiquei satisfeita quando chegaram à conclusão que tinham que aplicar duas vezes o Teorema de Pitágoras.

Penso que foi importante esta atividade. Confirmei as dificuldades que os alunos têm na visualização no espaço. Confirmei que o tema da Geometria é aquele que os alunos possuem mais lacunas. Alguns alunos conseguiram confirmar que tinham dificuldades na visualização no espaço mas se arranjam estratégias para concretizar é uma grande ajuda.

<i>Diário de Aula</i>			
Data: 8/06/2012	Hora: 10h10m	Aula Nº 150/151	Sala: CN2
Descrição			
<p>Logo à entrada da sala de aula senti os alunos muito agitados. Estamos a terminar o ano letivo e tanto os alunos como os professores sentem-se cansados. Propôs-lhes logo o problema, mas receei que os meus objetivos desta vez não fossem atingidos. Os alunos como sempre sentaram-se logo em grupo e começaram a trabalhar. Interessados estavam.</p> <p>O volume do cilindro é um conteúdo trabalhado no segundo ciclo e conhecendo a professora deles tenho a certeza que não lhes vai ser estranho.</p> <p>O primeiro obstáculo que lhes surgiu, quando leram a primeira questão, foi reconhecer o formato de uma folha A4.</p> <p>A V dizia que nunca sabe o que é uma folha A3, A4 e A5.</p> <p>Quando lhes disse que o tamanho A4 era igual à folha do enunciado, a maioria dos grupos pegou em duas folhas e começaram a enrolar as folhas como no enunciado.</p> <p>O JM chamou-me para me perguntar quais as medidas certas de uma folha A4 . Sorri e disse-lhe: “ Se todos os problemas fossem esses não haviam problemas, pois tu podes facilmente saber.” Corado olhou para mim sem perceber, mas quando viu a AR com a régua, sorriu e abanou a cabeça. Tinha descoberto o caminho para ultrapassar o seu obstáculo.</p> <p>Os grupos continuavam com as suas medições quando o JO colocou o dedo no ar. Queria ter a certeza se as medidas que estavam escritas numa capa dele eram as do formato A4. Confirmei, pois este grupo iria trabalhar com os valores corretos. As medidas podem acarretar alguns erros por falta de precisão.</p> <p>Os alunos lá estavam entusiasmados e rapidamente responderam à primeira questão, pois os diferentes grupos, chamaram-me para lhes explicar o que era pretendido com a segunda questão. Expliquei-lhes o que pretendia, mas no rosto deles era evidente que não sabiam muito bem como fazer. Tinha consciência que a maioria não ia fazer pois trabalhar só com letras como eles dizem é muito difícil. Circulei pelos grupos e apercebi-me que tinham desistido da demonstração e já estavam na questão três.</p>			

Quando lhes perguntava, porque não tinham feito a questão II, as respostas resumiam –se ao facto de não terem números para usarem, logo não sabiam fazer.

Verifiquei que, para fazerem a questão I no grupo havia quem se lembrava como determinar o volume do cilindro e pelos vistos, para a questão III era necessário saber a fórmula do volume da esfera e essa não sabiam. Perguntaram se podiam consultar o livro. Como determinar as dimensões do bombom, outra dificuldade que surgiu. O L queria saber se eu lhes ia dar algum bombom, pois no enunciado falava-lhes no “bombom igual ao que te é fornecido”. É necessário ter cuidado com a linguagem utilizada nas questões para que os alunos não sejam induzidos em situações erradas.

Quando passamos para a parte da apresentação e debate de ideias quis saber o que cada grupo tinha feito. O Grupo I foi o que começou a apresentar o seu raciocínio. Quis saber como tinham obtido as dimensões das caixas. Tinha construído uma espécie de modelos e feitas as medições necessárias. Quis saber como é que os outros grupos tinham feito. Verifiquei que a maior parte dos grupos para saber o comprimento do raio, mediu os cilindros construídos com as folhas. Apenas dois grupos é que compreenderam que, a folha aberta corresponde à parte lateral da embalagem, e uma das dimensões é o perímetro da base e a outra a altura. Só estes grupos é que utilizaram a relação entre o perímetro e o raio para determinar o comprimento deste último. Os alunos verificaram que tinham cometido muitos erros de precisão e daí os resultados serem um pouco diferentes.

O grupo I continuou com a apresentação do seu raciocínio, apresentando o volume obtido das duas caixas cilíndricas. Quis saber se todos os grupos tinham chegado a valores idênticos de volume. O Grupo IV estava agitado pois verificou que devido a erros de cálculo, tirou conclusões erradas. Uma das falhas tinha sido não verificarem os cálculos.

Pedi ao porta-voz do grupo II que explicasse à turma como tinha obtido os comprimentos do raio das caixas pois tinham usado a relação entre o perímetro e o raio. A turma recordou esta relação que tantas vezes usou no segundo ciclo.

Apercebi-me que alguns alunos tinham calculado o volume das duas caixas obtidas, contudo esqueceram-se de concluir qual a embalagem que tinha menor volume. A desculpa deles, foi que não tinham lido com atenção o enunciado, perceberam o que

tinham que fazer primeiro e nunca mais voltaram a ler o enunciado. Esta situação repete-se muitas vezes- a leitura pouco atenta do que lhes é pedido, conduz muitas vezes os alunos a conclusões erradas.

Em relação à demonstração, apenas dois grupos é que tinham tentado fazer. A AR do grupo IV começou por apresentar aos colegas o raciocínio do grupo. Começaram por escrever as fórmulas que eram necessárias. Tinham que ser valorizadas pois tinham definido uma estratégia. O problema delas é que depois não sabiam como continuar e começaram a definir variáveis diferentes com a mesma letra. O T dizia que não podiam chamar x ao raio das duas caixas porque eles eram diferentes. O C do grupo II, voluntariou-se para ajudar e corrigir o erro das colegas. Fez a substituição certa mas não conseguiu convencer os colegas de qual a caixa que tinha maior volume. Ajudei-o a concluir o seu raciocínio e então os alunos compreenderam.

Eu tinha sido muito ambiciosa com esta pergunta. Todos os alunos eram unânimes em dizerem que depois de feita até parecia fácil, só que não sabiam como começar.

A questão III, tinha sido considerada uma questão fácil. O único senão voltarão a ser como determinar as dimensões do bombom. Esta dificuldade pode ser causada pelo facto da maior parte dos enunciados terem as dimensões na figura.

Falei-lhes do facto de usarem valores arredondados e de levarem à existência de alguma falta de precisão. Ensinei-lhes a usar os valores exatos nos cálculos intermédios, as vantagens de utilizarem este procedimento e só efetuarem arredondamentos em cálculos finais caso lhes seja solicitado.

De um modo geral estava satisfeita. Sabiam como determinar o volume de um cilindro. Tinham revisto a relação entre o perímetro de um círculo e o raio. Tiveram contacto com uma demonstração e ficaram sensibilizados que têm que saber relacionar os conhecimentos sobre o que está por detrás da demonstração para a concretizarem. Adquiriram uma nova fórmula pá o calculo do volume da esfera.

Posso considerar o balanço positivo, pois apesar do cansaço, os alunos conseguiram trabalhar e concretizar o propósito da aula.

Anexo 3- Questionário aos alunos

QUESTIONÁRIO

Este questionário tem como objetivo principal, recolher informação sobre o que pensas sobre a disciplina de Matemática, as aulas de Matemática e as tarefas que te são propostas nessas mesmas aulas.

Agradecia que respondesses às questões que se seguem individualmente e com o máximo de sinceridade.

O questionário é anónimo, NÃO tem como fim avaliar-te e as respostas são confidenciais.

Obrigada pela colaboração.

Dados Pessoais

1. Idade: _____ anos

2. Sexo: F ___ M ___

3. Alguma vez reprovaste? Sim ___ Não ___

Em caso afirmativo, em que ano(s) de escolaridade? _____

4. Indica o último nível que obtiveste à disciplina de Matemática ___

5. As tuas notas a Matemática têm-se mantido constantes ao longo da tua vida escolar?

Sim ___ Não ___

Se não, explica o que se tem passado desde o 1.º ano até ao 8.ºano.

