

Maria Vitória Duarte Moreira

**OS FRACTAIS E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS
NOS ENSINOS BÁSICO E SECUNDÁRIO**



Universidade Portucalense Infante D. Henrique
Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia

Julho de 2011

Maria Vitória Duarte Moreira

**OS FRACTAIS E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS
NOS ENSINOS BÁSICO E SECUNDÁRIO**

Mestrado em Matemática/Educação

Trabalho realizado sob orientação da
Professora Doutora Ana Ramires



Universidade Portucalense Infante D. Henrique
Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia

Julho de 2011

Agradecimentos

Gostaria de expressar o meu mais sincero agradecimento a todos aqueles que me apoiaram ao longo do curso de Mestrado, em particular, à Professora Doutora Ana Ramires o meu reconhecimento pela incondicional disponibilidade, pelo precioso contributo da sua orientação através de variadíssimas ideias e sugestões, sempre presentes ao longo das diversas etapas deste trabalho; aos meus pais, pelo apoio incondicional; a todos os professores do curso de Mestrado e, finalmente, a todos os colegas e amigos que me acompanharam e incentivaram na realização deste trabalho.

OS FRACTAIS E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NOS ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

Resumo

Embora a Geometria Fractal tenha grandes potencialidades para ser leccionada do ensino básico ao ensino superior, são poucas as tarefas desenvolvidas com fractais no ensino básico e no secundário, parecendo impensável, numa primeira análise, o envolvimento destes alunos em tarefas que incluam o seu estudo e exploração. Porém, a Geometria Fractal, através da formulação de problemas estruturados para a aprendizagem de conceitos, representações e procedimentos, reconhecimento de padrões, estabelecimento de conjecturas, generalizações e debate de ideias, permite o estabelecimento de conexões entre a Álgebra e a Geometria, apresentando uma visão mais integrada da Matemática, e promove o desenvolvimento das capacidades transversais, nomeadamente, a resolução de problemas e o raciocínio e comunicação matemáticos. O objectivo principal desta dissertação é mostrar de que forma a Geometria Fractal pode ser explorada para introduzir e explorar conceitos matemáticos do ensino básico até ao secundário de acordo com os programas portugueses actuais de Matemática e as suas recomendações metodológicas.

Neste trabalho, apresenta-se uma perspectiva histórica da Geometria Fractal e a sua relação com a Teoria do Caos. Descreve-se a evolução do conceito de fractal e as suas duas características principais: dimensão fractal e auto-semelhança. A partir da análise do Novo Programa do Ensino Básico, dos actuais programas do ensino secundário e respectivas orientações, é sugerida a introdução dos fractais clássicos nos diferentes níveis de aprendizagem, descrevendo-se o seu processo de construção e as principais características que poderão ser usadas na exploração de diversos conteúdos programáticos. É apresentado um conjunto de tarefas práticas de exploração do triângulo de Sierpinski, permitindo a integração da Geometria Fractal nos quatro níveis de ensino não superior portugueses.

Palavras-Chave: Fractais; Ensino de Matemática; Perspectiva Metodológica.

FRACTALS AND MATHEMATICAL CONCEPTS IN SCHOOL EDUCATION

Abstract

While fractal geometry can potentially be taught from primary through to higher education, there are at present few exercises developed for fractals in primary and secondary school courses. At first sight, it may therefore seem unthinkable to involve students in tasks that include their study and exploitation. However, through the formulation of problems for structured learning of concepts, representations and procedures, pattern recognition, establishment of conjectures, generalizations, and debate of ideas, fractal geometry allows the establishment of connections between algebra and geometry, permitting a view towards a more integrated mathematics. It can also promote the development of transversal skills, including problem solving and mathematical reasoning and communication. The main objective of this dissertation is to show how fractal geometry can be exploited to introduce and explore mathematical concepts in primary and secondary education programs in accordance with the current Portuguese Mathematics Curriculum and its methodological recommendations.

The paper begins with a historical overview of fractal geometry and its relation to chaos theory. It describes the evolution of the concept and its two main features: fractal dimension and self-similarity. From an analysis of the new basic education program and the current secondary education programs and their guidelines, it argues for the introduction of classical fractals at different levels of learning, describing the process of construction and the main tools that can be used in an exploration of their programmatic content. It presents a set of practical exercises in operating the Sierpinski triangle, allowing the integration of fractal geometry at the four levels of Portuguese non-tertiary education.

Keywords: Fractals; Teaching of Mathematics; Methodological Perspective.

Índice

Agradecimentos	1
Resumo	3
Abstract.....	5
Índice.....	7
Índice de Figuras	9
Índice de Tabelas	11
CAPÍTULO I	1
1. Introdução.....	1
2. Motivação e objectivos	2
3. Estrutura da Dissertação	5
CAPÍTULO II	7
1. História dos Fractais	8
1.1 Os Fractais no Século XIX.....	9
1.1.1 Curva de Weirstrass.....	9
1.1.2 Função de Riemann	10
1.1.3 Conjunto de Cantor	10
1.1.4 Curva de Peano.....	11
1.1.5 Curva de Hilbert.....	12
1.1.6 Curva de Von Koch	12
1.2 Os Fractais no Século XX.....	13
1.2.1 Triângulo de Sierpinski	14
1.2.2 Conjuntos de Julia e Domínios de Fatou	15
1.2.3 Conjunto de Mandelbrot.....	16
1.3 O Caos e os Fractais.....	19
2 Fractal: Conceito e Características	22
2.1 Auto-Semelhança	24
2.2 Dimensão.....	25
2.2.1 Dimensão de Auto-Semelhança	27
2.2.2 Dimensão de Hausdorff	28

2.2.2 Dimensão Box-Counting	29
CAPÍTULO III	33
1. Fractais nos Programas do Ensino Básico e Secundário	33
2. Estudo e Construção de Alguns Fractais	38
2.1 Curva de Von Koch	39
2.2 Floco de Neve de Von Koch	43
2.3 Conjunto de Cantor	45
2.4 Triângulo de Sierpinski	48
2.5 Esponja de Menger	52
2.6 Pirâmide de Sierpinski	54
3. Tarefas com Fractais	56
3.1. Tarefa para o 1º ciclo do Ensino Básico.....	57
3.2. Tarefa para o 2º Ciclo do Ensino Básico	61
3.3. Tarefa para o 3º ciclo do Ensino Básico.....	63
3.4. Tarefa para o Ensino Secundário.....	66
4. Conclusões.....	70
CAPÍTULO IV	71
Conclusão	71
Bibliografia	75
Anexos.....	79
Anexo A: “Triângulo de Sierpinski”	81
Anexo B: “Jogo do Caos”	85
Anexo C: “Investigando o Triângulo de Sierpinski”	89
Anexo D: “O Triângulo de Sierpinski e as Progressões Geométricas”	91

Índice de Figuras

Figura 1 Curva de Weirstrass	10
Figura 2 Primeiros passos da construção do Conjunto de Cantor.....	11
Figura 3 Curva de Peano	11
Figura 4 Processo de construção da Curva de Hilbert	12
Figura 5 Curva de Von Koch	13
Figura 6 Triângulo de Sierpinski.....	14
Figura 7 Exemplos de Conjuntos de Julia.....	15
Figura 8 Conjunto de Mandelbrot	16
Figura 9 Conjuntos de Julia que podem ser encontrados no Conjunto de Mandelbrot ...	18
Figura 10 Diferentes graus de auto-semelhança.....	25
Figura 11 Auto-semelhança no Triângulo de Sierpinski	28
Figura 12 Primeira etapa de cálculo da dimensão “box-counting” ($r = 50 \text{ Km}$, $N=35$).....	30
Figura 13 Etapa final de cálculo da dimensão “box-counting”	31
Figura 14 Segunda etapa de cálculo da dimensão “box-counting” ($r=25 \text{ Km}$, $N=76$)	31
Figura 15 Construção da Curva de Koch	40
Figura 16 Área sobre a Curva de Koch após a 1ª iteração.....	41
Figura 17 Área sobre a Curva de Koch após a 2ª iteração.....	41
Figura 18 Cópias auto-semelhantes da Curva de Koch.....	42
Figura 19 Construção do Floco de Neve de Von Koch.....	43
Figura 20 Construção do Conjunto de Cantor	46
Figura 21 Etapas iniciais da construção do Triângulo de Sierpinski	49
Figura 22 Triângulo de Pascal	51
Figura 23 Fractal dos múltiplos de 2	51
Figura 24 Esponja de Menger	52
Figura 25 Etapas iniciais da construção da Esponja de Menger	53
Figura 26 Iteração 1 da Esponja de Menger	54
Figura 27 Pirâmide de Sierpinski.....	55
Figura 28 Etapas iniciais da construção da Pirâmide de Sierpinski	55
Figura 29 História do triângulo de Sierpinski.....	58

Figura 30 Desenho do triângulo de Sierpinski	59
Figura 32 Construção da pirâmide de Sierpinski	60
Figura 31 Construção de triângulo de Sierpinski através de materiais manipuláveis	60
Figura 33 Construção da pirâmide de Sierpinski através de jogos de construção geométricos	61
Figura 34 Regras do Jogo do Caos.....	62
Figura 35 Ficha de trabalho da tarefa “Investigando o triângulo de Sierpinski”	66
Figura 36 Ficha de trabalho da tarefa “O Triângulo de Sierpinski e as Progressões Geométricas”	69

Índice de Tabelas

Tabela 1 Variação do comprimento total da Curva de Koch	40
Tabela 2 Número de cópias auto-semelhantes da Curva de Koch	42
Tabela 3 Variação do perímetro do Floco de Neve ao longo das iterações (Barbosa, 2005, p. 73)	44
Tabela 4 Perímetro dos triângulos no Triângulo de Sierpinski (Barbosa (2005, p. 77))	49
Tabela 5 Área dos triângulos no Triângulo de Sierpinski (Barbosa, 2005, p. 78)	50
Tabela 6 Processo de contagem dos cubos na Esponja de Menger (Barbosa, 2005, p. 79)	53
Tabela 7 Variação do comprimento das arestas dos cubos ao longo das iterações (Tomé, 2003, p. 81)	53
Tabela 8 Variação do comprimento das arestas dos tetraedros ao longo das iterações ..	55

CAPÍTULO I

“O melhor trabalho dos matemáticos é arte, arte perfeita, tão arrojada como os mais secretos sonhos da imaginação, clara e límpida.” Gösta Mittag-Leffler

1. Introdução

A Matemática é vista como uma disciplina muito abstracta e formal. Muitos alunos não compreendem certos conceitos porque não conseguem visualizá-los, o que torna a Matemática uma disciplina difícil e, aparentemente, sem significado real. A visualização permite passar dos exercícios rotineiros ao raciocínio matemático. O poder visual das imagens e a consequente percepção visual podem ajudar o aluno a assimilar os vários conceitos com maior facilidade e a desenvolver as capacidades matemáticas. As imagens ajudam também à interligação de diversos assuntos, quer pelo seu valor estético quer por estimularem o sentido crítico, gerando, por si só, mensagens ricas e diversificadas. A referência às imagens e à sua força está ligada às que dão voz à nova linguagem geométrica – a Geometria Fractal.

Mandelbrot, o pai da Geometria Fractal, descreve-a da seguinte forma:

“... as imagens que lhe servem de “caracteres” são intrinsecamente sedutoras para o artista, para a criança e para o leigo. Muitas já foram aceites como resultado de uma nova forma de arte. Algumas destas imagens são “imitações” (de um realismo surpreendente) de montanhas, nuvens ou árvores. Outras são absolutamente novas, abstractas e fantásticas. (...) Porque os mestres se mostram encantados ao verem quanto esta linguagem seduz os seus alunos. Nos mais diversos países, com as estruturas escolares mais díspares, os fractais conseguem tão bem despertar a curiosidade matemática dos jovens mais reticentes como reforçar a paixão dos mais motivados. Nesta época pobre em vocações é caso para se ficar admirado.” (1998, p. 210 e 211)

Quando os fractais são observados pela primeira vez, é difícil imaginar que a sua beleza seja gerada por repetição de regras matemáticas muito simples – iterações de certas funções, sendo o fractal o limite da sucessão de imagens geradas por computador. No entanto, não se pode falar em visualização sem a aliar ao computador. A trian-gulação “*fractais – computador – visualização*” torna-se, assim, a associação perfeita para a nova visão da Matemática escolar.

“Imagine uma sala de aula, uma escola ou um agrupamento de escolas, onde todos os alunos têm acesso a um ensino de matemática estimulante e de elevada qualidade. As expectativas são ambiciosas, para todos, com meios adicionais para aqueles que deles necessitem. Os professores melhor preparados e experientes possuem recursos adequados em que baseiam o seu trabalho e encontram-se em desenvolvimento enquanto profissionais. O programa curricular é bastante rico ao nível da matemática, proporcionando aos alunos uma aprendizagem compreensiva dos conceitos e procedi-mentos matemáticos mais importantes. A tecnologia constitui uma compo-nente essencial desse ambiente. É com confiança que os alunos se envolvem em tarefas matemáticas complexas, criteriosamente escolhidas pelos pro-fessores. Constroem os conhecimentos a partir de uma vasta gama de temas, por vezes abordando o mesmo problema sob diferentes perspectivas matemáticas ou procedendo a representações matemáticas distintas, até encontrarem os métodos que lhes permitem progredir. Os professores aju-dam os alunos a formular, aperfeiçoar e explorar conjecturas, baseadas em evidências, e a utilizar uma diversidade de técnicas de raciocínio e de prova de modo a confirmar ou infirmar essas conjecturas. Os alunos resolvem os problemas de forma flexível e expedita. Individualmente ou em grupos, e com recurso às tecnologias, trabalham produtiva e reflectidamente sob a orientação competente dos seus professores. Os alunos transmitem de modo eficaz as suas ideias e resultados, sob a forma oral ou escrita. Valori-zam a matemática e envolvem-se activamente na sua aprendizagem.”
(National Council of Teachers of Mathematics, 2011, p. 3)

2. Motivação e objectivos

Neste trabalho, pretende-se mostrar como a Geometria Fractal pode ser explo-rada para introduzir ou trabalhar conceitos matemáticos, de acordo com os programas portugueses de Matemática e as suas recomendações metodológicas, desde o 1º ciclo ao secundário.

A exploração dos fractais contribui para o desenvolvimento das três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática que estruturam o *Novo*

Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007), homologado a 28 de Dezembro de 2007: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. A Geometria Fractal permite a formulação de problemas estruturados para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos, a construção de cadeias argumentativas e uma participação construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. Segundo Barbosa, a utilização da Geometria Fractal na sala de aula é amplamente justificada através das:

- “ - conexões com outras ciências;*
- deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo das formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano, como construções de casas, prédios, pontes, estradas, máquinas, etc.;*
- os objectos naturais são com frequência mais complicados e exigem uma geometria mais rica, que os modela com fractais, possibilitando desenvolver projectos educacionais sobre temas transversais voltados para a compreensão de fenómenos que ocorram nos diversos ambientes;*
- difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis da escolarização;*
- existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda a acção que envolve simultaneamente habilidade e criatividade;*
- sensação de surpresa diante da ordem na desordem.”* (2005, p. 19 e 20)

Em Portugal, o uso da Geometria Fractal no 1º e no 2º ciclo não está explorado. No 3º ciclo e secundário, já existem alguns manuais escolares, embora sejam poucos os que propõem tarefas com fractais, como por exemplo (Conceição & Almeida, 2010, pp. 63, 215) e (Viegas, Gomes, & Lima, 2011, pp. 204,214,236,237,248,282,288,294-296). Neste trabalho, a partir da análise do Novo Programa do Ensino Básico, dos actuais programas do ensino secundário e respectivas orientações, é sugerida a introdução dos fractais clássicos nos diferentes níveis de aprendizagem, descrevendo-se o seu processo de construção e as principais características que poderão ser usadas na exploração de diversos conteúdos programáticos. São propostas quatro tarefas práticas de exploração do mesmo fractal, o triângulo de Sierpinski, que permitem a integração da Geometria Fractal nos quatro níveis de ensino portugueses, respeitando as directivas dos programas do ensino básico e secundário. A escolha deste fractal como elo comum das tarefas deve-se ao facto de ser o único que possui características ajustáveis ao desenvolvimento

matemático nos quatro ciclos de aprendizagem. As tarefas propostas apresentam-se como uma cadeia, num crescendo de dificuldade adaptada ao ciclo de ensino correspondente.

A tarefa do 1º ciclo enquadra-se na unidade temática *Geometria e Medida* e subtema *Figuras no Plano e Sólidos Geométricos*, destinando-se aos alunos do 3º e 4º ano de escolaridade. Segue as recomendações do *National Council of Teachers of Mathematics* (abreviadamente, NCTM), a instituição de referência no domínio das tendências curriculares internacionais, sobre o ensino da Geometria no 1º ciclo do ensino básico (2011, p. 191) e pretende o estabelecimento da interdisciplinaridade com a disciplina de Língua Portuguesa e o desenvolvimento da percepção espacial e de conceitos geométricos, como indicado no *Novo Programa do Ensino Básico*.

A tarefa do 2º ciclo do ensino básico enquadra-se na unidade temática *Geometria* e subtema *Figuras no Plano*, sendo, essencialmente, um processo de construção de fractais caracterizados por auto-semelhança. Pretende-se, com esta tarefa, o desenvolvimento da capacidade transversal da comunicação matemática e a aplicação de conceitos de isometrias anteriormente adquiridos: reflexões, rotações, translações e simetrias axiais e rotacionais.

A tarefa do 3º ciclo do ensino básico destina-se ao 7º ano de escolaridade e enquadra-se na unidade temática *Álgebra*, subtema *Sequências e Regularidades*. Esta tarefa pretende o estabelecimento de conexões entre a Álgebra e a Geometria e segue as recomendações relativas às tarefas exploratórias e de investigação do *Novo Programa do Ensino Básico* (Ponte, et al., 2007, p. 51) e as recomendações do NCTM sobre o ensino da *Geometria* neste ciclo (2011, p. 275) e o desenvolvimento do raciocínio matemático (2011, p. 310).

A tarefa do ensino secundário destina-se a alunos do 11º ano de escolaridade e enquadra-se na unidade temática *Álgebra*, subtema *Sucessões*. Aqui, pretende-se o estabelecimento de conexões entre a Álgebra e a Geometria, o desenvolvimento do raciocínio matemático através da identificação e análise de padrões e estruturas, o estabelecimento de conjecturas e generalizações (através de métodos iterativos e recursivos), seguindo as recomendações do NCTM (2011, p. 361). Cria condições propícias ao uso de software de Geometria Dinâmica, também no seguimento das recomendações do NCTM (2011, p. 368), e à triangulação “*fractais – computador – visualização*”.

3. Estrutura da Dissertação

A dissertação, além desta introdução, inclui mais três capítulos, cujo conteúdo se passa a descrever.

