

Índice

Introdução.....	3
1) Recursividade e Iteração.....	5
2) Equações de Diferenças Lineares	10
2.1. Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes	10
2.1.1. Homogéneas	11
2.1.2. Equações de primeira ordem	11
2.1.3. Equações de segunda ordem	12
2.1.4. Equações de ordem superior a 2.....	20
2.2. Os operadores Δ e E	24
2.2.1. Formação das equações usando tabelas de diferenças (Operador Δ)	24
2.2.2. Operador Deslocamento E (Boole).....	26
2.2.3. Propriedades dos operadores Δ e E	27
2.3. Formação de equações de diferenças	27
2.4. Equações de diferenças lineares não homogéneas de segunda ordem e com coeficientes constantes	31
2.5. Equações de diferenças lineares não homogéneas de ordem k com coeficientes constantes	36
2.6. Estabilidade.....	39
2.6.1. Introdução.....	39
2.6.2. Equação de Decaimento.....	41
2.6.3. Oscilador harmónico.....	50
2.7. Equações de diferenças de primeira ordem	55
2.7.1. Homogéneas	55
2.7.2. Não Homogéneas.....	57
2.8. Equações de diferenças de segunda ordem.....	60
2.8.1. Homogéneas	60
2.8.2. Não Homogéneas.....	61
2.9. Equações de diferenças lineares de ordem n	62
2.9.1. Homogéneas de ordem n	66

2.9.2. Equações de diferenças lineares não homogéneas de ordem n (método da variação das constantes)	68
3) Sistemas Dinâmicos Discretos	71
3.1. Iteração de ponto fixo	72
3.2. Pontos fixos ou Valores de Equilíbrio	76
3.3. Determinação gráfica de soluções	77
4) Equações de diferenças não lineares	83
4.1. A equação de diferenças logística	83
4.2. Determinação de Trajectórias – Método das Fases	93
4.2.1. Identificação da trajectória	95
4.2.2. Tipos de Trajectórias	95
5) Aplicações das equações de diferenças	99
5.1 Matemática	99
5.1.1 Soma de k elementos de uma sucessão	99
5.1.2 Conversão de dizimas infinitas periódicas em fracções	101
5.1.3 Polinómios de Chebyshev	102
5.1.4 Triângulos de Diferenças Perfeitos	104
5.2 Economia	114
5.2.1 Rendas	114
5.2.2 Amortizações	115
5.3 Estratégias de Guerra	116
5.3.1 Teoria de Corrida ao Armamento de Richardson's	116
5.3.2 Modelo de Combate de Lanchester	118
5.3.3 Combate de guerrilha	120
5.4 Física	121
5.4.1 A Lei de Arrefecimento	122
5.5 Variação da População	124
5.5.1 Procedimento de Verhulst	124
Conclusão	127
Bibliografia	128
Livros	128
Sites	130

Introdução

Quando nos propomos fazer um trabalho o mais difícil é ter uma boa ideia que conduza a um bom projecto.

O que são e para que servem as Equações de Diferenças vai ser o objectivo principal deste trabalho.

Vamos debruçar-nos, no primeiro capítulo, sobre alguns conceitos matemáticos básicos como sucessão e relação de recorrência, que são usados para estudar alguns modelos matemáticos, tais como, as taxas de juro composto, o número de movimentos da Torre de Hanói, entre outros.

As relações de recorrência são também chamadas equações de diferenças, que podem ser resolvidas usando iterações. No entanto a finalidade deste estudo é dar-nos a conhecer a possibilidade de outros métodos de resolução.

As equações de diferenças são divididas em lineares e não lineares estudando-se no capítulo dois as equações de diferenças lineares, homogéneas e não homogéneas. O primeiro caso que iremos tratar possui um método de resolução sistemático, será o das equações de diferenças lineares com coeficientes constantes. Posteriormente são fornecidos métodos de resolução para equações de diferenças de primeira, segunda e enésima ordem.

Surge neste ponto uma dificuldade clara. Até esta fase do trabalho existia sempre uma fórmula para a solução da equação de diferenças. Mas caso essa fórmula não exista, qual será a estratégia de resolução? Surge-nos no capítulo três um método gráfico que, de alguma forma, nos soluciona esta dificuldade. Este método gráfico é conhecido como Teia de Aranha e permite-nos saber através da análise do gráfico se as soluções encontradas, são ou não estáveis.

O método gráfico, Teia de Aranha, é uma ferramenta importante no estudo das equações de diferenças não lineares. Outro método gráfico usado nas equações não lineares é o método das fases, que embora não permita determinar a solução da equação, permite determinar a natureza da sua trajectória. Neste trabalho foi apenas estudada a equação de diferenças logística, no domínio das equações de diferenças não lineares.

As equações de diferenças têm aplicações em muitas áreas, tais como na Matemática, na Física, em Engenharia, na Economia, na Sociologia, em estratégias de guerra, entre outras.

Foram abordadas aplicações, no último capítulo, em quase todas as áreas citadas, a vastidão de aplicações, implicou que se tivesse feito uma selecção criteriosa dos exemplos a incluir.

1) Recursividade e Iteração

Uma **sucessão** é uma aplicação cujo domínio é \mathbf{IN} . Consoante o conjunto de chegada seja \mathbf{Z} , \mathbf{Q} ou \mathbf{R} , dizemos respectivamente que estamos perante uma sucessão de números inteiros, racionais ou reais.

Como o domínio de uma sucessão $\{a_n\}$ é sempre \mathbf{IN} , a sucessão fica bem definida, pelas imagens, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, a que chamamos **termos da sucessão**. O termo a_n designa-se **termo geral** da sucessão.

Uma das formas de definir uma sucessão é pelo seu termo geral. Outra das formas é definir usando recursividade. Uma definição recursiva de uma sucessão especifica um ou mais termos iniciais e uma regra para determinar os termos seguintes que podem ser obtidos a partir daqueles que os precedem. A regra para encontrar termos a partir daqueles que os precedem chama-se relação de recorrência.

Definição 1.1: Uma **relação de recorrência** para uma sucessão $\{a_n\}$ é uma fórmula que exprime a_n em função de um ou mais dos termos antecedentes da sucessão, nomeadamente $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ para todos os inteiros com $n \geq n_0$, em que n_0 é um inteiro não negativo.

Uma sucessão é chamada solução de uma relação de recorrência se os seus termos satisfazem a relação de recorrência.

As condições iniciais para a sucessão especificam os termos que precedem o primeiro termo em que a relação de recorrência tem efeito. [8]

A relação de recorrência e as condições iniciais determinam univocamente uma sucessão, pois em conjunto fornecem uma definição recursiva da sucessão. Qualquer termo da sucessão pode ser determinado usando a relação de recorrência e as condições iniciais um número suficiente de vezes. No entanto existem métodos mais práticos para a determinação dos termos de certas classes de sucessões definidas pelas relações de recorrência e pelas condições iniciais.

O algoritmo constituído pelas condições iniciais e pela relação de recorrência chama-se **algoritmo recursivo**.

Podemos usar relações de recorrência para estudar modelos matemáticos de uma vasta variedade de problemas, tais como taxas de juro composto, contagem e suas técnicas, número de movimentos como no caso do puzzle “Torre de Hanói”, etc.

Exemplo 1.1: Suponhamos que uma pessoa deposita 10000 euros numa promissória num banco que oferece 3 % de juros por ano (taxa) e que os juros são acumulados na promissória.

Seja P_n o valor da conta passado n anos. Como esse valor é igual ao valor da conta depois de $n-1$ anos mais os juros do ano n , vemos que a sucessão $\{P_n\}$ satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$P_n = P_{n-1} + 0.03 \cdot P_{n-1} = 1.03 \cdot P_{n-1} \quad (1.1)$$

Assim temos
$$\begin{cases} P_0 = 10000 \\ P_n = 1.03 \cdot P_{n-1} \end{cases}.$$

Usando agora um processo iterativo para determinar o termo geral de $\{P_n\}$ temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1.03 \cdot P_0 \\ P_2 &= 1.03 \cdot P_1 = (1.03)^2 \cdot P_0 \\ P_3 &= 1.03 \cdot P_2 = (1.03)^3 \cdot P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= 1.03 \cdot P_{n-1} = (1.03)^n \cdot P_0 \end{aligned}$$

Fazendo agora $P_0 = 10000$, temos

$$P_n = (1.03)^n \cdot 10000 \quad (1.2)$$

Podemos agora demonstrar que esta fórmula é válida usando o método de indução matemática.

Assim P_0 é válida pois é a condição inicial. Se

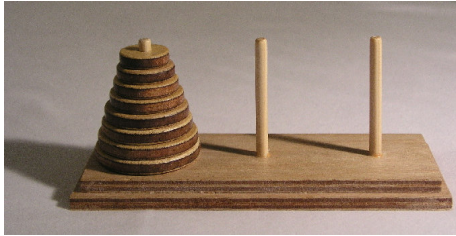
$$P_n = (1.03)^n \cdot 10000$$

então admitindo a relação de recorrência e a hipótese indutiva temos:

$$P_{n+1} = (1.03) \cdot P_n = 1.03 \cdot (1.03)^n \cdot 10000 = (1.03)^{n+1} \cdot 10000 \quad (1.3)$$

Exemplo 1.2: Torre de Hanói⁽¹⁾

Trata-se de um popular puzzle dos fins do século XIX, que foi inventado pelo famoso matemático francês Edouard Lucas, muito conhecido pelo seu trabalho com a



sucessão de Fibonacci e pela sucessão associada que recebeu o seu nome. O puzzle consiste em três estacas montadas num suporte com discos de diferentes tamanhos.

Inicialmente estes discos estão colocados na

primeira estaca por ordem de tamanho, com a maior no fundo.

As regras do puzzle permitem a deslocação de discos, um de cada vez, de uma estaca para outra desde que um disco nunca seja colocado por cima de um disco mais pequeno.

A finalidade do puzzle é ter todos os discos colocados na segunda estaca na mesma ordem em que se encontravam de início (o disco maior no fundo).

Seja H_n o número de movimentos necessários para solucionar o problema da Torre de Hanói com n discos. Temos de estabelecer uma relação de recorrência para a sucessão $\{H_n\}$.

Para simplificar a linguagem usaremos a seguinte notação: E_1 para designar a estaca 1, E_2 para designar a estaca 2 e E_3 para designar a estaca 3.

Suponhamos por exemplo que $n = 3$. Então passamos o disco número um para E_2 , o disco número dois para E_3 , o disco número um para E_3 , o disco número 3 para E_2 , o disco número um para E_1 , o disco número dois para E_2 e finalmente o disco número um para E_2 . Temos assim sete movimentos.

Comecemos agora com n discos na E_1 . Podemos transferir os $n - 1$ discos do topo, seguindo as regras do puzzle para E_3 , usando H_{n-1} movimentos. Conservamos o disco maior fixo durante este processo. Depois de terminarmos este procedimento

⁽¹⁾ O algoritmo TOWERS emprega uma rotina altamente recursiva de *best fit* (melhor ajustamento) e está incluída no conjunto processador de testes STANFORD RECURSION para testes de *Hardware* e *Software*.

passamos o disco maior para E_2 e podemos então passar os $n - 1$ discos da E_3 para E_2 usando H_{n-1} movimentos adicionais.

Assim a relação de recorrência procurada é:

$$H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1 \quad (1.4)$$

A condição inicial é $H_1 = 1$, pois um disco pode ser transferido de E_1 para E_2 , segundo as regras, com um só movimento. Donde temos o seguinte algoritmo recursivo

$$\begin{cases} H_1 = 1 \\ H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Podemos usar novamente um processo iterativo para solucionar a relação de recorrência. Temos, então:

$$\begin{aligned} H_n &= 2 \cdot H_{n-1} + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 \cdot H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2 \cdot (2 \cdot H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 \cdot H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \qquad \qquad \qquad \vdots \\ &= \dots \dots \dots = 2^k \cdot H_{n-k} + 2^{k-1} + \dots + 2 + 1^{(2)} \\ &= \qquad \qquad \qquad \vdots \\ &= 2^{n-1} \cdot H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Encontramos assim um termo geral para a relação de recorrência

$$H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1 \quad (1.6)$$

com condição inicial $H_1 = 1$. A solução é

$$H_n = 2^n - 1 \quad (1.7)$$

Tal como no exemplo anterior podemos agora demonstrar que esta fórmula é válida usando o método de indução matemática.

⁽²⁾ Soma da série geométrica é dada pela expressão $\frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$. Neste caso temos

$$\frac{1 - 2^{n-1} \cdot 2}{1 - 2} = 2^n - 1$$

Assim H_1 é válida pois é a condição inicial. Se $H_n = 2^n - 1$ então admitindo a relação de recorrência e a hipótese indutiva temos:

$$H_{n+1} = 2 \cdot H_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \quad (1.8)$$

⁽³⁾ Uma antiga lenda diz que existe uma Torre em Hanói onde os monges estão a transportar 64 discos de ouro de uma estaca para a outra segundo as regras do puzzle. Eles levam 1 segundo para movimentar um disco. A lenda diz que o mundo acabará quando eles terminarem o puzzle.

Então a partir de $H_n = 2^n - 1$ temos que os monges vão necessitar de $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ movimentos para transferir os discos, ou seja mais de 500 bilhões de anos para terminarem o puzzle, portanto ainda vamos ter muito tempo antes de chegar o “fim do mundo”, sobretudo se admitirmos que a idade actual do Sol é 4.5 bilhões de anos, e deverá estar a meio do seu tempo de vida, como indicam os modelos das estrelas construídos em computador e supondo que por “fim do mundo” se entende o fim da vida na Terra.

2) Equações de Diferenças Lineares

2.1. Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

As relações de recorrência são também chamadas equações de diferenças e podem ser resolvidas usando iterações ou qualquer outra das técnicas que iremos ver mais adiante. Uma classe importante das equações de diferenças que podem ser explicitamente resolvidas de uma forma sistemática: á a das equações de diferenças lineares com coeficientes constantes.

Definição 2.1.1: Uma equação de diferenças lineares não homogénea com coeficientes constantes tem a seguinte forma:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = R_k \quad (2.1.1)$$

onde a_i é um conjunto de n constantes, $a_n \neq 0$ e R_k é uma função de k .

Muitas vezes usa-se o termo **Sistema Dinâmico Discreto** para designar equações de diferenças.

Se $R_k = 0$ estamos perante uma equação de diferenças lineares homogénea com coeficientes constantes.

A ordem n é a diferença entre o maior e o menor dos índices de y :
 $n = k + n - k$.

Exemplos 2.1.1:

- $P_n = 1.03 \cdot P_{n-1}$ é uma equação linear homogénea de ordem 1;
- $a_n = a_{n-5}$ é uma equação linear homogénea de ordem 5;
- $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}^2$ é uma equação não linear.
- $H_n = 2 \cdot H_{n-1} + 1$ é uma equação linear não homogénea de ordem 1;

2.1.1. Homogéneas

Usando o operador E , podemos reescrever a equação homogénea da seguinte forma:

$$f(E)y_k = 0 \quad (2.1.1.1)$$

onde

$$f(E) = E^n + a_1 E^{n-1} + a_2 E^{n-2} + \dots + a_{n-1} E + a_n \quad (2.1.1.2)$$

Assim define-se a **equação característica** associada à equação homogénea, por:

$$f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (2.1.1.3)$$

Estamos perante uma equação polinomial de grau n , que tem n raízes $\{r_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Assim a função $f(r)$ pode ser reescrita de forma factorizada:

$$f(r) = \prod_{i=1}^n (r - r_i) = (r - r_1) \cdot (r - r_2) \cdot \dots \cdot (r - r_n) = 0 \quad (2.1.1.4)$$

As soluções da equação característica são chamadas raízes características da equação e podem ser usadas para estabelecer a solução geral da equação, que nos dá todas as soluções da equação de diferenças.

2.1.2. Equações de primeira ordem

As equações de primeira ordem serão na sua forma canónica:

$$y_{k+1} + a_1 y_k = R_k \quad (2.1.2.1)$$

sendo então a equação homogénea correspondente da forma

$$y_{k+1} + a_1 y_k = 0 \quad (2.1.2.2)$$

A solução geral da equação (2.1.2.2) é:

$$y_k = c_1 \cdot (-a_1)^k \quad (2.1.2.3)$$

Para obter esta solução geral podemos começar por escrever

$$y_{k+1} = -a_1 y_k \quad (2.1.2.4)$$

⁽⁴⁾ $E^p y_k = y_{k+p}$

e substituindo agora por valores discretos, temos:

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= -a_1 y_k \\
 y_1 &= -a_1 y_0 \\
 y_2 &= -a_1 y_1 = (-a_1) \cdot (-a_1) y_0 = (-a_1)^2 y_0 \\
 y_3 &= -a_1 y_2 = (-a_1) \cdot (-a_1)^2 y_0 = (-a_1)^3 y_0 \\
 &\vdots \\
 y_k &= -a_1 y_{k-1} = (-a_1) \cdot (-a_1)^{k-1} y_0 = (-a_1)^k y_0
 \end{aligned}
 \tag{2.1.2.5}$$

Podemos agora fazer $c_1 = y_0$.

2.1.3. Equações de segunda ordem

Nas equações de segunda ordem há que distinguir três casos, que correspondem às diferentes raízes do polinómio característico.

1º Caso – Raízes características reais e diferentes ($r_1 \neq r_2$)

Teorema 2.1.3.1: Sejam a_1 e a_2 números reais. Suponhamos que

$$r^2 - a_1 r - a_2 = 0 \tag{2.1.3.1}$$

tem duas raízes reais e distintas r_1 e r_2 . Então a sucessão $\{y_k\}$ é uma solução da equação de diferenças

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} \tag{2.1.3.2}$$

se e só se

$$y_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k \tag{2.1.3.3}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ em que α_1, α_2 são constantes.

Demonstração: (\Rightarrow) Em primeiro lugar iremos mostrar que se r_1 e r_2 são as raízes do polinómio característico e α_1, α_2 são constantes, então a sucessão $\{y_k\}$ com

$$y_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$$

é uma solução da equação de diferenças (2.1.3.2).

Como r_1 e r_2 são raízes de

$$r^2 - a_1 r - a_2 = 0 \quad (2.1.3.4)$$

temos que

$$\begin{cases} r_1^2 = a_1 r_1 + a_2 \\ r_2^2 = a_1 r_2 + a_2 \end{cases} \quad (2.1.3.5)$$

Temos então que

$$\begin{aligned} a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} &= a_1 (\alpha_1 r_1^{k-1} + \alpha_2 r_2^{k-1}) + a_2 (\alpha_1 r_1^{k-2} + \alpha_2 r_2^{k-2}) \\ &= \alpha_1 \cdot r_1^{k-2} (a_1 \cdot r_1 + a_2) + \alpha_2 \cdot r_2^{k-2} (a_1 \cdot r_2 + a_2) \\ &= \alpha_1 \cdot r_1^{k-2} r_1^2 + \alpha_2 \cdot r_2^{k-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 \cdot r_1^k + \alpha_2 \cdot r_2^k \\ &= y_k \end{aligned}$$

Logo está demonstrado que a sucessão $\{y_k\}$ com

$$y_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$$

é uma solução da equação de diferenças.

(\Leftarrow) Em segundo lugar temos de mostrar que se a sucessão $\{y_k\}$ é uma solução, então

$$y_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$$

para alguns α_1 e α_2 , constantes.

Para mostrar que todas as soluções $\{y_k\}$ da equação de diferenças (2.1.3.2) têm a forma (2.1.3.3), para $k = 0, 1, 2, \dots$ e para algumas constantes α_1 e α_2 , suponhamos que $\{y_k\}$ é uma solução geral da equação de diferenças, e as condições iniciais

$$\begin{cases} y_0 = A \\ y_1 = B \end{cases}, \text{ se verificam.}$$

Vai-se mostrar que existem constantes α_1 e α_2 , tais que a sucessão $\{y_k\}$ com

$$y_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$$

satisfaz estas mesmas condições iniciais. Assim substituindo k por 0 e k por 1, tem-se

$$\begin{cases} y_0 = A = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y_1 = B = \alpha_1 \cdot r_1 + \alpha_2 \cdot r_2 \end{cases} \quad (2.1.3.6)$$

Resolvendo agora estas equações em ordem a α_1 e α_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha_2 = A - \alpha_1 \\ B = \alpha_1 \cdot r_1 + (A - \alpha_1) \cdot r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = A - \alpha_1 \\ B = \alpha_1 \cdot (r_1 - r_2) + A \cdot r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = A - \alpha_1 \\ \alpha_1 = \frac{B - A \cdot r_2}{r_1 - r_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = A - \frac{B - A \cdot r_2}{r_1 - r_2} \\ \alpha_1 = \frac{B - A \cdot r_2}{r_1 - r_2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{A \cdot r_1 - B}{r_1 - r_2} \\ \alpha_1 = \frac{B - A \cdot r_2}{r_1 - r_2} \end{cases} \end{aligned}$$

onde as expressões para α_1 e α_2 , dependem do facto de $r_1 \neq r_2$ (caso contrário o teorema não se verifica). Então com estes valores para α_1 e α_2 , a sucessão $\{y_k\}$ com $a_1 r_1^k + a_2 r_2^k$ satisfaz as duas condições iniciais.

Logo

$$y_k = \alpha_1 r_1^k + \alpha_2 r_2^k$$

□

Exemplo 2.1.3.1: Seja

$$y_{k+2} - 9y_{k+1} + 20y_k = 0 \quad (2.1.3.7)$$

O polinómio característico associado a esta equação é:

$$r^2 - 9r + 20 = 0 \quad (2.1.3.8)$$

ou seja

$$r = 5 \vee r = 4$$

Temos assim duas soluções distintas da equação dada:

$$y_k^1 = 5^k$$

e

$$y_k^2 = 4^k$$

Assim a solução geral é:

$$y_k = a_1 5^k + a_2 4^k \quad (2.1.3.9)$$

2º Caso – Raízes características reais e iguais ($r_1 = r_2$)

Teorema 2.1.3.2: Sejam a_1 e a_2 números reais, com $a_2 \neq 0$. Suponhamos que

$$r^2 - a_1 r - a_2 = 0 \quad (2.1.3.10)$$

tem duas raízes reais e iguais, ou seja, uma única raiz r_0 de multiplicidade 2. Então a sucessão $\{y_k\}$ é uma solução da equação de diferenças

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} \quad (2.1.3.11)$$

se e só se

$$y_k = \alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k \quad (2.1.3.12)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$, em que α_1, α_2 são constantes.

Demonstração: (\Rightarrow) Em primeiro lugar iremos mostrar que se r_0 é uma raiz dupla do polinômio característico e α_1, α_2 são constantes, então a sucessão $\{y_k\}$ com

$$y_k = \alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k$$

é uma solução da equação de diferenças.

Como r_0 é raiz de (2.1.3.10), temos que

$$r_0^2 = a_1 r_0 + a_2$$

Temos então que

$$\begin{aligned} a_1 y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2} &= a_1 (\alpha_1 r_0^{k-1} + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^{k-1}) + a_2 (\alpha_1 r_0^{k-2} + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^{k-2}) \\ &= \alpha_1 \cdot r_0^{k-2} (a_1 \cdot r_0 + a_2) + \alpha_2 \cdot r_0^{k-2} (a_1 \cdot r_0 \cdot k + a_2 \cdot k) \\ &= \alpha_1 \cdot r_0^{k-2} (a_1 \cdot r_0 + a_2) + \alpha_2 \cdot r_0^{k-2} \cdot k \cdot (a_1 \cdot r_0 + a_2) \\ &= \alpha_1 \cdot r_0^{k-2} r_0^2 + \alpha_2 \cdot r_0^{k-2} r_0^2 \cdot k \\ &= \alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k \\ &= y_k \end{aligned}$$

Logo está demonstrado que a sucessão $\{y_k\}$ com

$$y_k = \alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k$$

é uma solução da equação de diferenças.

(\Leftarrow) Em segundo lugar temos de mostrar que se a sucessão $\{y_k\}$ é uma solução, então

$$y_k = \alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k \quad (2.1.3.13)$$

para alguns α_1 e α_2 , constantes.

Para mostrar que todas as soluções $\{y_k\}$ da equação de diferenças (2.1.3.11) têm a forma (2.1.3.13) para $k = 0, 1, 2, \dots$ para algumas constantes α_1 e α_2 , suponhamos que

$\{y_k\}$ é uma solução geral da equação de diferenças, e as condições iniciais $\begin{cases} y_0 = A \\ y_1 = B \end{cases}$, se

verificam.

Vai-se mostrar que existem constantes α_1 e α_2 , tais que a sucessão $\{y_k\}$ com

$$y_k = \alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k$$

satisfaz estas mesmas condições iniciais. Assim substituindo k por 0 e k por 1, tem-se

$$\begin{cases} y_0 = A = \alpha_1 \\ y_1 = B = \alpha_1 \cdot r_0 + \alpha_2 \cdot r_0 \end{cases} \quad (2.1.3.14)$$

Resolvendo agora estas equações em ordem a α_1 e α_2 , obtemos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = A \\ B = \alpha_1 \cdot r_0 + \alpha_2 \cdot r_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = A \\ B = A \cdot r_0 + \alpha_2 \cdot r_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = A \\ \alpha_2 = \frac{B - A \cdot r_0}{r_0} \end{cases}$$

Então com estes valores para α_1 e α_2 , a sucessão $\{y_k\}$ com

$$\alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k$$

satisfaz as duas condições iniciais.

Logo

$$y_k = \alpha_1 \cdot r_0^k + \alpha_2 \cdot k \cdot r_0^k$$

□

Exemplo 2.1.3.2: Seja

$$y_{k+2} - 8y_{k+1} + 16y_k = 0 \quad (2.1.3.15)$$

O polinómio característico associado a esta equação é:

$$r^2 - 8r + 16 = 0 \Leftrightarrow r = 4$$

Temos assim uma raíz dupla da equação característica. Logo temos duas soluções

$$y_k^1 = 4^k$$

e

$$y_k^2 = k4^k$$

Assim a solução geral é:

$$y_k = (a_1 + a_2 k)4^k \quad (2.1.3.16)$$

3º Caso – Raízes características complexas conjugadas
($r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$)

Teorema 2.1.3.3: Sejam a_1 e a_2 números reais, com $a_2 \neq 0$. Suponhamos que

$$r^2 - a_1 r - a_2 = 0 \quad (2.1.3.17)$$

tem duas raízes complexas conjugadas. Então a sucessão $\{y_k\}$ é uma solução da equação de diferenças

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} \quad (2.1.3.18)$$

se e só se

$$y_k = \alpha_1 \cdot (a + bi)^k + \alpha_2 \cdot (a - bi)^k \quad (2.1.3.19)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ e onde α_1, α_2 são constantes.

Se optarmos por usar a forma trigonométrica dos números complexos, temos que:

$$\begin{aligned}
y_k &= \alpha_1 \cdot [\rho^k (\cos(k \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(k \cdot \theta))] + \alpha_2 \cdot [\rho^k (\cos(k \cdot \theta) - i \operatorname{sen}(k \cdot \theta))] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y_k = \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\beta_1} \cdot \rho^k \cdot \cos(k \cdot \theta) + \underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\beta_2} \cdot \rho^k \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \theta) \quad (5).
\end{aligned}$$

Logo

$$y_k = \beta_1 \cdot \rho^k \cdot \cos(k \cdot \theta) + \beta_2 \cdot \rho^k \cdot \operatorname{sen}(k \cdot \theta) \quad (2.1.3.20)$$

com β_1, β_2 constantes.

Exemplo 2.1.3.3: Seja

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} - 2y_k = 0 \quad (2.1.3.21)$$

O polinômio característico associado a esta equação é:

$$r^2 - 2r - 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 + i \vee r_2 = 1 - i$$

Temos assim duas raízes complexas conjugadas da equação característica. Assim

$$\rho = \sqrt{2}.$$

e

$$\theta = \operatorname{arctg}(1) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Logo a solução geral é:

$$y_k = \beta_1 (\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \beta_2 (\sqrt{2})^k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right) \quad (2.1.3.22)$$

Observação 2.1.3.1: A nível do ensino secundário quando se fala em equações o percurso que se faz é estudar em primeiro lugar as equações de primeiro grau, que tem um método de resolução e depois estudar as equações de segundo grau, que têm outros métodos distintos de resolução, avançando posteriormente para equações com um nível de complexidade cada vez maior.