3. As tuas dificuldades de aprendizagem a Matemática

Tens dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática? Sim ___ Não ___

Se sim, as tuas dificuldades de aprendizagem derivam:

Da pouca atenção na aula	
Do facto de não me interessar pelos estudos	
Da falta de condições de estudo fora da sala de aula	
Da inadaptação á turma	
Dos livros desadequados	
De não compreender a explicação do professor	
Da impossibilidade de tirar dúvidas	
Outros fatores. Quais? (Escreve aqui a causa ou causas das tuas dificuldades e que não foram referidas atrás?)	

6. A tua opinião sobre as aulas de Matemática

Assinala com uma x os dois tipos de aulas que preferes.

Prefiro as aulas em que só o professor expõe a matéria	
Prefiro as aulas em que o professor leciona tendo em vista os interesses dos alunos	
Prefiro as aulas em que o professor deixa participar ativamente os alunos	
Prefiro as aulas em que o professor propõe desafios	
Prefiro as aulas em que os alunos trabalham individualmente	
Prefiro as aulas em que os alunos pesquisam e apresentam os trabalhos desenvolvidos	
Prefiro as aulas em que os alunos trabalham em grupo	
Prefiro as aulas em que se utilizam audiovisuais	

7. Tarefas nas aulas de Matemática

Nas aulas de Matemática resolves vários tipos de tarefas: exercícios, problemas, explorações, investigações, etc.

Assinala com uma x o número de 1 a 5 que melhor corresponde à tua opinião sobre cada uma das seguintes afirmações, tendo em conta que:

- 1- Discordo inteiramente
- 2- Discordo ligeiramente
- 3- Não concordo nem discordo
- 4- Concordo ligeiramente
- 5- Concordo inteiramente

Consigo distinguir um exercício de um problema.	1	2	3	4	5
Consigo distinguir um exercício de uma tarefa exploratória ou investigativa.	1	2	3	4	5
O grau de dificuldade dos exercícios é igual ao grau de dificuldade dos problemas	1	2	3	4	5
Gosto das tarefas que me obriguem a explorar, descobrir, investigar	1	2	3	4	5
A aula que mais gosto é quando resolvo exercícios.	1	2	3	4	5
A aula que mais gosto é quando resolvo problemas.	1	2	3	4	5
A aula que mais gosto é quando resolvo tarefas exploratórias.	1	2	3	4	5
A aula que mais gosto é quando resolvo tarefas investigativas.	1	2	3	4	5

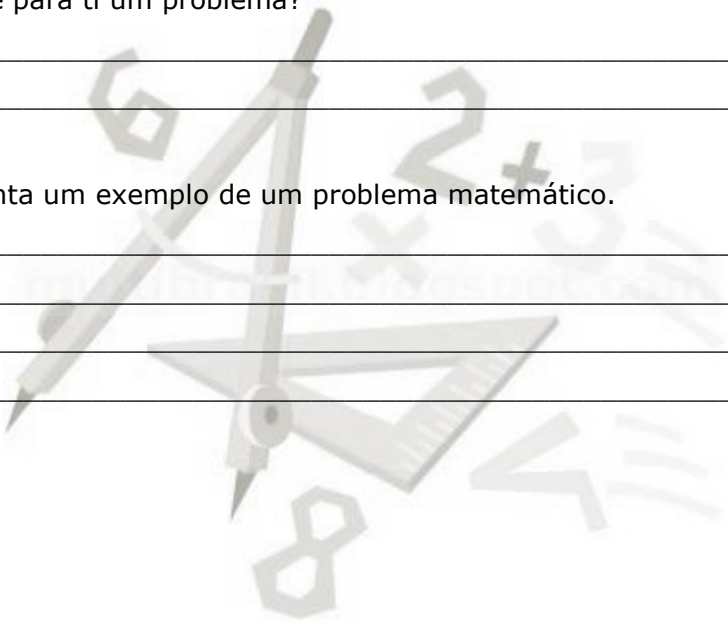
8. Dificuldades na resolução de problemas matemáticos

Quando tens que resolver um problema matemático, sentes algumas dificuldades. Assinala com uma X a(s) etapa(s) da resolução de um problema em que sentes mais dificuldade.

- 8.1.** Em compreender o que é pedido _____ **8.2.** Na recolha dos dados _____
- 8.3.** Na definição de uma estratégia de resolução _____ **8.4.** Em explicar a estratégia definida _____
- 8.5.** Em verificar se a(s) solução(ões) é(são) válida(s) _____

9. O que é para ti um problema?

10. Apresenta um exemplo de um problema matemático.



**Anexo 4- Questionário aos alunos sobre as aulas de
implementação da ABRP**

Anexo 5- Grelha de Análise dos Problemas

Análise da Resolução do Problema I

Grupo	Compreensão do problema:			Estratégia escolhida:			Obtenção de uma solução:		
	Não compreende o problema	Parte do problema não é compreendida ou considerada	Compreende completamente o problema	Não aplica qualquer estratégia ou usa uma totalmente desadequada	Estratégia parcialmente adequada	Estratégia adequada (leva à solução correta quando desenvolvida)	Sem resposta ou resposta errada	Solução errada devido a erros de cálculo ou parte da resposta	Solução correta
I			x		x			x	
II			x		x		x		
III			x			x	x		
IV			x			x			x
V			x			x		x	
VI			x			x			x
VII			x		x			x	

Análise da Resolução do Problema II

Grupo	Compreensão do problema:			Estratégia escolhida:			Obtenção de uma solução:		
	Não compreende o problema	Parte do problema não é compreendida ou considerada	Compreende completamente o problema	Não aplica qualquer estratégia ou usa uma totalmente desadequada	Estratégia parcialmente adequada	Estratégia adequada (leva à solução correta quando desenvolvida)	Sem resposta ou resposta errada	Solução errada devido a erros de cálculo ou parte da resposta	Solução correta
I			x	x			x		
II			x			x			x
III			x		x			x	
IV			x			x		x	
V			x	x			x		
VI			x		x			x	
VII			x		x			x	

Análise da Resolução do Problema III

Grupo	Compreensão do problema:			Estratégia escolhida:			Obtenção de uma solução:		
	Não compreende o problema	Parte do problema não é compreendida ou considerada	Compreende completamente o problema	Não aplica qualquer estratégia ou usa uma totalmente desadequada	Estratégia parcialmente adequada	Estratégia adequada (leva à solução correta quando desenvolvida)	Sem resposta ou resposta errada	Solução errada devido a erros de cálculo ou parte da resposta	Solução correta
I			x			x			x
II			x		x			x	
III			x			x			x
IV			x			x			x
V			x			x	x		
VI			x			x	x		
VII			x		x		x		

Análise da Resolução do Problema IV

Grupo	Compreensão do problema:			Estratégia escolhida:			Obtenção de uma solução:		
	Não compreende o problema	Parte do problema não é compreendida ou considerada	Compreende completamente o problema	Não aplica qualquer estratégia ou usa uma totalmente desadequada	Estratégia parcialmente adequada	Estratégia adequada (leva à solução correta quando desenvolvida)	Sem resposta ou resposta errada	Solução errada devido a erros de cálculo ou parte da resposta	Solução correta
I			x		x		x		
II			x			x			x
III			x		x		x		
IV			x			x			x
V			x	x			x		
VI			x			x			x
VII			x		x		x		

Análise da Resolução do Problema V- Questão I

Grupo	Compreensão do problema:			Estratégia escolhida:			Obtenção de uma solução:		
	Não compreende o problema	Parte do problema não é compreendida ou considerada	Compreende completamente o problema	Não aplica qualquer estratégia ou usa uma totalmente desadequada	Estratégia parcialmente adequada	Estratégia adequada (leva à solução correta quando desenvolvida)	Sem resposta ou resposta errada	Solução errada devido a erros de cálculo ou parte da resposta	Solução correta
I		x				x		x	
II			x			x			x
III			x			x			x
IV			x			x		x	
V		x				x			x
VI		x				x		x	
VII			x			x		x	

Análise da Resolução do Problema V- Questão II Demonstração

Grupo	Compreensão do problema:			Estratégia escolhida:			Obtenção de uma solução:		
	Não compreende o problema	Parte do problema não é compreendida ou considerada	Compreende completamente o problema	Não aplica qualquer estratégia ou usa uma totalmente desadequada	Estratégia parcialmente adequada	Estratégia adequada (leva à solução correta quando desenvolvida)	Sem resposta ou resposta errada	Solução errada devido a erros de cálculo ou parte da resposta	Solução correta
I	x			x			x		
II			x			x			x
III	x			x			x		
IV			x		x			x	
V	x			x			x		
VI	x			x			x		
VII	x			x			x		