No Capítulo II, a Geometria Fractal é apresentada como uma extensão enriquecedora da Geometria clássica. É descrita como a Geometria da natureza, uma vez que pode ser encontrada na arte antiga, na arquitectura gótica e barroca, nos sons naturais, fenómenos físicos e fisiologia do corpo humano e até na organização do Universo. Também é referido o uso dos fractais na modelação de fenómenos sociais e económicos. Segue-se uma perspectiva histórica da Geometria Fractal dividida em dois períodos distintos, século XIX e século XX, que termina com uma alusão à relação entre a Teoria do Caos e os fractais. Neste capítulo, apresenta-se a evolução do conceito de fractal e a descrição das suas duas características principais: auto-semelhança e dimensão fractal. A propriedade de auto-semelhança é definida como uma extensão de uma das mais importantes noções da Geometria elementar – a semelhança de figuras, podendo-se apresentar em diferentes graus, quer em objectos fractais, quer em fractais puramente matemáticos. Na descrição da dimensão fractal, apresenta-se a evolução da definição da dimensão topológica das figuras euclidianas em contraponto com a dimensão não inteira dos fractais, terminando com o cálculo das três dimensões fractais: dimensão fractal ou de auto-semelhança, dimensão de Hausdorff e dimensão *box-counting*.

No Capítulo III, é analisado o *Novo Programa do Ensino Básico* e os actuais programas do ensino secundário, e, aproveitando as orientações dos respectivos programas, é sugerida a introdução e a exploração dos fractais clássicos nos ensino básico e secundário. Descreve-se o processo de construção e as principais características de alguns fractais clássicos – Curva de Von Koch, Floco de Neve de Von Koch, Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski, e os conteúdos programáticos que poderão ser introduzidos e explorados através do seu estudo. O capítulo termina com o enquadramento e descrição de quatro tarefas que exemplificam formas de exploração do triângulo de Sierpinski desde o 1º ciclo até ao secundário, respeitando as directivas dos programas do ensino básico e do ensino secundário e as recomendações do NCTM.

No Capítulo IV, são apresentadas as conclusões deste trabalho e, no Anexo A, B, C e D, apresentam-se as tarefas propostas de exploração do triângulo de Sierpinski para o 1º, 2º e 3º ciclo do ensino básico e para o ensino secundário, respectivamente.

CAPÍTULO II

“Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstracto que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenómenos do mundo real.” Nicolai Lobachevsky

A Geometria Fractal é uma extensão da Geometria clássica. Não a substitui, mas enriquece-a. Através de computadores, pode-se criar modelos precisos de estruturas físicas, desde conchas marinhas até galáxias. Citando M. Barnsley, *“A Geometria Fractal é uma nova linguagem. A partir do momento em que é dominada, pode-se descrever a forma de uma nuvem tão precisamente como um arquitecto faz com uma casa!”* (in Lesmoir-Gordon, Rood, & Edney, 2001, p. 8)

As formas fractais foram expressas intuitivamente por artistas muito antes de serem conhecidas pela Ciência. Encontram-se modelos auto-semelhantes na arte celta, romana, grega, egípcia, asteca, inca e maia. A arquitectura, em particular a gótica e a barroca, é pródiga em formas fractais. A análise espectral da música, desde a clássica até às canções de embalar, revela uma afinidade notável com os modelos presentes na natureza, em particular, com a distribuição fractal (designada por *ruído 1/f*) encontrada no som de uma cascata ou no barulho das ondas. Os modelos fractais são encontrados em muitos aspectos da natureza: as mudanças dos estados físicos da água, o escoamento da água desde os rios até aos oceanos, a fisiologia da circulação sanguínea, a dimensão das nuvens, o modo de propagação de um fogo florestal, o crescimento dos corais, a forma de um floco de neve, o movimento das partículas quânticas, a forma dos pulmões, o sistema circulatório, os rins, o fígado, o pâncreas e o cérebro; a forma dos receptores moleculares das superfícies dos vírus e bactérias e o seu período de incubação, a superfície das células cancerosas, a estrutura interna dos ossos, os batimentos cardíacos, a dinâmica dos tremores de terra e a forma da propagação de epidemias, a organização

do Universo, inclusive a sucessão das etapas que deu origem ao *Big Bang*. É devido a esta omnipresença nos fenómenos naturais que a Geometria Fractal é considerada, unanimemente, a verdadeira geometria da natureza. A Geometria Fractal também é usada para modelar fenómenos sociais e económicos, sendo, por exemplo, o trabalho de Keith Still sobre o comportamento e gestão de multidões utilizado na arquitectura dos estádios e na modelação de ecossistemas (*in* Lesmoir-Gordon, Rood, & Edney, 2001, p. 130). Mandelbrot considera, num dos seus trabalhos sobre economia intitulado “*Fractal and Scalling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*” que os fractais estão tão presentes na economia como nas ciências naturais e que as oscilações dos mercados mundiais seguem padrões fractais (*in* Lesmoir-Gordon, Rood, & Edney, 2001, p. 144).

Neste capítulo, começa-se por apresentar uma breve perspectiva histórica dos fractais nos séculos XIX e XX através de sucintas descrições dos fractais descobertos nas duas épocas e da sua relação com a Teoria do Caos. Seguidamente, é apresentada a evolução do conceito de fractal e são descritas as suas duas características principais: auto-semelhança e dimensão fractal.

1. História dos Fractais

As regras que, durante milénios, definiriam os estudos da Geometria foram fundadas por Euclides de Alexandria (360 a. C. – 295 a. C.). As formas que estudou, linhas rectas e círculos, mostraram-se tão eficazes na explicação do Universo que os cientistas não notaram as suas limitações. Os modelos que não se enquadravam na Geometria Euclidiana chegavam a ser considerados contra-intuitivos ou patológicos. Só a partir do século XIX, é que as descobertas de Karl Weirstrass (1815 – 1897), Henri Poincaré (1845 – 1912) e George Cantor (1845 – 1918), lançaram as bases de um novo tipo de Geometria capaz de descrever aspectos do mundo real inacessíveis para a Geometria Euclidiana. A história dos fractais pode ser dividida em dois períodos, século XIX e XX, que se passam a descrever sucintamente.

1.1 Os Fractais no Século XIX

O século XIX foi caracterizado, sobretudo, pela aritmetização da Análise, ou seja, pelo estabelecimento de bases matemáticas rigorosas. Um dos conceitos que gerou controvérsia, em meados do século XIX, foi a descoberta da *Teoria das Tangentes das Curvas*. Durante o século XVIII e princípios do século XIX, estava estabelecido que uma função $y = f(x)$, contínua e definida num intervalo real, tinha uma tangente bem definida em qualquer ponto desse intervalo com a exceção de um número finito de pontos classificados, na altura, como “*angulosos*”. Bolzano (1781-1848) apresentou, em 1834, uma função contínua num intervalo e não derivável em nenhum ponto desse intervalo. No entanto, não foi levado muito a sério até à altura em que Weirstrass apresentou, em 1872, uma classe de funções que sendo contínuas não eram deriváveis em nenhum ponto.

De início, os matemáticos não aceitaram tais exemplos, chegando Poincaré a designá-los como “*galeria de monstros*” e Hermite (1822-1901) como “*praga*”. Estes objectos matemáticos bizarros foram proliferando, desafiando a intuição humana, destacando-se, neste século, a *Curva de Weirstrass*, a *Função de Riemann*, o *Conjunto de Cantor*, a *Curva de Peano*, a *Curva de Hilbert* e a *Curva de Von Koch*, que são apresentados a seguir.

1.1.1 Curva de Weirstrass

O primeiro fractal matemático, a *Curva de Weirstrass*, foi descoberto em 1861 quando Karl Weirstrass analisava os trabalhos de outros matemáticos. A sua preocupação pelo rigor absoluto conduziu-o à descoberta de uma função contínua e não diferenciável em nenhum dos seus pontos, isto é, uma curva constituída completamente por “*bicos*”. Esta “*função patológica*” é representada pela série trigonométrica $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, onde a é um número ímpar, $0 < b < 1$ e n é um número natural. A *Curva de Weirstrass*, representada na Figura 1, foi considerada uma aberração, não lembrando nada que pudesse ser encontrado na natureza. Mas, citando Weirstrass: “*Um*

matemático que não tenha qualquer coisa de poeta, nunca será um matemático perfeito”.

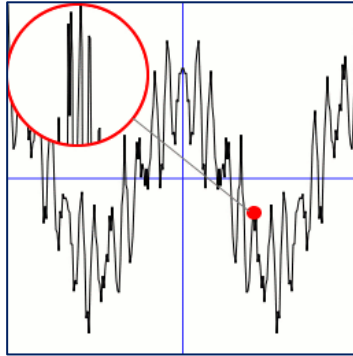


Figura 1 Curva de Weirstrass

1.1.2 Função de Riemann

Georg Bernhard Riemann (1826 – 1866) apresentou uma função descontínua – a *Função de Riemann*, numa infinidade de pontos de um intervalo, mas cujo integral existe e define uma função contínua que, para a infinidade de pontos em questão, não tem derivada. Apesar de esta função ser menos “*anormal*” do que a função de Weirstrass, tornou claro que a definição de integral de Cauchy, inspirada pela intuição geométrica de uma área sob uma curva, deveria ser mais cuidadosa.

1.1.3 Conjunto de Cantor

Um dos pioneiros da moderna Teoria dos Conjuntos, George Cantor, preocupou-se sempre com a natureza do *continuum*. Foi esta busca sobre o significado da continuidade que o levou, em 1883, à descoberta do *Conjunto de Cantor* (um dos primeiros fractais a serem estudados matematicamente). Este conjunto, representado na Figura 2, é construído a partir de um segmento de recta representativo do intervalo fechado $[0,1]$ ao qual se remove o terço central, o intervalo $]1/3, 2/3[$. De seguida, a cada um dos terços restantes tira-se o próprio terço central e assim sucessivamente até ao infinito. O resultado final desta interpolação é tão pouco visível que é impossível representá-lo graficamente, donde resulta a designação de *Poeira de Cantor*. Este conjunto não tem comprimento, nem interior (dimensão zero) e não é denso. Apesar de ser composto por

pontos desconexos, é inumerável, contendo tantos pontos quanto os da linha que o origina. Cada um dos seus pontos é um ponto de acumulação, o que significa que para cada um deles, não importando o seu tamanho, há uma infinidade de pontos do conjunto na sua vizinhança. Como contém todos os seus pontos de acumulação, o *Conjunto de Cantor* é considerado um conjunto perfeito. A existência deste conjunto descontínuo, mas infinitamente divisível, forçou Cantor a refinar a sua noção de continuidade.



Figura 2 Primeiros passos da construção do Conjunto de Cantor

1.1.4 Curva de Peano

Durante a procura de uma definição de dimensão, Giuseppe Peano (1858 – 1932) descobriu, em 1890, uma curva contínua que preenche um plano na sua totalidade. Esta curva, designada por *Curva de Peano*, ilustrada na Figura 3, é dada pelas equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde f e g são funções reais contínuas no intervalo $0 \leq t \leq 1$ e tais que os seus pontos preenchem completamente o quadrado unitário $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Esta descoberta criou uma nova e diferente perspectiva para os

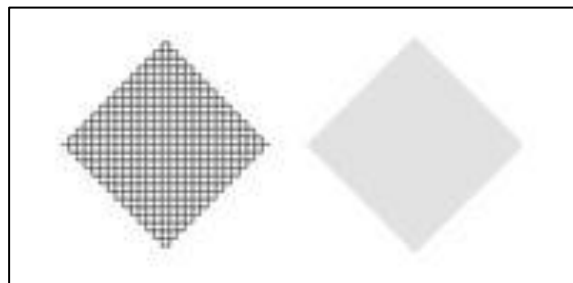


Figura 3 Curva de Peano

matemáticos da época dado que a bidimensionalidade do plano reside neste conjunto

de pontos gerados apenas por uma variável, desafiando a definição da altura de dimensão em termos do número de variáveis necessárias para criar os seus pontos.

1.1.5 Curva de Hilbert

Em 1891, Hilbert (1862 - 1943) criou a *Curva de Hilbert* que é uma função que preenche completamente o plano à semelhança da *Curva de Peano*. A construção desta curva fractal contínua pode-se observar na Figura 4 e resulta de um processo de alteração da figura inicial. A figura inicial é um quadrado, que se divide em quatro quadrados iguais, iniciando-se a construção da curva com os três segmentos consecutivos resultantes da união dos seus pontos centrais. A curva é formada não pelos quadrados mas pelos segmentos de recta formados pela ligação destes pontos centrais. Cada um dos quatro quadrados anteriores é substituído por quatro novos quadrados cujos pontos centrais se unem por três segmentos consecutivos, ligando-se cada uma destas curvas com um segmento da mesma ordem dos anteriores. Procede-se deste modo, sucessivamente, até ao infinito.

Na *Curva de Hilbert*, a propriedade de auto-semelhança verifica-se em todas as etapas de construção, sendo cada uma das curvas resultantes auto-semelhante à curva anterior por uma razão de semelhança de redução de $1/4$. A dimensão fractal é igual a 1,46.

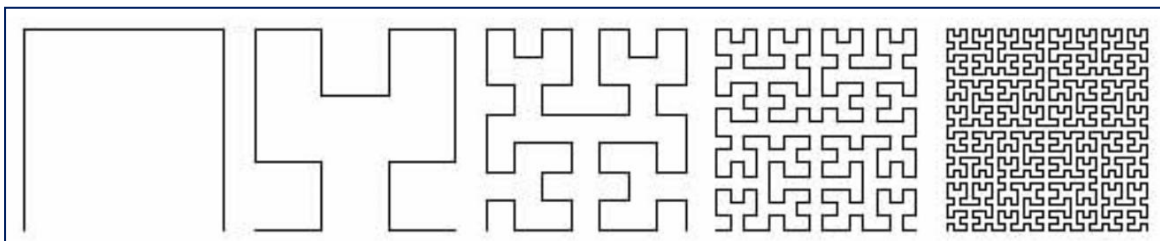


Figura 4 Processo de construção da Curva de Hilbert

1.1.6 Curva de Von Koch

Outra forma “patológica” do século XIX é a *Curva de Von Koch* (Figura 5) concebida por Helge von Koch (1870-1924) em 1904. Definiu-a como o limite de um processo

recursivo gerador de uma sequência infinita de curvas cada vez com mais *bicos*. A curva final tem perímetro infinito, apesar de estar contida numa área finita. É contínua, mas não diferenciável em nenhum ponto.

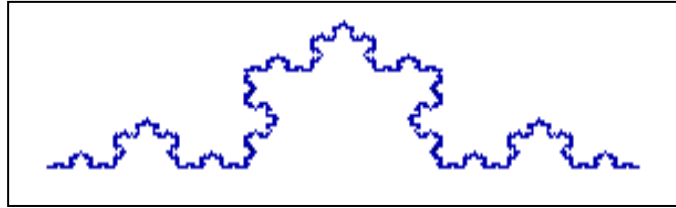


Figura 5 Curva de Von Koch

A sua construção inicia-se a partir de um segmento de recta de comprimento unitário. O terço central deste segmento é substituído por um *bico* em forma de triângulo equilátero ao qual é removida a sua base (etapa geradora da curva), medindo cada um dos lados deste triângulo $1/3$ do segmento inicial. O processo continua indefinidamente, substituindo-se, em cada etapa, três segmentos por quatro de igual comprimento.

Estas *curvas monstros* do século XIX, deixaram de ser aberrações em meados do século XX e passaram a ser modelos de objectos e fenómenos reais. Por exemplo, a *Curva de Von Koch* serve de modelo para as linhas costeiras, sistema circulatório e oscilações dos mercados mundiais. Este último campo também tem características similares às do *Conjunto de Cantor*.

1.2 Os Fractais no Século XX

O início do século XX foi rico na descoberta deste tipo de curvas, aparentemente anormais, concebidas pelos matemáticos e que mais tarde se veio a concluir serem omnipresentes no nosso mundo. Os fractais que mais se distinguem neste século são: o *Triângulo de Sierpinski*, os fractais resultantes das soluções de equações não lineares, os *Conjuntos de Julia e Fatou* e o *Conjunto de Mandelbrot*, descritos a seguir.

1.2.1 Triângulo de Sierpinski

O matemático polaco Vaclav Sierpinski (1882-1969) construiu o *Triângulo de Sierpinski* em 1916, mas os princípios subjacentes eram conhecidos há milénios pelos artistas. Os primeiros protótipos deste fractal são encontrados no púlpito da catedral de Ravello construída no século XII e desenhada por Nicola Bartolomeo of Foggia.

O *Triângulo de Sierpinski* (Figura 6) obtém-se a partir de um triângulo equilátero. Este triângulo inicial é dividido em quatro triângulos equiláteros menores, sendo removido o triângulo do meio. Os três triângulos restantes são divididos exactamente da mesma maneira, podendo-se repetir este processo indefinidamente.

Este processo gerador de fractais pode ser aplicado a quadrados, pentágonos, ou quaisquer outros polígonos, fazendo lembrar a arte Celta, quando aplicado a círculos. Ao adaptar este método a figuras tridimensionais, consegue-se construir pirâmides e cubos fractais. Apesar de o *Triângulo de Sierpinski* ser uma criação da mente humana, podem-se encontrar modelos similares nos búzios.

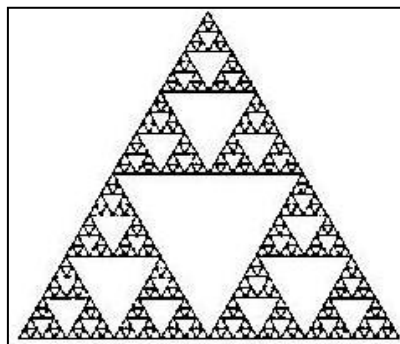


Figura 6 Triângulo de Sierpinski

O matemático Henri Poincaré mostrou que a compreensão de sistemas dinâmicos de comportamento complicado pode ser obtida através de modelos matemáticos simples. Descobriu, no início do século XX, uma classe de fractais que emergiam espontânea e inesperadamente da observação das soluções de equações não lineares. No entanto, foi necessário que passassem cerca de cinquenta anos, para que estes fractais se tornassem visíveis no ecrã de um computador.

1.2.2 Conjuntos de Julia e Domínios de Fatou

Gaston Julia (1893 – 1978) e Pierre Fatou (1878 – 1929) deram um contributo extremamente importante na descoberta de outra classe de fractais de extrema beleza, que constituem a base dos Sistemas Dinâmicos, os *Conjuntos de Julia*. Durante a primeira Guerra Mundial, dedicaram-se ao estudo dos mapas racionais do plano complexo¹, particularmente, às iterações de funções racionais de variável complexa $z^2 \rightarrow z^2 + c$, onde c é uma constante complexa. Para cada valor de z , é iniciado o processo iterativo e gerada uma sequência do tipo $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Ao observar o comportamento dos pontos sob a influência deste processo recursivo, verificaram que alguns valores iniciais de z afastam-se rapidamente para o infinito e outros não; pintando de preto os pontos que se afastam para o infinito sob a iteração do mapeamento e de branco os que não o fazem, delinea-se o domínio do ponto no infinito. O *Conjunto de Julia* é a sua fronteira.