⁽⁵⁾ $(a + bi)^k = \rho^k \operatorname{cis}(k\theta) = \rho^k (\cos(k \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(k \cdot \theta))$, com $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

Um aspecto interessante das equações de diferenças lineares com coeficientes constantes de primeira ordem, é que estas podem ser encaradas como um caso particular das equações de diferenças lineares com coeficientes constantes de segunda ordem do tipo

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \quad (2.1.3.23)$$

com $a_2 = 0$. Logo são do tipo

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} = 0 \quad (2.1.3.24)$$

São de primeira ordem porque $(k+2) - (k+1) = 1$. A respectiva equação característica é:

$$r^2 + a_1 r = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = -a_1.$$

Temos assim duas soluções distintas da equação dada:

$$y_k^1 = 0^k$$

e

$$y_k^2 = (-a_1)^k$$

Assim a solução geral é:

$$y_k = c_1 0^k + c_2 (-a_1)^k = c_2 (-a_1)^k \quad (2.1.3.25)$$

Observação 2.1.3.2: Outro dos aspectos interessantes das equações de diferenças lineares com coeficientes constantes é a natureza exponencial das suas soluções. Vejamos agora o que se passa em relação às equações de primeira ordem:

Seja

$$y_{k+1} + a_1 y_k = 0 \quad (2.1.3.26)$$

com $y_0 = c_1$. Assim

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= -a_1 y_k \\ y_1 &= -a_1 y_0 \\ y_2 &= -a_1 y_1 = (-a_1) \cdot (-a_1) y_0 = (-a_1)^2 y_0 \\ y_3 &= -a_1 y_2 = (-a_1) \cdot (-a_1)^2 y_0 = (-a_1)^3 y_0 \\ &\vdots \\ y_k &= -a_1 y_{k-1} = (-a_1) \cdot (-a_1)^{k-1} y_0 = (-a_1)^k y_0 \end{aligned}$$

Logo

$$y_k = (-a_1)^k \cdot y_0 = c_1 \cdot (-a_1)^k.$$

No caso das equações de segunda ordem, o processo é um pouco mais complicado.

Vejamos, neste caso, um exemplo concreto.

Seja

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0 \quad (2.1.3.27)$$

Podemos reescrever esta equação de diferenças da seguinte forma,

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} - 3y_{k+1} + 6y_k = 0 \Leftrightarrow \underbrace{[y_{k+2} - 2y_{k+1}]}_{x_{k+1}} - 3\underbrace{[y_{k+1} - 2y_k]}_{x_k} = 0$$

Logo

$$x_{k+1} - 3x_k = 0 \Rightarrow x_k = c_1 \cdot 3^k$$

Se

$$c_1 = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow x_{k+1} - 2x_k = 0 \Rightarrow x_k = A \cdot 2^k$$

Se de início fizéssemos

$$[y_{k+2} - 3y_{k+1}] - 2[y_{k+1} - 3y_k] = 0$$

obter-se-ia

$$x_{k+1} - 2x_k = 0 \Rightarrow x_k = c_2 \cdot 2^k$$

Logo se

$$c_2 = 0 \Rightarrow x_k = 0 \Rightarrow x_{k+1} - 3x_k = 0 \Rightarrow x_k = B \cdot 3^k.$$

Deste modo a solução geral será

$$y_k = A \cdot 2^k + B \cdot 3^k \quad (2.1.3.28)$$

2.1.4. Equações de ordem superior a 2

Teorema 2.1.4.1: Sejam $\{r_i\}$, uma qualquer solução da equação característica, então

$$y_k = r_i^k \quad (2.1.4.1)$$

é uma solução da equação homogénea dada.[6]

4º Caso: Equações característica de ordem superior a 2, com raízes reais diferentes

Teorema 2.1.4.2: Suponhamos que as n raízes da equação característica são distintas. Então o conjunto fundamental de soluções é dado por:

$$y_k^i = r_i^k, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.4.2)$$

Assim a sucessão y_k é uma solução da equação de diferenças

$$y_k = c_1 y_{k-1} + c_2 y_{k-2} + \dots + c_n y_{k-n} \quad (2.1.4.3)$$

se e só se:

$$y_k = c_1 y_k^1 + c_2 y_k^2 + \dots + c_n y_k^n \quad (2.1.4.4)$$

onde as n constantes c_i são arbitrárias[6].

5º Caso: Equações característica de ordem superior a 2, com raízes reais diferentes

Teorema 2.1.4.3: Dada

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = 0 \quad (2.1.4.5)$$

uma equação de diferenças lineares com coeficientes constantes a_1, a_2, \dots, a_n e $a_n \neq 0$.

Dadas as raízes $\{r_i\}$ do polinómio característico

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (2.1.4.6)$$

com multiplicidade $m_i, i = 1, 2, \dots, l$, onde

$$m_1 + m_2 + \dots + m_l = n$$

Então a solução geral da equação dada é:

$$y_k = r_1^k (A_1^1 + A_2^1 k + \dots + A_{m_1}^1 k^{m_1-1}) + \dots + r_{m_l}^k (A_1^l + A_2^l k + \dots + A_{m_l}^l k^{m_l-1}) \quad (2.1.4.7)$$

Exemplo 2.1.4.1: Determinemos as soluções gerais e as soluções particulares da equação de diferenças

$$y_{k+2} - y_{k+1} - 2y_k = 0 \quad (2.1.4.8)$$

com $y_0 = 2$ e $y_1 = 7$. O polinómio característico associado a esta equação é:

$$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2 \vee r_2 = -1$$

Temos assim duas raízes reais distintas da equação característica.

Então a sucessão y_k é uma solução geral da equação de diferenças se e só se

$$y_k = \alpha_1 2^k + \alpha_2 (-1)^k \quad (2.1.4.9)$$

Para determinar as soluções particulares dadas as condições, procederemos da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 (-1)^0 \\ y_1 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 (-1)^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 7 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Donde a solução particular da equação de diferenças é a dada por:

$$y_k = 3 \cdot 2^k - (-1)^k \quad (2.1.4.10)$$

Exemplo 2.1.4.2: Determinemos agora uma fórmula explícita para os números de Fibonacci⁽⁶⁾, cuja equação de diferenças

⁽⁶⁾ Fibonacci (também conhecido como Leonardo de Pisa) nasceu por volta de 1170 em Pisa. O pai de Fibonacci era um mercador que trabalhou no norte de África, pelo que cedo Fibonacci foi iniciado nos negócios e nos cálculos, o que fez despertar o seu interesse pela Matemática. O apelido de família do seu pai foi "Bonacci" (homem de boa natureza) e ele mesmo, Fibonacci, vem de *filho de Bonacci*. Além disso, foi através da profissão do pai que ele teve o primeiro contacto com o sistema decimal hindu-árabe. Nesta altura, era ainda utilizada a numeração romana em Itália.

Foi no seu regresso a Pisa, em 1202, que Fibonacci escreveu a sua obra mais célebre, "Liber Abaci", que foi também um meio através do qual a numeração hindu-árabe foi introduzida na Europa Ocidental. No "Liber Abaci" explicava-se como utilizar estes numerais nas operações aritméticas, abordavam-se diversos temas de Álgebra e Geometria, e também se propunham vários problemas. Escreveu também o livro "Practica Geometriae" em 1220; onde descreveu aquilo que tinha descoberto nas áreas de geometria e trigonometria.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (2.1.4.11)$$

com $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$. O polinómio característico associado a esta equação é:

$$r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Temos assim duas raízes reais distintas da equação característica.

Logo

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2.1.4.12)$$

Usando agora as condições iniciais para determinar α_1 e α_2 temos que:

$$\begin{cases} f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ f_1 = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Assim os números de Fibonacci são dados por:

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2.1.4.13)$$

Exemplo 2.1.4.3: Vamos agora determinar a solução geral e a solução particular da equação de diferenças de quarta ordem

$$a_n = a_{n-4} \quad (2.1.4.14)$$

sendo as condições iniciais, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$. A equação característica é

O nome de Fibonacci tornou-se conhecido devido a um célebre problema que existia no seu livro "Liber Abaci", que é o problema dos coelhos. Apesar de ser assim conhecido, este problema não é mais do que uma equação de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes.

Este insigne matemático morreu no ano de 1250.

$$r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \vee r_2 = -1 \vee r_3 = i \vee r_4 = -i$$

Assim a solução geral é dada por:

$$a_n = \alpha_1 + \alpha_2(-1)^n + \alpha_3(i)^n + \alpha_4(-i)^n \quad (2.1.4.15)$$

Para determinar as constantes, temos de resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 = a_0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + i \cdot \alpha_3 - i \cdot \alpha_4 = 0 = a_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = -1 = a_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - i \cdot \alpha_3 + i \cdot \alpha_4 = 1 = a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 = a_0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + i \cdot \alpha_3 - i \cdot \alpha_4 = 0 = a_1 \\ -2\alpha_3 - 2\alpha_4 = -2 \\ -2i \cdot \alpha_3 + 2i \cdot \alpha_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 = a_0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + i \cdot \alpha_3 - i \cdot \alpha_4 = 0 = a_1 \\ \alpha_4 = 1 - \alpha_3 = \frac{2-i}{4} \\ \alpha_3 = \frac{2i-1}{4i} = \frac{2+i}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_4 = \frac{2-i}{4} \\ \alpha_3 = \frac{2+i}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{4} \\ \alpha_4 = \frac{2-i}{4} \\ \alpha_3 = \frac{2+i}{4} \end{cases}$$

Logo a solução particular é:

$$a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{2+i}{4}(i)^n + \frac{2-i}{4}(-i)^n \quad (2.1.4.16)$$

2.2. Os operadores Δ e E

2.2.1. Formação das equações usando tabelas de diferenças (Operador Δ)

Vamos considerar somente diferenças para trás cuja tabela é do seguinte tipo, sendo $\{a_n\}$ uma sucessão de números reais.

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= a_1 - a_0 \\ \Delta a_2 &= a_2 - a_1 \\ &\vdots \\ \Delta a_{n-1} &= a_{n-1} - a_{n-2} \\ \Delta a_n &= a_n - a_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos assim que a primeira diferença Δa_n é, por definição,

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1} \quad (2.2.1.1)$$

A segunda diferença $\Delta^2 a_n$ é, por definição, uma diferença de duas primeiras diferenças, isto é:

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_2 &= \Delta a_2 - \Delta a_1 \\ &\vdots \\ \Delta^2 a_n &= \Delta a_n - \Delta a_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Deste modo temos que

$$a_{n-1} = a_n - \Delta a_n \quad (2.2.1.2)$$

Vamos agora mostrar que

$$a_{n-2} = a_n - 2\Delta a_n + \Delta^2 a_n \quad (2.2.1.3)$$

Com efeito do segundo membro vem:

$$\begin{aligned} a_n - 2\Delta a_n + \Delta^2 a_n &= a_n - 2\Delta a_n + \Delta a_n - \Delta a_{n-1} = a_n - \Delta a_n - \Delta a_{n-1} = \\ &= a_n - a_n + a_{n-1} - a_{n-1} + a_{n-2} = a_{n-2} \end{aligned}$$

A diferença de ordem três $\Delta^3 a_n$ é, por definição, uma diferença de duas diferenças de ordem 2.

$$\begin{aligned} \Delta^3 a_3 &= \Delta^2 a_3 - \Delta^2 a_2 \\ &\vdots \\ \Delta^3 a_n &= \Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mostremos de seguida que

$$a_{n-3} = a_n - 3\Delta a_n + 3\Delta^2 a_n - \Delta^3 a_n \quad (2.2.1.4)$$

Assim:

$$\begin{aligned} a_{n-3} &= a_n - 3\Delta a_n + 3\Delta^2 a_n - \Delta^3 a_n = a_n - 3\Delta a_n + (3\Delta a_n - 3\Delta a_{n-1}) - (\Delta^2 a_n - \Delta^2 a_{n-1}) \\ &= a_n - 3\Delta a_n + 3\Delta a_n - 3\Delta a_{n-1} - \Delta a_n + \Delta a_{n-1} + \Delta a_{n-1} - \Delta a_{n-2} \\ &= a_n - \Delta a_{n-1} - \Delta a_n - \Delta a_{n-2} = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = a_{n-3} \end{aligned}$$

Deste modo, e prosseguindo com este mesmo processo, podemos dizer que a diferença de ordem $k+1$,

$$\Delta^{k+1} a_n \quad (2.2.1.5)$$

é, por definição, uma diferença de duas diferenças de ordem k ,

$$\Delta^{k+1} a_n = \Delta^k a_n - \Delta^k a_{n-1} \quad (2.2.1.6)$$

E, generalizando os resultados, anteriores, temos que a_{n-k} , pode ser expresso em termos de

$$a_n, \Delta a_n, \Delta^2 a_n, \dots, \Delta^k a_n$$

Desta forma, a relação de recorrência para a sucessão $\{a_n\}$, pode ser expressa em função de a_n e das sucessivas diferenças

$$\Delta a_n, \Delta^2 a_n$$

A equação daí resultante chama-se **Equação de Diferenças**. Este processo de transformar relações de recorrência em diferenças finitas, é um dos métodos mais usados para resolver equações diferenciais em cálculo computacional.

2.2.2. Operador Deslocamento E (Boole⁽⁷⁾)

O operador E é um operador que, aplicado a uma função $f(x)$, nos dá o valor dessa função para um valor $x+h$, sendo h uma quantidade fixada (o chamado passo).

Temos que:

$$\begin{aligned} E f(x) &= f(x+h) \\ E f(x+h) &= f(x+2h) \\ &\vdots \\ E f(x+nh) &= f(x+(n+1)h) \end{aligned} \quad (2.2.2.1)$$

e ainda temos que:

$$\begin{aligned} E^2 f(x) &= E(E f(x)) = E f(x+h) = f(x+2h) \\ E^3 f(x) &= E(E^2 f(x)) = E f(x+2h) = f(x+3h) \\ &\vdots \\ E^n f(x) &= E(E^{n-1} f(x)) = E f(x+(n-1)h) = f(x+nh) \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

⁽⁷⁾ George Boole (1814-1864) iniciou a Álgebra Lógica hoje chamada Álgebra Booleana, tentando algebrizar a lógica. O seu trabalho tem hoje muitas aplicações, especialmente no estudo dos circuitos eléctricos e electrónicos.

2.2.3. Propriedades dos operadores Δ e E

- 1) $\Delta f(x) = E f(x) - f(x)$, ou simbolicamente $\Delta = E - 1$;
- 2) $\Delta c \cdot f(x) = c \cdot \Delta f(x)$, pois
$$\Delta c \cdot f(x) = c f(x+h) - c f(x) = c(f(x+h) - f(x)) = c \cdot \Delta f(x)$$
;
- 3) $E c \cdot f(x) = c \cdot E f(x)$;
- 4) $\Delta [f_1(x) + f_2(x)] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x)$, pois,

$$f_1(x+h) + f_2(x+h) - (f_1(x) + f_2(x)) = f_1(x+h) - f_1(x) + f_2(x+h) - f_2(x) = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x)$$
;
- 5) $E [f_1(x) + f_2(x)] = E f_1(x) + E f_2(x)$.

Assim atendendo às propriedades 2, 3, 4 e 5, podemos concluir que os operadores Δ e E são **operadores lineares**.

2.3. Formação de equações de diferenças

Seja y uma função da variável x , que toma somente valores inteiros, e a é uma constante arbitrária. Consideremos uma equação da forma

$$f(x, y, a) = 0 \quad (2.3.1)$$

Dando a x um acréscimo igual a 1, vem para y um acréscimo Δy e temos:

$$f(x+1, y+\Delta y, a) = 0 \Leftrightarrow f(x+1, Ey, a) = 0 \quad (2.3.2)$$

Eliminando a constante a entre (2.3.1) e (2.3.2) obtemos uma equação da forma:

$$F(x, y, Ey) = 0 \quad (2.3.3)$$

que é uma **equação de diferenças de primeira ordem**.

Consideremos agora uma equação da forma

$$f(x, y, a, b) = 0 \quad (2.3.4)$$

teremos do mesmo modo:

$$f(x+1, y+\Delta y, a, b) = 0 \Leftrightarrow f(x+1, Ey, a, b) = 0 \quad (2.3.5)$$

e temos repetindo a operação

$$f(x+2, E^2 y, a, b) = 0 \quad (2.3.6)$$

Eliminando as constantes a e b entre (2.3.4), (2.3.5) e (2.3.6) obtemos uma equação da forma:

$$F(x, y, Ey, E^2 y) = 0 \quad (2.3.7)$$

que é uma **equação de diferenças de segunda ordem**.

Exemplo 2.3.1:

1) Seja

$$E^2 y - 5E y + 4y = 0 \quad (2.3.8)$$

com condições iniciais $x = 0, y = 0$ e $E y = 3$. A equação característica é da forma

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \vee r_2 = 4$$

Assim a solução geral é da forma:

$$y = c_1 \cdot 1^x + c_2 \cdot 4^x \quad (2.3.9)$$

Podemos agora determinar as constantes, recorrendo para o efeito às condições iniciais.

Assim

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ E y = c_1 + c_2 \cdot 4^{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 3 = c_1 + c_2 \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Logo, a solução particular da equação homogénea é:

$$y = -1 + 4^x \quad (2.3.10)$$

2) Determinar uma sucessão de três números, tais que cada um é a soma dos números imediatamente precedentes. As condições iniciais são $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

Temos então que,

$$f(x) + f(x+1) = f(x+2) \quad (2.3.11)$$

ou seja, se fizermos

$$y = f(x) \quad (2.3.12)$$

teremos que

$$f(x+1) = E y \quad (2.3.13)$$

uma vez que

$$E y = E f(x) = f(x+h) \underset{h=1}{=} f(x+1)$$

e

$$f(x+2) = E^2 y \quad (2.3.14)$$

uma vez que

$$E^2 y = E^2 f(x) = E(E f(x)) \underset{h=1}{=} E(f(x+1)) = f(x+2)$$

Assim, temos a seguinte equação de diferenças

$$E^2 y - E y - y = 0 \quad (2.3.15)$$

A equação característica é da forma

$$r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Assim, a solução geral é da forma:

$$f(x) = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x \quad (2.3.16)$$

Podemos agora determinar as constantes, recorrendo para o efeito às condições iniciais. Assim

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = (c_1 - c_2) \cdot \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Logo, a solução particular da equação homogénea é:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x \quad (2.3.17)$$

Dando a x valores inteiros, 0,1,2,3,..., obtemos os números de Fibonacci.

3) Seja

$$E^2 y - 4E y + 4y = 0 \quad (2.3.18)$$

A equação característica é da forma

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2 \vee r_2 = 2$$

Como temos uma raiz dupla, a solução geral é da forma:

$$y = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot x \cdot 2^x = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot 2^x \quad (2.3.19)$$

4) Consideremos a equação

$$2 \cdot f(x) = f(x+1) + f(x-1) \quad (2.3.20)$$

e procuremos uma solução tal que $f(0) = 0$ e $f(a+b) = 1$. Temos assim que

$$E^2 y - 2E y + y = 0 \quad (2.3.21)$$

pois

$$\begin{cases} y = f(x-1) \\ E y = f(x) \\ E^2 y = f(x+1) \end{cases}$$

A equação característica é da forma

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \vee r_2 = 1$$

Assim a solução geral é da forma:

$$y = c_1 + c_2 \cdot (x-1) \cdot 1^{x-1} \Leftrightarrow y = c_1 + c_2 \cdot (x-1) \quad (2.3.22)$$

Podemos agora determinar as constantes, atendendo às condições iniciais. Assim

$$\begin{cases} f(x-1) = f(0) = 0 \\ f(x-1) = f(a+b) = 1 \end{cases}$$

Logo

$$\begin{cases} 0 = c_1 \\ 1 = c_1 + c_2(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

Assim a solução particular da equação homogénea é:

$$f(x-1) = \frac{x-1}{a+b} \quad (2.3.23)$$

5) Seja

$$E^2 y + 2E y + 2y = 0 \quad (2.3.24)$$

A equação característica é da forma

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = -1 + i \vee r_2 = -1 - i$$

Temos assim duas raízes complexas conjugadas da equação característica. Assim,

$$\rho = \sqrt{2}$$

e

$$\theta = \arctg(-1) \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Logo a solução geral é:

$$y = \beta_1 (\sqrt{2})^x \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + \beta_2 (\sqrt{2})^x \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \quad (2.3.25)$$

6) Determinemos agora a solução geral da equação

$$E^4 y - y = 0 \quad (2.3.26)$$

A equação característica é da forma

$$r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \vee r_2 = -1 \vee r_3 = i \vee r_4 = -i$$

A solução geral é da forma

$$y = \alpha_1 \cdot 1^x + \alpha_2 \cdot (-1)^x + \alpha_3 \cdot i^x + \alpha_4 \cdot (-i)^x \quad (2.3.27)$$

2.4. Equações de diferenças lineares não homogêneas de segunda ordem e com coeficientes constantes

Teorema 2.4.1: Uma solução geral de uma equação de diferenças não homogênea é a soma da solução geral da equação homogênea correspondente, com uma solução particular da equação de diferenças não homogênea. Assim,

$$F(x) = \varphi(x) + A \cdot f(x) + B \cdot g(x) \quad (2.4.1)$$

é uma solução geral da equação não homogênea de segunda ordem se:

- a. $\varphi(x)$ é uma solução particular da equação não homogénea;
- b. $f(x)$ e $g(x)$ são soluções da equação homogénea;
- c. $C(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(x+1) & g(x+1) \end{vmatrix} \neq 0$ (Este determinante é designado por Casorati⁽⁸⁾)

Demonstração: Seja a equação não homogénea

$$E^2 y + a_1 E y + a_2 y = \psi(x) \quad (2.4.2)$$

Temos que:

$$F(x+2) + a_1 F(x+1) + a_2 F(x) = \psi(x) \quad (2.4.3)$$

Se $\varphi(x)$ é solução de (2.4.3) então,

$$\varphi(x+2) + a_1 \varphi(x+1) + a_2 \varphi(x) = \psi(x) \quad (2.4.4)$$

Subtraindo agora (2.4.4) de (2.4.3) vem:

$$[F(x+2) - \varphi(x+2)] + a_1 [F(x+1) - \varphi(x+1)] + a_2 [F(x) - \varphi(x)] = 0 \quad (2.4.5)$$

Logo

$$F(x) - \varphi(x) \quad (2.4.6)$$

é solução da equação homogénea.

Por outro lado, sabemos que

$$A f(x) + B g(x)$$

é a solução geral desta equação homogénea. Logo

$$F(x) - \varphi(x) = A f(x) + B g(x) \Leftrightarrow F(x) = \varphi(x) + A f(x) + B g(x) \quad (2.4.7)$$

□

Teorema 2.4.2: Se $\varphi_1(x)$ é uma solução particular de

$$F(x+2) + a_1 F(x+1) + a_2 F(x) = \psi_1(x) \quad (2.4.8)$$

⁽⁸⁾ Felice Casorati: (1835-1890)

e se $\varphi_2(x)$ é uma solução particular de

$$F(x+2) + a_1F(x+1) + a_2F(x) = \psi_2(x) \quad (2.4.9)$$

então

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad (2.4.10)$$

é uma solução particular de

$$F(x+2) + a_1F(x+1) + a_2F(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) \quad (2.4.11)$$

Demonstração: Como $\varphi_1(x)$ é uma solução particular temos que

$$\varphi_1(x+2) + a_1\varphi_1(x+1) + a_2\varphi_1(x) = \psi_1(x) \quad (2.4.12)$$

Da mesma forma, como $\varphi_2(x)$ é solução particular, vem que

$$\varphi_2(x+2) + a_1\varphi_2(x+1) + a_2\varphi_2(x) = \psi_2(x) \quad (2.4.13)$$

Adicionando membro a membro obtemos:

$$[\varphi_1(x+2) + \varphi_2(x+2)] + a_1[\varphi_1(x+1) + \varphi_2(x+1)] + a_2[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = \psi_1(x) + \psi_2(x) \quad (2.4.14)$$

Logo

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

é solução da equação particular.

□

Nesta fase, vamos procurar algumas soluções particulares, mas iremos limitar-nos a três casos apenas.

1º Caso: O segundo membro é do tipo

$$\psi(x) = m^x \quad (2.4.15)$$

Através de alguns exemplos tentaremos perceber quais as possibilidades para as soluções particulares.

Exemplo 2.4.1:

$$F(x+2) - 5F(x+1) + 6F(x) = 9 \cdot 4^x \quad (2.4.16)$$

Procuremos $\varphi(x)$ tal que

$$\varphi(x+2) - 5\varphi(x+1) + 6\varphi(x) = 9 \cdot 4^x \quad (2.4.17)$$

Tentemos

$$\varphi(x) = L \cdot 4^x \quad (2.4.18)$$

donde vem:

$$L \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot L \cdot 4^{x+1} + 6 \cdot L \cdot 4^x = 9 \cdot 4^x .$$

Logo

$$(16L - 20L + 6L) \cdot 4^x = 9 \cdot 4^x \Rightarrow L = \frac{9}{2}$$

ou seja

$$\varphi(x) = \frac{9}{2} \cdot 4^x \quad (2.4.19)$$

Exemplo 2.4.2:

$$F(x+2) - 5F(x+1) + 6F(x) = 17 \cdot 3^x \quad (2.4.20)$$

Vejamos, em primeiro lugar, qual é a solução geral da equação homogénea. A equação característica é da forma

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2 \vee r_2 = 3$$

Assim a solução geral da equação homogénea é da forma:

$$A \cdot 2^x + B \cdot 3^x$$

Logo $A \cdot 3^x$ é anulada pela parte homogénea da equação de diferenças e consequentemente não pode ser solução particular da equação não homogénea.

Tentemos

$$\varphi(x) = L \cdot x \cdot 3^x \quad (2.4.21)$$

donde vem

$$(x+2)L \cdot 3^{x+2} - 5 \cdot (x+1)L \cdot 3^{x+1} + 6 \cdot L \cdot x \cdot 3^x = 17 \cdot 3^x .$$

Logo

$$[9(x+2)L - 15(x+1)L + 6Lx] \cdot 3^x = 17 \cdot 3^x \Rightarrow L = \frac{17}{3}$$

ou seja

$$\varphi(x) = \frac{17}{3} \cdot x \cdot 3^x \quad (2.4.22)$$

Geralmente, verifica-se que as soluções particulares de

$$F(x+2) + a_1 F(x+1) + a_2 F(x) = m^x \quad (2.4.23)$$

são

- a) $\varphi(x) = L \cdot m^x$, se $m \neq r_1, r_2$;
- b) $\varphi(x) = L \cdot x \cdot m^x$, se $m = r_1$ ou $m = r_2$;
- c) $\varphi(x) = L \cdot x^2 \cdot m^x$, se $m = r_1 = r_2$.

2º Caso: O segundo membro $\psi(x)$ é um polinómio do segundo grau

Seja

$$F(x+2) + a_1 F(x+1) + a_2 F(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2 \quad (2.4.24)$$

As soluções particulares são:

- a) $\varphi(x) = L \cdot x^2 + M \cdot x + N$, se $r_1 \neq 1$ e $r_2 \neq 1$;
- b) $\varphi(x) = L \cdot x^3 + M \cdot x^2 + N \cdot x + P$, se uma das raízes r_1 ou r_2 for igual a 1;
- c) $\varphi(x) = L \cdot x^4 + M \cdot x^3 + N \cdot x^2 + P \cdot x + Q$, se $r_1 = r_2 = 1$

3º Caso: O segundo membro $\psi(x)$ é do tipo

$$\psi(x) = \text{sen}(\alpha \cdot x) \text{ ou } \psi(x) = \cos(\alpha \cdot x) \quad (2.4.25)$$

Seja

$$F(x+2) + a_1 F(x+1) + a_2 F(x) = \psi(x) \quad (2.4.26)$$

As soluções particulares são:

- a) $\varphi(x) = L \cdot \text{sen}(\alpha \cdot x) + M \cdot \cos(\alpha \cdot x)$, excepto se $\begin{cases} a_2 = 1 \\ \text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{4 - a_1^2}}{a_1} \end{cases}$;

$$b) \quad \varphi(x) = L \cdot x \cdot \operatorname{sen}(\alpha \cdot x) + M \cdot x \cdot \operatorname{cos}(\alpha \cdot x), \text{ no caso de } \begin{cases} a_2 = 1 \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{4 - a_1^2}}{a_1} \end{cases}$$

2.5. Equações de diferenças lineares não homogéneas de ordem k com coeficientes constantes

Uma equação de diferenças linear não homogénea, com coeficientes constantes e de ordem k tem a forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + \varphi(n) \quad 2.5.1$$

Se p_n for uma solução particular desta equação, temos:

$$p_n = c_1 p_{n-1} + c_2 p_{n-2} + \dots + c_k p_{n-k} + \varphi(n) \quad 2.5.2$$

Subtraindo (2.5.1) e (2.5.2), vem que

$$a_n - p_n = c_1 (a_{n-1} - p_{n-1}) + c_2 (a_{n-2} - p_{n-2}) + \dots + c_k (a_{n-k} - p_{n-k}) \quad 2.5.3$$

donde concluímos que

$$q_n = a_n - p_n$$

é uma solução da equação homogénea (2.5.3), correspondente à equação não homogénea (2.5.1).