Análise da Resolução do Problema V- Questão III

Grupo	Compreensão do problema:			Estratégia escolhida:			Obtenção de uma solução:		
	Não compreende o problema	Parte do problema não é compreendida ou considerada	Compreende completamente o problema	Não aplica qualquer estratégia ou usa uma totalmente desadequada	Estratégia parcialmente adequada	Estratégia adequada (leva à solução correta quando desenvolvida)	Sem resposta ou resposta errada	Solução errada devido a erros de cálculo ou parte da resposta	Solução correta
I		x				x		x	
II			x			x			x
III			x			x			x
IV			x			x			x
V	x			x			x		
VI		x				x		x	
VII			x			x		x	

Anexo 6- Grelhas de Registo da Análise de Conteúdo

Anexo 6.1. - Análise de Conteúdo das Grelhas de Observação

Categories	Dimensões	Unidades de registo das Grelhas de Observação	Ideias chave
Trabalho desenvolvido pelos alunos durante as aulas de ABRP	Dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução de problemas e a apresentação de resultados	<p><i>"Compreender o que é uma demonstração"</i></p> <p><i>"Seleção de dados."</i></p> <p><i>"Obter as dimensões da folha A4."</i></p> <p><i>"Obter as dimensões da caixa cilíndrica e do bombom."</i></p> <p><i>"...Traçam uma estratégia, no entanto nem sempre a mais correta."</i></p> <p><i>"...Todos os grupos, exceto um, traçam a estratégia adequada."</i></p> <p><i>" Usar a linguagem correta."</i></p> <p><i>"Expor o raciocínio oralmente para o grupo turma com linguagem correta."</i></p> <p><i>"Explicar por escrito o raciocínio desenvolvido"</i></p>	<p>Compreensão do que lhes é pedido</p> <p>Obtenção dos dados</p> <p>Definição de estratégia</p> <p>Uso da linguagem matemática na exposição de raciocínios</p>
	Estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas	<p><i>"...Procurar relações entre os lados, os ângulos e as diagonais de cada quadrado"</i></p> <p><i>"Interpretação do problema como exemplo de aplicação de uma escala"</i></p> <p><i>"Procurar relação entre os comprimentos da fotografia e da sala de aula. Uso da regra de três simples"</i></p> <p><i>"Decomposição da figura em quadriláteros e triângulos"</i></p>	<p>Descoberta de uma regularidade/regra</p> <p>Identificação de um problema equivalente</p> <p>Desdobrar o problema em</p>

Categories	Dimensões	Unidades de registo das Grelhas de Observação	Ideias chave
Trabalho desenvolvido pelos alunos durante as aulas de ABRP	Estratégias usadas pelos alunos na resolução dos problemas	<p><i>"Calculo das áreas parciais dos terrenos através das áreas parciais obtidas pela decomposição"</i></p> <p><i>"Determinação das diagonais faciais e da espacial e comparação do comprimento obtido com o do tubo"</i></p> <p><i>"a demonstração escrevendo as fórmulas"</i></p> <p><i>"Generalizar os volumes"</i></p>	<p>questões mais simples</p> <p>Tentativa acerto e erro</p> <p>Generalização da solução obtida</p>
	Motivos que condicionam os alunos na resolução de problemas	<p><i>"Distinguir quadriláteros.",</i></p> <p><i>"Classificação dos quadriláteros.",</i></p> <p><i>"Determinar a área de um paralelogramo."</i></p> <p><i>"Utilidade do Teorema de Pitágoras"</i></p> <p><i>"Relacionar corretamente os comprimentos correspondentes."</i></p> <p><i>"Visualizar as dimensões da face de trás."</i></p> <p><i>"Visualizar o triângulo formado para determinar o comprimento da diagonal espacial."</i></p> <p><i>"...Em relação à demonstração facilmente desistiram e alguns grupos passaram à questão III sem se dedicarem à demonstração."</i></p>	<p>Lacunas nos conhecimentos necessários e na aplicação dos mesmos</p> <p>Problemas de visualização no espaço</p> <p>Falta de persistência</p>
Trabalho desenvolvido		<i>Interesse e empenho</i>	Motivação

Categorias	Dimensões	Unidades de registo das Grelhas de Observação	Ideias chave
pelos alunos durante as aulas de ABRP	Elementos que facilitam a resolução de problemas	<p><i>Existência de um trabalho colaborativo e espírito de entre ajuda</i></p> <p><i><u>Nota: Estes aspetos estão registados em todas as grelhas de observação</u></i></p>	Trabalho colaborativo
Trabalho desenvolvido pela docente durante as aulas de ABRP	Papel do professor na sala de aula	<p><i>“Esclarecimento de conceitos”</i></p> <p><i>“Confirmação de dados”</i></p> <p><i>“Se o tubo era transportado inteiro...O tubo pode ir enviesado... Se o tubo era transportado dentro do camião”</i></p> <p><i>“Onde estão as dimensões da folha...Como podem obter as dimensões ... “Se podem usar a régua para obterem as dimensões da folha... Confirmar se o formato A4 é o da folha do enunciado.”</i></p> <p><i>“ O que é uma demonstração”</i></p> <p><i>“Confirmação do caminho traçado.... Confirmação do raciocínio.”</i></p> <p><i>“Confirmação do raciocínio. Ajuda na estimativa.”</i></p> <p><i>“ Confirmar se tinham que usar o Teorema de Pitágoras”</i></p> <p><i>“Confirmação da estratégia usada. “</i></p>	<p>Ajuda disponível</p> <p>Suporte para o trabalho</p> <p>Facilitador</p> <p>Mediador</p>

Anexo 6.2. - Análise de Conteúdo dos Diários de Aula

Categorias	Dimensões	Unidades de registo dos Diários de Aula	Ideias chave
<p>Trabalho desenvolvido pelos alunos durante a implementação da ABRP</p>	<p>Dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas</p>	<p><i>“Ainda não tinham percebido que a estratégia deles, através das áreas na fotografia, não era válida para determinar a altura da Escola.”</i></p> <p><i>“ O RC do Grupo I começou por explicar que quando os colegas começaram a fazer medidas resolveram também medir, mas inicialmente não sabiam o que medir.”</i></p> <p><i>“A R do Grupo IV começou por dizer que tinham inicialmente feito muitas medidas, sem saberem como as iam utilizar. Depois decidiram determinar ao comprimento da sala que seria a altura da Escola... o C respondeu logo que não se podia dizer que a altura da Escola era igual ao comprimento. Perguntei ao grupo o que as tinha levado a concluir daquela maneira e a R respondeu-me que o valor era aceitável e sabia que tinha dado mais ou menos isso ao T logo acharam que estava correta a sua estratégia.”</i></p> <p><i>“ ...verifico que são empenhado, mas a excitação é tanta que não param para refletirem...”</i></p> <p><i>“...desta forma a altura da escola era 23,52 m (muito longe dos 6,9 m reais). Perguntei ao grupo se eles estavam convencidos daquela altura. Responderam prontamente que sim.... Aqui se nota a falta de sentido crítico.”</i></p> <p><i>“Uma das falhas tinha sido não verificarem os cálculos.”</i></p> <p><i>“...esqueceram-se de concluir qual a embalagem que tinha menor volume. A desculpa deles, foi que não tinham lido com atenção o enunciado...”</i></p> <p><i>“ Os alunos têm muita dificuldade em exporem as suas ideias, de</i></p>	<p>Definição da estratégia</p> <p>Falta de atenção e concentração</p> <p>Falta de Sentido critico na avaliação da solução</p>