O trabalho de Julia e de Fatou manteve-se desconhecido durante muito tempo porque, sem as imagens gráficas dos computadores, era quase impossível transmitir as suas ideias, nunca tendo sido visualizado um *Conjunto de Julia*. Só com o advento das novas tecnologias é que os *Conjuntos de Julia* e *Domínios de Fatou*, ilustrados na Figura 7, puderam ser vistos com a toda a sua beleza e glória.

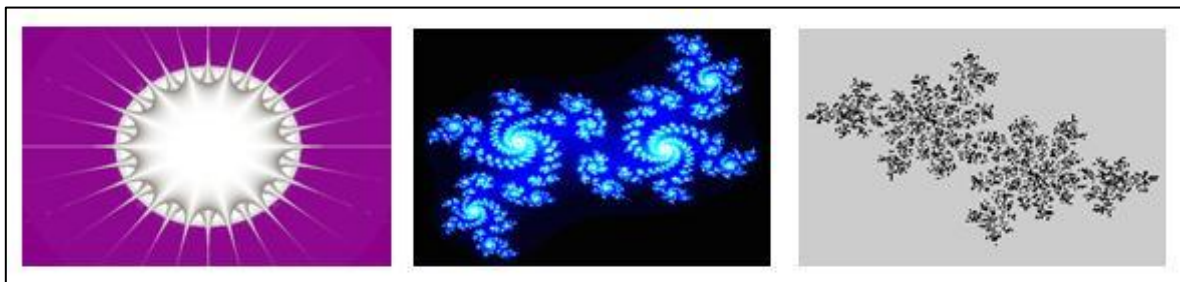


Figura 7 Exemplos de Conjuntos de Julia

¹ O mapeamento do plano complexo consiste numa regra que permite obter um ponto do plano a partir de outro.

1.2.3 Conjunto de Mandelbrot

Na década de 70, Mandelbrot juntou todas as descobertas dos séculos XIX e XX e unificou-as numa só ciência – a Geometria Fractal. Defendia que a Matemática, principalmente a Geometria, deveria explicar a natureza e os seus processos, opondo-se totalmente ao formalismo da escola de Bourbaki, sem qualquer conexão com o mundo real e quaisquer tipos de figuras. Ao estudar o fenómeno dos erros de informação nas comunicações por computador causados pelos ruídos dos fios de ligação telefónicos em períodos de vinte e quatro horas, verificou que existiam intervalos com erros e outros sem erros. Tratava-se de um fenómeno aleatório com algum tipo de auto-semelhança, sendo impossível isolar um período contínuo de tempo sem erros. A relação entre a transmissão com erros e os períodos de transmissão limpa era constante. Concluiu que a ocorrência de erros seguia um modelo fractal – auto-semelhança a todos os níveis, continuando até ao infinito e fazendo lembrar a estrutura do *Conjunto de Cantor*. Descobriu, também, que ocorrem variações do *Conjunto de Cantor* em vários fenómenos, desde sequências de palavras e letras a ruídos nas linhas telefónicas, enquanto a *Curva de Koch* servia de modelo para linhas costeiras reais. As formas destas curvas, longe de serem excepcionais, eram omnipresentes no mundo real. A Matemática estava certa. Mandelbrot tinha conseguido explicar as suas observações matematicamente, começando, então, a emergir um novo princípio, que está por detrás da Dinâmica não Linear e que conseguia explicar a maneira como as coisas acontecem no mundo real.

Baseando-se no trabalho de Julia e Fatou, Mandelbrot criou o seu próprio conjunto fractal, o *Conjunto de Mandelbrot*, ilustrado na Figura 8.

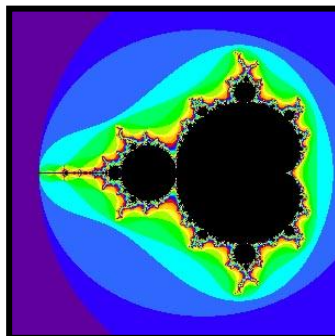


Figura 8 Conjunto de Mandelbrot

Este fractal, descrito como uma forma matemática inventada, tem origem numa fórmula iterativa relativamente simples: $z_{n+1} = z_n^c + c$, onde z e c representam números complexos. O conjunto é definido como o conjunto dos números complexos para os quais a sequência $c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Quando observou a primeira imagem deste conjunto, a reacção de Mandelbrot foi de que talvez tivesse havido um erro no programa. A imagem era extremamente estranha e inesperada. Fazendo zooms cada vez mais profundos na fronteira do conjunto, observou que é constituída por réplicas minúsculas, quase idênticas ao original, não sendo, porém, um conjunto auto-semelhante. Ao aumentar a profundidade dos zooms, também era possível encontrar *Conjuntos de Julia*, tornando o *Conjunto de Mandelbrot* muito mais interessante na sua fronteira. Lesmoir-Gordon, Rood, & Edney (2001, p. 93) referem que o matemático chinês Tan Lei provou que este conjunto é assintoticamente similar aos *Conjuntos de Julia* na sua fronteira, sendo, por isso, considerado um índice dos *Conjuntos de Julia*.

Como o *Conjunto de Mandelbrot* é conexo² permite a seguinte classificação dos *Conjuntos de Julia*, como se pode observar na Figura 9:

- a cada ponto pertencente ao interior do *Conjunto de Mandelbrot*, corresponde um *Conjunto de Julia* conexo;
- a cada ponto pertencente ao exterior do *Conjunto de Mandelbrot*, corresponde um *Conjunto de Julia* desconexo³ (poeira fractal);
- a cada ponto pertencente à fronteira do *Conjunto de Mandelbrot*, o correspondente *Conjunto de Julia* é um *esqueleto dendrítico* de área nula.

² Um conjunto S é conexo quando não pode ser dividido em dois subconjuntos fechados que não contenham nenhum ponto comum.

³ Um conjunto S é desconexo se não contiver nenhum intervalo, isto é, as componentes conexas são simples pontos.

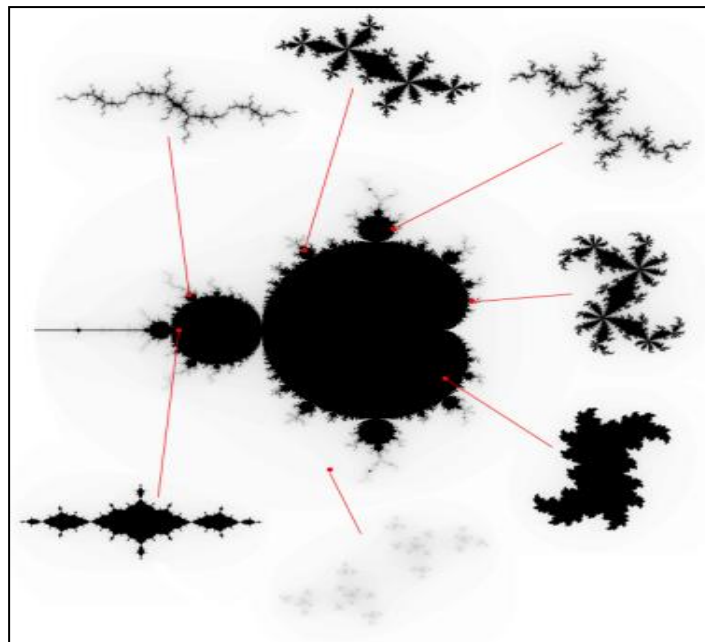


Figura 9 Conjuntos de Julia que podem ser encontrados no Conjunto de Mandelbrot

O *Conjunto de Mandelbrot* é usado como evidência do realismo matemático. Penrose argumenta que “ *O Conjunto de Mandelbrot não é uma invenção. É uma descoberta, tal como o Monte Everest está simplesmente lá.*” (in Lesmoir-Gordon, Rood, & Edney, 2001, p. 96). Está presente em várias estruturas do nosso mundo, desde matemáticas a pertencentes ao mundo natural e na arte, como a seguir se exemplifica.

Durante séculos, o *Método de Newton* foi usado para resolver equações por tentativas sucessivas cada vez mais próximas da solução, até que Arthur Cayley (1821-1895) descobriu que, entre as diferentes soluções, existe uma complexa área cinzenta. Um século depois, as imagens dos computadores revelaram que esta área cinzenta também é um fractal e que dentro dela existem cópias dos *Conjuntos de Julia* e do *Conjunto de Mandelbrot*.

Mitchel Feigenbaum descobriu, em 1978, que o facto do *Conjunto de Mandelbrot* aparecer num grande número de fractais, se deve ao fenómeno da universalidade - grandes classes de diferentes sistemas têm atractores similares.

A primeira impressão de Mandelbrot, quando viu um fractal pela primeira vez, foi de que as imagens eram familiares. Para além das suas características estarem presentes nos fenómenos naturais, montanhas, crescimento de organismos complexos, sistema

circulatório, entre outros, já as tinha encontrado, também, na arte. Observando a fronteira do *Conjunto de Mandelbrot*, encontrou modelos circulares evocativos da arte oriental, as *Mandalas* – desenhos meditativos do Budismo. Segundo Arthur C. Clark, “*O Conjunto de Mandelbrot parece, de facto, conter um número enorme de mandalas ou símbolos religiosos, os quais são encontrados em vitrais e, particularmente, na arte islâmica.*” (in Lesmoir-Gordon, Rood, & Edney, 2001, p. 156).

1.3 O Caos e os Fractais

Até à década de 70, o sonho iluminista do século XIX de uma Ciência Universal parecia estar posto de lado. A Ciência encontrava-se ramificada em micro-ciências estanques não coincidentes nem nos assuntos estudados, nem nos métodos de trabalho. No entanto, esta especialização crescente não conduzia a uma melhor compreensão do Universo por parte do Homem. Foi a descoberta dos fractais que permitiu uma concepção diferente do mundo com a revelação de fenómenos e comportamentos inesperados em sistemas aparentemente conhecidos. Este movimento colectivo do mundo da Ciência que agrupou pessoas oriundas de formações distintas identifica-se pelo nome de Caos.

Os primórdios da história do Caos remontam ao século XIX e ao matemático francês Henri Poincaré que ao estudar o “Problema dos três corpos”, acabou por nos deixar as pistas daquilo que seria a grande Matemática do século XX. Segundo James Gleick, o “Problema dos três corpos” consistia na seguinte questão: “*Quais são os comportamentos possíveis de um sistema constituído por três corpos que interagem entre si através de uma força gravitacional newtoniana?*” (2005, p. 15). A resolução deste problema, cujo interesse parecia ser somente académico, era uma questão de tempo, pois ninguém duvidava que este não se enquadrasse na Mecânica Clássica derivada das leis de Newton. Com o objectivo de uma melhor compreensão da Mecânica Celeste, Poincaré dedicou-se ao estudo do referido problema, tendo ficado surpreendido com o facto de num sistema de três corpos existirem problemas não verificáveis no “problema de dois corpos: “*... comportamentos extremamente irregulares, complexos e não-periódicos...*” (in Gleick, 2005, p. 17). Esta descoberta abalou todo o conhecimento da

altura, construído com base nas leis newtonianas, pondo em causa a própria estabilidade do sistema solar, o qual é constituído por um número superior de corpos. Esta contribuição de Poincaré para a Teoria do Caos ficou conhecida por “Bifurcação de Órbitas Homoclínicas”.

Poincaré foi o autor de outra contribuição importante para a Teoria do Caos com a sua abordagem inovadora no estudo das equações diferenciais. Antes, tentava-se resolvê-las encontrando a família de soluções, mas, se as equações não fossem lineares não era, salvo algumas excepções, tecnicamente possível solucioná-las. As equações estudadas por Poincaré não eram lineares, mas este considerava não ser necessário conhecer a natureza quantitativa e analítica das suas soluções para tirar conclusões sobre o comportamento qualitativo do sistema em análise. Privilegiando a análise das próprias equações para tirar as conclusões referidas, lançou as bases da Teoria Qualitativa ou Geométrica das Equações Diferenciais. Em 1881, Poincaré afirmou: *“cette étude qualitative [dês equations différentielles] aura par elle-même un intérêt du premier ordre...”* (in Gleick, 2005, p. 17). Esta teoria constitui a base do campo de investigação, iniciado no século XX, conhecido por Sistemas Dinâmicos.

Os estudos de Poincaré só chamaram a atenção em 1961, quando Edward Lorenz, um meteorologista norte-americano, criou um computador capaz de simular o tempo. A máquina registava, através da impressão de uma fileira de números, o clima de um dia, minuto a minuto. Lorenz verificou a inexistência de dois registos idênticos, observando a existência de um padrão com algumas variações.

O funcionamento da máquina baseava-se em regras numéricas – equações que exprimiam relações entre temperatura e pressão e entre pressão e velocidade do vento, obedecendo às leis de Newton. Lorenz pensava, na altura, que estas leis eram suficientes para que o seu computador criasse um mundo e conseguisse mantê-lo a funcionar até a eternidade. No entanto, com o objectivo de analisar mais rapidamente uma sequência de resultados, decidiu iniciar o processo a meio, ou seja, modificou as condições iniciais. Uma hora mais tarde, verificou que o tempo divergiu tanto da série anterior de resultados que, ao fim de algum tempo, toda a semelhança desapareceu. Concluiu, assim, que ao mudar ligeiramente as variáveis iniciais, os efeitos produzidos são desproporcionais. Chamou a esta descoberta o “Efeito Borboleta”, que constitui uma das sementes da nova Ciência: o Caos.

Tecnicamente, o Efeito Borboleta é considerado como uma dependência sensível das condições iniciais. Na opinião de James Gleick, *“Na ciência, tal como na vida, é bem conhecido que uma sequência de acontecimentos pode ter um ponto crítico capaz de ampliar pequenas alterações. Mas o Caos significa que tais pontos estão por todo o lado. São penetrantes.”* (2005, p. 49). Para Tomé, *“... informalmente podemos dizer que o Caos é um comportamento imprevisível e aparentemente aleatório que acontece num sistema que deveria ser governado por leis naturais bem definidas.”* (2003, p. 148). Este tipo de sistemas regidos por leis físicas bem definidas e de comportamento, aparentemente, previsível, chamam-se *sistemas determinísticos*. O caos que surge nestes sistemas é designado por *caos determinístico*.

Mandelbrot seguiu a sua própria via na história do Caos. Christopher Scholz conheceu o trabalho de Mandelbrot, na década de 60, quando se ocupava com questões sobre tremores de terra. Sabia-se, desde a década de 40, que a distribuição dos grandes e pequenos tremores de terra seguia um padrão matemático similar ao padrão que regia a distribuição de rendimentos numa economia de mercado. Scholz, a partir dos trabalhos de Mandelbrot, associou os fractais à descrição, classificação e medição dos objectos do seu universo científico, não sendo o único nesta abordagem pois vários cientistas das mais diversas áreas – física, química, sismologia, metalurgia, probabilidades e fisiologia, já estavam reunidos à volta das ideias unificadoras da Geometria Fractal. Na opinião de Scholz, o fractal:

“É um modelo que vos permite lidar com a série de modificações de dimensão da Terra. (...) Dá-vos instrumentos matemáticos e geométricos para descrição e previsão. Uma vez superadas as dificuldades iniciais, e entendido o paradigma, podem começar a medir coisas e a reflectir sobre elas de uma maneira nova. Vêem-nas de outra forma. Adquirem uma visão nova. Não tem nada a ver com a velha visão – é muito mais vasta.” (in Gleick, 2005, p. 146)

Com base no que foi referido, o Caos e os fractais podem-se considerar *“primos matemáticos”*. A Geometria Fractal surge como uma linguagem ilustrativa das formas do Caos, conferindo-lhe uma certa ordem.

2 Fractal: Conceito e Características

Para além de objectos matemáticos, os fractais ligaram-se, nos últimos anos, a várias áreas de investigação, sendo praticamente impossível reunir toda a informação sobre as suas aplicações. São, assim, inúmeras as suas definições, muitas delas específicas de cada uma das áreas de aplicação.

Na história da Matemática, são encontrados vários exemplos em que em primeiro lugar se dá um nome a um objecto, procedendo-se à sua definição (noção de curva ou de tangente a uma curva, por exemplo), e, posteriormente, com o amadurecimento das ideias, descobrem-se excepções, sendo necessária uma nova definição que as incluía. Mandelbrot criou o termo fractal a partir de uma palavra latina “*fractus*”, que significa irregular ou quebrado, apresentando as ideias fundamentais da Geometria Fractal sem recorrer a formalismos matemáticos. Escolheu seguir um método aberto e intuitivo, onde os avanços se efectuem por retoques sucessivos:

“Em 1975, inventei o termo fractal com o objectivo de ser capaz de atribuir um título ao meu primeiro Ensaio nesta matéria. Mas desde logo deixei de lhe atribuir uma definição matemática, pois senti que este conceito – tal como um bom vinho – necessita de um pouco mais de maturidade para ser “rotulado”.” (in Tomé, 2003, p. 49)

Mandelbrot define, pela primeira vez, fractal como um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior do que a sua dimensão topológica. Na sua obra *Objectos Fractais* (1998, p. 171), encontra-se a seguinte definição de fractal:

“O seu significado é intuitivo. Diz-se de uma figura geométrica ou de um objecto natural que combine as seguintes características:

- as suas partes têm a mesma forma ou estrutura que o todo, estando porém a uma escala diferente e podendo estar um pouco deformadas;*
- a sua forma é ou extremamente irregular ou extremamente interrompida ou fragmentada, assim como todo o resto, qualquer que seja a escala de observação;*
- contém “elementos distintos” cujas escalas são muito variadas e cobrem uma vasta gama.”*

No seguimento desta definição, Mandelbrot justificou a necessidade do termo *fractal*:

“Desde há cem anos que os matemáticos se ocupam de alguns dos conjuntos em questão, sem, contudo terem construído qualquer teoria em torno deles. Não sentiram, por isso, a necessidade de um termo para os designar. Depois de o autor mostrar que na natureza abundam objectos cujas representações matemáticas são objectos fractais, passou a haver necessidade de um termo que os designasse e que não tivesse qualquer outro significado paralelo. Todavia, esse termo ainda não possui uma definição matemática bem aceite. Além disso, é preciso notar que a utilização que lhe dou não faz qualquer distinção entre conjuntos matemáticos (a teoria) e objectos naturais (a realidade): emprega-se em todos os casos em que a sua generalidade, e a ambiguidade que daí resulta, ou são desejadas, ou não trazem qualquer inconveniente, ou não apresentam qualquer perigo, dado o contexto.” (1998, p. 171)

Esta definição actualmente está desactualizada, pois existem conjuntos, considerados fractais, que não obedecem a esta regra. De entre as novas definições, salienta-se a definição dada por Kenneth Falconer:

“A minha opinião pessoal é que a definição de fractal deveria ser encarada da mesma forma que um biólogo encara a definição de “vida”. Não há definição sólida ou segura, mas apenas uma lista de propriedades características de um ser vivo. (...) Da mesma forma, parece melhor interpretar um fractal como um conjunto que tem propriedades como as que serão indicadas a seguir, do que procurar uma definição precisa a qual iria, quase certamente, excluir alguns casos interessantes. (...) Quando nos referimos a um conjunto F como um fractal, tipicamente teremos o seguinte em mente:

- *F tem estrutura fina, isto é, detalhe em escalas arbitrariamente pequenas;*
- *F é demasiado irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional, tanto pontualmente como globalmente;*
- *frequentemente F tem alguma forma de auto-semelhança, talvez aproximada ou estatística;*
- *habitualmente, a dimensão fractal de F (definida de alguma forma) é maior que a sua dimensão topológica;*
- *na maior parte dos casos de interesse, F é definido de uma forma muito simples, talvez recursivamente.”* (2003, p. xxv)

Importa salientar que os *fractais verdadeiros* não existem na realidade, pois os objectos naturais não apresentam estrutura detalhada em todas as escalas, ou se a apresentarem, não é possível observá-la em toda a sua extensão. Os fractais são apenas uma aproximação, no entanto, são modelos melhores do que as estruturas geométricas clássicas para descrever um objecto que possua estruturas detalhadas numa grande

gama de escalas como, por exemplo, as linhas costeiras modeladas pela *Curva de Koch* ou os fractais da mesma família.