Como $a_n = p_n + q_n$, concluímos que a solução geral da equação completa não homogénea, é igual à solução geral da equação homogénea correspondente, adicionada de uma solução particular da equação completa não homogénea.

Exemplo 2.5.1: Consideremos a equação linear não homogénea

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n \quad (2.5.4)$$

Determinemos agora uma solução geral da equação de diferenças. Em primeiro lugar procuremos a solução geral da equação homogénea que lhe está associada

$$a_n = 3a_{n-1} \quad (2.5.5)$$

A equação característica é da forma

$$r - 3 = 0 \Leftrightarrow r = 3$$

Assim a solução geral de (2.5.5) é

$$a_n = \alpha \cdot 3^n \quad (2.5.6)$$

A solução geral da equação (2.5.4) é

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \varphi(n) \quad (2.5.7)$$

onde $\varphi(n)$ é da forma $c \cdot 2^n$.

Vamos ver o caso de equações de diferenças não homogéneas de segunda ordem

$$u_{n+2} + 2 \cdot a \cdot u_{n+1} + b u_n = \varphi(n) \quad (2.5.8)$$

A solução geral desta equação depende do conhecimento da solução do caso homogéneo. Seja $u_n = v_n + q_n$, em que v_n é a solução geral da equação homogénea correspondente. Substituindo esta forma de u_n em (2.5.8) vem

$$(v_{n+2} + q_{n+2}) + 2 \cdot a(v_{n+1} + q_{n+1}) + b(v_n + q_n) = \varphi(n) \quad (2.5.9)$$

ou

$$(v_{n+2} + 2 \cdot a \cdot v_{n+1} + b v_n) + (q_{n+2} + 2 \cdot a \cdot q_{n+1} + b q_n) = \varphi(n) \quad (2.5.10)$$

Como v_n satisfaz a equação homogénea, então

$$q_{n+2} + 2 \cdot a \cdot q_{n+1} + b q_n = \varphi(n) \quad (2.5.11)$$

o que significa que q_n tem de ser uma solução particular da equação não homogénea.

Exemplo 2.5.2: Determinemos por exemplo agora a solução geral da equação

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6 \cdot u_n = 4 \quad (2.5.12)$$

Em primeiro lugar procuremos a solução geral da equação homogénea que lhe está associada

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6 \cdot u_n = 0 \quad (2.5.13)$$

A equação característica é da forma

$$r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3 \vee r_2 = -2$$

Assim a solução geral de (2.5.13) é

$$v_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n$$

em que A e B são constantes. Tentemos a solução particular $q_n = C$, vem que

$$q_{n+2} - q_{n+1} - 6 \cdot q_n = 4 \Leftrightarrow C - C - 6C = 4 \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3} \quad (2.5.14)$$

Logo

$$q_n = -\frac{2}{3}$$

Assim a solução geral da equação (2.5.12) é

$$u_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n - \frac{2}{3} \quad (2.5.15)$$

Exemplo 2.5.3: Determinar a solução geral da equação:

$$u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3 \cdot u_n = 4 \quad (2.5.16)$$

Em primeiro lugar procuremos a solução geral da equação homogénea que lhe está associada

$$u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3 \cdot u_n = 0 \quad (2.5.17)$$

A equação característica é da forma

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3 \vee r_2 = 1$$

Assim a solução geral é da forma

$$v_n = A \cdot 3^n + B \cdot 1^n$$

em que A e B são constantes. Neste caso é de esperar que a escolha $q_n = C$, falhe, pois essa escolha leva ao anulamento do primeiro membro da equação homogénea,

$$C + 2C - 3C = 0$$

Tentemos agora a solução particular $q_n = C \cdot n$, vem que

$$q_{n+2} + 2q_{n+1} - 3 \cdot q_n = 4 \Leftrightarrow C \cdot (n+2) + 2 \cdot C \cdot (n+1) - 3 \cdot C \cdot n = 4 \Leftrightarrow Cn + 2C + 2Cn + 2C - 3Cn = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4C = 4 \Leftrightarrow C = 1$$

Logo $q_n = n$.

Assim a solução geral da equação (2.5.16) é

$$u_n = A \cdot 3^n + B + n \quad (2.5.18)$$

A tabela seguinte sugere formas de soluções particulares e alternativas, contendo parâmetros a ser determinados por substituição directa.

$\varphi(n)$	Tentativa de solução para q_n
k (uma constante)	C ou $C \cdot n$ quando C falha ou $C \cdot n^2$ quando C e $C \cdot n$ falha
k^n	$C \cdot k^n$ ou $C \cdot n \cdot k^n$ quando $C \cdot k^n$ falha ou $C \cdot n^2 \cdot k^n$ quando $C \cdot k^n$ e $C \cdot n \cdot k^n$ falha
n	$c_0 + c_1 \cdot n$
n^p (p inteiro)	$c_0 + c_1 \cdot n + \dots + c_p \cdot n^p$ (ou potencias mais elevadas de n)
$\text{sen}(k \cdot n)$ ou $\text{cos}(k \cdot n)$	$c_1 \text{cos}(k \cdot n) + c_2 \text{sen}(k \cdot n)$

2.6. Estabilidade

2.6.1. Introdução

Um modelo discreto de uma equação de uma equação diferencial diz-se ter instabilidades numéricas se existirem soluções das equações de diferenças que constituem o modelo que não correspondem qualitativamente a quaisquer soluções possíveis da equação diferencial.

A razão principal da existência de instabilidades numéricas reside no facto de qualquer modelo discreto de uma equação diferencial ter um espaço paramétrico que ultrapassa de longe o espaço de soluções da equação diferencial.

Por outro lado não parece possível definir com precisão o conceito geral de instabilidade numérica, e isso porque é sempre possível, em princípio, aparecerem novas formas de instabilidade numérica se usarmos diferentes modelos discretos sobretudo em equações diferenciais não lineares. Isto é, o facto de existirem instabilidades numéricas é uma indicação de que os modelos discretos não permitem conhecer correctamente as propriedades matemáticas das soluções das equações diferenciais.

Por exemplo, suponhamos um dado sistema dinâmico descrito em função da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \lambda) \quad (2.6.1.1)$$

onde λ denota o vector paramétrico n -dimensional que define o sistema.

Um modelo discreto para a equação (2.6.1.1) tem a forma

$$y_{k+1} = F(y_k, \lambda, h) \quad (2.6.1.2)$$

onde $h = \Delta t$ é o passo temporal. Notemos que a função F contém $(n+1)$ parâmetros, pois h pode ser considerado um parâmetro adicional.

As soluções de (2.6.1.1) e (2.6.1.2) podem ser escritas respectivamente

$$\begin{aligned} & y(t, \lambda) \\ & y_k(\lambda, h) \end{aligned}$$

Ora, mesmo que estas soluções sejam próximas uma da outra para um dado valor de h , digamos $h = h_1$, se h for mudado para um novo valor $h = h_2$, existe a possibilidade de $y_k(\lambda, h_2)$ diferir consideravelmente de $y_k(\lambda, h_1)$, quer qualitativamente, quer quantitativamente. A teoria das bifurcações tenta estudar detalhadamente o que se passa e a forma de resolver o problema. Vamos ver alguns exemplos de instabilidades numéricas, considerando as equações diferenciais e os seus respectivos modelos discretos (equações de diferenças) e comparando as propriedades das soluções das equações diferenciais originais com as propriedades das soluções das correspondentes equações de diferenças.[7]

2.6.2. Equação de Decaimento

A equação diferencial de decaimento é

$$\frac{dy}{dt} = -y \quad (2.6.2.1)$$

Mesmo que não saibamos resolver exactamente esta equação, o comportamento da sua solução geral pode ser obtido através do conhecimento do facto de que, para $y > 0$, a derivada é negativa, e o contrário sucede para $y < 0$. E, também, $y = 0$ é uma solução da equação diferencial. Portanto todas as soluções têm o aspecto representado no gráfico 1 pelas suas trajectórias.

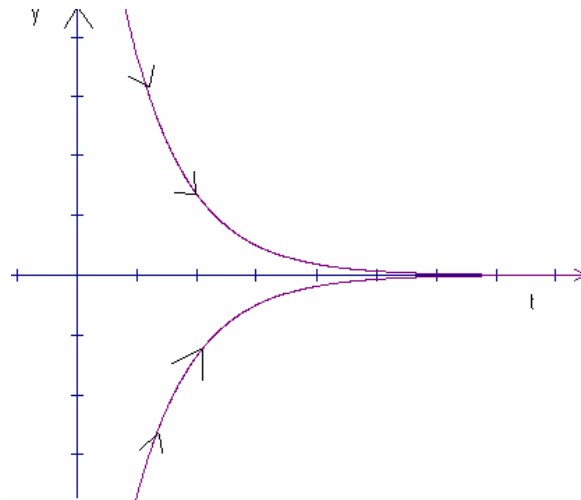


Gráfico 1

Se a condição inicial for

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.6.2.2)$$

a solução geral exacta é

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-(t-t_0)} \quad (2.6.2.3)$$

Quer através da solução gráfica, quer através da solução analítica, pode concluir-se que todas as soluções decrescem monotonamente (em valor absoluto) para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Um modelo discreto da equação de decaimento (2.6.2.1), pode ser obtido usando o esquema de Euler “para a frente”

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -y_k \quad (2.6.2.4)$$

sendo h o passo. Ou seja

$$y_{k+1} = (1-h)y_k \quad (2.6.2.5)$$

que se trata de uma equação de diferenças linear, de primeira ordem e com coeficientes constantes. A sua solução é

$$y_k = y_0(1-h)^k \quad (2.6.2.6)$$

Notemos que, o comportamento da solução depende do valor

$$r(h) = (1-h)$$

que está graficamente apresentado no gráfico 2.

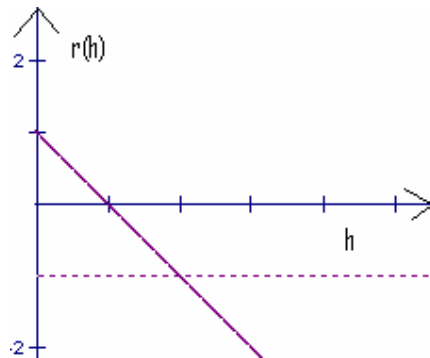


Gráfico 2

Se representarmos graficamente as soluções de $y_{k+1} = (1-h)y_k$ temos:

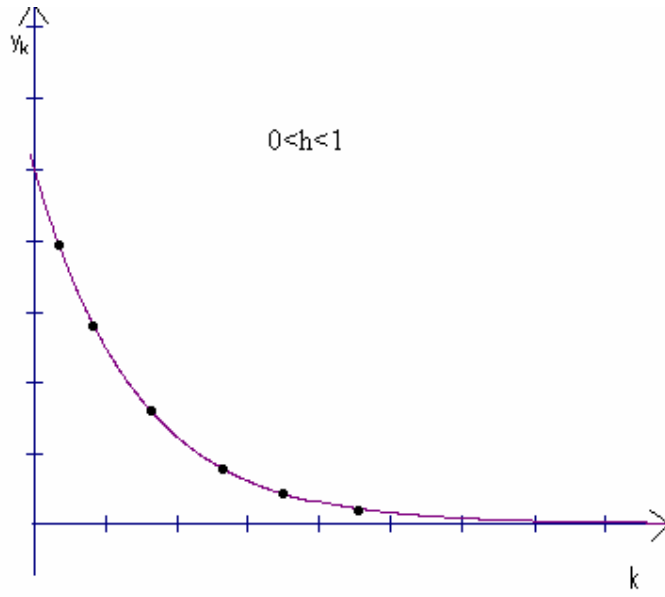


Gráfico 3

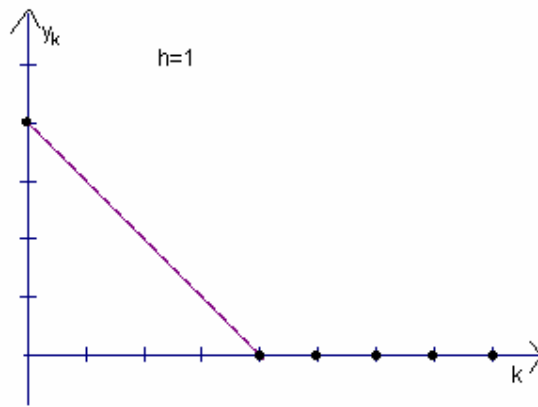


Gráfico 4

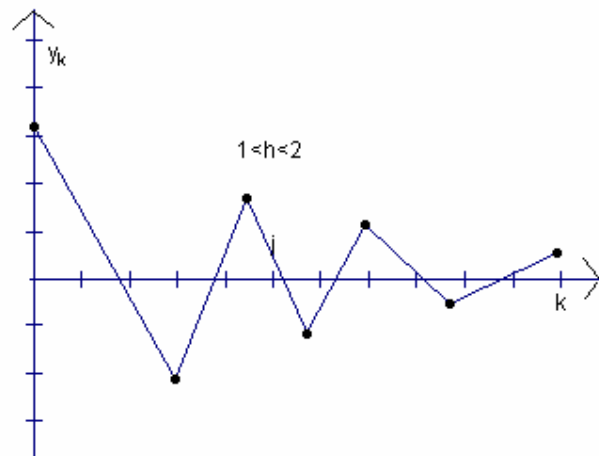


Gráfico 5

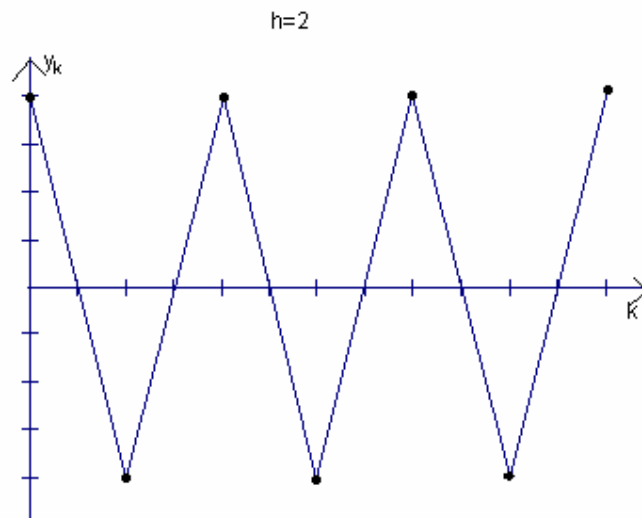


Gráfico 6

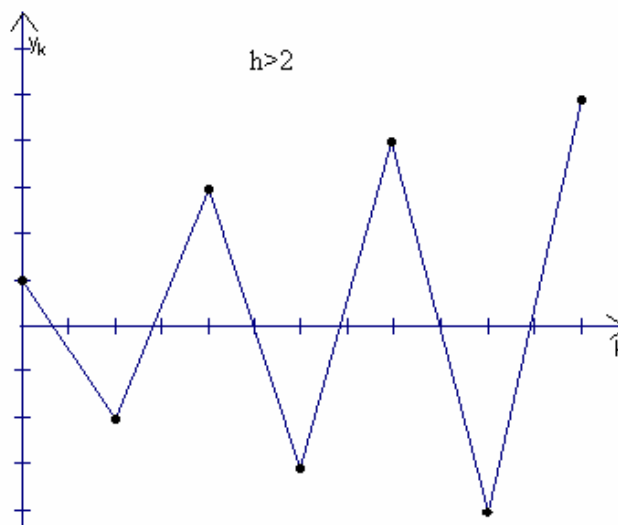


Gráfico 7

Podemos concluir, destas representações gráficas, que:

- a) Se $0 < h < 1$, y_k decresce monotonamente para zero.
- b) Se $h = 1$, então para $k \geq 1$ a solução é identicamente nula.
- c) Se $1 < h < 2$, y_k decresce para zero com uma amplitude oscilante (mudança de sinal).
- d) Se $h = 2$, y_k oscila com amplitude constante. A solução é periódica.
- e) Se $h > 2$, y_k oscila com amplitude exponencialmente crescente.

Comparando as soluções, verifica-se que somente nos casos a) e b) é que obtemos o mesmo comportamento qualitativo da equação diferencial de decaimento, ou seja, um decaimento monótono para zero.

Isto significa que, só haverá concordância quantitativa entre $y(t)$ e y_k se escolhermos $0 < h \ll 1$.

As soluções c), d) e e) representam instabilidades numéricas. Vamos admitir que o método de Euler, que usa diferenças “para a frente”, foi mal escolhido. Então optemos, por exemplo, pelo método de Euler “para a frente”, mas com forma simétrica no termo linear o que dá

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = -\frac{y_{k+1} + y_k}{2} \quad (2.6.2.7)$$

Resolvendo em ordem a y_{k+1} temos

$$y_{k+1} = \frac{2-h}{2+h} \cdot y_k \quad (2.6.2.8)$$

Temos novamente uma equação de diferenças linear, de primeira ordem, com coeficientes constantes. O comportamento da sua solução depende agora de

$$r(h) = \frac{2-h}{2+h} \quad (2.6.2.9)$$

que se pode representar por

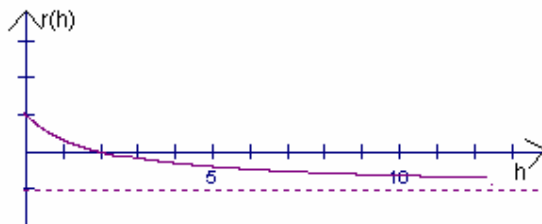


Gráfico 8

Como

$$|r(h)| < 1 \quad 0 < h < \infty \quad (2.6.2.10)$$

segue-se, que todas as soluções da equação (2.6.2.8)

$$y_k = y_0 |r(h)|^k \quad (2.6.2.11)$$

decrecem para zero, quando $k \rightarrow \infty$. Contudo, somente para $0 < h < 2$ é que o decrescimento é monótono. Se $h > 2$ a solução é oscilatória com uma amplitude que decresce exponencialmente. (Gráficos 9,10 e 11)

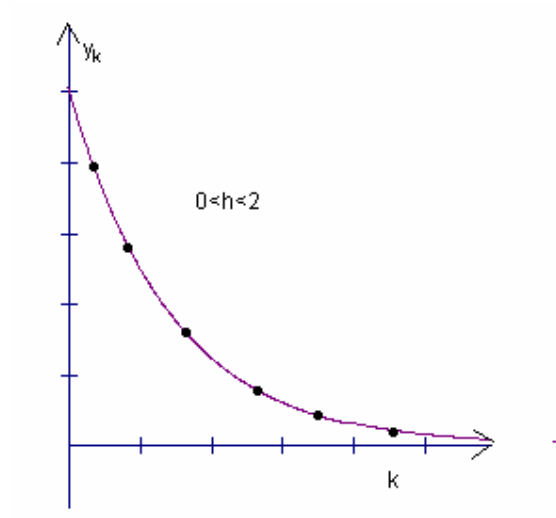


Gráfico 9

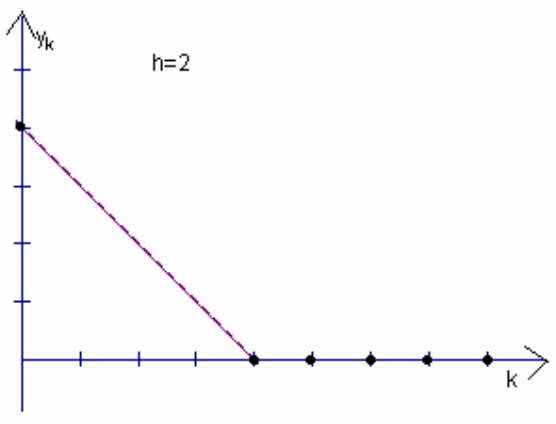


Gráfico 10

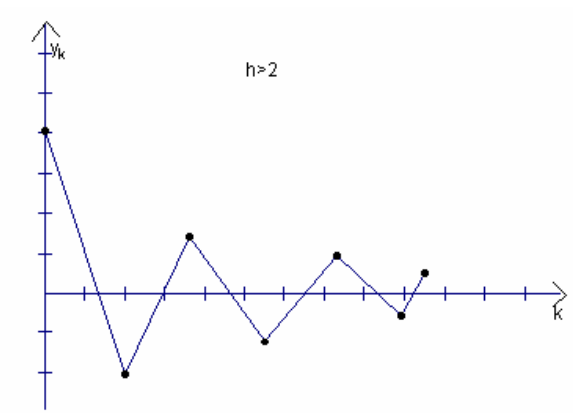


Gráfico 11

Experimentemos o método de Euler “para trás”. Então a equação de decaimento é

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = -y_k \quad (2.6.2.12)$$

ou

$$y_{k+1} = \frac{1}{1+h} \cdot y_k \quad (2.6.2.13)$$

Como

$$0 < \frac{1}{1+h} < 1 \quad 0 < h < \infty \quad (2.6.2.14)$$

segue-se que todas as soluções da equação (2.6.2.13), isto é,

$$y_k = y_0 \left(\frac{1}{1+h} \right)^k \quad (2.6.2.15)$$

decrecem (em magnitude) monotonamente para zero para qualquer valor do passo.

Usando o método de diferenças centrais temos

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = -y_k \quad (2.6.2.16)$$

Trata-se de uma equação de diferenças linear de segunda ordem com coeficientes constantes

$$y_{k+2} + 2h y_{k+1} - y_k = 0 \quad (2.6.2.17)$$

A solução é

$$y_k = c_1 (r_+)^k + c_2 (r_-)^k \quad (2.6.2.18)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, e (r_+, r_-) são soluções da equação característica correspondente a (2.6.2.17)

$$r^2 + (2h)r - 1 = 0 \quad (2.6.2.19)$$

Essas soluções são dadas por

$$r_+(h) = -h + \sqrt{1+h^2} \quad 2.6.2.20 \text{ a}$$

$$r_-(h) = -h - \sqrt{1+h^2} \quad 2.6.2.20 \text{ b}$$

Verifica-se que:

- a) $r_-(h) < -1, \quad 0 < h < \infty;$
- b) $r_-(h) < -2h + O\left(\frac{1}{2h}\right)$ quando $h \rightarrow \infty;$
- c) $0 < r_+(h) < 1, \quad 0 < h < \infty;$
- d) $r_+(h) = \frac{1}{2h} + O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ quando $h \rightarrow \infty;$

Estes resultados levam à conclusão de que o segundo termo no segundo membro da equação (2.6.2.18), oscila com uma amplitude que cresce exponencialmente, enquanto o primeiro termo decresce monotonamente para zero. Uma trajectória típica desta solução está representada no gráfico 12.

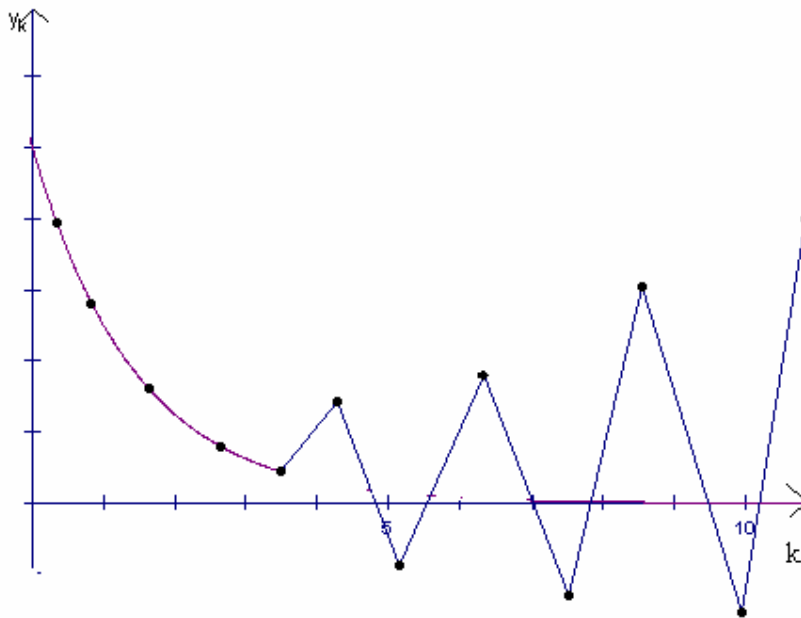


Gráfico 12

Como este comportamento se verifica para qualquer passo $h > 0$, vemos que o método das diferenças centrais apresenta instabilidades numéricas para qualquer valor do passo h .

Concluindo, os quatro modelos discretos da equação de decaimento, baseados nos métodos de Euler, dão o comportamento qualitativo correcto para a solução numérica se as seguintes condições forem satisfeitas (no que respeita ao valor do passo):

- a) Euler “para a frente”: $0 < h < 1;$

- b) Euler “para a frente” com termo linear simétrico: $0 < h < 2$;
- c) Euler “para trás”: $h > 0$;
- d) Diferenças centrais: nenhum valor de h

Quer dizer, excepto no caso de diferenças centrais, os outros três modelos discretos darão excelentes soluções numéricas quantitativas se:

$$0 < h \ll 1$$

2.6.3. Oscilador harmónico

A equação diferencial do oscilador harmónico

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0 \quad (2.6.3.1)$$

é caracterizada pelo facto de todas as suas soluções serem periódicas

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) = c \cdot e^{it} + c^* \cdot e^{-it} \quad (2.6.3.2)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e c é uma constante complexa.

Aplicando o método das diferenças centrais vem

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + y_k = 0 \quad (2.6.3.3)$$

que pode ser escrita na forma

$$y_{k+1} - (2 - h^2)y_k + y_{k-1} = 0 \quad (2.6.3.4)$$

Temos uma equação de diferenças linear de segunda ordem cuja solução é

$$y_k = D_1 (r_+)^k + D_2 (r_-)^k \quad (2.6.3.5)$$

onde D_1 e D_2 são constantes e r_+ e r_- são as soluções da equação característica

$$r^2 - 2\left(1 - \frac{h^2}{2}\right)r + 1 = 0 \quad (2.6.3.6)$$

ou seja

$$r_+(h) = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) + \frac{h}{2} \sqrt{h^2 - 4} \quad (2.6.3.7 \text{ a})$$

$$r_-(h) = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) - \frac{h}{2} \sqrt{h^2 - 4} \quad (2.6.3.7 \text{ b})$$

Para $0 < h < 2$, $r_+(h)$ e $r_-(h)$ são complexos conjugados tais que

$$r_+(h) = (r_-(h))^* = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) + \frac{ih}{2}\sqrt{4-h^2} \quad (2.6.3.8)$$

Por outro lado

$$(r_+(h))^2 = ((r_-(h))^*)^2 = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{4}(4-h^2) = 1 \quad (2.6.3.9)$$

logo tem magnitude 1.

Portanto, para $0 < h < 2$ temos

$$r_+(h) = (r_-(h))^* = e^{i\varphi(h)} \quad (2.6.3.10)$$

$$\tan \varphi(h) = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{4-h^2}}{1 - \frac{h^2}{2}} \quad (2.6.3.11)$$

Logo, a solução de (2.6.3.4) para $0 < h < 2$ é

$$y_k = D_1 e^{i\varphi(h)k} + D_2 e^{-i\varphi(h)k} \quad (2.6.3.12)$$

Se $h = 2$

$$r_+(2) = r_-(2) = 1 \quad (2.6.3.13)$$

e a solução geral é

$$y_k = (D_1 + D_2 k)(-1)^k \quad (2.6.3.14)$$

Para $h > 2$, $r_+(h)$ e $r_-(h)$ são ambos reais e dados por

$$r_+(h) = -\left(\frac{h^2}{2} - 1\right) + \frac{h}{2}\sqrt{h^2 - 4} \quad (2.6.3.15a)$$

$$r_-(h) = -\left(\frac{h^2}{2} - 1\right) - \frac{h}{2}\sqrt{h^2 - 4} \quad (2.6.3.15b)$$

De (2.6.3.15b) vem

$$r_-(h) < -1 \text{ para } h > 2 \quad (2.6.3.16)$$

e da equação característica (2.6.3.6) vem

$$r_+(h) \cdot r_-(h) = 1 \quad (2.6.3.17)$$

Logo, $r_+(h)$ tem de possuir sinal negativo e deve ter magnitude inferior a 1, isto é,

$$-1 < r_+(h) < 0 \text{ para } h > 2 \quad (2.6.3.18)$$

O gráfico 13 mostra o comportamento de $r_+(h)$ e $r_-(h)$ em função de h . Assim, para este caso

$$y_k = (D_1 |r_+(h)|^k + D_2 |r_-(h)|^k) (-1)^k \quad (2.6.3.19)$$

e concluímos que y_k cresce exponencialmente com uma amplitude oscilante.