Categorias	Dimensões	Unidades de registo dos Diários de Aula	Ideias chave
Trabalho desenvolvido pelos alunos durante a implementação da ABRP		<p><i>comunicarem matematicamente.”</i></p> <p><i>“... no entanto a principal dificuldade foi em exporem as suas conclusões com uma linguagem correta.”</i></p> <p><i>“...trabalhar só com letras como eles dizem é muito difícil.”</i></p>	<p>Uso da linguagem</p> <p>matemática adequada</p>
	Elementos facilitadores na resolução dos problemas	<p><i>“Era um grupo que dividia tarefas. “</i></p> <p><i>“Surpreendeu-me a D que é uma miúda muito tímida. Questionava a C quando não entendia o que ela queria dizer.”</i></p> <p><i>“O RP ajudou o M a esclarecer uma das propriedades que distingue o losango propriamente dito de um quadrado.”</i></p> <p><i>“Era visível o entusiasmo desse grupo a procurar mais relações apesar de serem alunos com muitas dificuldades. Surpreendeu-me o trabalho e o esforço deles.”</i></p> <p><i>“...o grupo de RP já consegue trabalhar e os colegas já ouvem o raciocínio do RP. Compreenderam que lucravam se ouvissem o colega que tinha sempre uma estratégia, às vezes não era a mais direta mas dava para arrancarem.”</i></p> <p><i>“Quando soou o toque de saída, houve alunos que perguntaram se iríamos repetir mais vezes a experiência pois tinham gostado.”</i></p> <p><i>“Ficaram todos entusiasmados, pois eles consideram as tarefas proponho desafios e eles gostam de os resolver e até há um pouco de competição”</i></p> <p><i>“Justificarem que o triângulo era retângulo, tornou-se outro obstáculo para a maioria da turma. Voltamos a usar a sala como referência. Todos percebiam</i></p>	<p>Trabalho de grupo</p> <p>Trabalho colaborativo</p> <p>Espírito de interajuda</p> <p>Motivação e gosto por aquilo que estão a fazer</p> <p>Uso de elementos do dia a dia para exemplificarem</p>

Categorias	Dimensões	Unidades de registo dos Diários de Aula	Ideias chave
Trabalho desenvolvido pelos alunos durante a implementação da ABRP	Elementos facilitadores na resolução dos problemas	<p><i>que a aresta resultante da junção das duas paredes era perpendicular ao chão.”</i></p> <p><i>“...com a ajuda do lápis e da esferográfica concretizarem a aresta e a diagonal espacial, foi uma ideia rudimentar mas que resultou.”</i></p> <p><i>“Tinham construído uma espécie de modelos e fizeram as medições necessárias.”</i></p> <p><i>“Em voz alta elogiei a turma por estarem a trabalhar bem e a tirarem conclusões “maravilhosas”... Tinha consigo espicaça-los.”</i></p> <p><i>“Eu sorri e disse-lhes que conseguiam, só tinham que pensar um bocadinho.”</i></p> <p><i>“Sorri e esse sorriso deu-lhes confiança para continuarem pois, perceberam que estavam no caminho certo.”</i></p> <p><i>“... valorizei todas as intervenções corrigindo aquelas que usavam uma linguagem menos correta. Os alunos desta forma verificavam que estavam todos a contribuir para a descoberta que eu queria que eles fizessem”</i></p>	<p>raciocínios</p> <p>Incentivo</p> <p>Reforço positivo</p> <p>Elogio</p> <p>Valorização</p>
Trabalho desenvolvido pela docente durante as aulas de ABRP	Papel da professora	<p><i>“Quando preparei o problema, julguei que os alunos só iriam ver os quadrados e eles estavam a ir mais além.”</i></p> <p><i>“Querida que eles sentissem que o problema proposto era diferente do exercício de trabalho de casa e o exercício feito na primeira parte da aula.”</i></p> <p><i>“Ter escolhido a determinação da altura da Escola, edifício que conhecem tão bem, foi um fator que aumentou a curiosidade e o interesse pelo desafio.”</i></p> <p><i>“Ao preparar esta atividade tive a preocupação de arranjar uma situação mais próxima da realidade destes alunos. No meio a que pertencem é-lhes familiar a</i></p>	<p>Escolha de problemas desafiantes e motivadores para o trabalho</p>

Categorias	Dimensões	Unidades de registo dos Diários de Aula	Ideias chave
Trabalho desenvolvido pela docente durante as aulas de ABRP	Papel da professora	<p><i>situação de compra de terreno para fazerem casa.”</i></p> <p><i>“É necessário ter cuidado com a linguagem utilizada nas questões para que os alunos não sejam induzidos em situações erradas.”</i></p> <p><i>“... expliquei-lhes que iriam resolver um problema durante os primeiros 45 minutos que os levaria à descoberta de conceitos importantes para a aprendizagem que iriam realizar nas próximas aulas.”</i></p> <p><i>“ Perguntei-lhes o que era isso de “virados” terem a mesma forma para verificar se eles estavam a utilizar bem o conceito de forma.”</i></p> <p><i>“Perguntei-lhes então o que eram figuras semelhantes, o que o T respondeu... Pedi então que descobrissem como é que isso acontecia.”</i></p> <p><i>“Respondi-lhes que verificassem se era válido o raciocínio.”</i></p> <p><i>“Perguntei ao grupo se eles estavam convencidos daquela altura.”</i></p> <p><i>“Para facilitar, aconselhei-os a fazerem divisões na horizontal e na vertical. Desta forma iria evitar perdas de tempo...” (23/05/2012).</i></p> <p><i>“O L agressivamente respondeu-lhe que eram quadrados, bastava virá-los. Tive que pedir calma ao L.” (26/10/2011)</i></p> <p><i>“ ... a A do Grupo VII, levantou-se e disse que queria fazer o exercício sozinho, Pois o L e o M estavam com conversas paralelas e não queriam resolver o problema com ela e o RP... procurei que eles sentissem que juntos poderiam chegar lá mais rápido com a colaboração de todos.”</i></p>	<p>Explicar o objetivo da tarefa</p> <p>Orientador do trabalho</p> <p>Gestor de conflitos</p>

Categorias	Dimensões	Unidades de registo dos Diários de Aula	Ideias chave
Trabalho desenvolvido pela docente durante as aulas de ABRP	Papel da professora	<p><i>“Ordenadamente os alunos começaram a apresentar as suas conclusões. Optei por registá-las no quadro e separá-las pois haviam ideias que estavam de acordo com os objetivos da aula...”</i></p> <p><i>“Estimulei ainda a participação mais ativa dos porta-vozes dos grupos.”</i></p> <p><i>“Questionei a turma se achavam correto o raciocínio dos colegas.”</i></p> <p><i>“Pedi ao RP do Grupo VII para explicar a estratégia do grupo dele pois sabia que era diferente e queria gerar discussão.”</i></p> <p><i>“Alertei-os para o perigo de se desviarem quando levam estratégias menos diretas.”</i></p> <p><i>“Costumo deixar grupo a grupo o porta voz apresentar a sua resolução e argumentar quando questionado por mim ou pelos colegas. “</i></p> <p><i>“Aproveitei para discutir outras variáveis que podiam ser condicionantes da escolha.”</i></p> <p><i>“O C do Grupo li voluntariou-se para ajudar a corrigir o erro das colegas. Fez a substituição certa mas não conseguiu convencer os colegas de qual a caixa que tinha maior volume. Ajudei-o a concluir o seu raciocínio e então os alunos compreenderam.”</i></p>	<p>Moderador e orientador da discussão da tarefa</p> <p>Promovedor de interações entre os alunos</p>
Trabalho desenvolvido pela docente durante as aulas de ABRP	Constrangimentos sentidos pela professora	<p><i>“Senti que o facto de os alunos não saberem o que era pretendido com o problema poderia os ter levado a tirarem conclusões diferentes das pretendidas.”</i></p> <p><i>“O inconveniente desse tipo de tarefas é o tempo, pois é difícil prever o tempo que os alunos demoram a resolvê-la.”</i></p>	<p>Insucesso em concretizar os objetivos definidos com o problema</p> <p>Definição do tempo necessário para resolver o</p>

Anexo 7- Problemas Propostos

Anexo 7.1. Problema I - Polígonos “Parecidos”

TRABALHO DE GRUPO

MATEMÁTICA 8.º ANO

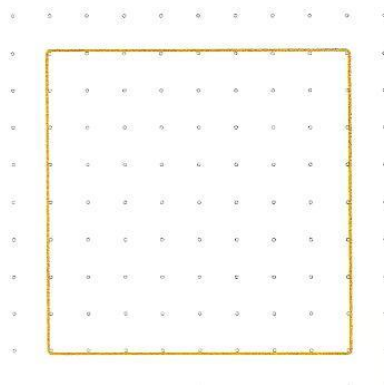
Grupo _____

Data ___/___/___

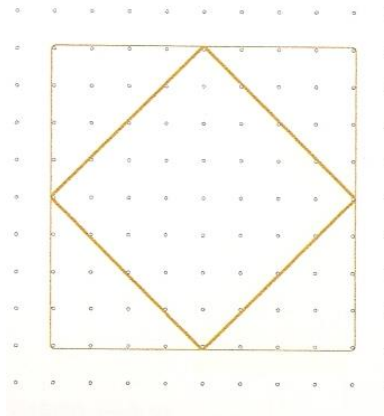
Constituição do Grupo: _____

Problema I – Polígonos “Parecidos”

O António recebeu como presente o geoplano. Ele e a Maria pegaram em elásticos e partiram à descoberta. O António colocou o primeiro elástico.