Os fractais apresentam duas características principais: auto-semelhança e dimensão fractal, explicadas nas secções seguintes.

2.1 Auto-Semelhança

Existem fractais que são completamente caracterizados e definidos pelas suas propriedades de auto-semelhança. Considere-se o exemplo de um objecto natural com a propriedade de auto-semelhante, a couve-flor. Não é um fractal matemático clássico, mas é uma estrutura natural em que esta propriedade é revelada sem necessidade de recorrer a qualquer tipo de Matemática. A cabeça da couve-flor contém ramos ou partes que quando removidas e comparadas com o todo, apresentam praticamente a mesma estrutura numa escala de observação menor. Cada um destes ramos pode ser decomposto em ramos menores que também são muito similares quer no todo, quer nos seus predecessores. No entanto, chega-se a uma altura em que deixa de ser razoável considerar cópias diminutas do objecto fractal completo, pois as partes nunca são exactamente iguais ao todo, podendo-se falar antes de auto-afinidade. Matematicamente, a propriedade de auto-semelhança dos fractais verifica-se em todas as iterações até ao infinito, estando, por isso, ligada ao conceito de limite.

A auto-semelhança é uma extensão de uma das mais importantes noções de Geometria elementar: a semelhança de figuras. Diz-se que duas figuras são semelhantes quando têm a mesma forma, independentemente do tamanho de cada uma, os ângulos correspondentes são iguais e os segmentos de recta correspondentes directamente proporcionais sendo a constante de proporcionalidade directa designada por razão de semelhança. Isto é, uma figura é transformada noutra semelhante através de uma *transformação de semelhança*, que consiste numa composição envolvendo uma razão de semelhança, rotações e translações. Adicionalmente, podem surgir simetrias.

A auto-semelhança, quer em objectos fractais, quer em fractais puramente matemáticos, pode-se apresentar em diferentes graus. Para exemplificar, observem-se, na Figura 10, o *Triângulo de Sierpinski*, uma árvore fractal de dois ramos e uma estrutura

apenas auto-semelhante no ponto central. No *Triângulo de Sierpinski*, cada uma das suas cópias está encaixada nas outras e a propriedade de auto-semelhança revela-se em toda a extensão do fractal. Na árvore fractal de dois ramos, a propriedade de auto-semelhança verifica-se nas extremidades dos ramos e não na árvore inteira: a estrutura é constituída por um tronco e por duas cópias reduzidas do todo; nas extremidades de cada uma das cópias também se encontram cópias cada vez mais pequenas e assim por diante. A terceira estrutura é apenas auto-semelhante na parte central.

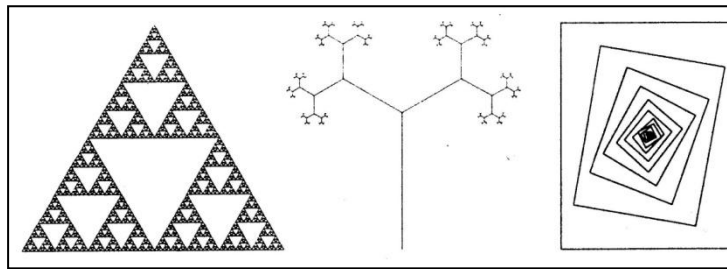


Figura 10 Diferentes graus de auto-semelhança

A característica de auto-semelhança não é a única presente na maior parte dos fractais fundamentalmente caracterizados pela sua dimensão.

2.2 Dimensão

No início do século XX, uma das controvérsias que surgiu foi o conceito de dimensão e as suas propriedades. Segundo Peitgen *et al.* “A ideia intuitiva de dimensão de um espaço associa-a ao número de parâmetros independentes (coordenadas) que são necessárias para descrever, de maneira única, os seus pontos. É, portanto, um número inteiro.” (in Martins, 1998, p. 46)

O aparecimento das curvas que preenchem o plano como, por exemplo, a *Curva de Hilbert* foi fundamental para o desenvolvimento do conceito de curva. Em curvas com esta característica, era posta em causa a percepção intuitiva das curvas como objectos com apenas uma dimensão, já que este tipo de curvas preenche a totalidade do plano. Para caracterizar estas figuras que surgiram nos finais do século XIX, inícios do séc. XX, Mandelbrot afirmou:

“... uma figura cuja dimensão se situe entre 1 e 2 deverá ser mais “afilada” que uma superfície ordinária, sendo contudo, mais “maciça” que uma linha ordinária. Em particular, se se tratar de uma curva, deverá ter uma superfície nula, mas um comprimento infinito. Da mesma maneira, se a sua dimensão estiver compreendida entre 2 e 3, deverá ter um volume nulo e uma superfície infinita.” (1998, p. 20)

A história das várias definições de dimensão envolve o nome dos maiores matemáticos dos finais do século XIX e inícios do século XX: Poincaré, Lebesgue (1875 – 1912), Brouwer (1881 – 1966), Cantor, Menger (1840 – 1921), Hurewicz (1904 – 1956), Alexandroff (1896 – 1982), Pontrjagin (1908 – 1988), Peano, Urysohn (1898 – 1924), Cech (1893 – 1960) e Hilbert (1862 – 1943).

Em contraponto com a dimensão topológica das figuras euclidianas, descrita a seguir, vários matemáticos, começando por Hausdorff, em 1919, acrescentaram que alguns dos fractais idealizados até então têm dimensão não inteira que pode ser uma fracção, um irracional ou a solução de uma equação.

Para Mandelbrot, *“Diz-se que dois espaços topológicos têm a mesma dimensão se entre os pontos de um e de outro existir uma correspondência contínua e unívoca.”* (1998, p. 181). Em 1912, Poincaré apresentou, intuitivamente, o conceito de dimensão topológica (*in* Martins, 1998, p. 47):

- uma recta diz-se um contínuo de dimensão 1, porque pode ser dividida por um ponto, que se diz um contínuo de dimensão 0;
- um plano diz-se um contínuo de dimensão 2, porque pode ser dividida por uma recta, que se diz um contínuo de dimensão 1;
- uma superfície diz-se um contínuo de dimensão 3, porque pode ser dividida por um plano que se diz um contínuo de dimensão 2.

Em suma, define-se um contínuo de dimensão n quando se pode decompor em várias partes através de vários cortes de dimensão $n - 1$.

Esta definição de dimensão topológica foi aperfeiçoada, sucessivamente, por Brouwer (1914), Menger (1926) e Urysohn (1928), resumindo-se, segundo Ian Stewart (*in* Tomé, 2003, p. 117), do seguinte modo:

- o conjunto vazio tem dimensão igual a -1 ;
- se as fronteiras de pequenas vizinhanças de todos os pontos no espaço tiverem dimensão $k - 1$, o espaço tem dimensão k ;

- as dimensões superiores definem-se por recorrência.

Ao conceito de fractal está associado o conceito de dimensão fractal ou de auto-semelhança, dimensão de Hausdorff ou dimensão *box-counting* apresentados a seguir.

2.2.1 Dimensão de Auto-Semelhança

O cálculo da dimensão de auto-semelhança aplica-se a figuras estritamente auto-semelhantes, ou seja, a figuras que para qualquer um dos seus pontos, existe uma vizinhança que contém uma parte semelhante ao todo.

A fórmula que define a dimensão de auto-semelhança obtém-se a partir da análise de figuras euclidianas estritamente auto-semelhantes tais como um segmento de recta, um quadrado ou um cubo, divididos em partes idênticas entre si e ao todo pela razão de semelhança de redução s . Iniciando-se, esta análise, a partir de um segmento de recta e razão de semelhança de redução de $1/7$, são necessárias sete cópias reduzidas para restaurar o segmento de recta original, obtendo-se a relação $7 = (1/7)^{-1}$. De seguida, considere-se um quadrado de dimensão 2 e razão de semelhança de redução de $1/4$. Neste caso, são necessárias dezasseis cópias reduzidas para preencher o quadrado original, verificando-se a igualdade $16 = (1/4)^{-2}$. Finalmente, para um cubo são necessárias vinte e sete cópias reduzidas para preencher o cubo original, quando a razão de semelhança de redução é de $1/3$, obtendo-se a relação $27 = (1/3)^{-3}$. Assim, numa estrutura auto-semelhante, a relação entre a razão de semelhança de redução, s , e o número de cópias em que a estrutura pode ser dividida, a , é dada por $a = s^{-D}$, sendo $D = \log a / \log(1/s)$.

Como exemplo de cálculo da dimensão de auto-semelhança de objectos fractais é apresentado o cálculo da *dimensão de auto-semelhança do Triângulo de Sierpinski*, ilustrado na Figura 11. Este fractal pode ser dividido em três partes ($a = 3$) que podem ser ampliadas por uma razão de semelhança igual a 2, Figura 11, transformando-se cada uma delas no triângulo original. Usando a fórmula da dimensão de auto-semelhança, obtém-se $D = \log 3 / \log 2 \approx 1,585$. A dimensão de auto-semelhança do *Triângulo de Sierpinski* não é um inteiro, situando-se entre 1 e 2.

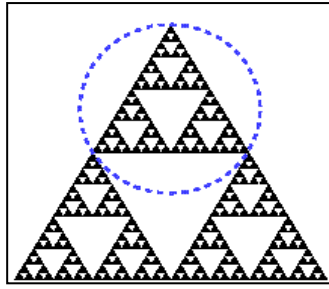


Figura 11 Auto-semelhança no Triângulo de Sierpinski

2.2.2 Dimensão de Hausdorff

Para definir a dimensão de Hausdorff restrita a conjuntos $A \subseteq \mathfrak{R}^n$, é necessário introduzir algumas noções topológicas.

Definição 1 *Seja U um conjunto não vazio de \mathfrak{R}^n . O diâmetro de U , denota-se por $\text{diam}(U)$, é a maior das distâncias euclidianas entre qualquer par de pontos de U e $\text{diam}(U) = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$.*

Definição 2 *O subconjunto U de \mathfrak{R}^n é aberto para qualquer $x \in U$ se existir uma bola de raio $\epsilon > 0$ e centro em x , $B_\epsilon(x) = \{y \in U : d(x, y) < \epsilon\} \subset U$. Se $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ é uma família numerável (ou finita) de conjuntos abertos tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, diz-se que é uma cobertura aberta de A .*

Definição 3 *Seja A um subconjunto de \mathfrak{R}^n e $s \in \mathbb{R}$ e ϵ números reais não negativos. Para qualquer $\epsilon > 0$, define-se a medida s -dimensional de Hausdorff:*

$$h_\epsilon^s(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s : \{U_i, U_2, \dots\} \text{ é uma cobertura de } A \text{ com o } \text{diam}(U_i) < \epsilon\}.$$

O resultado da medida s -dimensional de Hausdorff pode ser um valor finito ou infinito. À medida que ϵ diminui, o número de coberturas possíveis de A também diminui, aumentando o valor do ínfimo, por se aproximar de um limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, que pode ser um valor finito ou infinito. Logo a medida s -dimensional de Hausdorff do conjunto A é dada por: $h^s(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon^s(A)$.

Aplicando a definição de medida s -dimensional de Hausdorff a um conjunto vazio, verifica-se que é 0 e que $h^s(A) \leq h^s(B)$ se $A \subset B$. Tem-se, também, que $h^s(A)$

pode ser infinita e que s não é necessariamente um inteiro. Hausdorff provou que, para qualquer conjunto A , há um número $D_H(A)$ tal que:

$$h^s(A) = \begin{cases} 0 & \text{para } s > D_H(A) \\ \infty & \text{para } s < D_H(A) \end{cases}$$

Este número, $D_H(A)$, é a definição da dimensão de Hausdorff, propriamente dita. Assim, tem-se que a dimensão de Hausdorff, $D_H(A)$ é o ínfimo de s tal que a medida s – dimensional de Hausdorff de A é zero, ou, é o supremo de s tal que a medida s – dimensional de Hausdorff é infinita.

$$D_H(A) = \inf\{s: h^s(A) = 0\} = \sup\{s: h^s(A) = \infty\}$$

No caso de $s = D_H(A)$, $h^s(A)$ pode ser zero, infinito ou qualquer número real positivo. A dimensão de Hausdorff apresenta, também, as seguintes propriedades, descritas em Peitgen *et al.* (2004, p. 208):

- (1) Se $A \subset \mathbb{R}^n$, então $D_H(A) \leq n$.
- (2) Se $A \subset B$, então $D_H(A) \leq D_H(B)$.
- (3) Se A é um conjunto numerável, então $D_H(A) = 0$.
- (4) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ e $D_H < 1$, então A é totalmente desconexo.
- (5) Seja C_∞ o conjunto de Cantor. Então $D_H(C_\infty) = \log 2 / \log 3$.

Demonstração da propriedade 5 Começa-se por considerar que $0 < h^s(C_\infty) < \infty$ para $s = D_H(C_\infty)$. C_∞ divide-se em duas partes, $C_L = C_\infty \cap [0, 1/3]$ e $C_R = C_\infty \cap [2/3, 1]$, as quais são ambas semelhantes a C_∞ , mas reduzidas por uma razão de semelhança $c = 1 / 3$. Logo,

$$h^s(C_\infty) = h^s(C_L) + h^s(C_R) = c^s h^s(C_\infty) + c^s h^s(C_\infty).$$

Dividindo-se este resultado por $h^s(C_\infty) \neq 0$, tem-se $1 = 2c^s$ ou $s = \log 2 / \log 3$. \square

O cálculo da dimensão de Hausdorff é bastante difícil, o que a leva a ser preterida pelo cálculo de outras dimensões fractais como a dimensão *box-counting*, que se apresenta na secção seguinte.

2.2.2 Dimensão Box-Counting

A dimensão *box-counting* é a versão final do conceito de dimensão fractal de Mandelbrot. Este conceito está relacionado com a dimensão de auto-semelhança, com o

mesmo resultado em muitos casos, mas diferente noutros. Este novo conceito é utilizado quando o objecto em estudo não é auto-semelhante na sua totalidade. A dimensão *box-counting* é um método sistemático de medida que pode ser aplicado a qualquer estrutura do plano e adaptada para estruturas no espaço. Segundo Peitgen *et al.* (2004, p. 204) é uma das dimensões mais utilizadas em todas as ciências dada a facilidade e rapidez com que o computador executa os procedimentos necessários ao seu cálculo.

Para determinar a *dimensão box-counting* de uma estrutura, é utilizado o seguinte método:

1. A estrutura geométrica em estudo é revestida por uma grelha quadriculada, (Figura 12), em que os lados de cada quadrícula medem r (convenciona-se que nesta malha inicial r é um valor unitário) e $N(r)$ é o número de quadrículas que contêm parte da estrutura considerada.

2. A operação anterior é repetida para sucessivos valores de r cada vez menores (por uma questão prática é aconselhável que o tamanho de cada quadrícula seja reduzido por uma razão de $1/2$ (Figura 14). De cada vez que se repete o processo é registado o número de quadrículas ocupado, ou seja, o valor de $N(r)$.

3. Usando uma escala logarítmica, representam-se graficamente os pares de pontos obtidos em cada uma das operações anteriores, marcando-se no eixo das abcissas os valores dos logaritmos de $1/r$ e no eixo das ordenadas os valores correspondentes dos logaritmos de $N(r)$ (Figura 13).

4. Tenta-se ajustar uma recta aos pontos representados, sendo o seu declive, D_b , uma estimativa da *dimensão fractal box-counting*.



Figura 12 Primeira etapa de cálculo da dimensão “box-counting” ($r = 50 \text{ Km}$, $N=35$)

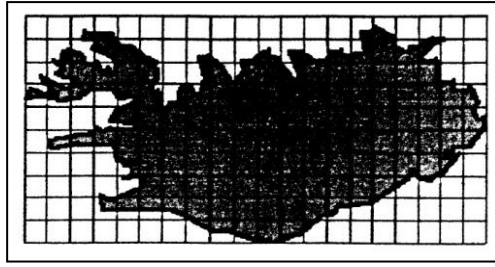


Figura 14 Segunda etapa de cálculo da dimensão “box-counting” ($r=25 \text{ Km}$, $N=76$)

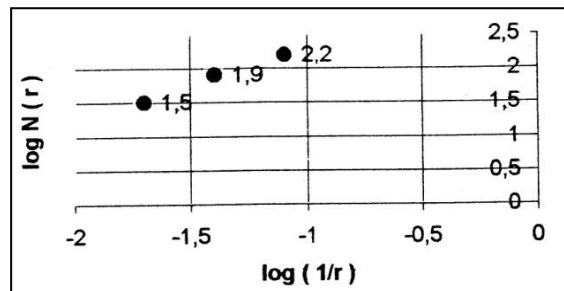


Figura 13 Etapa final de cálculo da dimensão “box-counting”

Através deste processo, são obtidas as contagens, $N(2^{-k})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, sendo a estimativa da dimensão *box-counting* dada por:

$$D_b = \frac{\log N(2^{-(k+1)}) - \log N(2^{-k})}{\log 2^{k+1} - \log 2^k} = \log_2 \frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^{-k})},$$

em que $N(2^{-(k+1)})$ representa o número de quadrículas ocupadas numa grelha e $N(2^{-k})$ representa o número de quadrículas ocupadas na grelha anterior.