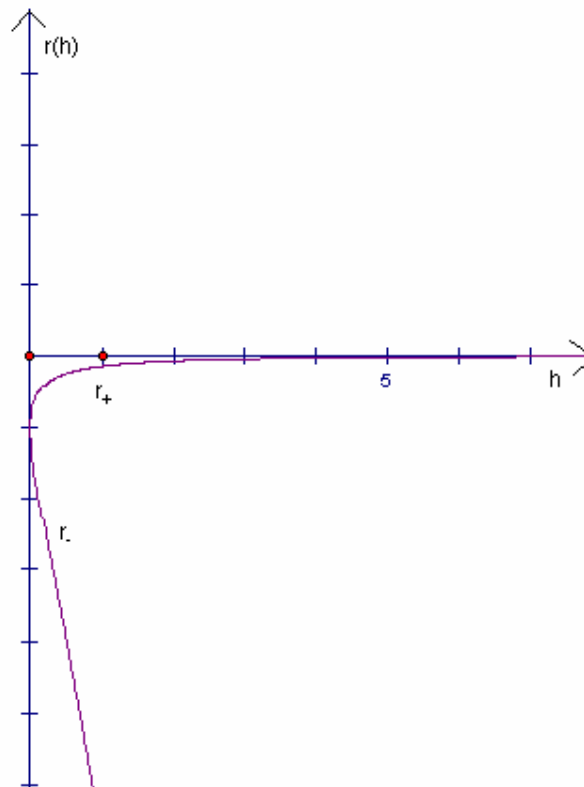


Gráfico 13 (Equações (2.6.3.15a) e (2.6.3.15b) para $\bar{h} = h - 2$)

Concluímos então que, o método das diferenças centrais tem uma solução com o mesmo comportamento qualitativo da equação diferencial do oscilador harmónico somente se o passo se encontrar no intervalo $0 < h < 2$

Consideremos agora dois modelos de diferenças centrais para os quais o termo linear y é modelado com uma forma não simétrica. Estes modelos discretos são

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + y_{k-1} = 0 \quad (2.6.3.20)$$

e

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + y_{k+1} = 0 \quad (2.6.3.21)$$

A equação característica correspondente a (2.6.3.20) é

$$r^2 - 2r + (1 + h^2) = 0 \quad (2.6.3.22)$$

com soluções

$$r_+(h) = (r_-(h))^* = 1 + ih \quad (2.6.3.23)$$

ou escrevendo na forma polar

$$r_+(h) = \sqrt{1 + h^2} \cdot e^{i\varphi(h)} \quad (2.6.3.24)$$

$$\tan \varphi(h) = h \quad (2.6.3.25)$$

Notemos que, as duas raízes são complexas para qualquer $h > 0$ e têm magnitudes que são superiores a 1. Consequentemente, todas as soluções deste modelo discreto são oscilatórias, mas têm uma amplitude que cresce exponencialmente.

Da mesma forma, a equação característica correspondente a (2.6.3.21) é

$$r^2 - \left(\frac{2}{1+h^2}\right) \cdot r + \left(\frac{1}{1+h^2}\right) = 0 \quad (2.6.3.26)$$

cujas soluções são também complexos conjugados para qualquer $h > 0$:

$$r_+(h) = (r_-(h))^* = \frac{1+ih}{1+h^2} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \cdot e^{i\varphi(h)} \quad (2.6.3.27)$$

onde $\varphi(h)$ é dada por (2.6.3.25). Logo, concluímos que, para qualquer $h > 0$, todas as soluções da equação (2.6.3.21) são oscilatórias com uma amplitude que decresce exponencialmente.

Consideremos agora as propriedades de um modelo de diferenças centrais para o qual o termo linear y tem forma simétrica. Vamos, novamente, considerar dois exemplos, sendo o primeiro da forma

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2} = 0 \quad (2.6.3.28)$$

A respectiva equação característica é

$$r^2 - \frac{2}{1 + \frac{h^2}{2}} \cdot r + 1 = 0 \quad (2.6.3.29)$$

cujas raízes são

$$r_{\pm}(h) = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{2}} \left(1 \pm ih \sqrt{1 + \frac{h^2}{4}} \right) \quad (2.6.3.30)$$

Note-se que

$$r_+(h) = (r_-(h))^*, \text{ para } h > 0 \quad (2.6.3.31)$$

$$|r_+(h)| = |r_-(h)| = 1 \quad (2.6.3.32)$$

logo

$$r_+ = r_-^* = e^{i\varphi(h)} \quad (2.6.3.33)$$

$$\tan \varphi(h) = h \sqrt{1 + \frac{h^2}{4}} \quad (2.6.3.34)$$

Como

$$y_k = E \cdot (r_+)^k + E^* \cdot (r_-^*)^k \quad (2.6.3.35)$$

onde E é uma constante arbitrária, concluímos que todas as soluções deste modelo oscilam com amplitude constante para $h > 0$.

O segundo exemplo tem uma expressão discreta completamente simétrica dada por

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + \frac{y_{k+1} + y_k + y_{k-1}}{3} = 0 \quad (2.6.3.36)$$

A respectiva equação característica é

$$r^2 - 2 \frac{1 - \frac{h^2}{6}}{1 + \frac{h^2}{3}} \cdot r + 1 = 0 \quad (2.6.3.37)$$

com raízes

$$r_{\pm}(h) = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{3}} \left(\left(1 - \frac{h^2}{6} \right) \pm ih \sqrt{1 + \frac{h^2}{12}} \right) \quad (2.6.3.38)$$

Estas raízes têm as seguintes propriedades:

$$r_+(h) = (r_-(h))^*, \text{ para } h > 0 \quad (2.6.3.39)$$

$$|r_+(h)| = |r_-(h)| = 1, \text{ para } h > 0 \quad (2.6.3.40)$$

$$r_+(h) = (r_-(h))^* = e^{i\varphi(h)}$$

$$\tan \varphi(h) = \frac{h \sqrt{1 + \frac{h^2}{12}}}{1 - \frac{h^2}{6}} \quad (2.6.3.41)$$

Concluimos que, para $h > 0$, todas as soluções da equação (2.6.3.36) são oscilatórias e com amplitude constante.

Resumindo, vimos que somente a utilização de uma representação discreta para o termo y , que seja centrada no ponto da grelha t_k , dará um modelo discreto que tem oscilações com amplitude constante. Modelos não centrados permitem que a amplitude das oscilações ou cresça ou diminua. O modelo de diferenças centrais tem um comportamento oscilatório correcto se $0 < h < 2$, enquanto as duas formas “simétricas” para y dão um comportamento oscilatório com amplitude constante para qualquer $h > 0$. [7]

2.7. Equações de diferenças de primeira ordem

Nesta secção é apresentado um método de resolução de todas as equações de diferenças de primeira ordem, homogéneas e não homogéneas, quaisquer que sejam os coeficientes.

2.7.1. Homogéneas

A forma geral das equações de diferença homogéneas e lineares de primeira ordem é:

$$y_{k+1} - p_k y_k = 0 \quad (2.7.1.1)$$

onde p_k é uma função.

Vamos agora encontrar as soluções da equação homogénea.

Sendo y_1 , a nossa condição inicial, temos:

$$\begin{aligned} y_2 &= p_1 y_1 \\ y_3 &= p_2 y_2 = p_2 p_1 y_1 \\ &\vdots \\ y_{k-1} &= p_{k-2} y_{k-2} = p_{k-2} \cdots p_2 p_1 y_1 \\ y_k &= p_{k-1} y_{k-1} = p_{k-1} \cdots p_2 p_1 y_1 \end{aligned}$$

Obtemos:

$$y_k = y_1 \prod_{i=1}^{k-1} p_i \quad (2.7.1.2)$$

que é solução geral da equação (2.7.1.1), com condição inicial y_1 . [6]

Vejam agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 2.7.1.1: Encontrar a solução das seguintes equações de diferenças:

a) $x_{k+1} - (k+1)x_k = 0, \quad x_1 = c$

Aplicando a fórmula (2.7.1.2) vem:

$$x_k = c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} i + 1 = c \cdot (2 \cdot 3 \cdots k) = c \cdot k!$$

b) $x_{k+1} - 3^k x_k = 0, \quad x_1 = c$

Usando de novo (2.7.1.2) temos que

$$x_k = c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} 3^i = c \cdot (3 \cdot 3^2 \cdots 3^{k-1}) = c \cdot 3^{1+2+\dots+(k-1)} = c \cdot 3^{\frac{1+(k-1)}{2} \cdot (k-1)} = c \cdot 3^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

c) $x_{k+1} - e^{2k} \cdot x_k = 0, \quad x_1 = c$

Recorrendo novamente à fórmula (2.7.1.2) vem:

$$x_k = c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} e^{2i} = c \cdot (e^2 \cdot e^4 \cdot \dots \cdot e^{2(k-1)}) = c \cdot e^{2+4+\dots+2(k-1)} = c \cdot e^{2[1+2+\dots+(k-1)]} = c \cdot e^{2 \left[\frac{1+(k-1)}{2} (k-1) \right]} = c \cdot e^{k(k-1)}$$

$$\text{d) } y_{k+1} - \beta \cdot y_k = 0, \quad \beta = \text{constante}$$

Temos que a solução geral da equação é dada por:

$$y_k = y_1 \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (\beta) = c \cdot \underbrace{\left(\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta \right)}_{(k-1)\text{vezes}} = y_1 \cdot \beta^{k-1}, \text{ onde } y_1 \text{ é a condição inicial dada.}$$

2.7.2. Não Homogêneas

A forma geral das equações de diferença não homogêneas e lineares de primeira ordem é:

$$y_{k+1} - p_k y_k = q_k \quad (2.7.2.1)$$

onde p_k e q_k são funções e $q_k \neq 0$.

A solução geral da equação (2.7.2.1) consiste na soma das soluções da equação (2.7.1.1) com qualquer solução particular da equação não homogênea (2.7.2.1).

Consideremos agora a equação (2.7.2.1) e dividamos ambos os membros da equação por $\prod_{i=1}^k p_i$,

$$\frac{y_{k+1}}{\prod_{i=1}^k p_i} - \frac{y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} = \frac{q_k}{\prod_{i=1}^k p_i} \quad (2.7.2.2)$$

Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\Delta \left(\frac{y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} \right) = \frac{q_k}{\prod_{i=1}^k p_i} \quad (9) \Leftrightarrow \frac{y_k}{\prod_{i=1}^{k-1} p_i} = \Delta^{-1} \left(\frac{q_k}{\prod_{i=1}^k p_i} \right) \Leftrightarrow y_k = \prod_{i=1}^{k-1} p_i \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{q_i}{\prod_{r=1}^i p_r} \right) \quad (10)$$

⁽⁹⁾ $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

⁽¹⁰⁾ $\Delta(\Delta^{-1} y_k) = y_k$; $z_k = \Delta^{-1} y_k$; $\Delta^{-1} y_k = \sum_{r=1}^{k-1} y_r + \text{constante}$

A solução da equação (2.7.2.1) é dada pela soma das soluções da equação homogénea que lhe está associada com uma solução particular da equação não homogénea. Assim, temos que a solução geral da equação (2.7.2.1) é dada por:

$$y_k = A \cdot \prod_{i=1}^{k-1} p_i + \prod_{i=1}^{k-1} p_i \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{q_i}{\prod_{r=1}^i p_r} \right) \quad (2.7.2.3)$$

onde A é uma constante arbitrária (condição inicial).[6]

Apresentaremos agora alguns exemplos de aplicação:

Exemplo 2.7.2.1: Encontrar a solução geral de cada uma das equações de diferença:

$$\mathbf{a)} \quad y_{k+1} - \frac{1}{2} y_k = 2, \quad y_1 = c$$

Usando a fórmula (2.7.2.3), temos que:

$$\begin{aligned} y_k &= c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} + \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{2}{\prod_{r=1}^i \frac{1}{2}} \right) \Leftrightarrow \\ y_k &= c \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \cdot \left(\frac{2}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\frac{1}{8}} + \dots + \frac{2}{\left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}} \right) \Leftrightarrow \\ y_k &= c \cdot (2)^{-k+1} + (2)^{-k+1} \cdot 2 \cdot (2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1}) \Leftrightarrow \\ y_k &= c \cdot (2)^{-k+1} + (2)^{-k+1} \cdot 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1-2^{k-1}}{1-2} \right) \Leftrightarrow y_k = c \cdot (2)^{-k+1} - 2^{-k+3} + 2^2 \Leftrightarrow \\ y_k &= (2)^{-k+1} \cdot (c - 4) + 4 \end{aligned}$$

$$\text{b) } y_{k+1} - \frac{k}{k+1} y_k = 4, \quad y_1 = c$$

Recorrendo a (2.7.2.3) vem:

$$\begin{aligned} y_k &= c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+1} + \prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+1} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{4}{\prod_{r=1}^i r+1} \right) \Leftrightarrow y_k = \frac{c}{k} + \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{4}{\frac{1}{3}} + \frac{4}{\frac{1}{4}} + \dots + \frac{4}{\frac{1}{k}} \right) \Leftrightarrow \\ y_k &= \frac{c}{k} + \frac{4}{k} \cdot (2+3+4+\dots+k) \Leftrightarrow y_k = \frac{c}{k} + \frac{4}{k} \cdot \left(\frac{2+k}{2} \cdot (k-1) \right) \Leftrightarrow \\ y_k &= c \cdot k^{-1} + 2 \cdot k^{-1} \cdot (k-1) \cdot (k+2) \end{aligned}$$

$$\text{c) } y_{k+1} - \beta \cdot y_k = \alpha, \quad \text{onde } \alpha \text{ e } \beta \text{ são constantes}$$

De (2.7.2.3) temos:

$$\begin{aligned} y_k &= c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \beta + \prod_{i=1}^{k-1} \beta \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\alpha}{\prod_{r=1}^i \beta} \right) \Leftrightarrow y_k = c\beta^{k-1} + \beta^{k-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^3} + \dots + \frac{\alpha}{\beta^{k-1}} \right) \\ \Leftrightarrow y_k &= c \cdot \beta^{k-1} + \beta^{k-1} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \dots + \frac{1}{\beta^{k-1}} \right) \Leftrightarrow \\ y_k &= c \cdot \beta^{k-1} + \beta^{k-1} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k-1}}{1 - \frac{1}{\beta}} \right) \Leftrightarrow y_k = c \cdot \beta^{k-1} + \beta^{k-2} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k-1}}{\frac{\beta-1}{\beta}} \right) \Leftrightarrow \\ y_k &= c \cdot \beta^{k-1} + \beta^{k-2} \cdot \alpha \cdot \frac{\beta}{\beta-1} \left(1 - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{k-1} \right) \Leftrightarrow y_k = c \cdot \beta^{k-1} + \frac{\beta^{k-1} \cdot \alpha}{\beta-1} - \frac{\alpha}{\beta-1} \Leftrightarrow \\ y_k &= \beta^{k-1} \left(c + \frac{\alpha}{\beta-1} \right) - \frac{\alpha}{\beta-1} \end{aligned}$$

onde c é a condição inicial. Obtivemos assim, a solução geral no caso de $\beta \neq 1$.

Se $\beta = 1$, temos $y_{k+1} - y_k = \alpha$, onde α é constante

$$y_k = c \cdot \prod_{i=1}^{k-1} 1 + \prod_{i=1}^{k-1} 1 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\alpha}{\prod_{r=1}^i 1} \right) \Leftrightarrow y_k = c \cdot 1 + 1 \cdot \left(\underbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{k-1 \text{ vezes}} \right)$$

$$\Leftrightarrow y_k = c + \alpha \cdot (k-1)$$

2.8. Equações de diferenças de segunda ordem

2.8.1. Homogêneas

Consideremos a equação de diferenças homogênea de segunda ordem

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = 0 \quad (2.8.1.1)$$

onde p_k e q_k são funções de k . Suponhamos que conhecemos uma solução da equação de diferenças homogênea de segunda ordem y_k^1 . Usando o Casorati $C(k)$, podemos mostrar que é possível encontrar a segunda solução y_k^2 da equação de diferenças homogênea de segunda ordem. Ora, $C(k)$ satisfaz a seguinte equação:

$$C(k+1) = q_k C(k) \quad (2.8.1.2)$$

Assim

$$C(k) = A \cdot Q_k = A \cdot \prod_{i=1}^{k-1} q_i \quad (2.8.1.3)$$

onde A é uma constante não nula.

Temos então que

$$C(k) = \begin{vmatrix} y_k^1 & y_k^2 \\ y_{k+1}^1 & y_{k+1}^2 \end{vmatrix} = y_k^1 \cdot y_{k+1}^2 - y_k^2 \cdot y_{k+1}^1 \quad (2.8.1.4)$$

Dividindo $C(k)$ por $y_k^1 \cdot y_{k+1}^1$, obtemos

$$\frac{C(k)}{y_k^1 \cdot y_{k+1}^1} = \frac{y_k^1 \cdot y_{k+1}^2 - y_k^2 \cdot y_{k+1}^1}{y_k^1 \cdot y_{k+1}^1} = \Delta \frac{y_k^2}{y_k^1} \quad (2.8.1.5) \quad (11)$$

Multiplicando agora por Δ^{-1} , tem-se:

$$y_k^2 = y_k^1 \Delta^{-1} \frac{C(k)}{y_k^1 \cdot y_{k+1}^1} = y_k^1 \Delta^{-1} \frac{AQ_k}{y_k^1 \cdot y_{k+1}^1} = Ay_k^1 \Delta^{-1} \frac{Q_k}{y_k^1 \cdot y_{k+1}^1} \quad (2.8.1.6)$$

Assim, conhecida uma solução da equação de diferenças homogénea de segunda ordem, é possível encontrar uma segunda solução linearmente independente da primeira. A solução geral da equação dada é:

$$y_k = c_1 y_k^1 + c_2 y_k^2 \quad (2.8.1.7)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.[6]

2.8.2. Não Homogéneas

Consideremos a equação de diferenças não homogénea de segunda ordem

$$y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_k = R_k \quad (2.8.2.1)$$

onde p_k , q_k e R_k são funções de k . Suponhamos que conhecemos uma solução da equação de diferenças homogénea de segunda ordem y_k^1 , então é possível encontrar a solução geral da equação não homogénea.

Suponhamos que a solução geral da equação não homogénea, pode ser escrita da seguinte forma:

$$y_k = y_k^1 u_k \quad (2.8.2.2)$$

onde y_k^1 é a solução da equação homogénea e u_k é uma função desconhecida.

Uma vez que (2.8.2.2) é uma solução geral da equação não homogénea, se substituirmos a solução na equação não homogénea, obtemos:

$$y_{k+2}^1 u_{k+2} + p_k y_{k+1}^1 u_{k+1} + q_k y_k^1 u_k = R_k \quad (2.8.2.3)$$

Multiplicando agora a equação homogénea por u_{k+1} , vem:

$$u_{k+1} y_{k+2} + p_k u_{k+1} y_{k+1} + q_k u_{k+1} y_k = 0 \quad (2.8.2.4)$$

$$(11) \quad \Delta \left(\frac{x_k}{y_k} \right) = \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} - \frac{x_k}{y_k} = \frac{x_{k+1} \cdot y_k - y_{k+1} \cdot x_k}{y_k \cdot y_{k+1}}$$

Subtraindo agora as equações (2.8.2.3) e (2.8.2.4), temos:

$$y_{k+2}^1(u_{k+2} - u_{k+1}) - q_k y_k^1(u_{k+1} - u_k) = R_k \Leftrightarrow y_{k+2}^1 \Delta u_{k+1} - q_k y_k^1 \Delta u_k = R_k \quad (2.8.2.5)$$

Fazendo

$$x_k = \Delta u_k \quad (2.8.2.6)$$

resulta que

$$y_{k+2}^1 x_{k+1} - q_k y_k^1 \Delta x_k = R_k \quad (2.8.2.7)$$

Estamos agora perante uma equação de diferenças, não homogénea de primeira ordem, da qual já conhecemos a solução, que é dada por:

$$\Delta u_k = x_k = A \cdot P_k + P_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{R_i}{P_{i+1}}, \quad P_k = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_i y_i^1}{y_{i+2}^1}, \quad A \text{ é uma constante arbitrária} \quad (2.8.2.8)$$

Aplicando agora o operador Δ^{-1} , vem que

$$u_k = A \cdot \Delta^{-1} P_k + \Delta^{-1} \left(P_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{R_i}{P_{i+1}} \right) + B, \quad B \text{ é uma constante arbitrária} \quad (2.8.2.9)$$

Se substituirmos u_k , pelo seu valor na equação $y_k = y_k^1 u_k$, temos que

$$y_k = A \cdot y_k^1 \Delta^{-1} P_k + B \cdot y_k^1 + y_k^1 \Delta^{-1} \left(P_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{R_i}{P_{i+1}} \right) \quad (2.8.2.10)$$

2.9. Equações de diferenças lineares de ordem n

Uma equação diz-se linear se tiver a forma seguinte:

$$a_0(k)y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = R_k \quad (2.9.1)$$

onde $a_0(k), a_1(k), \dots, a_n(k)$ e R_k são funções de k .

A equação é de ordem n se e só se

$$a_0(k) \times a_n(k) \neq 0 \quad (2.9.2)$$

Dada a condição anterior, podemos dividir todos os termos da equação (2.9.1) por $a_0(k)$ e reescreve-mos a equação de diferenças de ordem n da seguinte forma:

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = R_k \quad (2.9.3)$$

Se $R_k = 0$, a equação de diferenças é linear, de ordem n e homogénea.

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0 \quad (2.9.4)$$

Caso contrário (2.9.3) é uma equação de diferenças linear, de ordem n e não homogénea.

Exemplo 2.9.1: A equação de diferenças seguinte

$$y_{k+2} - 6y_{k+1} + 3y_k = 1 + 2k^2 - 3 \cdot 2^k \quad (2.9.5)$$

é linear, de ordem 2 ($k+2-k=2$), e não homogénea. Neste caso $a_1 = -6$, $a_2 = 3$ e $R_k = 1 + 2k^2 - 3 \cdot 2^k$.

Teorema 2.9.1: Seja α uma constante. Se y_k é solução da equação (3) então $\alpha \cdot y_k$ também é solução.

Demonstração: [6]

Teorema 2.9.2 (Princípio da sobreposição): Sejam α e β constantes. Se x_k e z_k são soluções da equação (2.9.4) então $y_k = \alpha \cdot x_k + \beta \cdot z_k$ é também solução.

Demonstração: Como x_k é solução, então pelo teorema (2.9.1), $\alpha \cdot x_k$ é também solução. Assim temos que:

$$\alpha \cdot [x_{k+n} + a_1(k) \cdot x_{k+n-1} + \dots + a_n(k) \cdot x_k] = 0 \quad (2.9.6)$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma

$$t_{k+n} + a_1(k)t_{k+n-1} + \dots + a_n(k)t_k = 0 \quad (2.9.7)$$

onde $t_k = \alpha \cdot x_k$.

Como z_k é solução, então pelo teorema (2.9.1) $\beta \cdot z_k$ é também solução. Assim temos que:

$$\beta \cdot [z_{k+n} + a_1(k) \cdot z_{k+n-1} + \dots + a_n(k) \cdot z_k] = 0 \quad (2.9.8)$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$l_{k+n} + a_1(k) \cdot l_{k+n-1} + \dots + a_n(k) \cdot l_k = 0 \quad (2.9.9)$$

onde $l_k = \beta \cdot z_k$.

Fazendo agora

$$\begin{aligned} y_k &= t_{k+n} + a_1(k) \cdot t_{k+n-1} + \dots + a_n(k) \cdot t_k + l_{k+n} + a_1(k) \cdot l_{k+n-1} + \dots + a_n(k) \cdot l_k \\ &= (t_{k+n} + l_{k+n}) + a_1(k) \cdot (t_{k+n-1} + l_{k+n-1}) + \dots + a_n(k) \cdot (t_k + l_k) \\ &= w_{k+n} + a_1(k) \cdot w_{k+n-1} + \dots + a_n(k) \cdot w_k \end{aligned}$$

onde $w_k = t_k + l_k$.

□

Teorema 2.9.3: Dadas as seguintes condições iniciais:

$$y_k = a_0, \quad y_{k+1} = a_1, \dots, y_{k+n-1} = a_{n-1} \quad (2.9.10)$$

onde a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , são n constantes arbitrárias e k varia no intervalo $k_1 \leq k \leq k_2$.

Então existe uma e uma só solução para a equação de diferenças não homogénea (2.9.3).

Demonstração: [6]

Exemplo 2.9.2: Consideremos a equação de diferenças de terceira ordem:

$$y_{k+3} - \frac{k}{k+1} y_{k+2} + k \cdot y_{k+1} - 3y_k = k, \text{ onde } y_1 = 0, y_2 = -1 \text{ e } y_3 = 1 \quad (2.9.11)$$

e encontremos os valores y_4 e y_5 .

Reescrevendo a equação da seguinte forma:

$$y_{k+3} = \frac{k}{k+1} y_{k+2} - k \cdot y_{k+1} + 3y_k + k \quad (2.9.12)$$

temos que:

$$k=1 \quad y_4 = \frac{1}{2} y_3 - y_2 + 3y_1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2} \quad (2.9.13)$$

$$k = 2 \quad y_5 = \frac{2}{3}y_4 - 2y_3 + 3y_2 + 1 = \frac{10}{6} - 2 - 3 + 2 = -\frac{4}{3} \quad (2.9.14)$$

Teorema 2.9.4: Seja x_k uma solução da equação homogênea (2.9.4) e seja X_k uma solução da equação não homogênea (2.9.3) então

$$y_k = x_k + X_k \quad (2.9.15)$$

é solução da equação não homogênea (2.9.3).

Demonstração: [6]

Diz-se que n funções

$$f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$$

são linearmente dependentes, no intervalo $k_1 \leq k \leq k_2$, se existem n constantes no intervalo, c_1, c_2, \dots, c_n , não todas nulas, tal que

$$c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) + \dots + c_n f_n(k) = 0 \quad (2.9.16)$$

Se as funções não são linearmente dependentes, diz-se que são linearmente independentes.

O determinante **Casorati** das n funções

$$f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$$

é definido da seguinte forma:

$$C(k) = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \dots & f_n(k) \\ f_1(k+1) & f_2(k+1) & \dots & f_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(k+n-1) & f_2(k+n-1) & \dots & f_n(k+n-1) \end{vmatrix} \quad (2.9.17)$$

Teorema 2.9.5: As funções

$$f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$$

são linearmente independentes se e só se o Casoratiano for igual a zero para todo o k .

Demonstração: [6]

Exemplo 2.9.3: As funções 5^k , $k5^k$ e $k^2 5^k$ são linearmente independentes.

$$C(k) = \begin{vmatrix} 5^k & k5^k & k^2 5^k \\ 5^{k+1} & (k+1)5^{k+1} & (k+1)^2 5^{k+1} \\ 5^{k+2} & (k+2)5^{k+2} & (k+2)^2 5^{k+2} \end{vmatrix} \quad (2.9.18)$$

Ora, vejamos:

$$\begin{aligned} C(k) &= 5^k \cdot 5^{k+1} \cdot 5^{k+2} \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 \\ 1 & k+2 & (k+2)^2 \end{vmatrix} = 5^{3k+3} \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 2 \cdot k + 1 \\ 0 & 2 & 2 \cdot (2 \cdot k + 2) \end{vmatrix} = 2 \cdot 5^{3k+3} \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 2 \cdot k + 1 \\ 0 & 1 & 2 \cdot k + 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 5^{3k+3} \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & 2 \cdot k + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5^{3k+3} \end{aligned}$$

Como $2 \cdot (5^{3k+3}) \neq 0$ então as funções são linearmente independentes.

Exemplo 2.9.4: As funções 5^k , $3 \cdot 5^{k+2}$ e e^k são linearmente dependentes.