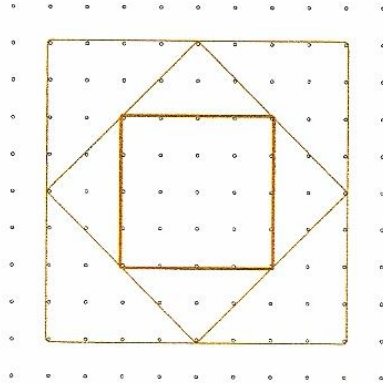


A Maria colocou o segundo elástico.

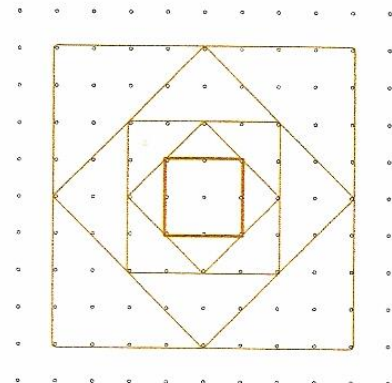


E assim sucessivamente foram colocando os elásticos.

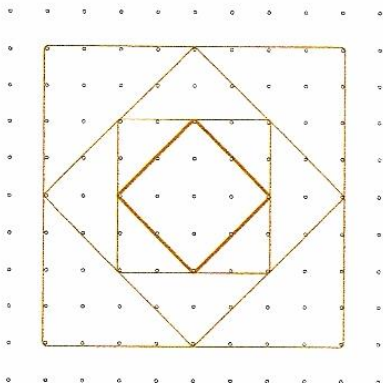
3.º elástico



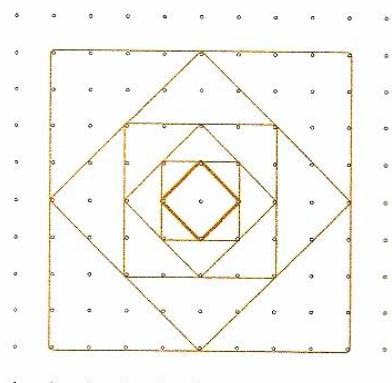
5.º elástico



4.º elástico



6.º elástico



Presta atenção ao diálogo entre eles.

Maria: Os nossos polígonos são todos iguais.

António: Iguais? Não diria iguais, talvez parecidos. Vamos descobrir que relação ou relações existem entre eles?

Maria: Talvez se fizemos essa descoberta, consigamos perceber o que é que os faz serem parecidos.

António: Pois é! Mãos à obra.

Ajuda o António e a Maria a resolver este problema.

(Adaptado Xis-Geometria- Matemática 7.º ano)

Anexo 7.2. Problema II – Medir alturas

TRABALHO DE GRUPO
MATEMÁTICA 8.º ANO

Grupo _____

Data ___/___/___

Constituição do Grupo: _____

Problema II – Medir alturas

Determina a partir da fotografia a altura da fachada principal da Escola.



Descreve todo o raciocínio que efetuaste para resolver este problema.

(Adaptado da brochura Semelhança-Proposta de sequência de tarefas para o 3.º ciclo)

Anexo 7.3. Problema III – Qual dos terrenos escolher?

TRABALHO DE GRUPO
MATEMÁTICA 8.º ANO

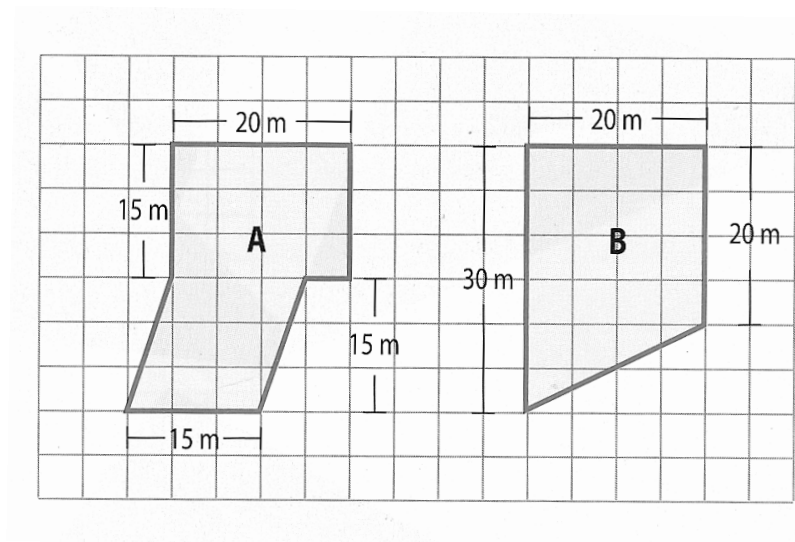
Grupo _____

Data ___/___/___

Constituição do Grupo: _____

Problema III – Qual dos terrenos escolher?

A Maria e o António querem comprar um terreno para construir uma casa. Para concretizarem o seu projeto necessitam, no máximo, de 500m^2 . Foram-lhes apresentados os seguintes terrenos:



Qual dos terrenos interessará mais ao casal? Porquê?

(Adaptado Matematicamente Falando - 8.º ano)

Anexo 7.4. Problema IV – Caberá o tubo no caminhão?

TRABALHO DE GRUPO**MATEMÁTICA 8.º ANO**

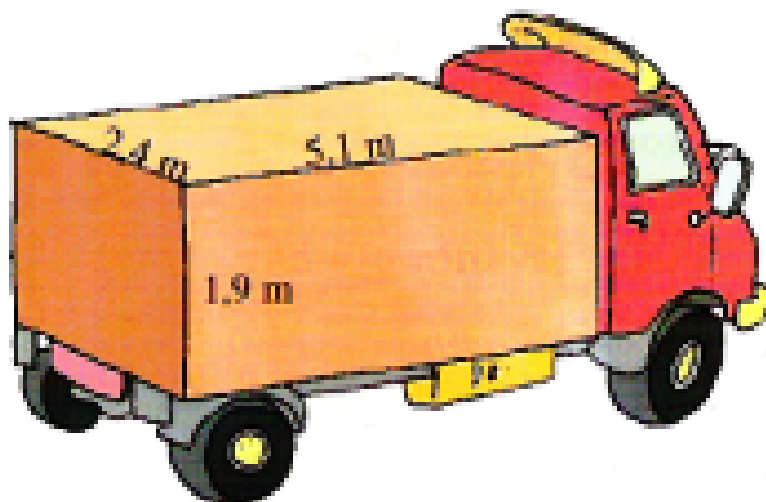
Grupo _____

Data ___/___/___

Constituição do Grupo: _____

Problema IV – Caberá o tubo no camião?

A empresa Costa & Silva Lda. tem camiões para transporte de materiais. Uma firma de construção precisa de transportar um tubo de 5,82 metros de comprimento. Caberá este tubo no camião com as dimensões apresentadas na figura? Descreve todo o raciocínio que efetuaste para resolver este problema.



(Adaptado Matemática 8- 8.º ano)

Anexo 7.5. Problema V - Que tipo de embalagem devemos escolher?

TRABALHO DE GRUPO**MATEMÁTICA 8.º ANO**

Grupo _____

Data ___/___/___

Constituição do Grupo: _____

Problema V**I – Que tipo de embalagem devemos escolher?**

Os alunos de uma turma do 9º ano estão a preparar uma visita a um lar de idosos. Querem presentear cada idoso com uma pequena caixa de bombons.