A dimensão *box-counting* apresenta várias vantagens relativamente às outras dimensões fractais e é a mais usada, dado que os seus procedimentos são facilmente computorizáveis. O seu cálculo pode ser aplicado a todas as dimensões fractais, independentemente de serem estritamente auto-semelhantes ou não. Outra grande vantagem é que através desta dimensão se pode calcular a dimensão fractal de objectos fractais tridimensionais, usando cubos em vez de quadrículas. A dimensão *box-counting* do *Conjunto de Cantor*, bem como a de fractais deste tipo, também pode ser calculada substituindo as quadrículas por pequenos intervalos.

Tal como acontece na dimensão de auto-semelhança, a dimensão *box-counting* de uma estrutura fractal nem sempre é igual à dimensão de Hausdorff, embora sejam coincidentes num grande número de estruturas fractais. Se numa estrutura a sua

dimensão de auto-semelhança não for um inteiro, não significa que seja um fractal. Um exemplo deste facto é o conjunto $\{0, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ cuja dimensão é $1/2$.

CAPÍTULO III

“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.” Irene de Albuquerque

Os fractais são considerados como uma colecção de imagens de rara beleza. No entanto, professores e estudantes acham o seu estudo não só intrigante, como conseguem encontrar uma forte conexão com tópicos matemáticos presentes nos currículos matemáticos contemporâneos. A exploração dos fractais também permite desenvolver uma das competências matemáticas muitas vezes relegada para segundo plano, o desenvolvimento do sentido estético. A visualização de um fractal permite captar a sua beleza e harmonia, contrariando a ideia de que a Matemática é uma ciência fria.

Neste capítulo, são apresentados os programas do ensino básico e secundário portugueses da disciplina de Matemática, e, aproveitando as orientações dos respectivos programas, sugere-se a introdução e exploração dos fractais clássicos nos diferentes níveis de aprendizagem. Segue-se a descrição do processo de construção e das principais características dos fractais que poderão ser usadas na introdução e exploração de diversos conteúdos programáticos. O capítulo termina com a apresentação de quatro tarefas de exploração do triângulo de Sierpinski desde o 1º ciclo do ensino básico até ao nível secundário.

1. Fractais nos Programas do Ensino Básico e Secundário

Nas linhas orientadoras do *Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte, et al., 2007) são definidas as finalidades e objectivos gerais do ensino da Matemática e as competências transversais a toda a aprendizagem da Matemática.

“a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados. Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da:

- compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático;

- capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática;

- capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;

- capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega.

b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência. Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da:

-capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico;

-capacidade de apreciar aspectos estéticos da Matemática.” (Ponte, et al., 2007, p. 3)

A estas finalidades associa-se um conjunto de nove objectivos gerais, onde a exploração de fractais pode ser utilizada:

“...Os alunos devem desenvolver uma compreensão da Matemática. Isto é, devem ser capazes de:

- *reconhecer regularidades e compreender relações.*

Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas. Isto é, devem ser capazes de:

- *identificar e usar conexões entre ideias matemáticas;*
- *compreender como as ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo.*

Os alunos devem reconhecer a Matemática como um todo integrado, estabelecendo conexões entre aquilo que estão a aprender em cada momento, mas também ser capazes de a usar em contextos não matemáticos. O estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar.

Os alunos devem ser capazes de fazer Matemática de modo autónomo. Isto é, devem ser capazes de:

- *explorar regularidades e formular e investigar conjecturas matemáticas.*

Não se espera, naturalmente, que os alunos descubram ou inventem novos resultados matemáticos significativos. Espera-se, isso sim, que sejam capazes de realizar actividades matemáticas com autonomia, tanto na reso-

lução de problemas como na exploração de regularidades, formulando e testando conjecturas, sendo capazes de as analisar e sustentar. Deste modo, poderão sentir-se mais envolvidos na elaboração do seu conhecimento matemático e conseguir uma apropriação mais profunda desse conhecimento.

Os alunos devem ser capazes de apreciar a Matemática. Isto é, devem ser capazes de:

- *reconhecer a beleza das formas, regularidades e estruturas matemáticas;*
- *mostrar conhecimento da História da Matemática e ter apreço pelo seu contributo para a cultura e para o desenvolvimento da sociedade contemporânea.*

Os alunos devem desenvolver uma predisposição para usar a Matemática em contexto escolar e não escolar, apreciar os seus aspectos estéticos, desenvolver uma visão adequada à natureza desta ciência e uma perspectiva positiva sobre o seu papel e utilização. A compreensão dos conceitos e relações matemáticas, o estímulo e desafio que tarefas com carácter problemático podem proporcionar, e o envolvimento na exploração de regularidades, formas e relações matemáticas, são elementos muito importantes para o desenvolvimento de determinadas ideias matemáticas, apresentando-a como uma ciência viva e em evolução.” (Ponte, et al., 2007, pp. 4, 5, 6, 7)

O desenvolvimento das duas finalidades fundamentais vai de encontro à exploração de fractais. Os fractais permitem estabelecer conexões com outras ciências e conteúdos programáticos, suprir as deficiências da Geometria Euclidiana no estudo das formas da natureza (que exigem uma modelação com fractais) através do desenvolvimento de projectos sobre temas transversais que permitam a compreensão de variados fenómenos. Proporcionam a difusão e acesso às novas tecnologias nos diferentes níveis de escolaridade e possibilitam o desenvolvimento do sentido estético.

O *Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* surge estruturado em função de três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática: a resolução de problemas e o raciocínio e comunicação matemáticos. O estudo dos fractais contribui para o desenvolvimento destas capacidades transversais, dado que a sua exploração permite a formulação de problemas estruturados para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos, a construção de cadeias argumentativas e uma participação construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos.

A exploração de fractais neste nível de ensino pode ser introduzida desde o primeiro ao 3º ciclo, como a seguir se fundamenta.

No 1º ciclo do ensino básico, a exploração de fractais pode ser usada no desenvolvimento dos conteúdos da unidade didáctica, *Geometria e Medida*. Nas indicações metodológicas para este ciclo de ensino, pode ler-se:

“A abordagem de aspectos históricos, artísticos e culturais relacionados com a Geometria favorece a exploração e compreensão dos tópicos abordados. Por exemplo, observar trabalhos de arte decorativa (azulejos, bordados e tapetes) pode entusiasmar os alunos a explorarem aspectos relacionados com simetrias e pavimentações e a perceberem-se da beleza visual que a Matemática pode proporcionar.” (Ponte, et al., 2007, p. 21)

A exploração somente de frisos e pavimentações é um pouco redutora, uma vez que a observação de fractais clássicos permite a identificação não só de simetrias, mas também de translações, reflexões, reflexões deslizantes e rotações. Os alunos do 1º ciclo do ensino básico podem construir ou desenhar fractais clássicos através de materiais manipuláveis ou de dobragens ou recortes em papel.

No 2º ciclo do ensino básico, a exploração de fractais permite a identificação e estudo de alguns conceitos de duas grandes unidades didácticas designadamente a *Álgebra* e a *Geometria*. Relativamente à *Álgebra*, encontra-se nas indicações metodológicas, o seguinte: *“A investigação de regularidades, tanto em sequências numéricas finitas ou infinitas (sucessões), como em representações geométricas deve ser tomada como base para o desenvolvimento do pensamento algébrico”*. (2007, p. 40)

As actividades de contagem, por exemplo, do número de triângulos no final de cada iteração do Triângulo de Sierpinski, vão de encontro à indicação metodológica supra-citada. As isometrias que deverão ser estudadas no 2º ciclo do ensino básico - reflexões, rotações e translações, podem ser identificadas em fractais e não somente em obras de arte, frisos e rosáceas, como sugerido nas indicações metodológicas desta unidade didáctica.

No 3º ciclo do ensino básico, a exploração dos fractais continua a ser importante na introdução e estudo de conceitos das duas unidades didácticas, *Álgebra e Geometria*. No estudo da *Geometria*, a utilização e exploração de software de *Geometria Dinâmica* ganha uma importância acrescida no 3º ciclo do ensino básico, sendo, uma das formas de desenvolver esta competência, a criação de fractais clássicos como, por exemplo, o Triângulo de Sierpinski. O estudo e exploração dos fractais pode também ser utilizado para o estudo da semelhança de figuras que se inicia no 3º ciclo do ensino básico.

Tal como no programa do ensino básico, o programa do ensino secundário não contém especificamente o tema *Fractais* em nenhuma unidade didáctica, mas a sua abordagem é claramente sugerida nas indicações metodológicas de desenvolvimento de conteúdos de alguns temas de aprendizagem do ensino secundário. A possibilidade do uso de actividades de exploração de fractais é extremamente importante, como se pode constatar na explicação sobre o desenvolvimento do programa de Matemática A do ensino secundário:

“ As indicações metodológicas que acompanham o desenvolvimento dos temas esclarecem as questões estratégicas da metodologia de ensino e do “fazer matemática”, definem as formas de abordar conceitos e de estabelecer conexões, de utilizar tecnologia, de experimentar, etc., e só por isso são importantes e imprescindíveis partes do programa a par dos conteúdos. Podemos mesmo dizer que a forma de aprender a fazer matemática é um conteúdo do ensino de Matemática. Para além disso, as indicações metodológicas são importantes e imprescindíveis neste programa já que é nelas que se estabelecem em pormenor, para além da forma de abordagem. Resumindo, cada conteúdo do ensino secundário de Matemática não está mais do que esboçado no desenvolvimento dos temas; para efeitos deste programa, as indicações metodológicas não são simples indicações e concorrem até para a definição dos conteúdos de ensino.” (Silva J. C., Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2001, p. 18)

O programa de Matemática A do 10º ano (Silva J. C., Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2001) contém um módulo inicial que se baseia na resolução de problemas de aplicação de conceitos essenciais do 3º ciclo do ensino básico. Na sua descrição, podemos encontrar o seguinte:

“ O professor deverá propor neste módulo problemas ou actividades aos estudantes que permitam considerar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o Ensino Secundário. Poderá partir de uma determinada situação, de um determinado tema, procurando evidenciar todas as conexões com outros temas tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática. Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa, encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas

também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas.

Os problemas a tratar neste módulo devem integrar-se essencialmente nos temas Números, Geometria e Álgebra ...

Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.” (Silva J. C., Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2001, p. 23)

A exploração dos fractais clássicos permite o desenvolvimento das competências matemáticas a adquirir neste módulo e, ao mesmo tempo, rever e inter-relacionar os conteúdos de sequências e regularidades, semelhanças e isometrias, leccionados no 3º ciclo do ensino básico.

Os fractais e a Teoria do Caos permitem contrariar o conceito enraizado da Matemática como uma disciplina estática em que os conceitos estão descobertos, o que pode ser aproveitado para desenvolver um dos temas transversais do programa de Matemática A do ensino secundário, a *Perspectiva Histórico-Cultural*. Na descrição deste tema transversal, pode ler-se:

“Actividades com uma perspectiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção e em constante interacção com outras ciências. Proporcionam também excelentes oportunidades para pesquisa de documentação. A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura.” (Silva J. C., Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2001, p. 12)

2. Estudo e Construção de Alguns Fractais

A introdução da Geometria Fractal no ensino básico e secundário permite a aplicação de conhecimentos adquiridos a novas situações e a exploração de conceitos matemáticos de uma forma diferente, nomeadamente, através da construção de modelos e tabelas que acompanham os resultados e a evolução nas sucessivas iterações. Os fractais podem ser utilizados de forma criativa para ilustrar o cálculo de áreas e períme-

tros de polígonos ou volumes de poliedros e, dado que as figuras não podem ser totalmente desenhadas, estimulam ainda o pensamento abstracto.

Nesta secção, exploramos as características principais de alguns fractais que podem ser utilizadas para fins pedagógicos, e o seu processo de construção, nomeadamente, a *Curva de Von Koch*, o *Floco de Neve de Von Koch*, o *Conjunto de Cantor*, o *Triângulo de Sierpinski*, a *Esponja de Menger* e a *Pirâmide de Sierpinski*.

2.1 Curva de Von Koch

A *Curva de Von Koch* apresenta propriedades geométricas interessantes, diferentes das que aparecem nas figuras da Geometria Euclidiana. Permite trabalhar, no ensino básico, os conceitos de semelhança de figuras e isometrias, mais especificamente, as rotações e, no ensino secundário, os conceitos de sucessão, monotonia e convergência de sucessões, limites e infinitamente grandes.

A construção desta curva inicia-se com um segmento de recta cujo terço médio é substituído por um triângulo equilátero ao qual se suprime a base. Obtém-se uma linha quebrada com quatro segmentos de recta, cada um tendo comprimento três vezes menor que o segmento inicial. Repetindo-se este processo sobre cada um dos segmentos gerados pela iteração anterior, o comprimento de cada um dos segmentos resultantes é $(1/3)^n$ do segmento original. A *Curva de Von Koch* é o limite deste processo recursivo. A Figura 15 representa as seis primeiras iterações da construção da *Curva de Koch*, observando-se, na última iteração, uma boa aproximação da *Curva de Koch*.

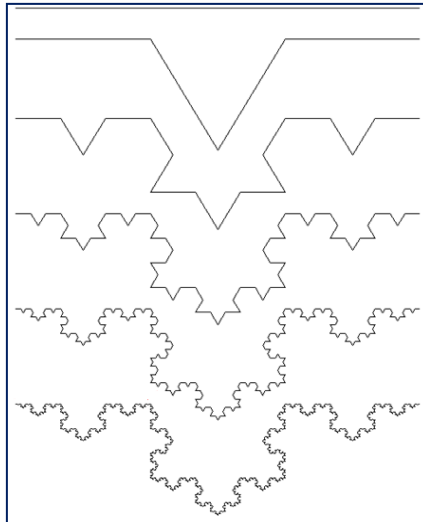


Figura 15 Construção da Curva de Koch

Propriedade 1 A *Curva de Koch* tem perímetro infinito.

Demonstração: Calcula-se o comprimento da curva em cada uma das suas iterações, uma vez que cada etapa de construção é construída por um conjunto de segmentos de recta cujos comprimentos são possíveis de determinar. Pode-se observar a evolução do conjunto total na Tabela 1. À medida que se vai avançando cada uma das iterações na construção da *Curva de Koch*, o comprimento desta curva vai aumentando por intermédio de uma razão de semelhança igual a $4/3$ e sem nenhum limite, ou seja, a *Curva de Koch* é infinitamente longa. \square

Iteração	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total
0	1	1	1
1	4	$1/3$	$4 \times 1/3 = (4/3) = 1,333\dots$
2	$16 = 4^2$	$1/9 = (1/3)^2$	$4^2 \times (1/3)^2 = (4/3)^2 = 1,777\dots$
3	$64 = 4^3$	$1/27 = (1/3)^3$	$4^3 \times (1/3)^3 = (4/3)^3 = 2,370\dots$
4	$256 = 4^4$	$1/81 = (1/3)^4$	$(4/3)^4 = 3,160\dots$
5	$1024 = 4^5$	$1/243 = (1/3)^5$	$(4/3)^5 = 4,214\dots$
6	$4096 = 4^6$	$1/729 = (1/3)^6$	$(4/3)^6 = 5,619\dots$
7	$16384 = 4^7$	$1/2187 = (1/3)^7$	$(4/3)^7 = 7,492\dots$
...
n	4^n	$(1/3)^n$	$(4/3)^n$

Tabela 1 Variação do comprimento total da Curva de Koch

Propriedade 2 A *Curva de Koch* tem área finita.

Demonstração: Esta área é determinada pela soma das áreas dos triângulos que se vão adicionando à curva em cada uma das etapas de construção. Na iteração 0, apenas se tem uma recta inicial, mas na iteração 1 já se tem um triângulo equilátero, como se pode ver na Figura 16, cuja área, designada por A , pode ser calculada a partir das suas dimensões.

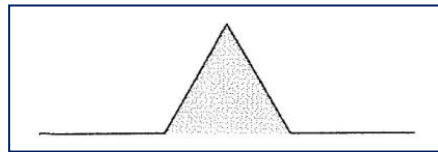


Figura 16 Área sobre a *Curva de Koch* após a 1ª iteração

Na iteração 2, são adicionados quatro triângulos equiláteros (Figura 17). Cada uma das bases e alturas destes quatro novos triângulos mede $1/3$ do valor da base e da altura do triângulo inicial, sendo a área de cada triângulo igual a $1/9 A$. A área correspondente à iteração 2 é $A + 4/9 A$. No final da iteração 2, acrescentaram-se dezasseis novos triângulos menores de $1/81 A$. A área total é dada por $A + (4/9)A + (4/9)^2 A$ e, na n -ésima iteração, por:

$$A \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{9}{5} A .$$

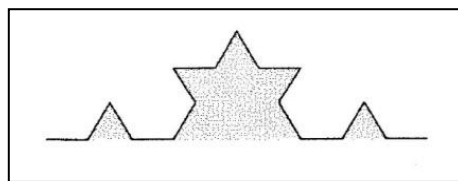


Figura 17 Área sobre a *Curva de Koch* após a 2ª iteração

Conclui-se que a área da *Curva de Koch*, entre a primeira e a n -ésima iterações, é finita e tende, no limite, para $9/5 A$, sendo A a área do triângulo equilátero da primeira iteração. \square

Propriedade 3 A *Curva de Koch* contém um número infinito de cópias auto-semelhantes.

Na Figura 18, pode-se observar que as duas cópias centrais são versões mais pequenas da curva inteira que sofreram, cada uma delas, uma rotação. A primeira cópia da Curva de Koch tem o seu centro de rotação no seu extremo esquerdo e sofreu uma rotação de 60° no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. A segunda cópia, por sua vez, tem o seu centro de rotação no seu extremo direito e sofreu uma rotação de 60° no sentido dos ponteiros do relógio. Esta característica pode-se observar em todas as cópias auto-semelhantes da Curva de Koch, variando em cada uma destas a caracterização da rotação sofrida. Consoante a escala de observação (razão de semelhança de redução) que se utiliza, também se pode calcular o número de cópias auto-semelhantes, como se exemplifica na Tabela 2.

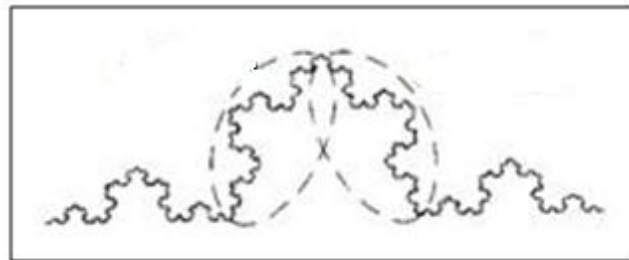


Figura 18 Cópias auto-semelhantes da Curva de Koch

Curva de Koch			
Razão de semelhança	1	3	9
Número de cópias auto-semelhantes	1	4	16

Tabela 2 Número de cópias auto-semelhantes da Curva de Koch

Esta curva tem uma variante, o *Floco de Neve de Von Koch*, que também pode ser utilizada para explorar conceitos matemáticos do ensino básico e secundário, uma vez que possui as mesmas características da *Curva de Koch*.