Consideremos a seguinte combinação linear:

$$c_1 \cdot 5^k + c_2 \cdot 3 \cdot 5^{k+2} + c_3 \cdot e^k = 0 \Leftrightarrow (c_1 + 75 \cdot c_2) 5^k + c_3 \cdot e^k = 0 \quad (2.9.19)$$

Escolhendo $c_1 = -75c_2$, onde $c_2 \neq 0$ e $c_3 = 0$ a combinação linear anterior é zero, pelo que as funções são linearmente independentes.

2.9.1. Homogêneas de ordem n

Teorema 2.9.1.1: Sejam

$$a_1(k), a_2(k), \dots, a_n(k)$$

funções definidas para todo o k e tal que $a_n(k)$ é diferente de zero para todo o k , então existem n funções linearmente independentes

$$y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)$$

tal que se tem a equação

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0 \quad (2.9.1.1)$$

Demonstração: [6]

Definição 2.9.1.1: O conjunto fundamental de soluções da equação

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0 \quad (2.9.1.2)$$

é constituído por quaisquer n funções

$$y_i(k), \quad 1 \leq i \leq n$$

de tal forma que sejam soluções da equação e com o Casoratiano $C(k)$ não nulo para todo o k .

Teorema 2.9.1.2: Sejam

$$\hat{y}_i(k), \quad 1 \leq i \leq n$$

n soluções linearmente independentes da equação

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0 \quad (2.9.1.3)$$

Estas soluções formam um conjunto fundamental de soluções.

Demonstração: [6]

Teorema 2.9.1.3: Qualquer solução y_k da equação

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0 \quad (2.9.1.4)$$

pode ser escrita como combinação linear das funções

$$\hat{y}_i(k), \quad 1 \leq i \leq n$$

Demonstração: [6]

Teorema 2.9.1.4: Qualquer conjunto fundamental de soluções da equação

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = 0 \quad (2.9.1.5)$$

é linearmente independente.

Demonstração: [6]

Teorema 2.9.1.5: Uma equação de diferenças linear de ordem n tem n e só n soluções linearmente independentes.

Demonstração: [6]

2.9.2. Equações de diferenças lineares não homogêneas de ordem n (método da variação das constantes)

Dada a equação de diferenças linear não homogênea

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \dots + a_n(k)y_k = R_k \quad (2.9.2.1)$$

a sua solução pode ser obtida, conhecida uma solução da equação homogênea que lhe está associada e usando o método da variação das constantes para encontrar uma solução Y_k da equação homogênea.

Sejam

$$y_k^i, 1 \leq i \leq n$$

um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea. Queremos determinar funções

$$C_i(k), 1 \leq i \leq n$$

tal que

$$Y_k = C_1(k)y_k^1 + C_2(k)y_k^2 + \dots + C_n(k)y_k^n \quad (2.9.2.2)$$

seja uma solução particular da equação não homogénea.

Assim temos

$$Y_{k+1} = \sum_{i=1}^n C_i(k+1)y_{k+1}^i \quad (2.9.2.3)$$

e

$$C_i(k+1) = C_i(k) + \Delta C_i(k) \quad (2.9.2.4)$$

Logo

$$Y_{k+1} = \sum_{i=1}^n [C_i(k) + \Delta C_i(k)]y_{k+1}^i = \sum_{i=1}^n C_i(k)y_{k+1}^i \quad (2.9.2.5)$$

se pusermos

$$\sum_{i=1}^n y_{k+1}^i \Delta C_i(k) = 0 \quad (2.9.2.6)$$

Da mesma forma, temos que

$$Y_{k+2} = \sum_{i=1}^n C_i(k+1)y_{k+2}^i \quad (2.9.2.7)$$

e

$$Y_{k+2} = \sum_{i=1}^n C_i(k)y_{k+2}^i \quad (2.9.2.8)$$

se tivermos

$$\sum_{i=1}^n y_{k+2}^i \Delta C_i(k) = 0 \quad (2.9.2.9)$$

Continuando o processo, temos

$$Y_{k+n-1} = \sum_{i=1}^n C_i(k)y_{k+n-1}^i \quad (2.9.2.10)$$

e

$$\sum_{i=1}^n y_{k+n-1}^i \Delta C_i(k) = 0 \quad (2.9.2.11)$$

Donde vem que

$$Y_{k+n} = \sum_{i=1}^n C_i(k)y_{k+n}^i + \sum_{i=1}^n y_{k+n}^i \Delta C_i(k) \quad (2.9.2.12)$$

Substituindo na equação não homogénea temos que,

$$\sum_{i=1}^n y_{k+n}^i \Delta C_i(k) = R_k \quad (2.9.2.13)$$

As equações (2.9.2.6), (2.9.2.9), (2.9.2.10), (2.9.2.11), (2.9.2.13), são um conjunto de n equações lineares para $\Delta C_i(k), 1 \leq i \leq n$.

$$\Delta C_i(k) = \frac{f_i(k)}{C(k+1)} \quad (2.9.2.14)$$

onde

$$C(k+1)$$

é o Casorati do conjunto fundamental de soluções da equação não homogénea, logo diferente de zero, e

$$f_i(k), 1 \leq i \leq n$$

são dadas em função de R_k e de y_k^i . [6]

3) Sistemas Dinâmicos Discretos

Até este momento temos sempre conseguido encontrar uma fórmula para solução da equação de diferenças. Mas caso essa fórmula não exista? Como proceder?

Suponhamos a equação de diferenças

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad (3.1)$$

com condição inicial conhecida a_0 .

Uma possibilidade, a que sempre podemos recorrer, é efectuar **iterações sucessivas** para tentar encontrar a **trajectória** ou **órbita** de uma variável x que faça parte de um sistema dinâmico.

Estamos agora em condições de dizer que um sistema dinâmico é um processo iterativo, tal como usar a máquina de calcular e carregar consecutivamente na tecla e^x , dar-nos-á $x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$ e estaremos obtendo iterações sucessivas da função exponencial. Se esta experiência for executada repetidamente para qualquer valor de x inicial, a certa altura surgirá o “overflow” ou mensagem de erro na máquina, que significa a tendência da sucessão para ∞ . Se usarmos este processo para a função $\sin(x)$, obtemos após várias iterações sucessivas o valor zero. No caso do $\cos(x)$ tende para 0.99984.

Após estas tentativas poderíamos ser levados a pensar que a iteração de uma dada função, sobre um certo valor inicial, dá uma sucessão que converge para um limite fixado e único. Isto é totalmente falso. Funções muito simples conduzem a resultados imprevistos quando são iterados. Por exemplo a função $f(x) = 4x(1-x)$. Se fizermos um *input* de um número aleatório entre 0 e 1, depois de várias iterações, podemos obter diferentes tipos de comportamento, fortemente dependentes do valor inicial.

O mesmo se usarmos equações de diferenças do tipo

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad (3.2)$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= f(a_0) \\
 a_2 &= f(a_1) = f(f(a_0)) \\
 a_3 &= f(a_2) = f(f(f(a_0))) \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

A notação começa a tornar-se complicada, mas a ideia é clara.. É fácil de executar, ideal para experimentar e ótimo quando não há forma de conhecer de outro modo a solução da equação de diferenças.

3.1. Iteração de ponto fixo

Suponhamos uma equação algébrica, linear ou não linear da forma

$$f(x) = 0 \tag{3.1.1}$$

Escrevendo

$$x = x + f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = g(x) \tag{3.1.2}$$

obtemos um outro modo de escrever a equação (3.1.1) dada, que é a forma em que muitas vezes a equação (3.1.1) aparece nos problemas reais.

A equação (3.1.2) sugere imediatamente o seguinte esquema iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{3.1.3}$$

Para que este algoritmo se possa usar, temos de demonstrar que:

- a) A partir de um ponto inicial x_0 , podemos calcular sucessivamente x_1, x_2, \dots ;
- b) A sucessão $\{x_1, x_2, \dots\}$, converge para algum ponto ξ ;
- c) O limite ξ é por definição um ponto fixo de $g(x)$, isto é $\xi = g(\xi)$.

Portanto o ponto fixo ξ , solução de (3.1.2) é um ponto que a função g transforma nela própria, ou por outras palavras, um ponto que permanece fixo sob a transformação g .

Proposição a)

O exemplo da função real de variável real

$$g(x) = -\sqrt{x}$$

mostra que a proposição a) não é uma exigência trivial. Neste caso $g(x)$ é definida para $x \geq 0$. Começando com qualquer $x_0 > 0$, obtemos

$$x_1 = g(x_0) < 0 \quad (3.1.4)$$

e já não podemos calcular x_2 . Então para que a proposição a) se verifique temos de formular a hipótese seguinte:

Hipótese 1: Existe um intervalo $I = [a, b]$ tal que, $\forall x \in I$, $g(x)$ é definida e $g(x) \in I$, isto é, a função $g(x)$ aplica I em si próprio.

Para que exista um ponto fixo de $g(x)$ no intervalo I temos de juntar outra hipótese:

Hipótese 2: A função de iteração $g(x)$ é contínua em $I = [a, b]$.

As duas hipóteses juntas implicam que $g(x)$ tenha um ponto fixo em $I = [a, b]$.

Demonstração: Com efeito se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, isso é obvio. Mas se $g(a) \neq a$ e $g(b) \neq b$, então sabemos que pela hipótese 1, ambas $g(a)$ e $g(b)$ estão em $I = [a, b]$; logo $g(a) > a$ e $g(b) < b$. Logo a função

$$h(x) = g(x) - x$$

satisfaz $h(a) > 0$ e $h(b) < 0$. Como $h(x)$ é contínua em I , pela hipótese 2, $h(x)$ deve anular-se algures em I , conforme o Teorema do Valor Intermédio⁽¹²⁾. Logo $g(x)$ tem um ponto fixo em I .

□

⁽¹²⁾ Teorema do Valor Intermédio: Seja g uma função contínua definida em $[a, b]$. Suponhamos que $g(a) = u$ e que $g(b) = v$. Então para qualquer x entre u e v existe c , $a \leq c \leq b$ tal que $g(c) = x$.

Proposição b)

Para analisarmos a convergência assinalada na proposição b), podemos usar em cada caso um método gráfico, usualmente designado por **Teia de Aranha** (“Cobweb”).

No entanto, a iteração do ponto fixo pode não ser convergente, e essa convergência parece depender do declive da função $g(x)$, conforme mostra o método da Teia de Aranha. Se o declive de $g(x)$ for muito grande em valor absoluto, perto de um ponto fixo ξ de $g(x)$, não será de esperar convergência para esse ponto fixo. Temos então de estabelecer uma terceira hipótese:

Hipótese 3: A função de iteração $g(x)$ é diferenciável no intervalo $I = [a, b]$ e existe uma constante K , não negativa, $K < 1$, tal que $\forall x \in I \quad |g'(x)| \leq K$.

Obviamente a hipótese 3 implica a hipótese 2, pois uma função diferenciável é uma função contínua.

Teorema do Ponto Fixo: Seja $g(x)$ uma função de iteração que satisfaz as hipóteses 1 e 3. Então $g(x)$ tem exactamente um ponto fixo ξ em I , e começando com qualquer ponto x_0 em I , a sucessão x_1, x_2, \dots , gerada pela iteração de ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$, converge para ξ .

Demonstração: Já provámos a existência de um ponto fixo ξ para $g(x)$ em I . Seja x_0 qualquer ponto em I . Então a iteração de ponto fixo gera uma sucessão x_1, x_2, \dots de pontos, todos situados em I , segundo a hipótese 1. Representemos o erro na iteração de ordem n por:

$$e_n = \xi - x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.5)$$

Então como $\xi = g(\xi)$ e $x_n = g(x_{n-1})$, temos:

$$e_n = \xi - x_n = g(\xi) - g(x_{n-1}) = g'(\eta_n)e_{n-1} \quad (3.1.6)$$

para algum η_n entre ξ e x_{n-1} , devido ao Teorema do Valor Médio.⁽¹³⁾ Notemos que $\eta_n \in [\xi, x_{n-1}]$ e

$$e_{n-1} = \xi - x_{n-1} \quad (3.1.7)$$

Então, pela hipótese 3

$$|e_n| \leq K \cdot |e_{n-1}| \quad (3.1.8)$$

Logo, por indução sobre n , vem:

$$|e_n| \leq K \cdot |e_{n-1}| \leq K^2 \cdot |e_{n-2}| \leq \dots \leq K^n |e_0| \quad (3.1.9)$$

Como $0 \leq K \leq 1$ temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n = 0$, logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |e_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} K^n |e_0| = 0 \quad (3.1.10)$$

qualquer que seja o erro inicial e_0 . Logo x_1, x_2, \dots converge para ξ .

□

Corolário 3.1.1: Se $g(x)$ é continuamente diferenciável num intervalo aberto, contendo o ponto fixo ξ , e se

$$|g'(\xi)| < 1$$

então existe um $\varepsilon > 0$ tal que a iteração de ponto fixo com $g(x)$ converge quando

$$|x_0 - \xi| \leq \varepsilon$$

Um ponto fixo ξ para o qual $|g'(\xi)| < 1$ chama-se **ponto de atracção** ou **atractor** para a iteração com $g(x)$. Isto é, no caso de convergência, o ponto atractivo funciona como um “buraco negro”: as iterações que se aproximam dele são inexoravelmente atraídas. Caso contrário, o ponto fixo pode ser um **ponto de repulsão** ou **repulsor** e também pode ser um ponto fixo periódico.[1]

⁽¹³⁾ Teorema do Valor Médio: Suponhamos g definida em $[a, b]$ uma função contínua e com primeira derivada. Então existe um valor $c \in [a, b]$ tal que $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$.

3.2. Pontos fixos ou Valores de Equilíbrio

Para qualquer equação de diferenças de primeira ordem

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad (3.2.1)$$

os seus pontos fixos são dados pelas soluções de

$$u = f(u) \quad (3.2.2)$$

Os valores de equilíbrio representam as soluções constantes da equação de diferenças.

Exemplo 3.2.1: Consideremos a equação logística

$$u_{n+1} = k \cdot u_n (1 - u_n) \quad (3.2.3)$$

fazendo $k = 2$ fica:

$$u_{n+1} = 2 \cdot u_n (1 - u_n) \quad (3.2.4)$$

fazendo $u_n = u$, para qualquer valor de n , temos:

$$u = 2 \cdot u \cdot (1 - u) \Leftrightarrow 2u^2 - u = 0 \quad (3.2.5)$$

cujas soluções $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2}$, são designadas por pontos fixos ou valores de equilíbrio.

Para equações de segunda ordem é possível usar também o mesmo processo para encontrar os valores de equilíbrio.

Exemplo 3.2.2: No caso da equação de segunda ordem

$$u_{n+2} - 2 \cdot u_{n+1} + 4 \cdot u_n = 6 \quad (3.2.6)$$

fazendo $u_n = u$, para qualquer valor de n , temos:

$$u - 2u + 4u = 6 \Leftrightarrow u = 2 \quad (3.2.7)$$

Exemplo 3.2.3: A equação de segunda ordem

$$u_n = 3 \cdot u_{n-1} + 2 \cdot u_{n-2} + n^2 \quad (3.2.8)$$

não tem pontos fixos.

Fazendo $u_n = u$, para qualquer valor de n , temos:

$$u - 3u - 2u - n^2 = -4 \cdot u - n^2 \quad (3.2.9)$$

e este valor nunca pode ser constante para u constante.

3.3. Determinação gráfica de soluções

Há várias formas de encontrar soluções particulares de equações de diferenças. Podemos usar substituição e obter dessa forma as soluções. Por exemplo, considerando novamente a equação logística

$$u_{n+1} = 2 \cdot u_n(1 - u_n) \quad (3.3.1)$$

com $u_0 = \frac{1}{4}$, as suas soluções particulares desta equação podem ser obtidas por simples substituição. Assim temos:

$$u_1 = \frac{3}{8}, u_2 = \frac{15}{32}, u_3 = \frac{255}{512}, u_4 = \frac{65535}{131072}$$

Um método alternativo para representar graficamente as equações de diferenças é a Teia de Aranha (Cobweb). É particularmente útil para determinar as soluções constantes e verificar a sua estabilidade. Graficamente, um valor de equilíbrio é a abcissa do ponto de intersecção do gráfico com a recta

$$y = x \quad (3.3.2)$$

Suponhamos que temos a equação de primeira ordem

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad (3.3.3)$$

Representemos graficamente as rectas

$$y = x$$

e

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Estas rectas intersectam-se no ponto fixo $(2,2)$. Seleccionamos, por exemplo, o valor inicial $u_0 = \frac{1}{2}$. O ponto $P_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Então $u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}$ e o ponto

$P_1 = (u_0, u_1)$, ficará na recta $y = \frac{1}{2}x + 1$. Localizemos o ponto $Q_1 = (u_1, u_1)$ na recta $y = x$ e para isso basta desenhar a paralela P_1Q_1 ao eixo dos xx . Marquemos a seguir P_2 em $y = \frac{1}{2}x + 1$ desenhando Q_1P_2 paralela ao eixo dos yy (a ordenada deve ser u_2).

Repete-se o processo desenhando segmentos de recta entre $y = x$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$ usando as mesmas regras.

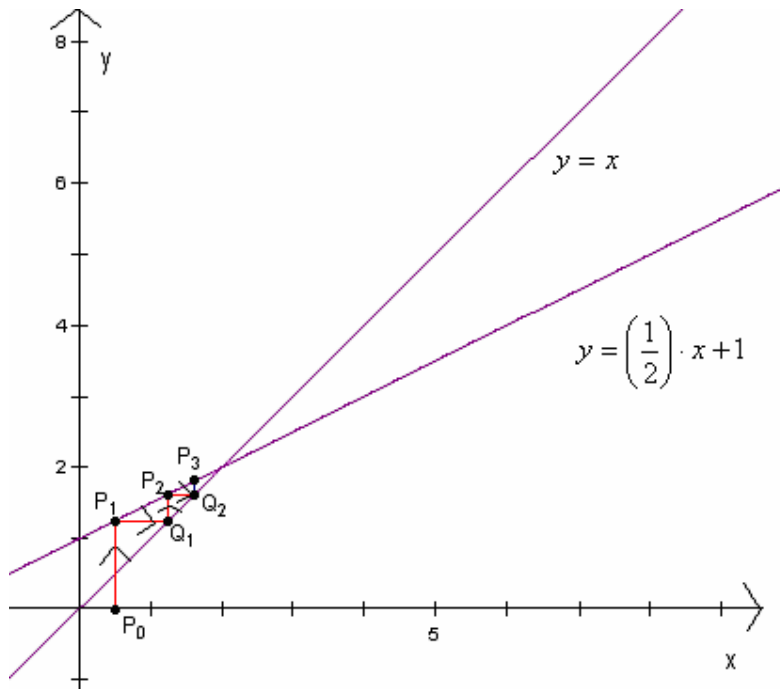


Gráfico 14

Podemos ver que esta equação de diferenças tem um ponto fixo (valor de equilíbrio), que é estável pois todas as teias de aranha se aproximam desse ponto.

A utilidade do método é que uma representação gráfica e interpretação de resultados pode ser obtida desenhando simplesmente rectas.

Este método é particularmente útil para determinar pontos fixos e assegurar a sua estabilidade.

Vejamos agora os seguintes exemplos:

Exemplo 3.3.1: Determinemos uma solução do tipo Teia de Aranha para

$$u_{n+1} = -k \cdot u_n + k \quad (3.3.4)$$

para diferentes valores de k . Em qualquer um dos casos usaremos como dado inicial

$$u_0 = \frac{3}{4}.$$

a) $k = \frac{1}{2}$

As rectas $y = x$ e $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, intersectam-se no ponto fixo $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Começando em $P_0 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$, temos $P_0P_1Q_1P_2Q_2P_3Q_3 \dots$. A Teia aproxima-se do ponto fixo, quando $n \rightarrow \infty$, indicando estabilidade.

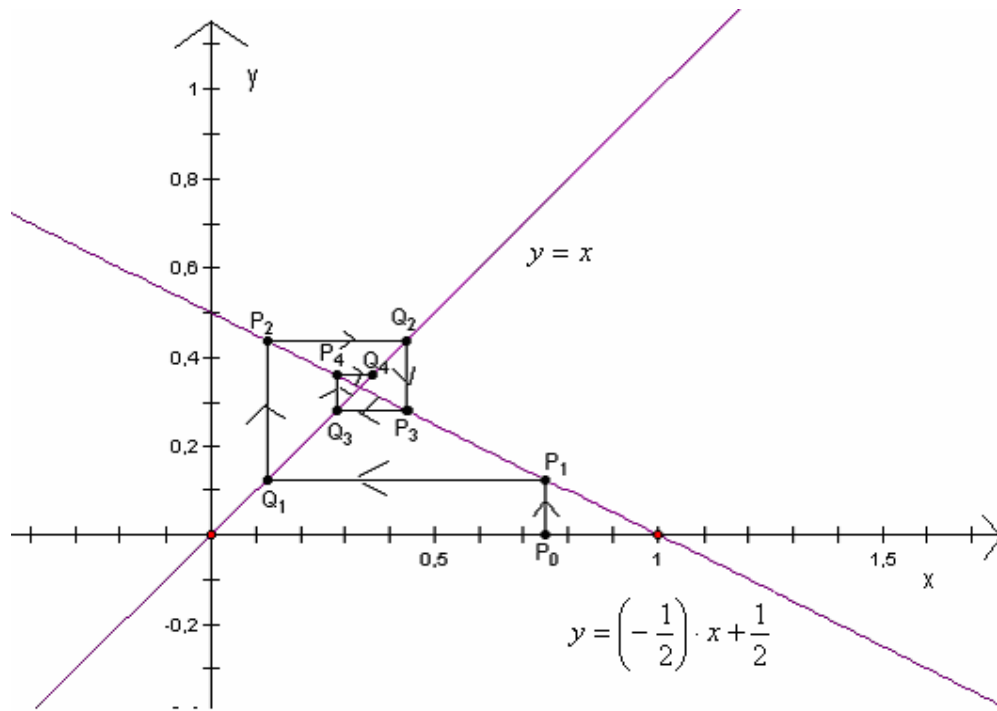


Gráfico 15

b) $k = \frac{3}{2}$

As rectas $y = x$ e $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, intersectam-se no ponto fixo $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

O caminho começa novamente em $P_0 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ e a Teia de Aranha move-se afastando-se do ponto fixo, o que implica instabilidade.

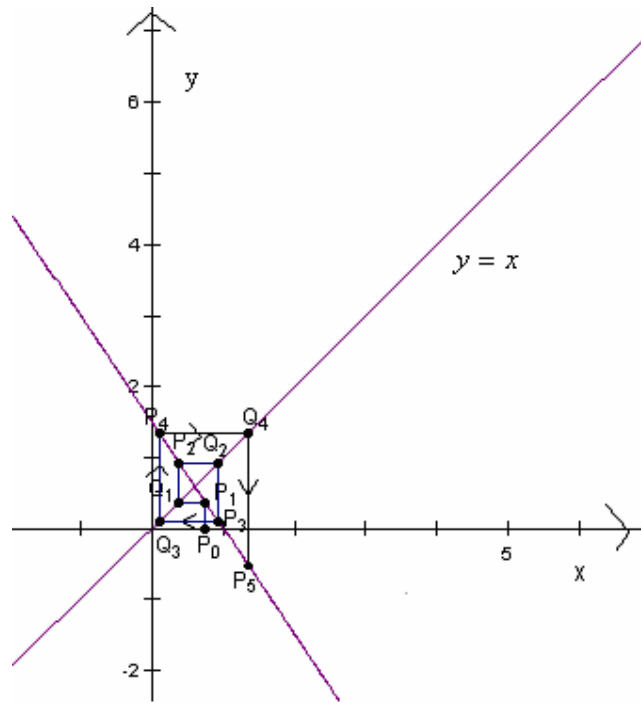


Gráfico 16

c) $k = 1$

As rectas $y = x$ e $y = -x + 1$, intersectam-se no ponto fixo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

O caminho começa novamente em $P_0 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ e segue o rectângulo $P_1Q_1P_2Q_2$,

indicando periodicidade. Isto é verdade para qualquer dado inicial, excepto o valor zero e um.

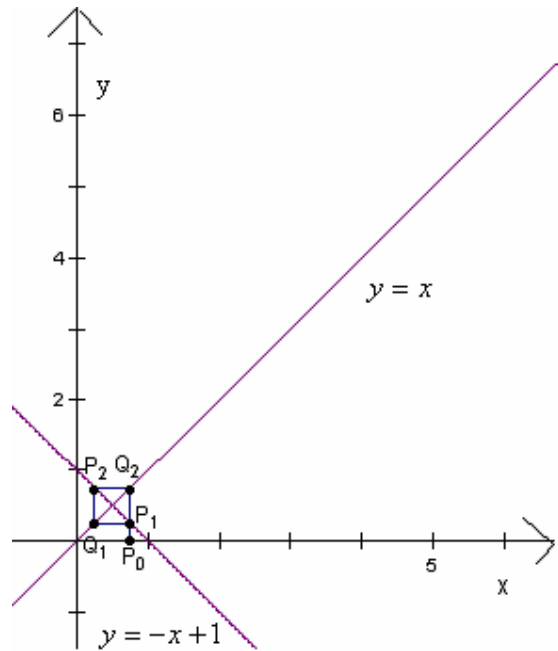


Gráfico 17

Deste exemplo bastante simples, podemos retirar algumas conclusões quanto à estabilidade. Assim uma equação de diferenças de primeira ordem do tipo

$$u_{n+1} = -k \cdot u_n + a \quad (3.3.5)$$

tem:

- a. Um ponto fixo estável se $-1 < k < 1$
- b. Um ponto fixo instável se $|k| > 1$
- c. Um ponto fixo periódico se $k = 1$

4) Equações de diferenças não lineares

4.1. A equação de diferenças logística

Se a população mundial satisfizer a equação diferencial

$$u' = a \cdot u \quad (4.1.1)$$

ela cresce exponencialmente na forma $e^{a \cdot t}$. Este crescimento exponencial foi a **predição de Malthus**⁽¹⁴⁾. Evidentemente que a tem de ser positivo, experimentalmente o seu valor admite-se ser de 0,02. Com esta estimativa a população mundial duplica em cada T anos, ou seja,

$$e^{0,02 \cdot T} = 2 \Leftrightarrow T \approx 35 \text{ anos} \quad (4.1.2)$$

Este crescimento populacional pode ser modelado pela seguinte equação de diferenças

$$u_{n+1} = \alpha \cdot u_n (1 - u_n) \quad (4.1.3)$$

em que α é constante. Segundo esta equação não linear, u_n representa a dimensão da população na geração n e α é a taxa de nascimentos e podemos esperar que a dimensão da população na próxima geração seja de $\alpha \cdot u_n$, no caso de não se verificarem factores que contrariem esse crescimento, tais como, falta de recursos, ou no outro sentido, excesso de recursos que provoquem um aumento ainda superior. Se $\alpha > 1$, então o modelo da população dado pela equação de diferenças de 1ª ordem

$$u_{n+1} = \alpha \cdot u_n \quad (4.1.4)$$

implicaria que a população crescesse até ao infinito, pois a equação tem solução geral

$$u_n = \alpha^n \cdot u_0 \quad (4.1.5)$$

Para contrariar esta possibilidade, podemos introduzir um termo

$$- \alpha \cdot u_n^2$$

⁽¹⁴⁾ Thomas Robert Malthus (1766-1834)

que obrigará a reduzir o crescimento da população quando esta é grande. Assim a equação fica na forma

$$u_{n+1} = \alpha \cdot u_n (1 - u_n) \quad (4.1.6)$$

Os pontos fixos desta equação determinam-se pela equação

$$u = \alpha \cdot u(1 - u) \Leftrightarrow u - \alpha \cdot u - \alpha \cdot u^2 = 0 \Leftrightarrow u^2 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

Assim

$$u = 0 \vee u = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

são os pontos fixos.

Para usarmos o método da Teia de Aranha nesta equação de diferenças não linear, teremos de traçar os gráficos da parábola

$$y = f(x) = \alpha \cdot x(1 - x) \quad (4.1.7)$$

e da recta

$$y = x \quad (4.1.8)$$

Os pontos fixos, ou valores de equilíbrio, serão os pontos de intersecção da recta com a parábola e os valores de x nesses pontos serão dados pelas soluções de

$$\alpha \cdot x(1 - x) = x \Leftrightarrow x(\alpha \cdot x - 1 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

Vamos somente ver o caso em que $\alpha > 1$, tal que um ponto fixo esteja no primeiro quadrante $x > 0, y > 0$. Uma solução do tipo Teia de Aranha, para o caso $\alpha = 2,8$, é mostrada na figura seguinte. Assim

$$u_{n+1} = 2,8 \cdot u_n (1 - u_n) \quad (4.1.9)$$

e consideraremos $u_0 = \frac{1}{2}$.