Como não podem gastar muito dinheiro, querem fazer as embalagens na escola a partir de folhas de papel, com uma certa espessura e de tamanho A_4 .

Já estabeleceram que as embalagens terão forma cilíndrica, mas estão com dificuldades em definir como vão enrolar a folha, pois pretendem a embalagem com menor volume. Uma parte da turma acha que se a folha for enrolada como mostra a figura 1 terá menor volume, mas outra parte dos alunos acha que é a forma da figura 2.

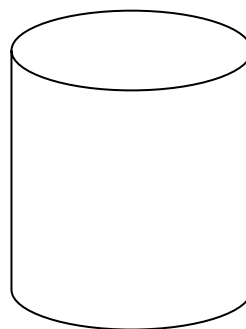


Figura 1

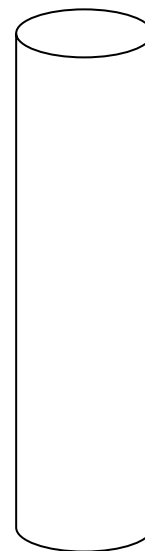


Figura 2

Quem tem razão?

Arranjem uma estratégia para convencer os outros grupos da vossa opinião.

Registem a vossa opinião, o raciocínio que fizeram, e possíveis materiais utilizados.

II - Demonstração

Considerem uma folha de papel de dimensões **a** e **b**, sendo **a** a medida maior, que vai ser enrolada das duas formas que refere a tarefa anterior. Demonstra qual dos cilindros terá maior volume.

III - Quantos bombons iremos precisar por embalagem?

Na embalagem escolhida, serão colocados bombons iguais ao da figura ao lado. Façam uma estimativa do número de bombons a colocar na embalagem. Expliquem como pensaram e apresentem todos os cálculos que efetuarem.

Nota: Considera o bombom igual ao que te é fornecido.



(Adaptado da Brochura Volumes - Proposta de sequência de tarefas para o 2.º ciclo)

Anexo 8 – Planos de Aulas

PLANO DE AULA DE MATEMÁTICA – Aplicação Problema I			
Sumário: Resolução de um problema. Descoberta da noção de semelhança. Ampliação e redução de um polígono		Ano: 8.º	Turma: F
		Data: 26/10/2011	Sala: 206 Tempo: 90 min
Tema Matemático: Geometria	Tópico matemático: Semelhança	Material necessário: <ul style="list-style-type: none"> • Ficha de trabalho • Máquina de calcular • Material de escrita • Caderno diário • Manual 7.ºano (volume2) • Geoplanos e elásticos 	
Subtópico matemático: <ul style="list-style-type: none"> • Noção de semelhança • Ampliação e redução de um polígono. 		Propósito da tarefa: Com a realização desta tarefa pretende-se que os alunos compreendam a noção de semelhança de figuras e de ampliação/redução de uma figura. Pretende-se também que os alunos percebam que, em Matemática, dizer que duas figuras são semelhantes não é a mesma coisa que dizer que elas são parecidas pois duas figuras poderão ser parecidas mas não ser matematicamente semelhantes.	
Conhecimentos prévios: <ul style="list-style-type: none"> • Conceito de proporcionalidade entre os lados dos polígonos • Área do quadrado • Noção de razão 			
Capacidades transversais: <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Resolução de problemas 			
Objetivos específicos: <ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer e analisar situações onde existe proporcionalidade entre comprimentos dos lados dos polígonos. • Compreender a noção de semelhança • Reconhecer que uma figura ampliada/reduzida mantém os ângulos correspondentes geometricamente iguais e que os lados correspondentes proporcionais. 			

Desenvolvimento da aula:

A aula é dividida em duas partes: resolução da tarefa em grupo e discussão e registo das conclusões em grupo turma.

1.ª Parte (45 minutos)

1. Registo do sumário no caderno diário.
2. Os alunos são distribuídos em grupos de 3/4 elementos. É eleito um porta-voz de cada grupo.
3. É entregue a cada aluno, uma folha com o enunciado do problema I.
4. Em seguida a professora efetua a leitura do problema em voz alta e explica aos alunos que a resolução daquela tarefa decorrerá durante a primeira parte da aula e tem como objetivo descobrir conceitos que irão ser importantes para as aprendizagens a realizar nas próximas aulas.
5. A professora pede aos alunos para registarem todos os raciocínios realizados e é disponibilizado geoplanos e elásticos para que os alunos possam concretizar as construções apresentadas ao longo do enunciado do problema.
6. A professora disponibiliza-se para dar pequenas orientações aos grupos que delas necessitarem e/ou solicitarem.
7. Enquanto os alunos desenvolvem o seu trabalho, a professora circula por entre os grupos para verificar o trabalho e as estratégias desenvolvidas e identificar alguma dificuldade que surja.

2.ª Parte (45 minutos)

1. Na segunda parte da aula, o porta-voz do grupo apresenta, à turma, a estratégia usada na resolução do problema proposto e faz-se a discussão dos resultados. A professora promove e dinamiza a comunicação/discussão com toda a turma.
2. No final da aula, a professora regista as conclusões no quadro e os alunos no caderno diário a noção de figuras semelhantes e o significado de ampliação e redução.
3. É solicitado a cada grupo a folha da resolução do problema para uma posterior análise e avaliação.

Avaliação:

Observação direta com registo na grelha de observação de:

- Interesse/participação demonstrado durante a aula.
- Empenho e colaboração com os colegas na resolução das atividades propostas.
- Aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
- Comportamento na sala de aula.

Análise da resolução efetuada por cada grupo com registo em grelha própria.

Observações:

É proposto aos alunos, como trabalho de casa os exercícios 1 e 2 da página do manual para aplicação dos conteúdos aprendidos

PLANO DE AULA DE MATEMÁTICA – Aplicação do Problema II			
Sumário: Correção do trabalho de casa. Trabalho de grupo: Medir a altura da Escola		Data: 2/11/2011	Ano: 8.º Turma: F
		Sala: 206	Tempo: 90 min
Tema Matemático: Geometria	Tópico matemático: Semelhança	Material necessário: <ul style="list-style-type: none"> • Ficha de trabalho • Máquina de calcular • Material de escrita • Caderno diário • Manual do 7.º ano (volume 2) • Fita métrica • Régua graduada 	
Subtópico matemático: <ul style="list-style-type: none"> • Noção de semelhança 			
Conhecimentos prévios: <ul style="list-style-type: none"> • Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade directa. 		Propósito da tarefa: Com a realização desta tarefa pretende-se que os alunos calculem uma distância real a partir da fotografia de um objeto do qual se conhece a medida de comprimento de um dos seus elementos ou a escala da fotografia e desta forma calculam-se distâncias reais a partir de representações.	
Capacidades transversais: <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Resolução de problemas 			
Objetivos específicos: <ul style="list-style-type: none"> • Compreender a noção de semelhança; • Relacionar os conceitos de semelhança e proporcionalidade; • Calcular distâncias reais a partir de uma representação. 			
Desenvolvimento da aula: A aula é dividida em três partes: correção dos trabalhos de casa e esclarecimento de eventuais dúvidas, resolução da tarefa em grupo e discussão e registo das conclusões em			

grupo turma.

1.ªParte (15 minutos)

1. Registo do sumário no caderno diário.
2. Verificação e registo em grelha própria da realização dos trabalhos de casa (Exercício 4 da página 77 do Manual)
3. Revisão do conceito de escalas.

2.ªParte (45 minutos)

1. Os alunos reúnem-se nos grupos habituais
2. Distribuição dos enunciados do Problema II
3. Em seguida a professora efetua a leitura do problema em voz alta e explica aos alunos que têm cerca de 45 minutos para a resolução da tarefa decorrerá durante a primeira parte da aula e que posteriormente irá ser feita a discussão de resultados com o objetivo de descobrirem novos conceitos que irão ser importantes para as aprendizagens a realizar nas próximas aulas.
4. A professora pede aos alunos para registarem todos os raciocínios realizados e só disponibilizará fitas métricas quando os alunos as solicitarem para efetuarem as medições da parede e/ou janela.
5. A professora disponibiliza-se para dar pequenas orientações aos grupos que delas necessitarem e/ou solicitarem.
6. Enquanto os alunos desenvolvem o seu trabalho, a professora circula por entre os grupos para verificar o trabalho e as estratégias desenvolvidas e identificar alguma dificuldade que surja.