2.2 Floco de Neve de Von Koch

O Floco de Neve de Von Koch apresenta as mesmas propriedades e auto-similaridade a várias escalas da Curva de Koch. Este fractal, que possui perímetro infinito e área finita, suscitará naturalmente a curiosidade dos alunos. A sua construção e estudo permitem consolidar, no ensino secundário, conhecimentos envolvendo fórmulas algébricas, áreas e perímetros e trabalhar conceitos de sucessão, monotonia e convergência de sucessões, limites, infinitamente grandes, progressões geométricas e termos gerais de progressões geométricas. Relativamente ao ensino básico, podem ser trabalhados, tal como na Curva de Von Koch, conceitos relativos a semelhança de figuras e isometrias.

A construção do *Floco de Neve de Von Koch* inicia-se com um triângulo equilátero (iteração 0). De seguida, cada um dos seus lados é dividido em três partes iguais, retirando-se a do meio, que é substituída por um triângulo equilátero sem um dos lados (iteração 1). Os três segmentos de cada um dos lados são transformados, assim, em quatro segmentos, passando-se a ter no final da primeira iteração $3 \times 4 = 12$ segmentos. Continuando o mesmo processo, ou seja, substituindo-se sempre cada um dos segmentos por quatro, obtém-se $3 \times 4 \times 4 = 48$ segmentos no final da segunda iteração; e $3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^3 = 192$ segmentos no final da terceira iteração. Pela observação destes resultados, pode-se definir o termo geral para o número de segmentos no Floco de Neve de Von Koch no nível n : $S_n = 3 \times 4^n$.

Na Figura 19, apresentam-se as seis primeiras iterações do processo de construção do *Floco de Neve de Von Koch*, sendo a sexta iteração uma boa aproximação deste fractal.

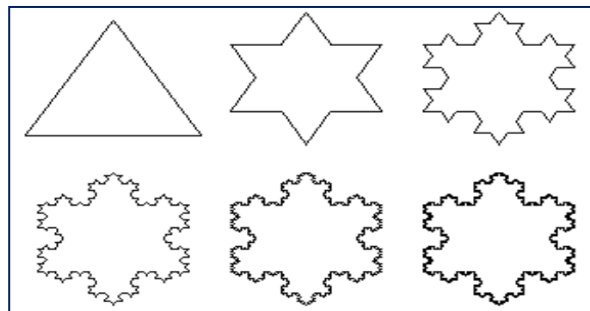


Figura 19 Construção do Floco de Neve de Von Koch

Propriedade 4 O perímetro do *Floco de Neve de Von Koch* tem perímetro infinito.

Demonstração: Utilizando a contagem de segmentos efectuada em cada uma das iterações e o comprimento de cada um deles, é possível observar a evolução do perímetro do *Floco de Neve*. Para se estudar o comprimento de cada segmento do *Floco de Neve de Von Koch*, no final de cada uma das iterações, considera-se que cada um dos lados do triângulo equilátero inicial tem comprimento c . Ao dividir cada lado em três partes iguais, no final da primeira iteração, fica transformado em quatro segmentos iguais com comprimento $c(1/3)$. Na iteração 2, cada um dos segmentos da iteração anterior é dividido em três partes iguais, transformando-se em quatro segmentos, cada um de comprimento $c(1/3)^2$. O mesmo se verifica no final da terceira iteração, passando cada um dos segmentos a ter de comprimento $c(1/3)^3$. Então, na iteração n , cada um dos segmentos mede $c(1/3)^n$. Como se pode observar na coluna dos valores do perímetro da Tabela 3, no final de qualquer iteração, o perímetro é igual a $4/3$ do valor da iteração anterior, aumentando em cada uma das etapas de geração da curva. Logo, o perímetro da curva fronteira tende para o infinito, isto é, o perímetro do *Floco de Neve de Von Koch* é infinito. \square

Iteração	S_n	Comprimento	Perímetro
0	3	c	$3c$
1	3×4^1	$c(1/3)$	$3(4/3)c$
2	3×4^2	$c(1/3)^2$	$3(4/3)^2c$
3	3×4^3	$c(1/3)^3$	$3(4/3)^3c$
...
n	3×4^n	$c(1/3)^n$	$3(4/3)^n c$

Tabela 3 Variação do perímetro do *Floco de Neve* ao longo das iterações (Barbosa, 2005, p. 73)

Propriedade 5 O *Floco de Neve de Von Koch* tem área finita.

Demonstração: Para determinar a área limitada pelo *Floco de Neve de Von Koch*, considere-se um triângulo equilátero de área $A = c^2 \sqrt{3}/4$. Dado que as alterações efectuadas em cada um dos lados deste triângulo são iguais, analisemos a evolução do valor da área provocada pelas transformações num só lado. Na iteração 1, é adicionado um triângulo equilátero de área $\Delta = 1/9 A$. Na segunda iteração, e continuando a conside-

rar o mesmo lado do triângulo inicial, à área anterior acresce a área de quatro pequenos triângulos equiláteros, cada um com área igual a $\frac{1}{9} \Delta$, isto é $\Delta + 4\left(\frac{1}{9}\right)\Delta$. Na terceira iteração, adiciona-se à área anterior a área de 4^2 triângulos equiláteros, de área, de novo, nove vezes inferior à área de cada um dos triângulos da iteração 2. O acréscimo de área no final das três iterações é dado por:

$$\Delta + 4\left(\frac{1}{9}\right)\Delta + 4^2\left(\frac{1}{9}\right)^2\Delta = \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right]\Delta$$

Pode-se, assim, determinar o acréscimo de área no final de n iterações:

$$\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]\Delta$$

Como estamos perante uma série geométrica de razão inferior a 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]\Delta = \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{9}\right)}\Delta = \frac{9}{5}\Delta$$

Para se obter a área do *Floco de Neve de Von Koch*, basta multiplicar o resultado anterior por 3 (três lados) e adicioná-lo à área do triângulo equilátero inicial. A área do *Floco de Neve de Von Koch* é finita e dada pela expressão:

$$A + 3 \times \frac{9}{5} \Delta = A + 3 \times \frac{9}{5} \times \frac{1}{9} A = \frac{8}{5} A \quad \square$$

2.3 Conjunto de Cantor

As propriedades do Conjunto de Cantor podem ser usadas para introduzir o estudo intuitivo de limite. O cálculo do número de segmentos e do comprimento total do Conjunto de Cantor poderá servir de base para o estudo de limites, dado que o comprimento total se aproxima, mas não é, igual a zero, assim como para introduzir a fórmula da soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão diferente da unidade.

O *Conjunto de Cantor* é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$. A sua construção é feita através do seguinte processo recursivo:

1. Seja C_0 o intervalo $[0, 1]$. A C_0 retira-se o terço central. Seja C_1 o conjunto resultante: $C_1 = C_0 \setminus]1/3; 2/3[= [0; 1/3] \cup [2/3; 1]$.

2. A cada intervalo de C_1 é retirado o intervalo central aberto de comprimento $1/9$. Seja C_2 o conjunto resultante: $C_2 = C_1 \setminus (]1/9; 2/9[\cup]7/9; 8/9]) = [0; 1/9] \cup [2/9; 1/3] \cup [2/3; 7/9] \cup [8/9; 1]$.

3. Este processo é repetido até ao infinito, dividindo-se sempre cada um dos segmentos restantes por três e removendo o terço central de cada divisão. O resultado do limite deste processo é o *Conjunto de Cantor* ou *Poeira de Cantor*.

Na Figura 20, apresenta-se as seis primeiras iterações do processo de construção do Conjunto de Cantor, sendo a sexta iteração uma boa aproximação deste conjunto.

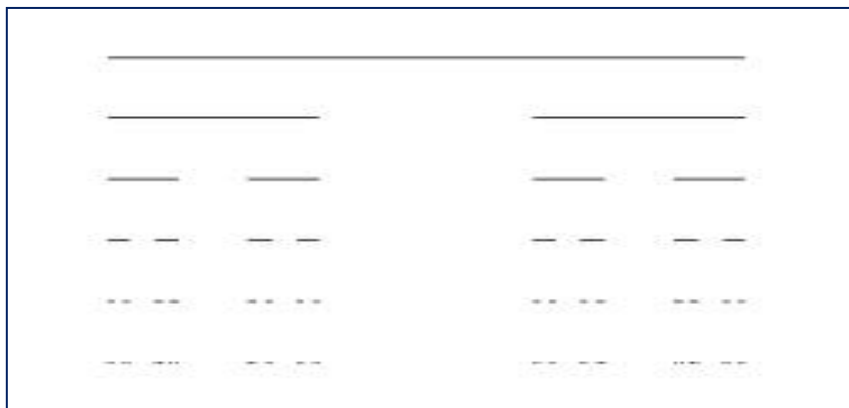


Figura 20 Construção do Conjunto de Cantor

O processo de construção do Conjunto de Cantor descreve uma sucessão $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, monótona decrescente de subconjuntos de $[0; 1]$. Cada conjunto C_n é a reunião disjunta de 2^n intervalos fechados de $[0; 1]$, e C_{n+1} obtém-se retirando, a cada um dos intervalos resultantes da iteração anterior, o intervalo central de comprimento $(1/3)^{n+1}$. O Conjunto de Cantor é o limite desta sucessão definido como a intersecção dos conjuntos $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$.

Para concluir esta definição, prove-se que o comprimento de cada um dos 2^n intervalos fechados (cuja reunião disjunta é C_n) é maior que $(1/3)^{n+1}$. O segmento C_1 é obtido pela remoção de um segmento de comprimento $1/3$ do intervalo inicial $[0; 1]$, logo tem comprimento $l(C_1) = 2/3$; da mesma forma, retirando-se a C_1 dois segmentos

de comprimento $1/9$, obtém-se C_2 cujo comprimento é $l(C_2) = 4/9$. Assim, o comprimento do *Conjunto de Cantor* na iteração $n \in N_0$ é dado por:

$$l(C_n) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 - \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

sendo o comprimento de cada um dos seus 2^n segmentos dado por

$$\frac{1}{2^n} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right] = \frac{1}{3^n} > \frac{1}{3^{n+1}}.$$

O *Conjunto de Cantor* possui uma série de propriedades, das quais se destacam as seguintes:

- O *Conjunto de Cantor* é um conjunto não vazio.
- O *Conjunto de Cantor* é um conjunto não numerável.
- Seja $x \in [0; 1]$. Então x pertence ao *Conjunto de Cantor*, C , se e só se tem uma representação ternária que não contém o dígito 1.
- O comprimento total do *Conjunto de Cantor* é zero.
- No *Conjunto de Cantor*, o que se tinha é igual ao que se retirou e igual ao que restou.

As duas últimas propriedades do *Conjunto de Cantor*, demonstradas a seguir, podem ser usadas para explorar e introduzir os conceitos matemáticos de progressão geométrica, limites de progressões geométricas e de soma de n termos de uma progressão geométrica de razão diferente da unidade.

Propriedade 6 O comprimento total do *Conjunto de Cantor* é zero.

Demonstração: Cada conjunto C_n , $n \in N_0$ consiste em 2^n intervalos disjuntos, cada um de comprimento $(1/3)^n$. Como o comprimento total de C_n é o limite da soma dos comprimentos, tem-se: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. \square

Propriedade 7 No *Conjunto de Cantor*, o que se tinha é igual ao que se retirou e igual ao que restou.

Demonstração: Adicionando a quantidade que se retira em cada uma das iterações, obtém-se:

$$\frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{27} + 8 \times \frac{1}{81} + 16 \times \frac{1}{243} + \dots + \frac{2^{i-1}}{3^i} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = 1$$

provando-se, assim, que a quantidade retirada é igual ao comprimento do segmento unitário inicial. \square

Outra propriedade importante deste conjunto, que não pode deixar de ser referida, é a auto-semelhança. Conforme a escala de observação, cada um dos segmentos no final de uma iteração, pode ser considerado como réplica dos segmentos resultantes no final de iterações anteriores.

2.4 Triângulo de Sierpinski

O *Triângulo de Sierpinski*, para além de possuir algumas das propriedades dos fractais descritos anteriormente (perímetro infinito, área nula e ser auto-semelhante), possui relações com o triângulo de Pascal que podem ser exploradas aquando do seu estudo na unidade temática Combinatória e Probabilidades no ensino secundário.

A construção geométrica do *Triângulo de Sierpinski* inicia-se com um triângulo equilátero de lado unitário ao qual é aplicada uma série de processos repetitivos, como se explica a seguir:

1. Os pontos médios de cada um dos lados do triângulo, juntamente com os vértices iniciais, definem quatro triângulos congruentes. Na primeira iteração, o triângulo central é removido, restando apenas três. Este é o passo básico de construção.
2. Na segunda iteração, é removido, de cada um dos triângulos do nível anterior, o triângulo central dos seus quatro novos, ficando-se com $3^2 = 9$ triângulos.
3. Analogamente, restam $3^3 = 27$ triângulos, no final da terceira iteração, após a remoção do central de cada um dos novos anteriores.

Assim, por indução simples, na n -ésima iteração obter-se-á 3^n triângulos.

A Figura 21 ilustra as primeiras iterações do *Triângulo de Sierpinski*, sendo a sexta iteração uma boa aproximação do triângulo final.



Figura 21 Etapas iniciais da construção do Triângulo de Sierpinski

Como uma das características do *Triângulo de Sierpinski* é a sua auto-semelhança, este também pode ser construído através do “Jogo do Caos”. Este jogo não reflecte a dinâmica de um jogo usual, sendo, simplesmente, um processo de construção de fractais caracterizados por auto-semelhança. Uma vez escolhido um ponto inicial, a semente, pertencente à fronteira ou ao interior de um triângulo equilátero, a marcação dos restantes pontos é feita através de jogadas aleatórias de um dado, começando a surgir, a partir de um certo número de jogadas, uma estrutura análoga ao *Triângulo de Sierpinski*.

Tal como a curva e o *Floco de Neve de Von Koch*, o *Triângulo de Sierpinski* também é um fractal de perímetro infinito mas de área nula.

Propriedade 8 O perímetro do *Triângulo de Sierpinski* é infinito.

Demonstração: Para calcular o perímetro do *Triângulo de Sierpinski*, considerara-se uma variável c representativa do comprimento de cada um dos lados do triângulo inicial. Na primeira iteração, cada lado dos triângulos resultantes passam a medir $c/2$ e, analogamente, os lados da segunda e terceira iterações passam a medir, respectivamente, $c/2^2$ e $c/2^3$. Pode-se concluir, por indução simples, que cada um dos lados da n ésima iteração tem o comprimento igual a $c/2^n$. O perímetro de cada triângulo na iteração n é, assim, $3c/2^n$. Na Tabela 4, pode observar-se o valor do perímetro dos triângulos no final das sucessivas iterações. O perímetro do *Triângulo de Sierpinski* é infinito, porque $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times (3/2)^n c = \infty$. □

Nível	0	1	2	3	...	n
Número de Triângulos	1	3	3^2	3^3	...	3^n
Perímetro de cada Triângulo	$3c$	$3c/2$	$3c/2^2$	$3c/2^3$...	$3c/2^n$
Perímetro Total	$3c$	$3(3/2)c$	$3(3/2)^2c$	$3(3/2)^3c$...	$3(3/2)^nc$

Tabela 4 Perímetro dos triângulos no Triângulo de Sierpinski (Barbosa (2005, p. 77))

Propriedade 9 A área do *Triângulo de Sierpinski* é nula.

Demonstração: Para calcular a área do *Triângulo de Sierpinski*, considera-se Δ a área do triângulo inicial. As áreas dos triângulos resultantes da primeira, segunda e terceira iteração são, respectivamente, $(1/4)\Delta$, $(1/4^2)\Delta$ e $(1/4^3)\Delta$. Por indução, conclui-se, assim, que na n ésima iteração, a área do *Triângulo de Sierpinski* é igual a $(1/4^n)\Delta$.

A Tabela 5 resume os valores das áreas resultantes das sucessivas iterações deste fractal. À medida que se vai iterando o triângulo, a área deste diminui, anulando-se na n ésima iteração, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} (3/4)^n \Delta = 0$. \square

Nível	0	1	2	3	...	n
Número de Triângulos	1	3	3^2	3^3	...	3^n
Área de cada Triângulo	Δ	$1/4\Delta$	$(1/4)^2\Delta$	$(1/4)^3\Delta$...	$(1/4)^n\Delta$
Área Total	Δ	$3/4\Delta$	$(3/4)^2\Delta$	$(3/4)^3\Delta$...	$(3/4)^n\Delta$

Tabela 5 Área dos triângulos no *Triângulo de Sierpinski* (Barbosa, 2005, p. 78)

A relação do *Triângulo de Sierpinski* com o triângulo de Pascal (1623 – 1662) é uma característica importante que pode ser utilizada para o estudo da Combinatória e Probabilidades do ensino secundário.

O triângulo de Pascal (Figura 22) é obtido através dos coeficientes das expansões sucessivas do polinómio $(1 + x)^n$, sendo $n + 1$ as linhas do triângulo. Aplicando-se a fórmula do Binómio de Newton, $(x + y)^n = n!/[k!(n - k)!] x^{n-k} y^k$, obtém-se o k -ésimo coeficiente, b_k , $k = (0, 1, 2, \dots, n)$ da linha n do triângulo de Pascal, através da fórmula $b_k = n!/[k!(n - k)!] = [n(n - 1) \dots (n - k + 1)]/(1 \times 2 \times \dots \times k)$. O triângulo de Pascal também pode ser construído recursivamente através de uma lei de formação simples: adicionam-se dois valores consecutivos de uma linha para obter, na outra linha, o valor com a mesma ordem do segundo ou $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; quando um dos valores a adicionar é nulo, o resultado na linha seguinte é 1.

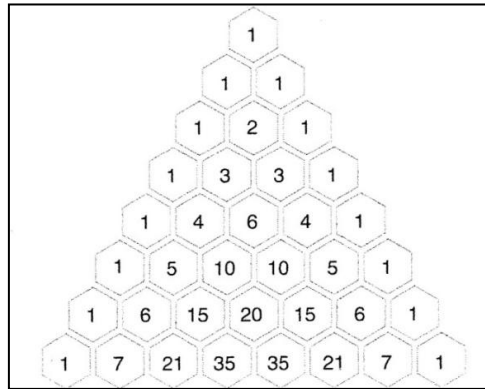


Figura 22 Triângulo de Pascal

Ao colorir os elementos do triângulo de Pascal encriptados em hexágonos, conforme as propriedades de cada um dos números, obtêm-se vários níveis de iteração do *Triângulo de Sierpinski*. Para exemplificar este facto, constrói-se o fractal dos múltiplos de dois (Figura 23) seguindo a seguinte lei de construção: as casas hexagonais que correspondem a números pares são coloridas a branco e as que correspondem a números ímpares são coloridas de cinzento. O fractal resultante da coloração do triângulo de Pascal com 16 linhas apresenta vários níveis de construção do *Triângulo de Sierpinski*. Ao observá-lo, verificam-se as configurações triangulares equiláteras dispostas de maneira auto-similar: a primeira iteração pode ser observada até à quarta linha, o segundo nível de iteração até à oitava linha, a terceira iteração é observável até à décima sexta linha e, prologando-se indefinidamente as linhas do triângulo de Pascal, são observáveis as restantes iterações.