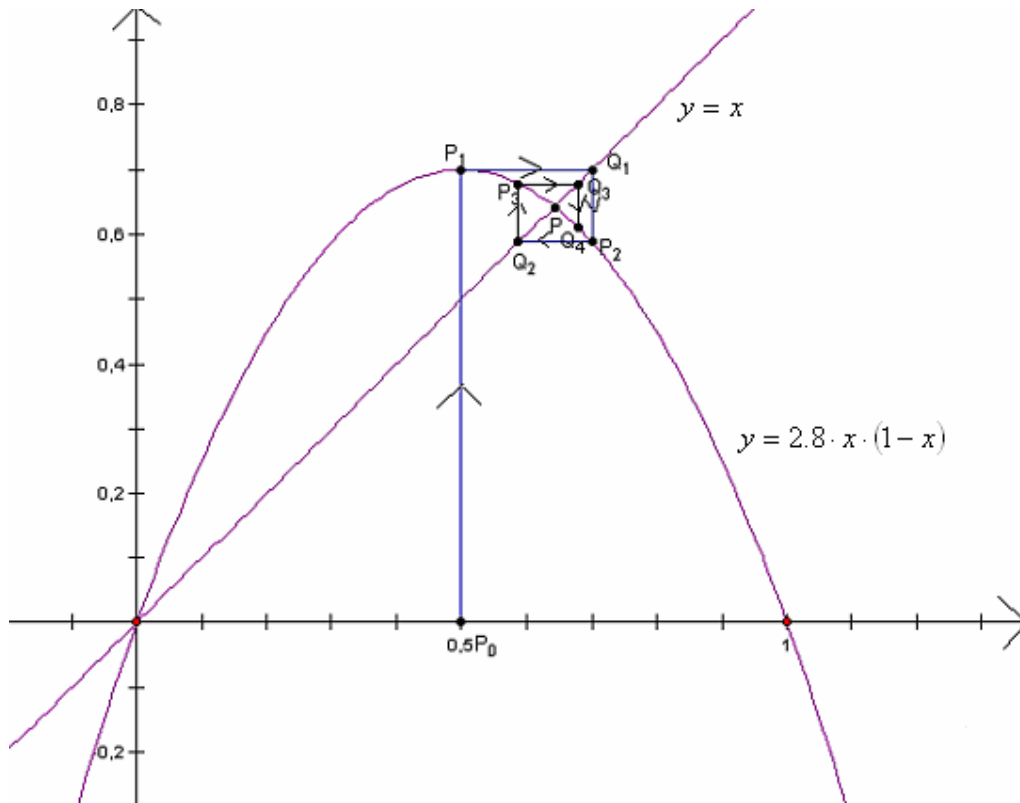


Gráfico 18

Os pontos de intersecção da parábola com o eixo dos xx são:

$$2,8 \cdot x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

O ponto máximo é

$$y' = 2,8 - 5,6 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} = 0,5$$

É de salientar que fazendo $u_0 = \frac{1}{2}$ e com a escolha de $\alpha = 2,8$ o ponto fixo é estável, isto é, a Teia de Aranha aproxima-se dele.

O declive do gráfico de

$$y = \alpha \cdot x(1-x) \quad (4.1.10)$$

no ponto fixo determina a estabilidade ou instabilidade das soluções. O declive é

$$m = \alpha - 2 \cdot \alpha \cdot x \quad (4.1.11)$$

Como a abcissa do ponto fixo é $1 - \frac{1}{\alpha}$, temos que

$$m = \alpha - 2 \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = -\alpha + 2 \quad (4.1.12)$$

Como vimos anteriormente nas equações do tipo

$$u_{n+1} = -k \cdot u_n + a \quad (4.1.13)$$

o ponto fixo é localmente estável desde que $m > -1$, pois nesse caso todos os caminhos da Teia de Aranha, partindo perto do ponto $1 - \frac{1}{\alpha}$, se aproximam do ponto fixo, à medida que $n \rightarrow \infty$. Isso corresponde a $\alpha < 3$. Note-se que se $1 < \alpha < 2$ então a recta $y = x$ intersecta a parábola

$$y = \alpha \cdot x(1 - x) \quad (4.1.14)$$

entre a origem e o ponto máximo.

Para $\alpha \geq 3$ as soluções tornam-se mais complicadas. O ponto fixo na origem é instável e, portanto, não há outro ponto fixo para o qual as soluções possam tender. Podemos obter uma pista do que se passa se considerarmos a função da função dada por:

$$y = f(f(x)) = \alpha \cdot [\alpha \cdot x(1 - x)](1 - \alpha \cdot x(1 - x)) = \alpha^2 x(1 - x) - \alpha^3 x^2(1 - x)^2 \quad (4.1.15)$$

com

$$f(x) = \alpha \cdot x(1 - x) \quad (4.1.16)$$

Quando $\alpha = 3$ esta curva intersecta a recta

$$y = x$$

somente em $x = 0$ e em P . Podemos verificar isto fazendo:

$$\begin{aligned} x = \alpha^2 x(1 - x) - \alpha^3 x^2(1 - x)^2 &\stackrel{\alpha=3}{\Leftrightarrow} x - 9x + 9x^2 + 27x^2 - 54x^3 + 27x^4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(27x^3 - 54x^2 + 36x - 8) = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2)^3 = 0 \end{aligned}$$

Vejamos agora o gráfico das curvas

$$y = f(x) \quad (4.1.17)$$

e de

$$y = f(f(x)) \quad (4.1.18)$$

para $\alpha = 3$. O ponto fixo tem coordenadas $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, pois

$$x(3x-2)^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Substituindo, $\alpha = 3$ e $x = \frac{2}{3}$, em (4.1.18), vem $y = \frac{2}{3}$.

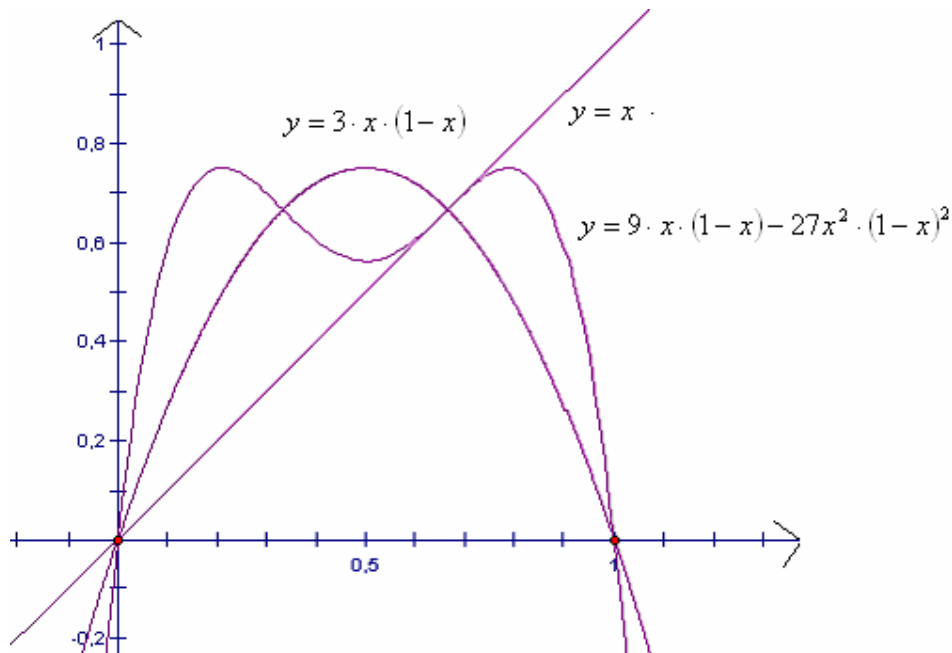


Gráfico 19

À medida que α aumenta, passam a ser três os pontos de intersecção sobre a recta $y = x$. Para $\alpha = 3,4$, verificamos graficamente que os gráficos de (4.1.17), e de (4.1.18), juntamente com a recta $y = x$ se intersectam em quatro pontos, fixos, dois estáveis e dois instáveis. Neste caso A e C são estáveis. Sendo A e C pontos fixos desta equação, eles podem ser associados com ciclos binários ou soluções biperiódicas na função original. Este fenómeno é conhecido como duplicação do período. Ele surge pela primeira vez quando o ponto fixo P sobre $y = f(x)$, deixa de ser estável em $\alpha = 3$. O ciclo binário cresce então em amplitude, quando α aumenta. Diz-se que a solução bifurca em $\alpha = 3$. Este tipo de bifurcação, no qual a solução estável se torna bruscamente instável e origina duas soluções estáveis uma para cada lado, é um exemplo da bifurcação do tipo forçado, assim chamada devido à sua forma geométrica análoga a um forçado de lavrador.

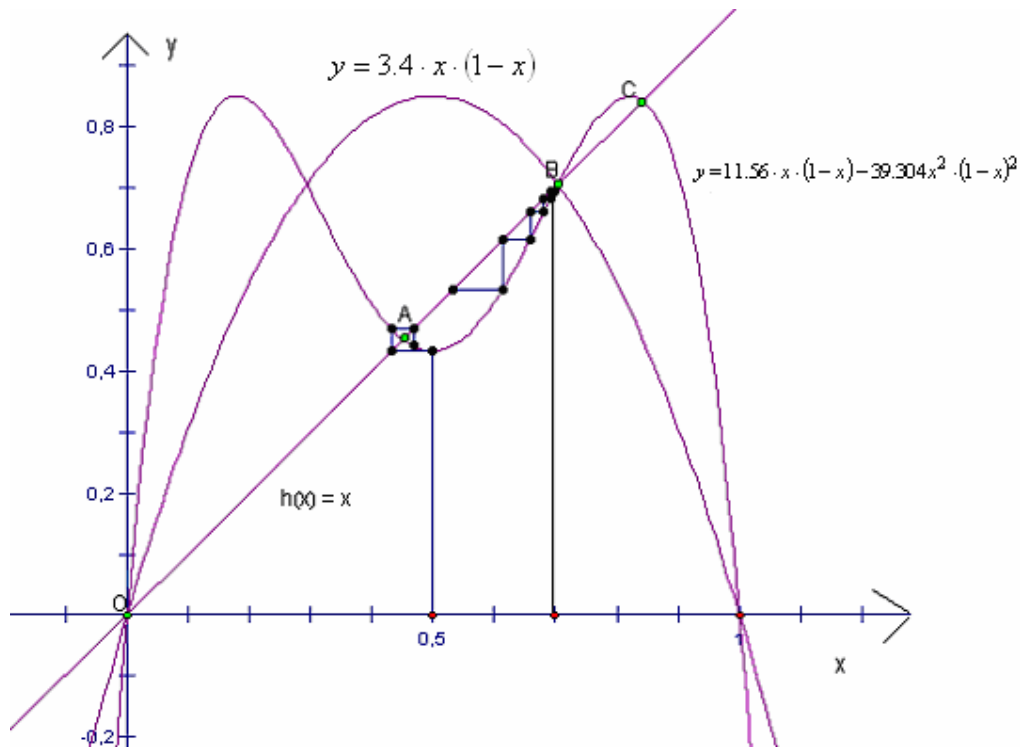


Gráfico 20

Para um qualquer valor de α , os pontos fixos de (4.1.18), ocorrem quando

$$x = \alpha^2 x(1-x) - \alpha^3 x^2(1-x)^2 \quad (4.1.19)$$

Para resolver esta equação, façamos

$$1-x = u \quad (4.1.20)$$

Então u satisfaz

$$1-u = \alpha^2(1-u)u - \alpha^3(1-u)^2 u^2 \quad (4.1.21)$$

que se pode escrever na forma

$$G(u) = 0 \quad (4.1.22)$$

em que

$$G(u) = (u-1)(\alpha^3 u^3 - \alpha^3 u^2 + \alpha^2 u - 1) \quad (4.1.23)$$

Uma solução óbvia de

$$G(u) = 0 \quad (4.1.24)$$

é

$$u = 1$$

enquanto que a equação cúbica tem a solução

$$u = \frac{1}{\alpha}$$

como se pode verificar. Logo,

$$G(u) = (u-1)(\alpha \cdot u - 1)(\alpha^2 u^2 + \alpha(1-\alpha)u + 1) = 0 \quad (4.1.25)$$

pois pela regra de Ruffini vem:

$$\begin{array}{r|rrrr} & \alpha^3 & -\alpha^3 & \alpha^2 & -1 \\ \frac{1}{\alpha} & & \alpha^2 & \alpha - \alpha^2 & 1 \\ \hline & \alpha^3 & \alpha^2 - \alpha^3 & \alpha & 0 \end{array}$$

Logo

$$G(u) = (u-1)\left(u - \frac{1}{\alpha}\right)\alpha(\alpha^2 u^2 + (\alpha - \alpha^2)u + 1) = 0 \quad (4.1.26)$$

Em A e C, u satisfaz a equação

$$\alpha^2 u^2 + \alpha(1-\alpha)u + 1 = 0 \quad (4.1.27)$$

resolvendo em ordem a u, vem:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha^2 - \alpha \pm \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)^2 - 4\alpha^2}}{2\alpha^2} \Leftrightarrow u = \frac{\alpha(\alpha-1) \pm \sqrt{\alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 4\alpha^2}}{2\alpha^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u &= \frac{\alpha(\alpha-1) \pm \alpha\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4}}{2\alpha^2} \Leftrightarrow u = \frac{\alpha-1 \pm \sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \end{aligned}$$

Como

$$x = 1 - u \quad (4.1.28)$$

vem

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\alpha-1 - \sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \\ x_2 = \frac{\alpha-1 + \sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \end{cases}$$

Ora

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \alpha \cdot x_1(1-x_1) = \alpha \cdot \frac{\alpha-1-\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\alpha-1-\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha}\right) = \\
&= \frac{\alpha-1-\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \cdot \frac{\alpha+1+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} = \\
&= \frac{[\alpha-(1+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)})] \cdot [\alpha-(1+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)})]}{4\alpha} = \frac{\alpha^2 - (1+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)})^2}{4\alpha}
\end{aligned}$$

Para $\alpha = 3.4$ verifica-se que

$$f(x_1) = x_2 \approx 0,548 \quad (4.1.29)$$

Da mesma maneira se poderá verificar que

$$f(x_2) = x_1 \quad (4.1.30)$$

Então, poderá haver transportes entre x_1 e x_2 ao longo da teia de aranha quadrada.

O ponto fixo A permanecerá estável se o valor absoluto do declive da curva nesse ponto for inferior a 1. (A mesma condição se aplica ao ponto C).

De facto, o declive crítico é -1, e vamos ver qual o valor de α , para o qual isto sucede. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(f(x)) &= \alpha^2(1-x) - \alpha^2x - 2\alpha^3x(1-x)^2 + 2\alpha^3x^2(1-x) \\
&= \alpha^2 - \alpha^2x - \alpha^2x - 2\alpha^3x(1-2x+x^2) + 2\alpha^3x^2 - 2\alpha^3x^3 \\
&= \alpha^2 - \alpha^2x - \alpha^2x - 2\alpha^3x + 4\alpha^3x^2 - 2\alpha^3x^3 + 2\alpha^3x^2 - 2\alpha^3x^3 \\
&= \alpha^2 - (1+\alpha)2\alpha^2x + 6\alpha^3x^2 - 4\alpha^3x^3
\end{aligned}$$

Queremos o valor de α dado por:

$$\frac{d}{dx} f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow 4\alpha^3x^3 - 6\alpha^3x^2 + (1+\alpha)2\alpha^2x - \alpha^2 = 1 \quad (4.1.31)$$

quando x satisfaz

$$\alpha^2u^2 + \alpha(1-\alpha)u + 1 = 0 \quad (4.1.32)$$

com

$$u = 1 - x \quad (4.1.33)$$

isto é, quando

$$\alpha^2x^2 - \alpha(1+\alpha)x + 1 + \alpha = 0 \quad (4.1.34)$$

Multiplicando agora

$$\alpha^2 x^2 - \alpha(1 + \alpha)x + 1 + \alpha = 0 \quad (4.1.35)$$

por

$$4\alpha \cdot x \quad (4.1.36)$$

obtemos

$$4\alpha^3 x^3 - 4\alpha^2(1 + \alpha)x^2 + 4\alpha \cdot x + 4\alpha^2 x = 0 \quad (4.1.37)$$

e subtraindo agora na derivada, vem:

$$\begin{aligned} & 4\alpha^3 x^3 - 6\alpha^3 x^2 + (1 + \alpha)2\alpha^2 x - \alpha^2 - 1 - 4\alpha^3 x^3 + 4\alpha^2(1 + \alpha)x^2 - 4\alpha \cdot x - 4\alpha^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 4\alpha^3 x^3 - 6\alpha^3 x^2 + 2\alpha^2 x + 2\alpha^3 x - \alpha^2 - 1 - 4\alpha^3 x^3 + 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha^3 x^2 - 4\alpha \cdot x - 4\alpha^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2\alpha^3 x^2 - 2\alpha^2 x + 2\alpha^3 x - \alpha^2 - 1 + 4\alpha^2 x^2 - 4\alpha \cdot x = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2\alpha^2 x^2(\alpha - 2) + 2\alpha \cdot x(-\alpha + \alpha^2 - 2) - \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2\alpha^2 x^2(\alpha - 2) + 2\alpha \cdot x(\alpha - 2)(\alpha + 1) - (1 + \alpha^2) = 0 \end{aligned}$$

Assim as equações

$$\alpha^2 x^2 - \alpha(1 + \alpha)x + 1 + \alpha = 0 \quad (4.1.38)$$

e

$$-2\alpha^2 x^2(\alpha - 2) + 2\alpha \cdot x(\alpha - 2)(\alpha + 1) - (1 + \alpha^2) = 0 \quad (4.1.39)$$

devem ter as mesmas raízes em x . Fazendo, nas duas equações, o coeficiente de x^2 igual a, temos:

$$x^2 - \frac{(1 + \alpha)x}{\alpha} + \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} = 0 \quad (4.1.40)$$

e

$$x^2 - \frac{x(\alpha + 1)}{\alpha} + \frac{(1 + \alpha^2)}{2\alpha^2(\alpha - 2)} = 0 \quad (4.1.41)$$

Estas equações têm as mesmas raízes se

$$\begin{aligned} \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} &= \frac{(1 + \alpha^2)}{2\alpha^2(\alpha - 2)} \Leftrightarrow 2\alpha^2(\alpha - 2)(1 + \alpha) = \alpha^4 + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2[2(\alpha - 2)(1 + \alpha) - \alpha^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

Como só nos interessam valores de $\alpha > 3$, a raiz pretendida é

$$\alpha = 1 + \sqrt{6} \approx 3,449\dots$$

De facto os declives em ambos os pontos A e C são iguais a -1 para este valor de α . Então para

$$3 < \alpha < 1 + \sqrt{6}$$

a solução de 2 ciclos é estável. (Ciclos binários).

Para

$$\alpha = 1 + \sqrt{6}$$

o sistema bifurca-se novamente para um 4 ciclo ou solução de período 4, que corresponde a uma solução que é o conjunto de pontos fixos estáveis de

$$y = f(f(f(f(x)))) \quad (4.1.42)$$

O gráfico desta função para $\alpha = 3.54$ tem oito pontos fixos. O ciclo duplica novamente para $\alpha = 3.544$. Os intervalos entre as bifurcações da duplicação do período diminui rapidamente, até atingir um limite cerca de $\alpha = 3.570$, além do qual surge o caos. As iterações deixam de ser periódicas para a maior parte dos valores de α , situados além desse ponto, embora subsistam alguns valores de periodicidade em intervalos curtos. A sucessão de bifurcações de duplicação do período é conhecida como a Sucessão de Feigenbaum⁽¹⁵⁾, e ela possui certas características universais que não são somente características da equação logística, mas apresentam aspectos comuns com outras equações de diferenças que geram duplicação do período. A maneira mais simples de ver o comportamento progressivamente complexo é através da figura obtida em computador das iterações de

$$u_{n+1} = \alpha \cdot u_n (1 - u_n) \quad (4.1.43)$$

para acréscimos passo a passo de α , começando com $\alpha = 1 + \sqrt{6}$ até $\alpha = 3,829$

⁽¹⁵⁾ Edward Albert Feigenbaum nasceu a 20 de Janeiro de 1936, é um cientista que trabalha no campo da inteligência artificial. É chamado o pai dos sistemas inteligentes.

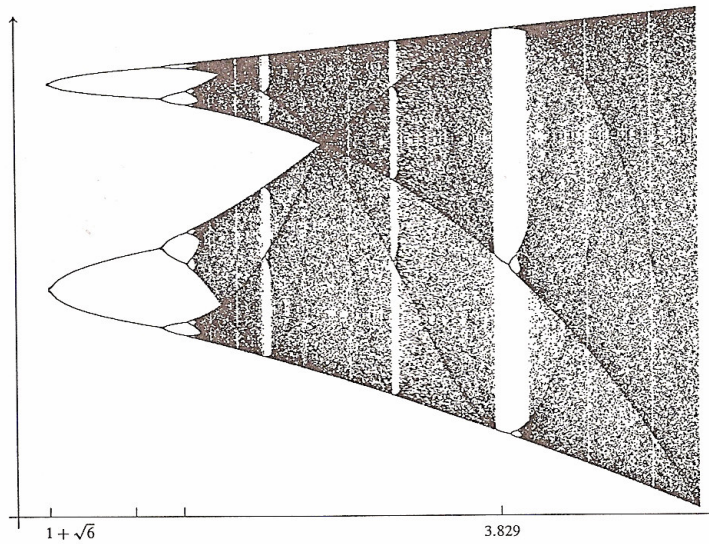


Gráfico 21

O efeito de duplicação de período infinito é que a solução é ultimamente não periódica. O comportamento caótico e com ruído da equação de diferenças pode ser visto claramente através do grande número de pontos para maiores valores de α . Estes conjuntos não periódicos, são conhecidos como atratores estranhos. As sucessivas iterações da equação logística vagueiam em torno desses atratores numa aparentemente aleatória mas limitada maneira, e nunca se fixam numa solução periódica. Contudo, no interior da banda caótica dos valores de α aparecem janelas de ciclos periódicos.

4.2. Determinação de Trajectórias – Método das Fases

Este método gráfico, embora não permita determinar a solução de uma equação de diferenças, permite no entanto determinar a natureza da sua trajectória e aplica-se, num conjunto mais ou menos vasto de equações, desde que nelas figurem apenas as variáveis y_{t+1} e y_t . (Se bem que também pode ser utilizado no estudo de equações lineares, este método é particularmente útil no estudo de equações não lineares).

De modo a detectar a natureza da trajectória do fenómeno, representado sob a forma de equação de diferenças, deve começar por representar-se a equação na forma

$$y_{t+1} = f(y_t) \quad (4.2.1)$$

onde f é uma função qualquer de y_t . Conhecidas condições iniciais da equação de diferenças dada, isto é, y_0 é um valor dado, ficam os restantes valores y_1, y_2, \dots univocamente determinados por substituições sucessivas.

Representando num plano cartesiano y_{t+1} como função de y_t , obtém-se uma curva que corresponde a f e que se designa por linha de fase; o gráfico (plano cartesiano) no qual f é representado toma o nome de diagrama de fase. Traça-se, no diagrama de fase, a bissetriz dos quadrantes ímpares que servirá de “guia” à interpretação gráfica seguinte.

Vamos admitir que já está definida uma determinada linha de fase f_1 , que representa uma equação específica

$$y_{t+1} = f_1(y_t) \quad (4.2.2)$$

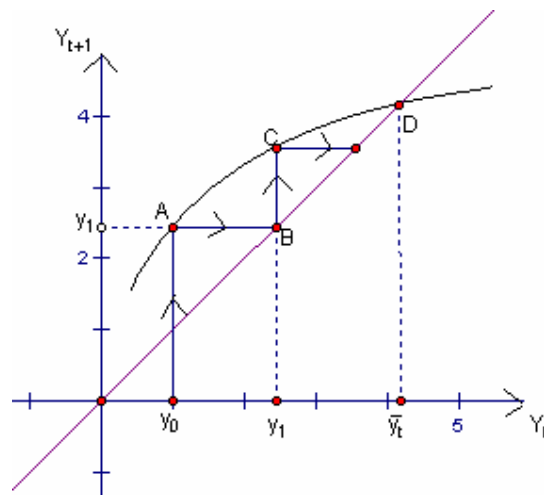


Gráfico 22

Conhecido o valor de y_0 obtemos y_1 usando f_1 , resultando daí o ponto A. Projectando A sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares obtém-se B, cuja abscissa permite obter por substituição em f_1 , y_2 e o ponto C, situado sob a linha de fase. Repetindo o processo obtêm-se outros pontos sobre a linha de fase.[3]

4.2.1. Identificação da trajectória

A identificação da natureza da trajectória, descrita pela equação de diferenças, faz-se confrontando a linha de fase com a bissectriz dos quadrantes ímpares da seguinte maneira: Une-se y_0 a f_1 , obtém-se A, une-se A com a bissectriz dos quadrantes ímpares, obtendo-se B e assim sucessivamente. Resulta assim, uma linha poligonal oscilando entre a linha de fase e a recta de 45° . Se essa linha poligonal tender a aproximar-se do ponto D, então diz-se que a trajectória converge para o nível de equilíbrio representado pela abcissa de D e que é \bar{y}_t .

4.2.2. Tipos de Trajectórias

O caso da trajectória que vimos, é um caso em que a trajectória é monótona convergente.

Um caso de trajectória monótona divergente é, por exemplo,

$$y_{t+1} = f_2(y_t) \quad (4.2.2.1)$$

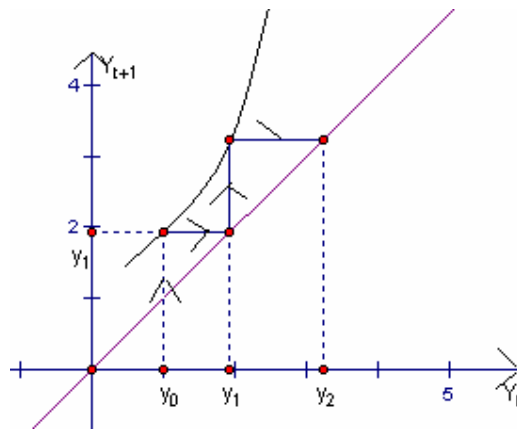


Gráfico 23

Um caso de trajectória monótona de amplitude constante é, por exemplo,

$$y_{t+1} = f_3(y_t) \quad (4.2.2.2)$$

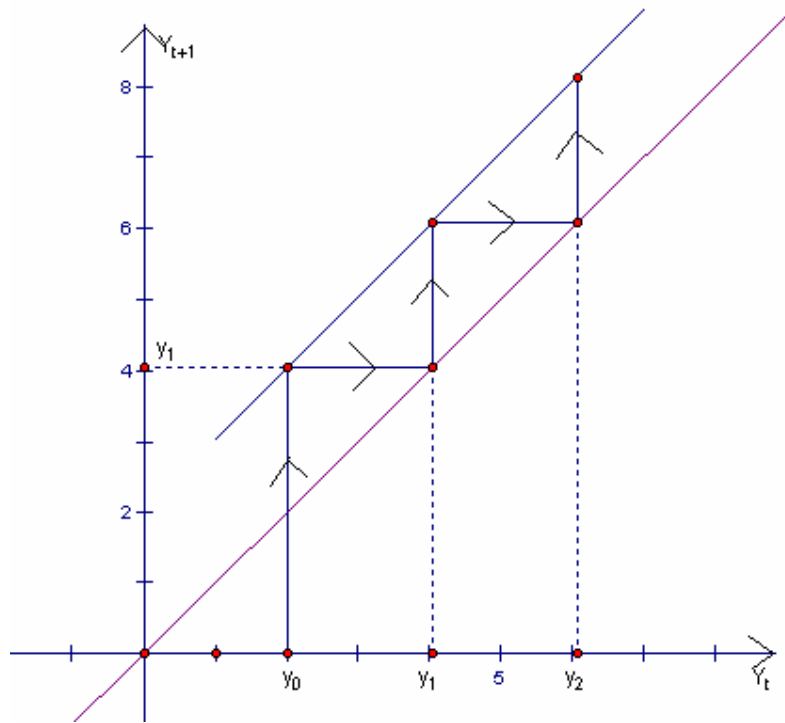


Gráfico 24

Nos três casos considerados a inclinação α está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e temos:

$|\operatorname{tg} \alpha| > 1 \Rightarrow$ Trajectória Divergente

$|\operatorname{tg} \alpha| < 1 \Rightarrow$ Trajectória Convergente

$|\operatorname{tg} \alpha| = 1 \Rightarrow$ Trajectória Constante

Vamos ver agora três casos em que a trajectória também é monótona mas a inclinação está entre $\frac{\pi}{2}$ e π .