2.ªParte (30 minutos)

1. Na segunda parte da aula, o porta-voz do grupo apresenta, à turma, a estratégia usada na resolução do problema proposto e faz-se a discussão dos resultados. A professora promove e dinamiza a comunicação/discussão com toda a turma.
2. No final da aula, a professora regista as conclusões no quadro e os alunos no caderno diário.
3. A professora explica-lhes a noção de razão de semelhança
4. É solicitado a cada grupo a folha da resolução do problema para uma posterior análise e avaliação.

Avaliação:

Observação direta com registo na grelha de observação de:

- Interesse/participação demonstrado durante a aula.
- Empenho e colaboração com os colegas na resolução das atividades propostas.
- Aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
- Comportamento na sala de aula.

Análise da resolução efetuada por cada grupo com registo em grelha própria.

Observações:

Não foi possível cumprir o plano de aula devido à necessidade de mais tempo que o previsto para a correção e esclarecimento de dúvidas no trabalho de casa.

PLANO DE AULA DE MATEMÁTICA – Aplicação do Problema II (continuação)				
<p>Sumário: Conclusão da tarefa: Medir a altura da escola com debate de estratégias. Razão de semelhança. Construção de figuras semelhantes usando o método da quadricula</p>			Ano: 8.º	Turma: F
		Data: 4/11/2011	Sala: CN2	Tempo: 90 min
Tema Matemático: Geometria	Tópico matemático: Semelhança	<p>Material necessário:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ficha de trabalho • Máquina de calcular • Material de escrita • Caderno diário • Manual 7.º ano (volume 2) • Régua graduada • Projetor • Computador 		
<p>Subtópico matemático:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Noção de semelhança • Ampliação e redução de um polígono 				
<p>Conhecimentos prévios:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade direta 		<p>Propósito da tarefa:</p> <p>Com a realização desta tarefa pretende-se que os alunos calculem uma distância real a partir da fotografia de um objeto do qual se conhece a medida de comprimento de um dos seus elementos ou a escala da fotografia e desta forma calculam-se distâncias reais a partir de representações. Nesta fase pretende-se verificar se os alunos em grupo desencadearam um plano para responderem ao que lhes é solicitado.</p>		
<p>Capacidades transversais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Resolução de problemas 				
<p>Objetivos específicos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Compreender a noção de semelhança; • Relacionar os conceitos de semelhança e proporcionalidade; 				

- Calcular distâncias reais a partir de uma representação;
- Ampliar e reduzir um polígono, dada a razão de semelhança através do método da quadrícula.

Desenvolvimento da aula:

A aula é dividida em três partes: conclusão da tarefa iniciada na aula anterior, discussão e registo das conclusões em grupo turma, resolução de um exercício de aplicação do método da quadrícula para ampliação de um polígono.

1.ªParte (15 minutos)

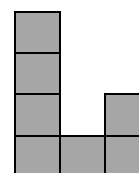
1. Registo do sumário no caderno diário.
2. Conclusão da tarefa proposta na última aula.

2.ªParte (40 minutos)

1. Na segunda parte da aula, o porta-voz do grupo apresenta, à turma, a estratégia usada na resolução do problema proposto e faz-se a discussão dos resultados. A professora promove e dinamiza a comunicação/discussão com toda a turma.
2. No final da aula, a professora regista as conclusões no quadro e os alunos no caderno diário.
3. A professora explica-lhes que o fator de escala entre duas figuras semelhantes é igual ao valor da razão de semelhança e os alunos regista a definição de razão de semelhança.
4. É solicitado a cada grupo a folha da resolução do problema para uma posterior análise e avaliação.

3.ªParte (35 minutos)

1. É projetada a seguinte figura
2. Solicita-se aos alunos que copiem a figura para o caderno utilizando o quadriculado do mesmo construam uma ampliação da cópia figura de razão 3.
3. A professora circulará pela sala para verificar e ajudar os alunos na construção da figura.
4. Um aluno irá ao quadro desenhar a figura pretendida e explicar o seu raciocínio.
5. Solicita-se aos alunos que considerando a unidade de comprimento e a unidade de



área, respetivamente, o lado e a quadrícula, determinem a área e o perímetro da figura inicial e da figura ampliada e que determinem a razão entre o perímetro da figura obtida e a figura inicial e a razão entre as áreas da figura final e a figura inicial e que relacionem com o valor da razão de semelhança.

6. Discute-se as conclusões dos alunos e regista-se no quadro e no caderno a relação existente.

Avaliação:

Observação direta com registo na grelha de observação de:

- Interesse/participação demonstrado durante a aula.
- Empenho e colaboração com os colegas na resolução das atividades propostas.
- Aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
- Comportamento na sala de aula.

Análise da resolução efetuada por cada grupo com registo em grelha própria.

Observações:

É proposto para casa o exercício 1 e 2 da página 81 do manual, para os alunos verificarem e consolidarem os conhecimentos adquiridos nas últimas aulas.

PLANO DE AULA DE MATEMÁTICA – Aplicação Problema III			
Sumário: Resolução do Problema III. Determinação de áreas compondo ou decompondo polígonos em triângulos e quadriláteros		Ano: 8.º	Turma: F
		Data: 23/05/2012	Sala: 206 Tempo: 45 min
Tema Matemático: Geometria	Tópico matemático: Teorema de Pitágoras	Material necessário: <ul style="list-style-type: none"> • Ficha de trabalho • Máquina de calcular • Material de escrita • Caderno diário • Régua • Manual (volume 2) 	
Subtópico matemático: <ul style="list-style-type: none"> • Composição e decomposição de polígonos 			
Conhecimentos prévios: <ul style="list-style-type: none"> • Conceito de área e perímetro de uma figura. • Cálculo da área do triângulo, quadrado, retângulo e paralelogramo. • Reconhecer quadriláteros e as suas propriedades 		Propósito da tarefa: Com esta tarefa pretende-se o uso da composição e decomposição de polígonos, recorrendo a triângulos e quadriláteros para a determinação da área de dois terrenos.	
Capacidades transversais: <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Resolução de problemas 			
Objetivos específicos: <ul style="list-style-type: none"> • Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros • Calcular a área de um polígono 			
Desenvolvimento da aula:			

A aula é dividida em duas partes: resolução da tarefa em grupo e discussão e registo das conclusões em grupo turma.

1.ªParte (20 minutos)

1. Registo do sumário no caderno diário.
2. Os alunos são distribuídos em grupos de 3/4 elementos.
3. É entregue a cada aluno, uma folha com o enunciado do problema III.
4. A professora pede aos alunos para não se esquecerem de registarem todos os raciocínios realizados.
5. A professora disponibiliza-se para dar pequenas orientações aos grupos que delas necessitarem e/ou solicitarem.
6. Enquanto os alunos desenvolvem o seu trabalho, a professora circula por entre os grupos para verificar o trabalho e as estratégias desenvolvidas e identificar alguma dificuldade que surja.

2.ªParte (25 minutos)

1. Na segunda parte da aula, o porta-voz do grupo apresenta, à turma, a estratégia usada na resolução do problema proposto e faz-se a discussão dos resultados. A professora promove e dinamiza a comunicação/discussão com toda a turma.
2. No final da aula, a professora regista as conclusões no quadro e os alunos no caderno diário a noção de figuras semelhantes e o significado de ampliação e redução.
3. É solicitado a cada grupo a folha da resolução do problema para uma posterior análise e avaliação.

Avaliação:

Observação direta com registo na grelha de observação de:

- Interesse/participação demonstrado durante a aula.
- Empenho e colaboração com os colegas na resolução das atividades propostas.
- Aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
- Comportamento na sala de aula.

Análise da resolução efetuada por cada grupo com registo em grelha própria.

Observações:

É proposto aos alunos, como trabalho de casa a leitura da página 122 do volume 2 do manual.