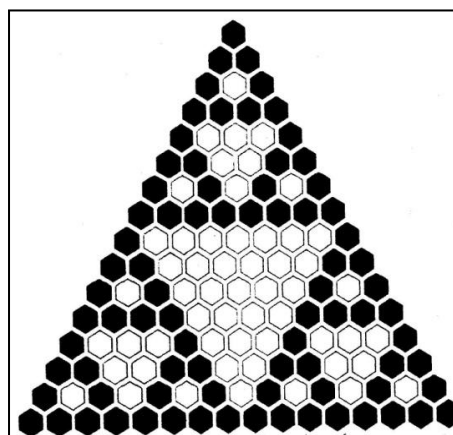


Figura 23 Fractal dos múltiplos de 2

2.5 Esponja de Menger

A *Esponja de Menger*, ilustrada na Figura 24, é um fractal tridimensional da autoria de Karl Menger (1902 – 1985) em 1926. A *Esponja de Menger* possui propriedades geométricas interessantes que fazem parte das recomendações metodológicas do *Currículo Nacional do Ensino Secundário*: o estudo de poliedros fractais de superfície infinita, mas de volume finito, neste caso, nulo.

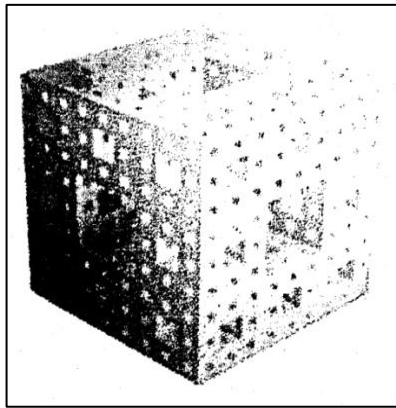


Figura 24 Esponja de Menger

A sua construção inicia-se a partir de um cubo de aresta unitária. Na iteração 1, cada uma das suas faces é dividida em 9 quadrados congruentes, obtendo-se 27 cubos geometricamente iguais, de aresta $1/3$ da aresta inicial. De seguida, são removidos o cubo central e os cubos centrais de cada uma das faces. Assim, no final da iteração 1, o cubo inicial é constituído por 20 cubos pequenos. Na iteração 2, o processo de construção descrito é aplicado a cada um dos 20 cubos restantes, sendo removidos no total $7 \times 20 = 140$ pequenos cubos, sobrando no final desta iteração 20^2 cubos. Este processo de construção, exemplificado na Figura 25, continua indefinidamente, sendo a *Esponja de Menger* o limite deste processo recursivo de construção.

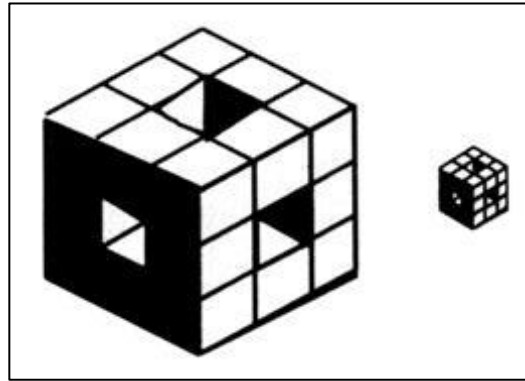


Figura 25 Etapas iniciais da construção da Esponja de Menger

A Tabela 6 resume o processo de contagem dos cubos ao longo de cada uma das iterações até ao infinito.

Nível	0	1	2	3	...	n
Cubos removidos	0	7	7×20	7×20^2	...	$7 \times 20^{n-1}$
Cubos restantes	1	20	20^2	20^3	...	20^n

Tabela 6 Processo de contagem dos cubos na Esponja de Menger (Barbosa, 2005, p. 79)

Propriedade 10 O volume da *Esponja de Menger* é nulo.

Demonstração: Considerando-se a aresta inicial de comprimento unitário, a Tabela 7 resume o comprimento das arestas dos cubos até à n -ésima iteração. Na n -ésima iteração, o volume resulta do produto entre o número de cubos gerados e o volume de cada um, obtendo-se a expressão $V = 20^n \times (1/3)^{3n}$. O volume final corresponde a $\lim_{n \rightarrow \infty} [20^n \times (1/3)^{3n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} (20/27)^n = 0$. \square

Iteração	Comprimento da aresta
1	$1/3 = (1/3)^1$
2	$1/9 = (1/3)^2$
3	$1/27 = (1/3)^3$
...	...
n	$(1/3)^n$

Tabela 7 Variação do comprimento das arestas dos cubos ao longo das iterações (Tomé, 2003, p. 81)

Propriedade 11 A área de superfície da *Espanja de Menger* é infinita.

Demonstração: Considera-se F a área de cada face do cubo inicial, sendo a área da superfície total do cubo $6F$. Como na iteração 1, o cubo inicial é dividido em 27 cubos e são removidos o cubo central e os 6 cubos centrais das faces como consequência das 3 perfurações, conclui-se que em cada face perde-se $1/9 F$, sendo a perda total de área de $6 \times (1/9)F$. Ao mesmo tempo, como está exemplificado na Figura 26, são adicionados, à superfície, 24 novos quadrados em cada uma das perfurações, e acrescenta-se à área $24 \times (1/9)F$. Tem-se, assim, que a área no final da iteração 1 é dada por:

$$6F - 6 \times \left(\frac{1}{9}\right)F + 24 \times \left(\frac{1}{9}\right)F = 8F.$$

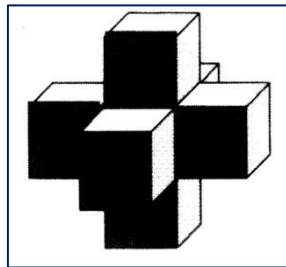


Figura 26 Iteração 1 da Esponja de Menger

O processo de remoção de cubos continua assim até ao infinito, sendo, no final de cada uma das iterações, a área igual a $4/3$ da área anterior. Consequentemente, no limite, a área da superfície da *Espanja de Menger* tende para o infinito. \square

A *Espanja de Menger* é, portanto, um objecto auto-semelhante de volume nulo, mas de área de superfície infinita. De salientar, também, que o *Conjunto de Cantor* resulta das intersecções da figura limite com as diagonais do cubo inicial. (Tomé, 2003, p. 82)

2.6 Pirâmide de Sierpinski

A *Pirâmide de Sierpinski* (Figura 27) corresponde ao análogo tridimensional do *Triângulo de Sierpinski* e reforça as noções de processo de construção iterativo e de auto-semelhança.

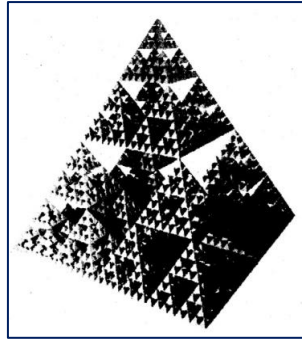


Figura 27 Pirâmide de Sierpinski

Na sua construção, quatro tetraedros regulares unem-se de modo a que no seu interior fique um tetraedro invisível que é removido - etapa geradora da curva, ilustrada na Figura 28. Continuando-se indefinidamente, obtém-se a *Pirâmide de Sierpinski* que é o limite deste processo iterativo de construção. A *Pirâmide de Sierpinski* apresenta as seguintes propriedades:

Propriedade 12 O volume da *Pirâmide de Sierpinski* é nulo.

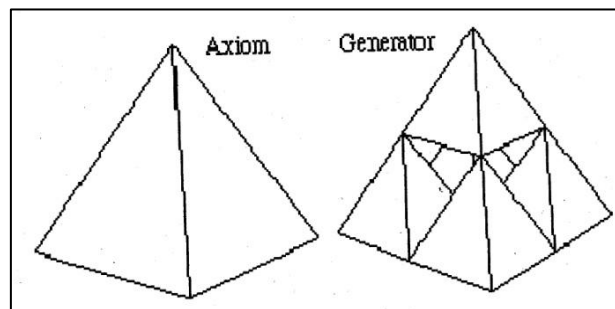


Figura 28 Etapas iniciais da construção da Pirâmide de Sierpinski

Demonstração: Considerando-se a aresta inicial de comprimento unitário, a Tabela 8 resume o comprimento das arestas dos tetraedros até à n -ésima iteração.

Iteração	Comprimento da aresta
1	$1/2 = (1/2)^1$
2	$1/4 = (1/2)^2$
3	$1/8 = (1/2)^3$
...	...
n	$(1/2)^n$

Tabela 8 Variação do comprimento das arestas dos tetraedros ao longo das iterações

O volume na n -ésima iteração, $V = 4^n(\sqrt{2}/12)(1/2)^{3n}$, resulta do produto entre o número de tetraedros gerados e o volume de cada um. O volume final corresponde, assim, ao limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[4^n \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{4}{8}\right)^n \right] = 0$. \square

Propriedade 13 A área de superfície da *Pirâmide de Sierpinski* é constante.

Demonstração: Considera-se F a área de cada face do tetraedro inicial, sendo a área da superfície total do tetraedro igual a $4F$. Como, na iteração 1, a *Pirâmide de Sierpinski* é constituída por 4 tetraedros, a área de cada uma das novas faces é $(1/4)F$, a área de superfície de cada tetraedro é F e a área da superfície total no final da continua a ser $4F$. Na iteração 2, a *Pirâmide de Sierpinski* passa a ser constituída por 16 tetraedros, sendo a área de cada uma das faces $(1/16)F$, a área de superfície de cada um dos tetraedros é $(4/16)F$ e a área total da superfície total continua a ser $4F$. Este processo de construção continua assim até ao infinito, permanecendo a área de superfície da *Pirâmide de Sierpinski*, no final de cada iteração, igual. \square

A *Pirâmide de Sierpinski* é, portanto, um objecto auto-semelhante de volume nulo, mas de área de superfície constante.

3. Tarefas com Fractais

Os fractais permitem ver a Matemática como um todo e não como um conjunto de ramos isolados, ao estabelecer conexões entre diversos conceitos matemáticos e permitindo a exploração da Matemática por caminhos não analíticos. As tarefas de investigação com fractais, que se propõem, englobam os conceitos matemáticos do ensino básico - ângulos, triângulos, congruência e semelhança de figuras, áreas, perímetros, transformações geométricas, e os do ensino secundário - funções logarítmicas e exponenciais e progressões geométricas.

Nessa secção, são apresentadas quatro tarefas exemplificadoras de algumas das formas de exploração do triângulo de Sierpinski para os três ciclos do ensino básico e

para o ensino secundário, respeitando as directivas dos programas do ensino básico e secundário portugueses e as recomendações do NCTM.

3.1. Tarefa para o 1º ciclo do Ensino Básico

A tarefa sugerida para o 1º ciclo (Anexo A: “Triângulo de Sierpinski”) enquadra-se na unidade temática *Geometria e Medida* e subtema *Figuras no Plano e Sólidos Geométricos* e destina-se aos alunos do 3º e 4º ano de escolaridade.

São objectivos desta tarefa a análise da forma geométrica do triângulo de Sierpinski, a compreensão das suas características através do desenho ou construção e a construção da pirâmide de Sierpinski.

Através da elaboração da tarefa, pretende-se que os alunos desenvolvam as seguintes competências:

- aptidão para realizar construções geométricas, reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, recorrendo a materiais manipuláveis e para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações, na resolução de problemas e, ainda, em outras áreas da Matemática;
- compreensão do conceito de comprimento, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre este conceito na resolução e formulação de problemas;
- aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas e a compreensão do sistema internacional de unidades;
- predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas.

Pode ser desenvolvida através da formação de grupos de trabalho, estando dividida em três etapas: a primeira consiste na leitura da história do triângulo de Sierpinski, a segunda, na apresentação e explicação das características do triângulo de Sierpinski e a terceira, no desenho e construção do triângulo e da pirâmide de Sierpinski.

A primeira etapa da tarefa, apresentada na Figura 29, permite estabelecer a interdisciplinaridade com a disciplina de Língua Portuguesa: “... as conexões entre a Matemática e as outras disciplinas podem apoiar a aprendizagem. A construção de conhecimentos baseados nas conexões pode, igualmente, fazer da Matemática um

domínio de estudo desafiador, envolvente e excitante.” (National Council of Teachers of Mathematics, 2011, p. 239). Os alunos poderão, ainda, dramatizar a história e apresentar o triângulo de Sierpinski a toda a comunidade escolar.

História do Triângulo de Sierpinski
<p>Era uma vez um menino muito distraído que perdeu o seu gato e partiu à sua procura. Tanto andou, tanto andou, que chegou à Terra das Formas Coloridas. Espantado com o que viu, disse:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tantas formas bonitas! <p>De repente, encontrou uma forma geométrica muito infeliz e chorosa e perguntou:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Como te chamas? - Triângulo – respondeu a forma. - E por que é que choras? – tornou o menino a perguntar à forma. - Sinto-me muito sozinho. Todos gostam dos quadrados, círculos, rectângulos e usam-nos para fazerem pacotes, pacotinhos e balões. Viajam por todo o lado e fazem muitos amigos. <p>O triângulo chorava cada vez mais e, então, o menino disse-lhe:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Não estejas triste. Eu posso ajudar-te. Chama todos os triângulos desta terra e nunca mais nenhum se irá sentir triste e sozinho. Vais ver! <p>Milhões de triângulos de vários tamanhos e cores responderam ao chamamento e encaixaram-se uns nos outros. O triângulo ficou tão lindo e feliz que o seu nome já não podia ser o mesmo. O menino pensou e de Sierpinski o baptizou. Sierpinski agradeceu-lhe e nunca mais triste ficou.</p>
<p>Moral da história: Todos os problemas se resolvem se os amigos ajudarem.</p>
<p>(História adaptada do site: http://sierpinski.wetpaint.com)</p>

Figura 29 História do triângulo de Sierpinski

A segunda etapa, apresentação e explicação das características do triângulo de Sierpinski, pode ser acompanhada por uma breve nota histórica adequada à faixa etária dos alunos, que favorecerá a exploração e compreensão dos tópicos abordados. A etapa final da tarefa que corresponde ao desenho (Figura 30) e construção do triângulo de Sierpinski (Figura 31) e da pirâmide de Sierpinski (Figura 32 e Figura 33), usando material de desenho e papel ou com recurso a materiais manipuláveis, permite o desenvolvimento da percepção espacial e de conceitos geométricos, como indicado no Novo Programa do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007):

“Desenhar objectos partindo de diferentes ângulos de visão, fazer construções e maquetas e debater ideias sobre essas representações contribui para o desenvolvimento da percepção do espaço. Os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) têm um papel importante na aprendizagem da Geometria e da Medida. Estes materiais permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a aprendizagem de conceitos.” (2007, p. 21)

A tarefa foi concebida de acordo com as recomendações do NCTM sobre o ensino da Geometria no 1º ciclo do ensino básico:

“O estudo da geometria nestes anos de escolaridade exige pensar e fazer. Enquanto os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem e constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se. E, simultaneamente, estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjecturas sobre essas relações. Esta exploração requer acesso a uma multiplicidade de ferramentas, tais como papel quadriculado ou ponteadado, régua, blocos poligonais de pavimentar, geoplanos e sólidos geométricos ...” (2011, p. 191)

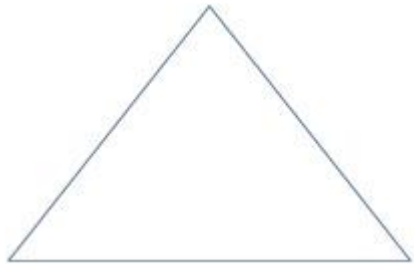

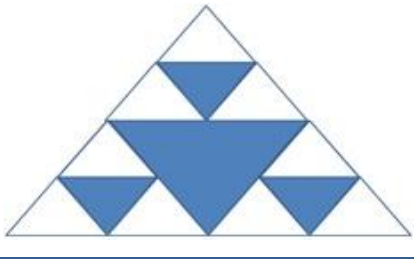

Desenho do Triângulo de Sierpinski	
Passo 1: Desenhar um triângulo equilátero.	
Passo 2: Marcar os pontos médios dos lados do triângulo e uni-los: o triângulo inicial fica assim dividido em quatro triângulos equiláteros iguais. Pintar o triângulo central.	
Passo 3: Para cada um dos triângulos não coloridos: - marcar os pontos médios dos lados do triângulo e uni-los : cada triângulo fica dividido em quatro triângulos equiláteros iguais; - pintar o triângulo central.	
Passo 4: Para os triângulos não coloridos resultantes, repetir o processo descrito no Passo 3. Este processo pode ser repetido indefinidamente.	

Figura 30 Desenho do triângulo de Sierpinski

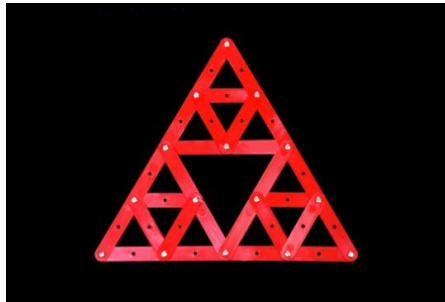


Figura 31 Construção de triângulo de Sierpinski através de materiais manipuláveis

Construção da Pirâmide de Sierpinski	
<p>Passo 1: Recortar os triângulos de Sierpinski desenhados.</p>	
<p>Passo 2: Colar os triângulos recortados numa cartolina. Colar os triângulos entre si de forma a construir quatro tetraedros.</p>	
<p>Passo 3: Construir a Pirâmide de Sierpinski.</p>	

Figura 32 Construção da pirâmide de Sierpinski

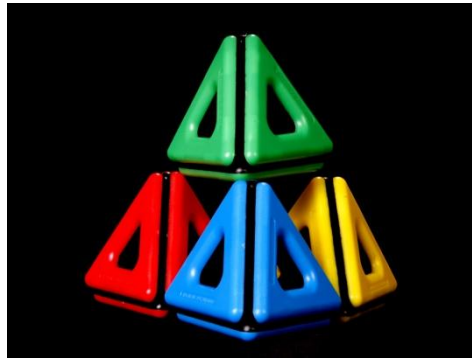


Figura 33 Construção da pirâmide de Sierpinski através de jogos de construção geométricos

3.2. Tarefa para o 2º Ciclo do Ensino Básico

Os jogos são actividades enriquecedoras e geradoras de competências que aliam raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica, podendo ser um ponto de partida para uma tarefa de investigação ou um projecto. A tarefa sugerida para o 2º ciclo do ensino básico (**Anexo B: “Jogo do Caos”**), enquadra-se na unidade temática *Geometria* e subtema *Figuras no Plano*, destinando-se aos alunos de ambos os anos deste ciclo de ensino e podendo ser desenvolvida em grupos de 2 jogadores.