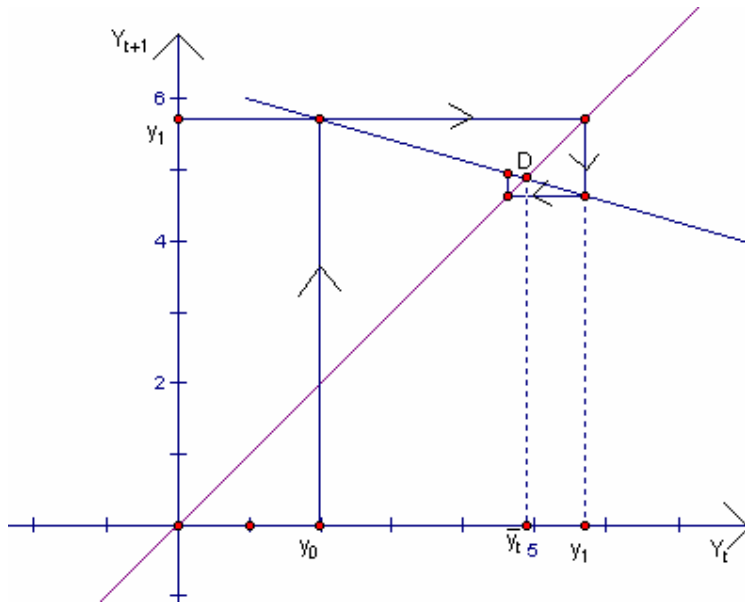


Gráfico 25

$$y_{t+1} = f_4(y_t) \quad (4.2.2.3)$$

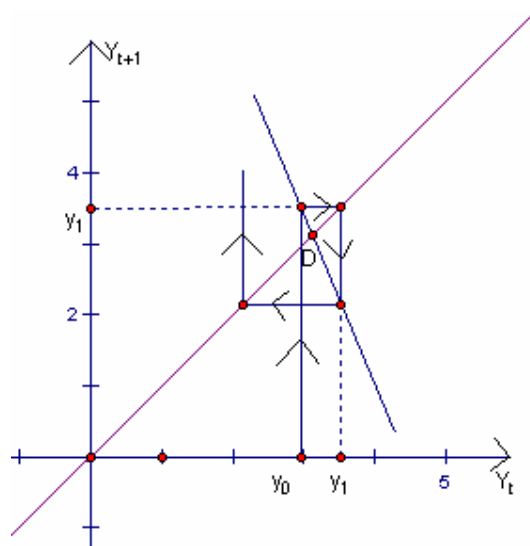


Gráfico 26

$$y_{t+1} = f_5(y_t) \quad (4.2.2.4)$$

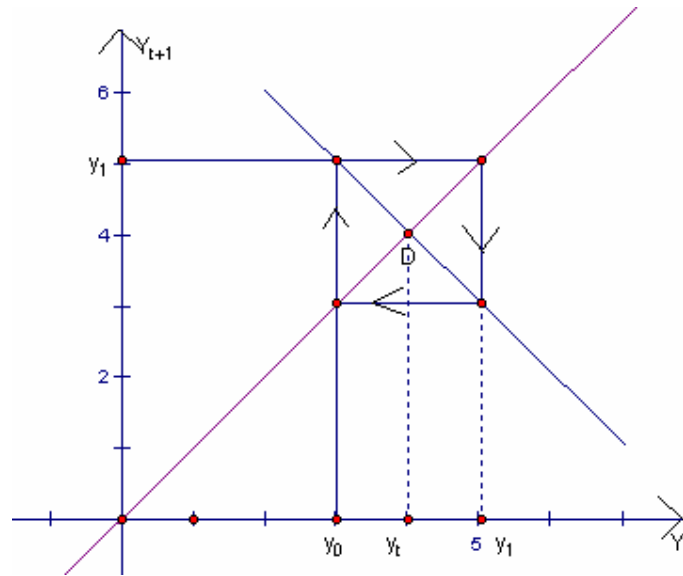


Gráfico 27

$$y_{t+1} = f(y_t) \quad (4.2.2.5)$$

Temos agora, tal como nos três casos vistos anteriormente:

$|tg\alpha| > 1 \Rightarrow$ Trajectória Divergente

$|tg\alpha| < 1 \Rightarrow$ Trajectória Convergente

$|tg\alpha| = 1 \Rightarrow$ Trajectória Constante

Nos cinco casos considerados, a trajectória é monótona e, portanto, o declive é uniforme, o que faz com que a natureza da trajectória não dependa do valor inicial considerado.

Não são exemplos obviamente do caso geral, em que as trajectórias dependem fortemente dos dados iniciais.

5) Aplicações das equações de diferenças

Tal como referimos no início deste trabalho, vários problemas que surgem na Matemática, Física, Engenharia e em muitas outras ciências podem ser formulados recorrendo a equações de diferenças.

Primeiramente iremos ver alguns casos mais simples da sua aplicação na Matemática, tais como a soma de k elementos de uma sucessão, transformação de dizimas infinitas periódicas em fracções e o caso dos polinómios de Chebyshev⁽¹⁶⁾.

5.1 Matemática

5.1.1 Soma de k elementos de uma sucessão

Consideremos a seguinte soma finita

$$S_k = \sum_{n=0}^k f(n) \quad (5.1.1.1)$$

onde $f(n)$ é uma função de n .

Vamos calcular a soma S_k pelo seguinte processo: calculamos em primeiro lugar

$$S_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} f(n) = \sum_{n=0}^k f(n) + f(k+1) \quad (5.1.1.2)$$

Subtraindo agora (5.1.1.2) a (5.1.1.1) obtemos

$$S_{k+1} - S_k = f(k+1) \quad (5.1.1.3)$$

que é uma equação de diferenças, linear, não homogénea de primeira ordem.

Seja

$$S_0 = f(0) \quad (5.1.1.4)$$

a condição inicial. Assim a solução da equação (5.1.1.3), com a condição inicial dada é solução também da soma (5.1.1.1). [6]

⁽¹⁶⁾ Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894). Foi um dos mais célebres matemáticos do século XIX. Trabalhou em diversas áreas, tais como: Teoria dos números, Teoria de probabilidades, Teoria da Aproximação de funções, etc. É autor de mais de oitenta publicações, embora nem todas tenham títulos matemáticos.

Exemplo 5.1.1.1:

$$S_k = \sum_{n=0}^k f(n) \quad (5.1.1.5)$$

onde $f(n) = n$, sendo $S_0 = 0$

Usando o procedimento descrito atrás, temos que

$$S_{k+1} - S_k = k + 1 \quad (5.1.1.6)$$

Uma solução da equação homogênea correspondente é uma constante c e uma solução particular é dada por

$$\frac{k \cdot (k + 1)}{2} \quad (5.1.1.7)$$

Assim

$$S_k = c + \frac{k \cdot (k + 1)}{2} \quad (5.1.1.8)$$

Se a condição inicial for $S_0 = 0$, obtemos $c = 0$ e vem

$$S_k = \frac{k \cdot (k + 1)}{2} \quad (5.1.1.9)$$

Exemplo 5.1.1.2:

$$S_k = \sum_{n=0}^k f(n) \quad (5.1.1.10)$$

onde

$$f(n) = a^n, a \neq 1 \quad (5.1.1.11)$$

e

$$S_0 = 1$$

A equação de diferenças para resolver é

$$S_{k+1} - S_k = a^{k+1} \quad (5.1.1.12)$$

A solução geral é

$$S_k = c + \frac{a^{k+1}}{a - 1} \quad (5.1.1.13)$$

onde c é uma constante arbitrária determinada por $S_0 = 1$. Donde vem que

$$c = \frac{1}{1-a} \quad (5.1.1.14)$$

Assim a soma da equação é dada pela expressão

$$S_k = \sum_{n=0}^k a^n = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \quad (5.1.1.15)$$

5.1.2 Conversão de dízimas infinitas periódicas em fracções

Seja

$$x = A.ab\bar{b}(b) \quad (5.1.2.1)$$

onde no sistema decimal temos

$$\begin{aligned} A &= A_1 A_2 \dots A_l \\ a &= a_1 a_2 \dots a_n \\ b &= b_1 b_2 \dots b_m \end{aligned} \quad (5.1.2.2)$$

e (l, n, m) são inteiros não negativos. Assim temos que

$$\begin{aligned} \{A_r\}, r &= 1, 2, \dots, l \\ \{a_s\}, s &= 1, 2, \dots, n \\ \{b_t\}, t &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5.1.2.3)$$

representam dez dígitos usados no sistema decimal.

Por exemplo o número

$$y = 346,502212212(212)$$

nesta forma de escrever tem as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned} A &= 346 & l &= 3 & A_1 &= 3 & A_2 &= 4 & A_3 &= 6 \\ a &= 502 & n &= 3 & a_1 &= 5 & a_2 &= 0 & a_3 &= 2 \\ b &= 12 & m &= 2 & b_1 &= 1 & b_2 &= 2 \end{aligned}$$

Com esta notação o número x pode ser escrito como

$$x = A + a \times 10^{-n} + \underbrace{0.00\dots 0}_{n} b\bar{b}(b) \quad (5.1.2.4)$$

ou

$$x = A + a \times 10^{-n} + 10^{-(n+m)} b.bb(b) \quad (5.1.2.5)$$

O terceiro termo pode assim ser escrito da seguinte forma

$$b.bb(b) = b[1 + 10^{-m} + 10^{-2m} + \dots] = \frac{b}{1 - 10^{-m}} = \frac{10^m b}{10^m - 1} \quad (5.1.2.6)$$

Pondo agora tudo em fracção fica

$$x = A + \frac{a}{10^n} + \frac{10^{-n} b}{10^m - 1} \quad (5.1.2.7)$$

pois

$$\frac{1}{10^{n+m}} \cdot \frac{10^m b}{10^m - 1} = \frac{10^{-n} b}{10^m - 1} \quad (5.1.2.8)$$

Vejamos agora um exemplo simples desta aplicação. Seja

$$x_1 = 14.33(3)$$

Assim temos que

$$A = 14, a = 0, b = 3, n = 0, m = 1$$

Donde vem que

$$x_1 = 14 + 0 + \frac{3}{10 - 1} = 14 + \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

5.1.3 Polinómios de Chebyshev

Um polinómio de grau N na variável x é definido como

$$P_N(x) = a_N x^N + a_{n-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_N \neq 0 \quad (5.1.3.1)$$

onde $a_i (i = 1, \dots, N)$ são constantes e N é um inteiro não nulo.

Algumas classes especiais de polinómios têm grande interesse para a investigação de certos problemas que aparecem quer na matemática.

Algumas funções de x definidas no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ podem ser escritas como soma dos membros de algumas dessas classes de polinómios. Um exemplo destas funções é $P_N = x^N$.

Assim algumas funções $f(x)$ têm a seguinte representação:

$$f(x) = b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + \dots + b_N P_N(x) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \quad (5.1.3.2)$$

Esta é conhecida como a Série de Taylor (apesar do nome, esta série nada tem a ver com o desenvolvimento em Série de Taylor do Cálculo Infinitesimal).

Um exemplo importante, desta classe de polinômios, é o exemplo dos polinômios de Chebyshev, que se representam pelo símbolo $T_k(x)$ e são definidos pela relação de recorrência

$$T_{k+2} - xT_{k+1} + \frac{1}{4}T_k = 0 \quad (5.1.3.3)$$

onde $|x| < 1$, $T_0 = 2$ e $T_1 = x$.

Usando estes valores e com recurso a alguns cálculos simples, obtemos alguns polinômios que são:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2} \\ T_3(x) &= x^3 - \frac{3x}{4} \\ T_4(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (5.1.3.4)$$

Desta forma, podemos obter $T_k(x)$ para qualquer inteiro k . No entanto este processo é muito fastidioso (a não ser com um algoritmo no computador). Seria muito mais rápido se tivéssemos $T_k(x)$ expresso em termos de x e de k , se não usássemos o algoritmo no computador. Mas, como os polinômios de Chebyshev são definidos por uma relação de recorrência, podemos usar equações de diferenças para solucionar este problema. Usemos então os processos já descritos para a resolver.

A equação característica correspondente é

$$r^2 - r \cdot x + \frac{1}{4} = 0 \quad (5.1.3.5)$$

ou

$$r = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 1}}{2} \quad (5.1.3.6)$$

Logo o polinômio de Chebyshev de ordem k , pode ser escrito da forma

$$T_k(x) = \left(\frac{1}{2^k}\right) [A(r_1)^k + B(r_2)^k] \quad (5.1.3.7)$$

onde A e B são constantes que podem ser determinadas à custa de $T_0 = 2$ e $T_1 = x$.

Assim

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ r_1 A + r_2 B = 2x \end{cases} \Leftrightarrow A = 1 = B \quad (5.1.3.8)$$

Substituindo agora os valores de A e B obtemos uma fórmula explícita de $T_k(x)$:

$$T_k(x) = \left(\frac{1}{2^k}\right) \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^k + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^k \right] \quad (5.1.3.9)$$

5.1.4 Triângulos de Diferenças Perfeitos

A história começa com o problema que se deve a G. Sicherman publicado na rubrica de jogos matemáticos dirigida por Martina Gardner no jornal Scientific American.

O problema consiste no seguinte:

				8	3	10	9
		2	6	5	5	7	1
1	3		4	1	2	6	
	2		3			4	

Tabela 1

Os triângulos da figura anterior são compostos de números consecutivos, em que o mais pequeno é um, os restantes números, a partir da segunda linha, são obtidos com o valor absoluto da diferença dos números acima dele.

A nossa questão é saber se podemos construir um triângulo de tamanho cinco (quatro linhas), de maneira semelhante. O que equivale a dizer que pretendemos encontrar um triângulo de diferenças perfeito, contendo todos os números de um a quinze. Iremos provar que é possível construir um tal triângulo de diferenças perfeito e que não existe nenhum triângulo de diferenças perfeito maior do que este.

Estes factos foram demonstrados pelos matemáticos tailandeses Chang, Hu, Lih e Shieh, mas esta demonstração baseia-se nos trabalhos dos matemáticos australianos Rogers, Roberts e Hamilton.

O que é um triângulo de diferenças?

Os triângulos de diferenças dividem-se em perfeitos e imperfeitos. Um exemplo de um triângulo imperfeito é o seguinte.

10	1	4	3
9	3	1	
6	2		
	4		

Tabela 2

É imperfeito, pois não contém todos os algarismos de um a dez, e alguns dos algarismos repetem-se.

Definição 5.1.4.1: O tamanho n , de um triângulo, é o número de inteiros da primeira linha ($n \geq 2$). Se o triângulo contém todos os valores

$$\left\{1, 2, 3, \dots, \frac{n \cdot (n+1)}{2}\right\}$$

dizemos que é um triângulo perfeito.

Um estudo linha por linha

Seja T um triângulo perfeito de tamanho n , então T contém todos os inteiros desde um até $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, inclusive.

Na linha i , T_i será o maior dos números e t_i , o menor dos números. Uma vez que na última linha só existe um elemento tenho que $T_n = t_n$

Vamos mostrar que os T_i decrescem e veremos de perto como é que isso se processa.

Linha 1	*	*	*	*	*
⋮	*	*	*	*	*
Linha i	*	*	* a_i	*	* b_i
⋮	*	*	*	*	*
Linha n	*	*	*	*	*

Tabela 3

Por construção T_{i+1} é a diferença de dois termos consecutivos a_i e b_i da linha precedente i :

$$T_{i+1} = |a_i - b_i| = a_i - b_i \quad (5.1.4.1)$$

se escolhermos $a_i > b_i$. Daqui concluímos que

$$a_i = T_{i+1} + b_i \quad (5.1.4.2)$$

É de salientar que T_i é maior ou igual que qualquer um dos elementos da linha i , em particular de a_i , assim temos que

$$\begin{aligned} T_i &\geq a_i \\ &= T_{i+1} + b_i \\ &\geq T_{i+1} + t_i \end{aligned} \quad (5.1.4.3)$$

uma vez que t_i é o menor elemento da linha i .

Assim, a sucessão T_i decresce, logo

$$T_i > T_{i+1} \quad (5.1.4.4)$$

qualquer que seja o valor de i . Desta forma T_1 é o maior número do triângulo, que é o mesmo que dizer, $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Por outro lado, se adicionarmos todas as desigualdades seguintes,

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &\geq t_1 \\ T_2 - T_3 &\geq t_2 \\ &\vdots \\ T_{n-2} - T_{n-1} &\geq t_{n-2} \\ T_{n-1} &\geq T_n + t_{n-1} = t_n + t_{n-1} \end{aligned} \quad (5.1.4.5)$$

obtemos,

$$T_1 \geq t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n \quad (5.1.4.6)$$

Como T é um triângulo perfeito, os t_i são números positivos e distintos, portanto a soma não pode ultrapassar

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = T_1 \quad (5.1.4.7)$$

Esta soma também não pode ser menor que o números t_i , pois estes são os menores números possíveis. Assim, os menores elementos das linhas de um triângulo de diferenças perfeito devem ser os números $\{1, 2, \dots, n\}$, por uma ordem qualquer.

Desta forma a desigualdade

$$T_1 \geq t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n \quad (5.1.4.8)$$

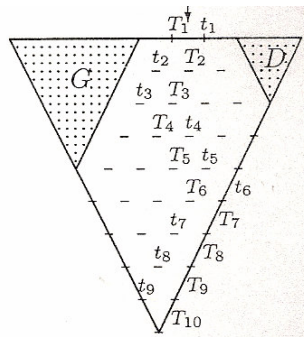
é na realidade uma igualdade:

$$T_1 = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n \quad (5.1.4.9)$$

Esta igualdade implica que $T_i = a_i$ e $t_i = b_i$. Como a_i e b_i são adjacentes, deduzimos que o maior número da linha $i+1$ é a diferença de dois números adjacentes, máximo e mínimo, T_i e t_i da linha precedente.

Decomposição de um triângulo

Nesta secção provaremos que não existe um triângulo perfeito de tamanho $n > 8$. Para o conseguirmos, far-se-á a decomposição do triângulo em outros dois triângulos e um pentágono, o que nos permite, majorar e minorar certos números de T e chegar por fim à conclusão de que $n \leq 8$.



Podemos imaginar a figura anterior como uma estrutura de barras sobre a qual vai cair uma bola. Parte de T_1 e a bola tem de passar entre T_i e t_i , qualquer que seja a linha i , uma vez que T_i e t_i , são adjacentes. Assim, a bola passa ao longo de todas as barras T_i e t_i , que estão no pentágono central, como se mostra na figura.

O que resta de T é composto de dois triângulos suplementares, o triângulo G à esquerda e o triângulo D à direita. É de salientar que se T_i ou t_i estão num dos vértices do triângulo T , então um dos triângulos G ou D são vazios. Uma vez que T_i e t_i estão dentro do pentágono, então os elementos de G e D , são maiores que n e menores que

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (5.1.4.10)$$

pois nós vimos que

$$T_1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (5.1.4.11)$$

e que os valores de $\{1, 2, \dots, n\}$, são assumidos por t_i .

Iremos de seguida estabelecer alguma notação, que nos ajudará na resolução do problema. Da mesma forma que para o triângulo T , o mínimo da linha i para G e D será denotado por, g_i e d_i respectivamente e o máximo por G_i e D_i .

Usando conclusões anteriores, podemos dizer que

$$G_i, D_i < \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (5.1.4.12)$$

e que

$$g_i, d_i > n \quad (5.1.4.13)$$

Devemos agora determinar o tamanho dos triângulos G e D . Assim, constatamos que a primeira linha de G e D tem exactamente $n-2$ termos. Eles contém todos os elementos da primeira linha, com excepção de T_1 e t_1 . Se, por exemplo, G tem tamanho m , D terá um tamanho igual a $n-m-2$.

Sabemos que G_{i+1} (ou D_{i+1}) é a diferença de dois elementos consecutivos da linha que a precede. Usando argumentos semelhantes aos já usados anteriormente, obtemos duas novas desigualdades,

$$G_1 \geq g_1 + g_2 + \dots + g_{m-1} + g_m \quad (5.1.4.14)$$

$$D_1 \geq d_1 + d_2 + \dots + d_{n-m-2} \quad (5.1.4.15)$$

Uma vez que G_1 e D_1 são dois números distintos e obrigatoriamente inferiores a

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad (5.1.4.16)$$

a sua soma não poderá ser superior a

$$\left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} - 1 \right] + \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} - 2 \right] = n \cdot (n+1) - 3 \quad (5.1.4.17)$$

Para todos os valores de i , sabemos que g_i e d_i são dois números maiores que n . Assim a soma mínima dos $n+2$ elementos

$$g_1 + g_2 + \dots + g_{m-1} + g_m + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-m-2} \quad (5.1.4.18)$$

é igual ou superior a

$$\begin{aligned} (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (n+(n-2)) &= \frac{(n+1) + (n+(n-2))}{2} \times (n-2) = \\ &= \frac{(3n-1)}{2} \times (n-2) \end{aligned} \quad (5.1.4.19)$$

Em resumo, verificamos as três desigualdades seguintes:

$$\begin{aligned} n \cdot (n+1) - 3 &\geq G_1 + D_1 \\ &\geq g_1 + g_2 + \dots + g_{m-1} + g_m + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-m-2} \quad (5.1.4.20) \\ &\geq \frac{(3n-1) \cdot (n-2)}{2} \end{aligned}$$

O que se reduz a

$$\begin{aligned} 0 &\geq -n \cdot (n+1) + 3 + \frac{(3n-1) \cdot (n-2)}{2} \quad (5.1.4.21) \\ &\geq (n-1)(n-8) \end{aligned}$$

sendo esta condição apenas possível no caso em que $n \leq 8$. Donde vem o seguinte teorema:

Teorema 5.1.4.1(D. Rogers, G. Hamilton, I. Roberts): Um triângulo de diferenças perfeito tem no máximo tamanho 8.

Um triângulo de tamanho 6

Um triângulo perfeito de tamanho 6 contém todos os números de uma a

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = 21 \quad (5.1.4.22)$$

então ele deve conter onze números ímpares. Iremos provar que isso não é possível.

Suponhamos que T é um triângulo de diferenças perfeito de tamanho 6. Dois números pares ou dois números ímpares dá uma diferença par e um número par e um número ímpar dá uma diferença ímpar. É claro que a posição e o número de elementos

ímpares na primeira linha determina o número de elementos ímpares do resto do triângulo.

Existem $2^6 = 64$ maneiras de posicionar os números na primeira linha do triângulo T , segundo a sua paridade. Com efeito há apenas duas escolhas possíveis, par ou ímpar. Podemos economizar algum trabalho ignorando algumas combinações simétricas.

A primeira linha permite constatar que uma simetria da primeira linha induz a uma simetria de todo o triângulo.

6	1	10	8	8	10	1	6
	5	9	2		2	9	5
		4	7		7	4	
			3		3		

Tabela 4

Surge-nos agora um problema, poderíamos ser levados a acreditar que tínhamos reduzido as nossas combinações para 32, mas na realidade há 36 combinações possíveis que iremos considerar. Experimentemos uma primeira combinação de paridade para a primeira linha, o que verificamos é que há apenas oito números ímpares e não onze como seria de esperar.

Par	Par	Ímpar	Ímpar	Par	Par
	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par
	Ímpar	Ímpar	Ímpar	Ímpar	Ímpar
		Par	Par	Par	
			Par	Par	
				Par	

Tabela 5

Se fizéssemos, o mesmo para as 35 combinações restantes, demonstrávamos que:

Teorema 5.1.4.2: Não existe um triângulo de diferenças perfeito de tamanho 6.

Poderá existir um triângulo de diferenças perfeito de tamanho 7 ou 8

Com efeito não existe um triângulo de diferenças perfeito de tamanho sete ou oito. Há várias formas de demonstrar que não existe, por exemplo recorrendo à decomposição do triângulo, mas este processo é longo e complicado, poderíamos também tentar a demonstração de Chang e Al que dizem que a primeira linha não pode conter números muito grandes.

No entanto, iremos aqui usar o mesmo tipo de argumentação do caso anterior e calcular todas as combinações possíveis de pares e ímpares na primeira linha de um triângulo de dimensão sete ou oito, bem como o número de números ímpares do triângulo.

Par	Ímpar	Par	Ímpar	Par	Ímpar	Ímpar
	Ímpar	Ímpar	Ímpar	Ímpar	Ímpar	Par
	Par	Par	Par	Par	Ímpar	
		Par	Par	Par	Ímpar	
			Par	Ímpar		
			Par	Ímpar		
				Ímpar		

Tabela 6

Com a ajuda de um computador prova-se que não existe nenhuma escolha de números, de acordo com a sua paridade, que resulte num triângulo de diferenças perfeito.

Como não existem triângulos de diferenças perfeitos de tamanho seis, sete e oito, somos levados ao seguinte resultado final:

Teorema 5.1.4.3: Um triângulo de diferenças perfeito, tem no máximo tamanho 5.

Apresentamos de seguida um quadro que contém todos os triângulos de diferenças perfeitos possíveis, a menos de simetria.

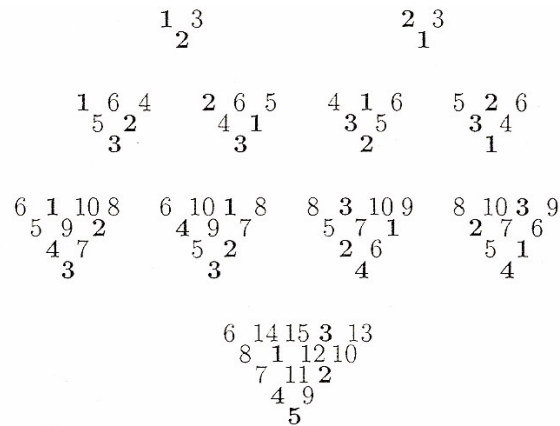


Tabela 7

Sistemas de triângulos

Mas a historia dos triângulos de diferenças perfeitos não fica por aqui. Com efeito, em vez de considerarmos um só triângulo, consideraremos um conjunto m de triângulos de tamanho n . Isto é o mesmo que dizer que o sistema de triângulos deve conter todos os números de um a $m \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]$ inclusive. Também pode acontecer que em vez de começar em um, este sistema de triângulos suporta a hipótese de começar com qualquer inteiro c . Assim o nosso sistema de triângulos deve conter todos os números de c a $m \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right] + c - 1$ inclusive.

Esta figura (tabela 8) representa um sistema de quatro triângulos de tamanho 4, que começa em dois. Assim, todos os números entre dois e quarenta e um estão representados.

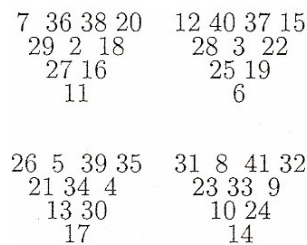


Tabela 8

Assim, os casos dos triângulos de diferenças perfeitos, não são mais do que casos particulares dos sistemas de triângulos, que se reduzem a um único triângulo, que começa em um.

Douglas Rogers demonstrou que o tamanho n dos triângulos dentro destes sistemas de triângulos, não pode ultrapassar nove. Mas, por outro lado, não se conhecem sistemas de triângulos para $6 \leq n \leq 9$, embora se conjecture que não existe nenhum sistema para $n = 8$ e $n = 9$.

Em jeito de conclusão, podemos também pensar o que aconteceria se o primeiro número fosse negativo. Até agora, o único resultado definitivo conhecido, neste caso, é que $n \leq 16$.

Rectângulos de diferenças

7		11		8		3
	4		3		5	4
		1		2		1 0

Tabela 9

Um rectângulo de diferenças obtém-se da mesma forma que um triângulo de diferenças. Resta apenas esclarecer como se obtém o último termo de cada linha: a partir da segunda linha, ele resulta da diferença entre o primeiro termo e o último termo da linha que o precede.

Diremos que a largura do rectângulo é n se a sua primeira linha tem n números inteiros. A sua altura h designa o número de linhas que ele contém. Assim, o seu número total de elemento será $n \cdot h$. Se queremos obter rectângulos perfeitos, o rectângulo deve conter todos os números de um até $n \cdot h$ inclusive.