PLANO DE AULA DE MATEMÁTICA_ Aplicação do Problema IV			
Sumário: Diagonais faciais de um paralelepípedo retângulo. Diagonal espacial de um paralelepípedo retângulo		Ano: 8.º	Turma: F
		Data: 1/06/2012	Sala: CN2 Tempo: 90 min
Tema Matemático: Geometria	Tópico matemático: Teorema de Pitágoras	Material necessário: <ul style="list-style-type: none"> • Ficha de trabalho • Régua • Máquina de calcular • Material de escrita • Caderno diário • Manual (volume 2) • Computador • Projetor • Powerpoint • Caixa de bombons com a forma de um paralelepípedo retângulo 	
Subtópico matemático: <ul style="list-style-type: none"> • Diagonal facial e espacial de um paralelepípedo 			
Conhecimentos prévios: <ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Pitágoras 		Propósito da tarefa: Com a realização desta tarefa pretende-se que os alunos identifiquem as diagonais faciais e espaciais de um paralelepípedo e em simultâneo descubram como se pode determinar o seu comprimento aplicando o Teorema de Pitágoras.	
Capacidades transversais: <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Resolução de problemas 			
Objetivos específicos: <ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas no plano e no espaço aplicando o Teorema de Pitágoras 			
Desenvolvimento da aula: A aula é dividida em duas partes: identificação das diagonais faciais num paralelepípedo retângulo, e resolução da tarefa em grupo, discussão e registo das conclusões em grupo			

turma.

1.ªParte (30 min)

1. Registo do sumário no caderno diário.
2. Questionar os alunos sobre o número de diagonais faciais de um paralelepípedo. Caso os alunos não consigam identificar todas as diagonais faciais de um paralelepípedo, usar uma caixa de bombons como modelo de um paralelepípedo facilitando desta forma a visualização.
3. Procurar que os alunos definam diagonal facial de um paralelepípedo.
4. Questionar os alunos sobre o raciocínio utilizado para a determinação do comprimento de qualquer uma das diagonais faciais do paralelepípedo. Particularizar para o caso de um cubo.
5. Apresentação do PowerPoint que permitirá aos alunos visualizar as diagonais faciais e verificar que as diagonais das faces com dimensões diferentes têm comprimentos diferentes.
6. Registo das conclusões no quadro pela professora e no caderno diário pelos alunos.

2.ªParte (60 min)

1. Os alunos são distribuídos pelos grupos habituais de trabalho e é-lhes proposto a resolução do problema IV.
2. Distribuição do enunciado e leitura do mesmo em voz alta.
3. Esclarecimento de qualquer dúvida que surja no decorrer da resolução do problema, procurando abrir caminho sem nunca dar a solução.
4. Registo das observações em grelha própria.
5. Em grupo turma, apresentação e debate das propostas de resolução de cada um dos grupos dinamizado pela professora.
7. Registo no caderno diário da síntese final registada no quadro pela professora e no caderno diário pelos alunos.

Avaliação:

Observação direta com registo na grelha de observação de:

- Interesse/participação demonstrado durante a aula.
- Empenho e colaboração com os colegas na resolução das atividades propostas.
- Aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.

- Comportamento na sala de aula.

Análise da resolução efetuada por cada grupo com registo em grelha própria.

Observações:

Caso os alunos demorem mais tempo do que o previsto e não terminem a resolução do problema, recolher as folhas com o trabalho já desenvolvido para continuar o trabalho na próxima aula.

PLANO DE AULA DE MATEMÁTICA- Aplicação do Problema IV (continuação)			
Sumário: Apresentação e discussão da resolução do problema IV- Será que cabe no camião?		Data: 5/06/2012	Ano: 8.º
		Sala: 203	Turma: F
Tema Matemático: Geometria	Tópico matemático: Teorema de Pitágoras	Material necessário:	
Subtópico matemático:		<ul style="list-style-type: none"> • Ficha de trabalho • Material de escrita • Régua • Caderno diário • Manual (volume 2) • Computador • Projetor 	
<ul style="list-style-type: none"> • Diagonal facial e espacial de um paralelepípedo 			
Conhecimentos prévios:		Propósito da tarefa:	
<ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Pitágoras 		Com a realização desta tarefa pretende-se que os alunos identifiquem as diagonais faciais e espaciais de um paralelepípedo e em simultâneo descubram como se pode determinar o seu comprimento aplicando o Teorema de Pitágoras.	
Capacidades transversais:			
<ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Resolução de problemas 			
Objetivos específicos:			
<ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas no plano e no espaço aplicando o Teorema de Pitágoras 			
Desenvolvimento da aula:			
<ol style="list-style-type: none"> 1. Registo do sumário no caderno diário. 2. Cada grupo através do porta-voz do grupo apresenta à turma o raciocínio e a estratégia delineada para resolver o problema IV proposto na última aula. 3. Discussão das estratégias usadas. 4. Clarificação dos conceitos de diagonal facial e diagonal espacial de um paralelepípedo e correção da terminologia usada. 			

5. Encaminhamento dos alunos para que compreendam que a determinação da diagonal espacial pode ser feita através da aplicação do Teorema de Pitágoras.
6. Indicação ou validação de uma das estratégias desenvolvidas pelos alunos para a resolução do problema proposto.
7. Resolução do problema.
8. Registo das conclusões no quadro pela professora e no caderno diário pelos alunos.

Avaliação:

Observação direta com registo na grelha de observação de:

- Interesse/participação demonstrado durante a aula.
- Empenho e colaboração com os colegas na resolução das atividades propostas.
- Aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.

Comportamento na sala de aula.

Observações:

É proposto como trabalho de casa os exercícios 2 e 4 da página 140 do manual (volume2) para verificação e consolidação de conhecimentos por parte dos alunos.

PLANO DE AULA DE MATEMÁTICA – Aplicação Problema V			
Sumário: Resolução do problema V		Ano: 8.º	Turma: F
		Data: 8/06/2012	Sala: CN2
Tema Matemático: Geometria	Tópico matemático: Sólidos Geométricos	Material necessário: <ul style="list-style-type: none"> • Ficha de trabalho • Máquina de calcular • Material de escrita • Caderno diário • Régua • Folhas A4, • Fita-cola • Manual (volume 2) 	
Subtópico matemático: <ul style="list-style-type: none"> • Área da superfície e volume 			
Conhecimentos prévios: <ul style="list-style-type: none"> • Propriedades dos sólidos geométricos • Perímetro e área de um círculo 		Propósito da tarefa: Com esta tarefa pretende-se que os alunos determinem e comparem volumes de sólidos geométricos, nomeadamente cilindros e esferas. Pretende-se ainda que os alunos façam uma demonstração qual o cilindro com maior volume considerando uma folha de papel de dimensões a e b, sendo a a medida maior, que vai ser enrolada das duas formas	
Capacidades transversais: <ul style="list-style-type: none"> • Raciocínio matemático • Comunicação matemática • Resolução de problemas 			
Objetivos específicos: <ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas que envolvam volumes de cilindros e esferas; • Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos; • Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; • Discutir resultados, processos e ideias matemáticos. 			

Desenvolvimento da aula:

A aula é dividida em duas partes: resolução da tarefa em grupo e discussão e registo das conclusões em grupo turma.

1.ª Parte (45 minutos)

1. Registo do sumário no caderno diário.
2. Os alunos são distribuídos em grupos de 3/4 elementos.
3. É entregue a cada aluno, uma folha com o enunciado do problema V.
4. A professora pede aos alunos para não se esquecerem de registarem todos os raciocínios realizados.
5. A professora disponibiliza-se para dar pequenas orientações aos grupos que delas necessitarem e/ou solicitarem.
6. Enquanto os alunos desenvolvem o seu trabalho, a professora circula por entre os grupos para verificar o trabalho e as estratégias desenvolvidas e identificar alguma dificuldade que surja.

2.ª Parte (45 minutos)

4. Na segunda parte da aula, o porta-voz do grupo apresenta, à turma, a estratégia usada na resolução do problema proposto e faz-se a discussão dos resultados. A professora promove e dinamiza a comunicação/discussão com toda a turma.
5. No final da aula, a professora regista as conclusões no quadro e os alunos no caderno diário a noção de figuras semelhantes e o significado de ampliação e redução.
6. É solicitado a cada grupo a folha da resolução do problema para uma posterior análise e avaliação.

Avaliação:

Observação direta com registo na grelha de observação de:

- Interesse/participação demonstrado durante a aula.
- Empenho e colaboração com os colegas na resolução das atividades propostas.
- Aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.
- Comportamento na sala de aula.

Análise da resolução efetuada por cada grupo com registo em grelha própria.

Observações:

É proposto aos alunos, como trabalho de casa o exercício 18 da página 49 do volume 2 manual para verificação e consolidação de conhecimentos por parte dos alunos.