O rectângulo que apresentamos não é perfeito. Podemos construir rectângulos perfeitos de altura dois e de qualquer largura $n > 2$, mas conjectura-se que não há rectângulos de altura superior a dois.[5]

5.2 Economia

As equações de diferenças têm algumas aplicações importantes na construção e análise matemática de certos modelos económicos. Entre eles estão os casos dos juros simples e dos juros compostos que já vimos detalhadamente no capítulo dois. Aplica-se também a rendas e amortizações, iremos ver um exemplo de cada um destes casos.

5.2.1 Rendas

Renda é por definição um conjunto de capitais que vencem em momentos equidistantes. O tempo que decorre entre dois vencimentos designa-se por período de renda.

C_1, C_2, \dots, C_n são os termos da renda, que se forem iguais dizem-se constantes e se forem diferentes dizem-se variáveis.

No caso que vamos analisar, a nossa renda tem termos constantes, é inteira, porque o período da taxa de juro é igual ao período da renda e é uma renda normal pois vence-se no final de cada período de tempo.

Seja $C_1 = C_2 = \dots = C_n = R$. Sendo i a taxa de juro que os termos da renda vencem, o valor acumulado de renda no instante $t+1$ é

$$A_{t+1} = A_t + i \cdot A_t + R \quad (5.2.1.1)$$

Estamos neste caso perante uma modalidade de juros compostos.

Assim

$$A_{t+1} - (1+i)A_t = R \quad (5.2.1.2)$$

Resolvendo agora esta equação de diferenças, temos que uma solução da equação homogénea que lhe está associada é

$$A_t = A_0 \prod_{k=1}^{t-1} (1+i) = A_0 (1+i)^t \quad (5.2.1.3)$$

onde A_0 é a condição inicial dada. Temos agora que encontrar uma solução particular da equação não homogénea, de forma a obter uma solução geral da equação de diferenças dada. Assim,

$$\begin{aligned}
A_t &= A_0(1+i)^t + (1+i)^t \sum_{k=1}^{t-1} \left(\frac{R}{\prod_{r=1}^k (1+i)} \right) = A_0(1+i)^t + (1+i)^t \left(\frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^{t-1}} \right) = \\
&= A_0(1+i)^t + (1+i)^t R \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{t-1}} \right) = A_0(1+i)^t + (1+i)^t R \left(\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^{t-1}}{1 - \frac{1}{1+i}} \right) = \\
&= (1+i)^t \left(A_0 + \frac{R}{i} \right) - \frac{R}{i}
\end{aligned}$$

Como $A_0 = 0$, pois o primeiro termo vence no fim e não no início do período, temos finalmente

$$A_t = R \underbrace{\frac{(1+i)^t - 1}{i}}_{s_t} = R \cdot s_t \quad (5.2.1.4)$$

Se $R = 1$, $A_t = s_t$. Portanto s_t é o valor acumulado, referido ao fim do último período, de uma renda inteira com t termos unitários e normais, sendo o seu período igual ao da taxa i . [3]

5.2.2 Amortizações

Uma amortização é uma forma de pagamento de um débito, em que, através de um pagamento constante e periódico, se reduz a dívida e se pagam os juros simultaneamente.

Seja D a dívida a pagar. Suponhamos que, após ter efectuado t pagamentos, todos iguais a R , o saldo em dívida é D_t . Então no instante $t+1$, o débito será constituído por $D_t + i \cdot D_t$, onde i é a taxa de juro. Mas, se for efectuado um pagamento nesse momento de montante R , o saldo em dívida ao fim de $t+1$ será

$$D_{t+1} = D_t + i \cdot D_t - R \quad (5.2.2.1)$$

Podemos reescrever a equação de diferenças anterior de uma outra forma:

$$D_{t+1} - (1+i) \cdot D_t = -R \quad (5.2.2.2)$$

e, de forma análoga à que procedemos no caso das rendas, obteremos a seguinte solução

$$D_t = (1+i)^t \left(D - \frac{R}{i} \right) + \frac{R}{i} \quad (5.2.2.3)$$

Ora, como a dívida inicial é D , temos que $D_0 = D$. Assim

$$D_t = (1+i)^t D + \frac{1-(1+i)^t}{i} R \quad (5.2.2.4)$$

ou seja

$$D_t = (1+i)^t D - s_t R \quad (5.2.2.5)$$

onde

$$s_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (5.2.2.6)$$

Daqui podemos concluir que o saldo em dívida no instante t é dado pela diferença entre o montante acumulado pela dívida inicial D , à taxa de juro i , na modalidade de juros compostos, $(1+i)^t D$, e o acumulado por uma renda R , inteira, com t termos normais e constantes, sendo o seu período igual ao da taxa i , $s_t R$. [3]

5.3 Estratégias de Guerra

Nesta secção iremos mostrar como os modelos matemáticos podem ser usados em estudos de guerra. Apresentaremos de seguida um modelo elementar de corrida ao armamento.

5.3.1 Teoria de Corrida ao Armamento de Richardson's

Sejam X e Y dois países em guerra e sejam x_k e y_k , os seus orçamentos militares, respectivamente, para o ano k .

Richardson's propôs que as mudanças anuais no orçamento militar sejam descritas pelas seguintes equações lineares:

$$\begin{aligned}\Delta x_k &= K \cdot y_k - \alpha \cdot x_k + g \\ \Delta y_k &= L \cdot x_k - \beta \cdot y_k + h\end{aligned}\quad (5.3.1.1)$$

onde, de uma maneira geral, todos os coeficientes $(K, L, \alpha, \beta, g, h)$ são maiores ou iguais a zero.

O K e o L são coeficientes de defesa e dão a forma como um país responde a um orçamento militar de outro país.

O α e o β são coeficientes de cansaço, que medem a inércia, a possível economia negativa, que é consequência do aumento do orçamento militar.

O g e o h são valores independentes dos orçamentos militares dos países em questão e podem reflectir uma variedade de factores não militares, tais como, politica interna, problemas económicos e descontentamento dos dois países por questões políticas anteriores.

Dentro da estrutura deste modelo, os coeficientes de cansaço satisfazem:

$$0 < \alpha < 1 \text{ e } 0 < \beta < 1$$

Podemos então escrever as equações anteriores na forma de matriz,

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + b \quad (5.3.1.2)$$

onde

$$X_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & K \\ L & 1-\beta \end{pmatrix} \text{ e } a_{i,j} \geq 0 \text{ para } i, j = 1, 2.$$

Assim temos que as equações (5.3.1.1) são equivalentes à matriz

$$X_{k+1} = AX_k + b \quad (5.3.1.3)$$

e determinemos agora os seus pontos fixos ou valores de equilíbrio.

Seja $u = x_k$ e $v = y_k$, para qualquer valor de k , donde vem que:

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_{k+1} = K \cdot y_k + x_k - \alpha \cdot x_k + g \\ y_{k+1} = L \cdot x_k + y_k - \beta \cdot y_k + h \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = K \cdot v + u - \alpha \cdot u + g \\ v = L \cdot u + v - \beta \cdot v + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{g + K \cdot v}{\alpha} \\ 0 = L \left(\frac{g + K \cdot v}{\alpha} \right) + v - \beta \cdot v + h \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{g + K \cdot v}{\alpha} \\ v(L \cdot K - \beta \cdot \alpha) = -L \cdot g - h \cdot \alpha \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{g + K \cdot v}{\alpha} \\ v = \frac{L \cdot g + h \cdot \alpha}{\beta \cdot \alpha - L \cdot K} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{\beta \cdot g + K \cdot h}{\beta \cdot \alpha - L \cdot K} \\ v = \frac{L \cdot g + h \cdot \alpha}{\beta \cdot \alpha - L \cdot K} \end{cases}\end{aligned}$$

Uma vez que as constantes são não negativas, os pontos fixos correspondem a orçamentos militares não negativos se for satisfeita a condição $\beta \cdot \alpha > L \cdot K$.

A estabilidade do ponto fixo pode ser determinado usando o seguinte resultado:

Teorema 5.3.1.1: Se as matrizes A e b , são tais que $A \geq 0$ e $b > 0$, então a matriz A , tem todos os seus valores próprios estritamente dentro do círculo unitário do plano complexo se e só se existe um $u \geq 0$, tal que $u = Au + b$.

A ligação deste resultado com o nosso problema é que os valores próprios da matriz A , são iguais às raízes do polinómio característico das equações (5.3.1.1)

Deste teorema, podemos também concluir que os valores absolutos das raízes do polinómio característico estão estritamente limitados por um, pelo que se conclui que o ponto fixo é estável.

Uma vez que $A \geq 0$, a condição de estabilidade é equivalente à desigualdade $\beta \cdot \alpha > L \cdot K$. A desigualdade pode ser interpretada da seguinte forma: o termo $L \cdot K$ é o produto dos dois coeficientes de defesa e por conseguinte mede a propensão para continuar a corrida ao armamento; o termo $\beta \cdot \alpha$ é o produto dos dois coeficientes de cansaço e por conseguinte mede a capacidade para limitar a corrida ao armamento. A estabilidade acontece, quando o termo de cansaço total é maior do que o termo de defesa total, o que significa que se os dois países desejam evitar uma corrida aos armamentos, então devem seguir políticas orçamentais militares tais que, para valores não negativos de g e h , o estado de equilíbrio seja não negativo.[6]

5.3.2 Modelo de Combate de Lanchester

Sejam X e Y duas forças militares em combate uma contra a outra. As respectivas potências dessas forças no dia k é dada por x_k, y_k , onde, por proposta de Lanchester, as potências são identificadas pelo número de combatentes de cada uma delas. Para determinar como mudam com k , o número de combatentes x_k e y_k , podemos admitir que

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = -(PO + PC) + RR \quad (5.3.2.1)$$

onde,

$PO \rightarrow$ perdas operacionais;

$PC \rightarrow$ perdas em combate;

$RR \rightarrow$ razão de reforços;

Temos também uma equação similar para y_k .

Os termos PO referem-se a perdas por doenças, deserções, acidentes e qualquer outra desgraça, mesmo que não tenha nada a ver com o combate.

Os termos PC ocorrem porque há combates com as forças Y .

Finalmente, os termos RR dão o número de novos combatentes que vêm para ajudar as forças já existentes (este termo pode ser negativo, o que na prática corresponde à retirada da potência).

O que pretendemos é encontrar uma expressão matemática para estes três termos. Podemos considerar combates convencionais e combates de guerrilha. Consoante as forças que estão em confronto, assim teremos um destes três modelos.

$$CCM : \begin{cases} \Delta x_k = -a \cdot x_k - b \cdot y_k + P_k \\ \Delta y_k = -c \cdot x_k - d \cdot y_k + Q_k \end{cases} \quad (5.3.2.2)$$

$$GGM : \begin{cases} \Delta x_k = -a \cdot x_k - g \cdot x_k y_k + P_k \\ \Delta y_k = -d \cdot y_k - h \cdot x_k y_k + Q_k \end{cases} \quad (5.3.2.3)$$

$$GCM : \begin{cases} \Delta x_k = -a \cdot x_k - g \cdot x_k y_k + P_k \\ \Delta y_k = -c \cdot x_k - d \cdot y_k + Q_k \end{cases} \quad (5.3.2.4)$$

Estes três modelos referem-se às seguintes situações:

- 1) CCM – conflito entre exércitos convencionais;
- 2) GGM – conflito entre exércitos de guerrilha;
- 3) GCM – conflito entre um exército de guerrilha e um exército convencional.

Assim nas expressões acima;

i) a, b, c, d, g, h são constantes maiores ou iguais a zero e representam a razão das perdas;

ii) São reforços e representam o número de novos combatentes em cada dia: P_k, Q_k ;

iii) Os termos x_0 e y_0 representam o número de combatentes com que se iniciou o combate.

Analisando com mais pormenor as equações anteriores constatamos que:

a) Dos termos que representam a razão dos reforços RR , P_k e Q_k , podemos extrair as seguintes conclusões: Se estes termos são positivos, quer dizer que houve um reforço no número de combatentes, se forem negativos indicam que houve uma retirada e se for zero indicam que a potência está isolada:

b) As perdas operacionais são dadas pela proporção entre o número de combatentes de um dos exércitos e o número total de combatentes; e são os termos $-a \cdot x_k$ e $-d \cdot y_k$;

c) As expressões $-b \cdot y_k$, $-c \cdot x_k$, $-g \cdot x_k y_k$ e $-h \cdot x_k y_k$, são termos de interação entre as forças.

Podemos usar estas equações para tirar conclusões acerca da potência que vencerá a guerra. Vamos ver por exemplo o caso do combate entre dois exércitos de guerrilha.[6]

5.3.3 Combate de guerrilha

Consideremos duas forças de guerrilha em combate. Admitamos que não têm perdas operacionais e que estão isoladas. A última hipótese significa que nenhum dos grupos recebe reforços. As equações GGM, nestas circunstâncias são dadas por:

$$\Delta x_k = -g \cdot x_k y_k \quad (5.3.3.1)$$

e

$$\Delta y_k = -h \cdot x_k y_k \quad (5.3.3.2)$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, temos que

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta y_k} = \frac{g}{h} \quad (5.3.3.3)$$

e

$$g \cdot y_{k+1} - h \cdot x_{k+1} = g \cdot y_k - h \cdot x_k \quad (5.3.3.4)$$

Assim,

$$g \cdot y_k - h \cdot x_k = L = \text{constante}, \quad (5.3.3.5)$$

onde em funções das condições iniciais L é,

$$L = g \cdot y_0 - h \cdot x_0 \quad (5.3.3.6)$$

Deste modo, podemos concluir imediatamente que se:

$L > 0$, Y ganha;

$L = 0$, ambos os exércitos são eliminados, isto é, empatam;

$L < 0$, X ganha;

5.4 Física

Em geral os sistemas físicos estão associados a um certo período de tempo e explicam como muda o sistema nesse espaço de tempo. Alguns sistemas complexos têm mais do que uma característica de período de tempo. Por exemplo, um copo de água quente tem associado um período de tempo de minutos, se o que estamos interessados em saber é qual é a rapidez do arrefecimento da água. Também, a dissolução de uma colher de chá de açúcar pode ser de segundos ou de minutos, dependendo da temperatura do chá.

O processo assume que o sistema dado tem um único período de tempo relevante, T_s . E também assume que as medições das propriedades dos sistemas são efectuadas em momentos discretos de tempo, dados por $t_k = (\Delta t)k$, onde k é inteiro e Δt é o período de tempo entre medições, e é sempre constante. Finalmente assumimos também que τ , o tempo que demora a completar uma medição é muito pequeno quando comparado com o intervalo de tempo entre medições, isto é, $\tau \ll \Delta t$. Teremos também como hipótese que $\Delta t \ll T_s$. Esta última condição mostra que o tempo entre medições deve ser bastante pequeno, de modo a que as mudanças no sistema possam ser realmente seguidas.

Na prática, podemos considerar τ igual a zero e deste modo esta hipótese não entra na formulação do modelo. O sistema depende, em geral, somente de pequenas razões de tempo constante, $\frac{\Delta t}{T_s}$. O que é realmente interessante é saber como algumas quantidades ou propriedades do sistema, sejam elas y_k , mudam durante os intervalos entre medições. Esta mudança é designada por

$$(y_{k+1} - y_k)\Delta t \quad (5.4.1)$$

O processo de modelagem é então usado para formular uma lei de como ocorrem estas mudanças.

Matematicamente, temos

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta t} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = f(y_k, k, T_s, \beta) \quad (5.4.2)$$

em que a função f depende de y_k , de k , do tempo constante e possivelmente de outros parâmetros denotados pelo símbolo β . Quando se encontra a função f , o modelo matemático está completo. O próximo passo é resolver a equação e descrever as consequências dos comportamentos dos possíveis estados do sistema físico.[6]

5.4.1 A Lei de Arrefecimento

Consideremos um objecto compacto, por exemplo, um copo com água quente que está num quarto. O que nos interessa é determinar como a temperatura muda em função do tempo.

Seja

T_0 = temperatura inicial do copo;

T_R = temperatura do quarto;

Δt = tempo entre as medições de temperatura

T_s = tempo constante do sistema;

T_k = temperatura do corpo, no tempo $t_k = (\Delta t)k$;

Admitamos que Δt é escolhido de tal forma que, $\Delta t \ll T_s$.

Este sistema consiste em dois componentes: o quarto e o copo de água quente. O sistema T_s de tempo constante, pode ser determinado pelas medições de temperatura.

A experiência mostra que a temperatura da água decresce de uma forma monótona.

A razão de arrefecimento encontrada é directamente proporcional à diferença entre a temperatura do objecto e a temperatura do quarto, isto é,

$$\frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta t} \propto (T_k - T_R) \quad (5.4.1.1)$$

Seja

$$\overline{T}_k = T_k - T_R \quad (5.4.1.2)$$

Logo, temos que

$$\frac{\overline{T}_{k+1} - \overline{T}_k}{\Delta t} = -\left(\frac{1}{T_s}\right)\overline{T}_k \quad (5.4.1.3)$$

onde a constante de proporcionalidade é o recíproco do sistema de tempo constante.

Se definirmos

$$\lambda = \frac{\Delta t}{T_s} \ll 1 \quad (5.4.1.4)$$

a equação

$$\frac{\overline{T}_{k+1} - \overline{T}_k}{\Delta t} = -\left(\frac{1}{T_s}\right)\overline{T}_k \quad (5.4.1.5)$$

pode ser escrita da seguinte forma

$$\overline{T}_{k+1} = (1 - \lambda)\overline{T}_k \quad (5.4.1.6)$$

Esta equação tem a seguinte solução:

$$\overline{T}_k = \overline{T}_0(1 - \lambda)^k \quad (5.4.1.7)$$

onde

$$\overline{T}_0 = T_0 - T_R \quad (5.4.1.8)$$

A condição (5.4.1.4) mostra que \overline{T}_k decresce monotonamente para zero e por conseguinte T_k decresce monotonamente de T_0 para T_R .

Como podemos determinar T_s ?

Suponhamos que resolvemos a equação (5.4.1.7) para os tempos k_1, k_2 . Temos assim

$$\begin{cases} \overline{T}_{k_1} = \overline{T}_0(1 - \lambda)^{k_1} \\ \overline{T}_{k_2} = \overline{T}_0(1 - \lambda)^{k_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\overline{T}_{k_1}}{\overline{T}_0} = (1 - \lambda)^{k_1} \\ \frac{\overline{T}_{k_2}}{\overline{T}_0} = (1 - \lambda)^{k_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{T_{k_1} - T_R}{\overline{T}_0} = (1 - \lambda)^{k_1} \\ \frac{T_{k_2} - T_R}{\overline{T}_0} = (1 - \lambda)^{k_2} \end{cases} \quad (5.4.1.9)$$

Dividindo agora a primeira equação do sistema pela segunda obtemos

$$(1 - \lambda)^{k_1 - k_2} = \frac{T_{k_1} - T_R}{T_{k_2} - T_R} \quad (5.4.1.10)$$

Cálculos directos mostram que

$$\log(1 - \lambda) = \left(\frac{1}{k_1 - k_2} \right) \log \left[\frac{T_{k_1} - T_R}{T_{k_2} - T_R} \right] \quad (5.4.1.11)$$

Tendo como hipótese ainda que(5.4.1.4), obtemos que

$$\lambda = \frac{\Delta t}{T_s} = \left(\frac{1}{k_2 - k_1} \right) \log \left[\frac{T_{k_1} - T_R}{T_{k_2} - T_R} \right] \quad (5.4.1.12)$$

Uma vez que o tempo, Δt , entre medições é conhecido, são também conhecidas, a partir dos dados, as temperaturas do quarto, T_R , T_{k_1} e T_{k_2} , a partir desta equação podemos determinar T_s , sistema de tempo constante.[6]

5.5 Variação da População

5.5.1 Procedimento de Verhulst⁽¹⁷⁾

Suponhamos o crescimento de uma população num certo número de anos. Se a população inicial for x_0 e se ao fim de n anos for x_n , a taxa de crescimento durante o ano de ordem $n + 1$ será

$$r = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \quad (5.5.1.1)$$

Se a taxa de crescimento é constante de ano para ano, esta relação é verdadeira para qualquer valor de n e poderá ser escrita na forma de uma lei dinâmica linear.

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r)x_n \quad (5.5.1.2)$$

e ao fim de n anos temos

$$x_n = (1 + r)^n x_0 \quad (5.5.1.3)$$

⁽¹⁷⁾ Pierre François Verhulst (1804-1849). Era matemático e exercia na Universidade de Gand. Aí publicou em 1839, um modelo demográfico logístico.

Temos um exemplo do que se chama um crescimento exponencial característico de vários fenómenos da vida real mas que, no caso de populações conduziria a valores enormes de populações (aliás como nos outros casos da vida real) que poderão não corresponder à realidade.

Em 1845, Verhulst formulou uma lei de crescimento que considera um valor máximo possível da população, digamos X . A lei de Verhulst admite que a taxa de crescimento diminuirá de r até zero, à medida que a população se aproxima de X . Matematicamente, a taxa de crescimento já não será uma constante r , mas sim uma taxa variável $r - c \cdot x_n$ sendo c uma constante. Como o crescimento da população deve parar quando $x_n = X$, o valor da constante c deverá ser $\frac{r}{X}$. Com este valor a lei de

Verhulst do processo dinâmico ficará

$$x_{n+1} = f(x_n) = (1 + r - c \cdot x_n)x_n = (1 + r) \cdot x_n - c \cdot x_n^2 \quad (5.5.1.4)$$

Atingindo o valor X a população ficará constante $f(X) = X$. Se a população for pequena, crescerá, e se for grande, decrescerá. O processo de Verhulst conduz a uma situação estável que é o caso $f(X) = X$, independentemente do estado inicial.

Desde que $r < 2$ (taxa de aproximadamente duzentos por cento), caso que se aplica às populações humanas, o procedimento de Verhulst não anda longe da realidade.

Mas, tal como foi notado pelo meteorologista Lorenz em 1963, se $r > 2$, a lei de Verhulst descreve fluxos turbulentos que se verificam na Física dos Lasers, na Hidrodinâmica, na Teoria de Reacções Químicas e em muitas outras situações. E é aí que aparecem resultados fascinantes.

Se fizermos

$$c = \frac{r}{X} \quad (5.5.1.5)$$

a relação de Verhulst fica

$$x_{n+1} = (1 + r)x_n - \frac{r}{X}x_n^2 \quad (5.5.1.6)$$

Normalizando, admitindo que, $X = 1$ vem

$$x_{n+1} = (1 + r) \cdot x_n - r \cdot x_n^2 \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + r \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \quad (5.5.1.7)$$

Começando por exemplo com $x_0 = 0,1$ e iterando para diversos valores de r , verifica-se que:

Se $r < 2$ o processo tende para o ponto de equilíbrio $x = 1$;

Se $r = 2.1$ o processo tende para uma oscilação regular entre dois valores 0,82 e 1,13.

Este comportamento continua até $r = 2.5$.

Se $r = 2.5$ começa um ciclo repetitivo de quatro valores 0.54, 1.16, 0.70, 1.23. Este comportamento continua até que $r = 2.55$.

Se $r = 2.55$ obtemos um desdobramento para um ciclo de oito valores.

Se $r = 2.565$ obtemos um desdobramento para um ciclo de dezasseis valores.

Este processo de desdobramento continua até $r = 2.57$.

Para $r > 2.57$ o comportamento do sistema dinâmico torna-se caótico e os valores aparecem em qualquer processo regular aparente.

Os diversos ciclos, para os quais o processo converge se $r < 2.57$, são chamados atratores. Para $r < 2$ o atrator é o ponto 1, para $2 < r < 2.5$ o atrator é um par de valores alternativos.

Uma análise cuidadosa da região crítica acima de $r = 2.57$, revela que sob o caos se esconde a ordem. Por exemplo, perto de $r = 3.0$, existe somente uma banda caótica, para $r = 2.679$ essa banda divide-se em duas bandas caóticas, para $r = 2.593$ subdivide-se em quatro bandas caóticas, depois em oito, depois em dezasseis, etc duplicando de cada vez até que para $r = 2.57$ essa duplicação se pode considerar infinita. O que é extraordinário é que exista uma constante universal (a constante de Feigenbaum) ligada a todo este fenómeno e cujo valor é, com dez casas decimais, 4.6692016609.

Ainda mais, o aspecto das bandas interiores à região caótica apresenta uma nova ordem. Por exemplo para $r = 2.83$ o caos dá lugar a um atrator circular de três pontos. E na região à volta do ponto central aparece uma réplica de todo o diagrama de Verhulst. É o comportamento fractal.

Conclusão

Ao terminar o trabalho que me propus desenvolver, torna-se necessário e conveniente dar em traços largos e concisos a razão da minha escolha.

Escolher, implica sempre algum risco, mas quando o objecto da nossa escolha é uma completa novidade, esse risco é ainda mais acrescido. Na minha formação nunca tinha ouvido falar de equações de diferenças, pelo que o desafio de desenvolver algo nesta área era ainda mais aliciante.

Comecei de facto do zero, e à medida que avançava no trabalho descobria ligações inimagináveis, com este assunto. Quem poderia imaginar que estratégias de guerra podiam ser desenvolvidas recorrendo a equações de diferenças? Neste percurso procurei contornar e superar as dificuldades que me foram surgindo e provavelmente por de formação profissional, associar à teoria, muitos e muitos exemplos, que permitam uma melhor compreensão deste tema.

Parece-me que um tema que não tenha aplicações práticas é muito pouco proveitoso. No mundo das equações de diferenças, as aplicações à vida real são mais que muitas, a dificuldade reside no facto de escolher um exemplo significativo dentro de cada uma das áreas científicas.

Julgo ter alcançado os meus objectivos, e para além das novas aprendizagens que fiz, dar algum contributivo para uma abordagem clara e interessante deste tema.

Se o consegui dou por bem empregue o tempo dispensado, pois como dizia o insigne e grande arqueólogo, meu conterrâneo, Abade de Baçal, que vou citar de memória, pelo que as palavras podem por ventura ter sido modificadas, mas cuja ideia era essencialmente assim:

“ Se contribuídes, ainda que minimamente, para aumentar a ciência, tereis prestado um grande serviço à humanidade”.

Assim dizia este grande estudioso com quem concordo plenamente.

Bibliografia

Livros

- [1] Conte, S. D., Boor, C., “*Elementary Numerical Analysis*”, MacGraw-Hill, 1981;
- [2] Elaydi, S.N, “*An Introduction to Difference Equations*”, Springer, 1995;
- [3] Ferreira, M., Menezes, R., “*Equações com Diferenças*”, Edições Sílabo, 1992;
- [4] Goldberg, S., “*Introduction to Difference Equations – With Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*”, Dover Publications, 1958;
- [5] Lieby, P.,Loeb, D.,”*Quadrature 25*”,Juillet – Août – Septembre, 1996,(páginas 19 a 24);
- [6] Mickens, E. R., “*Difference Equations – Theory and Applications*”, Chapman & Hall, 1990,2nd Edition;
- [7] Mickens, E. R., “*Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*”, World Scientific, 1993;
- [8] Rosen, K.H., “*Discrete Mathematics and its Applications*”, McGraw Hill, 1991, 2nd Edition
- [9] Saraiva, M., “*Equações às Diferenças Finitas – Aplicações à Economia*”, Faculdade de Economia de Coimbra, 1997;

- [10] Spiegel, R. M., *“Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations”*, McGraw-Hill, 1994;
- [11] Strang, G., *“Introduction to Applied Mathematics”*, Wellesley – Cambridge Press, 1986.

Sites

<http://www.villate.org/doc/eqdiferenciais/eqdiferenciais.pdf>

<http://quark.fe.up.pt/deqwww/amiii/am-book/sec?6-2>

<http://w3.ualg.pt/~sjesus/aulas/ss/node28.html>

<http://www.ipv.pt/millenium/Millenium29/28.pdf>

http://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanoi

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/biografia.htm>

<http://www.eb23-v-ncerveira.rcts.pt/disciplinas/matematica/biografias/boole.htm>

http://pt.wikipedia.org/wiki/George_Boole

[http://it.wikipedia.org/wiki/Felice_Casorati_\(matematico\)](http://it.wikipedia.org/wiki/Felice_Casorati_(matematico))

http://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Feigenbaum#searchInput

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Chebyshev.asp>

<http://www.escolar.com/biografias/m/malthus.htm>

http://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus#column-one