A tarefa tem como objectivos a construção do triângulo de Sierpinski e a análise e compreensão da sua forma e características geométricas, através de um jogo.

Através da elaboração da tarefa pretende-se que os alunos desenvolvam as seguintes competências:

- aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
- tendência para procurar, ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza e à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos;
- aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;

- sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação.

O *Jogo do Caos* não reflecte o que se entende usualmente por jogo, sendo, essencialmente, um processo de construção de fractais caracterizados por auto-similaridade. Nesta tarefa, o fractal a ser construído é o triângulo de Sierpinski. O desenvolvimento da tarefa envolve um conjunto de três etapas: primeira, a explicação das regras do jogo (Figura 34), segunda, o jogo propriamente dito, e, terceira, a análise da forma geométrica do triângulo de Sierpinski e compreensão das suas características.

Regras do Jogo do Caos

O jogo é jogado por 2 jogadores que, alternadamente, lançam o dado e marcam os pontos numa folha.

Desenhar um ponto (semente) no interior do triângulo equilátero delimitado pelos três vértices marcados na folha fornecida.

Para marcar um novo ponto, lançar o dado e seguir as regras seguintes:

- se sair a face 1 ou 2, é marcado no ponto médio entre o vértice (1, 2) e o último ponto marcado,
- se sair a face 3 ou 4, é marcado no ponto médio entre o vértice (3, 4) e o último ponto marcado,
- se sair a face 5 ou 6, é marcado no ponto médio entre o vértice (5, 6) e o último ponto marcado.

A marcação de pontos pode-se repetir indefinidamente.

Exemplo: Considere-se o triângulo da figura, a semente Z_0 e a sequência 1-3-6 resultante do lançamento dos dados. A marcação dos pontos correspondentes, Z_1 , Z_2 e Z_3 , encontra-se ilustrada na figura.

De 20 em 20 iterações, os jogadores deverão analisar a estrutura obtida e comparar os resultados com os dos colegas.

Ganha o primeiro par de jogadores que identifique a estrutura emergente como sendo o Triângulo de Sierpinski.

O processo de identificação pode ser acelerado, jogando em <http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html>.

Figura 34 Regras do Jogo do Caos

À medida que vão jogando e marcando os pontos, os alunos deverão descrever a estrutura observada e comparar os seus resultados com os dos colegas. Fomentam-se, assim, as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo e desenvolve-se a capacidade transversal da comunicação matemática. Segundo Orton,

“O autêntico objectivo do debate é promover a aprendizagem. O desenvolvimento da compreensão relacional exige um desenvolvimento e estimação constantes das estruturas existentes do conhecimento à luz do novo conhecimento. Como já vimos, os conceitos não se formam nem se aprendem, para subsistirem permanentemente fixos; mudam continuamente e desenvolvem-se à medida que surgem e se estudam novos contextos. A conversação permite que se produza uma valoração de ideias.” (in César de Sá, 1997, p. 12)

Após a identificação do triângulo de Sierpinski, dá-se início à etapa final, onde deverá ser feita uma análise conjunta das suas características. É importante que, nesta análise, sejam aplicados os conceitos de isometrias, já conhecidos neste ciclo: reflexões, rotações, translações e simetrias axial e rotacional. No final do debate, deverá ser redigido um texto com todas as conclusões. Esta última parte da tarefa pretende que o *Jogo do Caos* melhore a compreensão e aquisição dos conteúdos matemáticos subjacentes, evitando o hiato entre actividades lúdicas espontâneas e o trabalho em sala de aula.

3.3. Tarefa para o 3º ciclo do Ensino Básico

No 3º ciclo do ensino básico, as tarefas com fractais permitem interligar a Álgebra e Geometria, indo de encontro às recomendações do NCTM:

“As recomendações são ambiciosas – exigem que os alunos aprendam muitos conteúdos relacionados com a álgebra e a geometria ... Consequentemente, para prevenir a fragmentação do currículo, os programas e o ensino destes anos deverão ser convergentes e integrados.” (National Council of Teachers of Mathematics, 2011, p. 248)

A tarefa que se propõe (Anexo C: “Investigando o Triângulo de Sierpinski”) enquadra-se na unidade temática *Álgebra*, subtema *Sequências e Regularidades* e destina-se ao 7º ano de escolaridade deste ciclo de ensino, podendo ser desenvolvida em grupos de 4 alunos.

O objectivo é o desenvolvimento de uma tarefa do tipo investigativa, utilizando a Geometria Fractal como tema gerador de conceitos. Pretende-se que os alunos construam as iterações iniciais do triângulo de Sierpinski, usando software de Geometria Dinâmica, o *Geogebra*, explorem, descubram e formulem conjecturas, argumentem e comuniquem matematicamente, desenvolvam o espírito crítico, discutam as conclusões encontradas nos diferentes grupos de trabalho e elaborem um relatório final.

Através da elaboração da tarefa pretende-se que os alunos desenvolvam as competências:

- aptidão para discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
- tendência para procurar, ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza e à arte, envolva ela elementos geométricos ou ambos;
- sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento na utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação;
- aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios, para realizar construções geométricas;
- tendência para procurar invariantes em figuras geométricas;
- predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

A tarefa inicia-se com a construção das iterações iniciais do triângulo de Sierpinski no software *Geogebra*, seguida da elaboração da tarefa exploratória (Figura 35).

Na primeira etapa são observadas as recomendações do programa do ensino básico relativamente às tarefas exploratórias e de investigação: *“Os alunos devem recorrer a software de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação.”* (Ponte, et al., 2007, p. 51), e as recomendações do NCTM sobre o ensino da *Geometria* neste ciclo de escolaridade:

“Os alunos do 6º ao 8º ano deverão explorar uma diversidade de formas geométricas e analisar as suas características. Os alunos poderão conduzir essas explorações, recorrendo à utilização de materiais, tais como geoplano”

nos, papel pontado, tiras de cartão articuladas e de vários comprimentos e programas de geometria dinâmica, para a construção de figuras bidimensionais.” (National Council of Teachers of Mathematics, 2011, p. 275)

Esta tarefa envolve elementos característicos da exploração e investigação que conduzem os alunos aos passos característicos das investigações matemáticas, o levantamento de hipóteses, a elaboração de conjecturas e a sistematização numa demonstração. O uso dos fractais na sala de aula permite a identificação de processos iterativos e de regularidades, através da análise de padrões e estruturas, sendo estas características fundamentais do pensamento algébrico. Segundo Kaput, J.:

“A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objectos de nível superior para o raciocínio ou comunicação).” (in Canavarro, 2009, p. 7)

Ao identificar o crescimento do número de triângulos não coloridos, através da visualização e contagem, os alunos adquirirão competências iniciais para a elaboração de um pensamento mais sofisticado, a investigação numérica. A investigação numérica permite a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações para além do desenvolvimento da noção de variável, funções essenciais do ensino algébrico.

Nesta tarefa, seguem-se as recomendações do NCTM de desenvolvimento da capacidade transversal - raciocínio matemático,

“Ao longo destes anos, os alunos deverão ter uma prática diversa e frequente com o raciocínio matemático, à medida que:

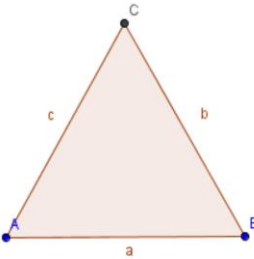
- analisam padrões e estruturas para a identificação de regularidades;*
- formulam generalizações e conjecturas sobre regularidades observadas;*
- validam conjecturas;*
- constroem e avaliam argumentos matemáticos.” (2011, p. 310)*

Investigando o triângulo de Sierpinski

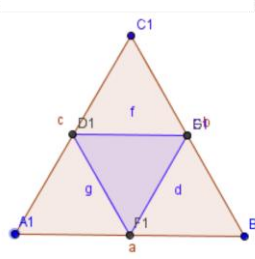
1. Construção das iterações iniciais do triângulo de Sierpinski no software “Geogebra”
 - 1.1. Construir um triângulo equilátero $[ABC]$ (etapa inicial da construção do Triângulo de Sierpinski).
 - 1.2. Ao lado do triângulo anterior, construir, com as mesmas medidas, o triângulo equilátero $[A_1, B_1, C_1]$.
 - 1.3. Construir os pontos médios D_1, E_1 e F_1 , dos lados do triângulo inicial.
 - 1.4. Construir os segmentos de recta $[F_1E_1], [F_1D_1]$ e $[E_1D_1]$, com a finalidade de dividir o triângulo inicial nos triângulos $[A_1D_1F_1], [D_1C_1E_1], [F_1E_1B_1]$ e $[F_1D_1E_1]$.
 - 1.5. Colorir o triângulo $[F_1D_1E_1]$ (1ª etapa da construção do Triângulo de Sierpinski).
 - 1.6. Voltar a construir, ao lado, a etapa 1 descrita acima, renomeando os vértices de A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 e F_2 .
 - 1.7. Construir os pontos médios $G_2, H_2, I_2, J_2, K_2, L_2, M_2, N_2, O_2$ dos segmentos de recta $[A_2F_2], [F_2B_2], [B_2E_2], [E_2C_2], [D_2C_2], [A_2D_2], [F_2D_2], [D_2E_2]$ e $[E_2F_2]$, respectivamente.
 - 1.8. Construir os segmentos $[G_2M_2], [M_2L_2], [L_2G_2], [I_2H_2], [I_2O_2], [O_2H_2], [J_2K_2], [K_2N_2]$ com a finalidade de dividir cada um dos triângulos não coloridos resultantes da etapa 1 em quatro triângulos e colorir os centrais (2ª etapa da construção do triângulo de Sierpinski).

Nota: Os alunos poderão, eventualmente, construir mais etapas repetindo este processo de construção.

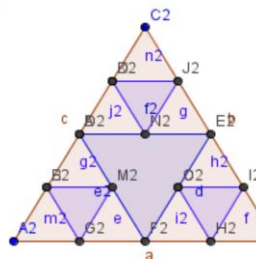
2. Observa as três etapas de construção do triângulo de Sierpinski que acabaste de construir.



Etapa 0



Etapa 1



Etapa 2

- 2.1. Desenha ou constrói o próximo triângulo da sequência.
- 2.2. Procura e regista as relações existentes entre o número de triângulos que não foram coloridos em cada uma das etapas de construção e as suas posições na sequência.
- 2.3. Haverá algum triângulo da sequência com 100 triângulos não coloridos? E com 125? Justifica.
- 2.4. Escreve uma expressão algébrica que te permita calcular o número de triângulos não coloridos em função da posição das etapas de construção do triângulo de Sierpinski na sequência.

Figura 35 Ficha de trabalho da tarefa “Investigando o triângulo de Sierpinski”

3.4. Tarefa para o Ensino Secundário

A exploração de fractais já constitui uma recomendação metodológica do programa de Matemática A do 11º ano do ensino secundário, como se pode constatar:

“O estudante poderá ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões. Descobrirão que têm comprimento (ou superfície) infinito e uma superfície (ou volume) finita (quer a tratem no plano ou no espaço).” (2002, p. 9)

Os fractais induzem o desenvolvimento do raciocínio matemático através da identificação e análise de padrões e estruturas, o estabelecimento de conjecturas e generalizações (através de métodos iterativos e recursivos) e a modelização recursiva de situações:

“Do 9º ao 12º ano, os alunos deverão basear-se nos conhecimentos prévios para aprender técnicas de resolução de problemas mais variadas e sofisticadas. Deverão ampliar as suas capacidades de visualização, descrição e análise de situações, em termos matemáticos. Irão precisar de aprender a usar uma vasta gama de funções, explícita e recursivamente definidas, para modelar o mundo que os rodeia.” (National Council of Teachers of Mathematics, 2011, p. 342)

“Do 9º ao 12º ano, os alunos deverão deparar-se com uma grande variedade de situações que podem ser modeladas recursivamente. (...) O estudo de padrões recursivos deverá ser construído desde o 9º até ao 12º ano.” (National Council of Teachers of Mathematics, 2011, p. 361).

A tarefa aqui proposta para o ensino secundário (**Anexo D: “O Triângulo de Sierpinski e as Progressões Geométricas”**) destina-se a alunos do 11º ano de escolaridade e enquadra-se na unidade temática *Álgebra*, subtema *Sucessões*. Pode ser desenvolvida em trabalho de pares e, eventualmente, constituir um instrumento de avaliação final. Surge como uma continuação da tarefa exploratória do 3º ciclo e tem como objectivo principal analisar a propriedade do fractal de *Sierpinski*, “*perímetro infinito limitando uma área nula*”, através do desenvolvimento de uma tarefa investigativa que contempla os conteúdos do subtema “*Sucessões*”, utilizando a Geometria Fractal como tema gerador de conceitos. Pretende-se que os alunos explorem, descubram e formulem conjecturas, consigam argumentar e comunicar matematicamente, desenvolvam o espírito crítico e partilhem as conclusões com os colegas de turma.

Na tarefa, cuja ficha de trabalho se apresenta na Figura 36, é requerida a análise dos perímetros totais dos triângulos das figuras resultantes das sucessivas iterações e, posteriormente, as áreas totais. Nesta análise, estão implícitos os seguintes conceitos pro-

gramáticos: formas de representação de uma sucessão e estudo das propriedades das sucessões, progressões geométricas e termo geral de uma progressão geométrica, limites, infinitamente grandes, infinitamente pequenos e infinitésimos e convergência de sucessões.

O reconhecimento de padrões, estabelecimento de conjecturas e generalizações através de métodos iterativos e recursivos permite o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma das principais capacidades transversais a desenvolver no ensino da Matemática. Da mesma forma, o estabelecimento de conexões entre a Álgebra e a Geometria permite que os alunos desenvolvam uma visão da Matemática como um todo integrado. Como sugestão, poderá ser proposto a construção das iterações iniciais do triângulo de Sierpinski no programa Geogebra (ou outro software de Geometria Dinâmica), no seguimento das recomendações do NCTM, explorando assim a triangulação “*fractais – computador – visualização*”:

“Um dos desafios mais importantes no ensino da Matemática refere-se ao papel que a demonstração e a justificação desempenham sobretudo em ambientes cada vez mais tecnológicos. Usando software de geometria dinâmica, os alunos podem, rapidamente, gerar e explorar vários exemplos geométricos. Se não tiverem aprendido a utilidade da demonstração e da argumentação matemáticas, poderão argumentar que uma conjectura tem que ser válida, simplesmente por que se verificou em todos os exemplos que experimentaram. Embora seja possível que os alunos desenvolvam este tipo de concepção erradas, numa aula em que compreendamos os papéis da experimentação, da formulação de conjecturas e da demonstração, a capacidade de gerar e explorar múltiplos exemplos pode resultar em investigações matemáticas mais profundas e abrangentes do que, de outra forma, seria possível. (National Council of Teachers of Mathematics, 2011, p. 368)

A. Constrói o triângulo de Sierpinski”

A construção inicia-se a partir de um triângulo equilátero: este triângulo inicial é dividido em quatro triângulos menores, sendo removido o triângulo do meio. Os três triângulos restantes são divididos exactamente da mesma maneira. Este processo iterativo de construção repete-se indefinidamente, sendo o Triângulo de Sierpinski a figura limite deste processo iterativo.



A esta sequência de figuras pode-se associar várias sucessões: a sucessão do número de triângulos da figura, a sucessão das áreas de cada triângulo retirado, a sucessão da área total dos triângulos de cada triângulo e a sucessão do perímetro total dos triângulos.

B. Responde às seguintes questões.

1. Atribuindo ao comprimento do lado do triângulo equilátero inicial a variável c , completa a seguinte tabela:

Posição	0	1	2	3	...	n
Número de triângulos	1				...	
Perímetro de cada triângulo	$3c$...	
Perímetro Total	c				...	

- Mostra que a sucessão (P_n) dos perímetros totais dos triângulos das figuras é uma progressão geométrica.
 - Define a sucessão (P_n) por recorrência.
 - Escreve o termo geral da sucessão (P_n) .
 - Estuda a monotonia da sucessão (P_n) .
 - Mostra, justificando, que a sucessão (P_n) é um infinitamente grande.
2. Atribuindo à área do triângulo equilátero inicial a variável Δ , completa a seguinte tabela:

Posição	0	1	2	3	...	n
Número de Triângulos	1				...	
Área de cada Triângulo	Δ				...	
Área Total	Δ				...	

- Mostra que a sucessão (A_n) das áreas totais dos triângulos das figuras é uma progressão geométrica.
 - Define a sucessão (A_n) por recorrência.
 - Escreve o termo geral da sucessão (A_n) .
 - Estuda a monotonia da sucessão (A_n) .
 - Mostra, justificando, que a sucessão (A_n) é um infinitésimo.
3. Com base nas respostas dadas nas questões anteriores, comenta a seguinte afirmação numa breve mas fundamentada composição: **“Fractal de Sierpinski: Um perímetro infinito limitando uma área nula.”**

Sugestão: Pode ser proposto a construção das diferentes etapas de construção do Triângulo de Sierpinski no programa Geogebra (ou outro), como um factor enriquecedor da investigação.

Figura 36 Ficha de trabalho da tarefa “O Triângulo de Sierpinski e as Progressões Geométricas”

4. Conclusões

A Geometria Fractal é uma área muito recente, no entanto, as suas aplicações são inúmeras e em diversas áreas do conhecimento: engenharia, economia, física, meteorologia, fisiologia, por exemplo. Tem grandes potencialidades para ser leccionada no ensino superior, mas nos ensinos básico e secundário, são poucas as tarefas desenvolvidas com fractais, parecendo, à partida, quase impensável o envolvimento dos alunos destes níveis de escolaridade em tarefas que envolvam o estudo e a exploração de fractais.

Como resultado da análise dos actuais programas do ensino básico e do ensino secundário, e das recomendações do NCTM, provou-se, ao longo deste capítulo, que são vários os conceitos programáticos que podem ser introduzidos e explorados através de tarefas envolvendo fractais.

No ensino básico, os fractais permitem a exploração dos conceitos de isometrias nos três ciclos de escolaridade, de sequências e regularidades nos 2º e 3º ciclos e semelhança de figuras no 3º ciclo. Relativamente às capacidades transversais, nomeadamente a resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemáticos, o estudo dos fractais permite o seu desenvolvimento através da formulação de problemas estruturados para a aprendizagem de conceitos, representações e procedimentos matemáticos, construção de cadeias argumentativas e debate de ideias sobre os processos utilizados e os resultados alcançados.

No ensino secundário, o estudo da unidade temática Álgebra, subtema Sucessões, pode ser feito utilizando a Geometria Fractal como tema gerador de conceitos, permitindo, este estabelecimento de conexões entre a Álgebra e a Geometria, que os alunos desenvolvam uma visão da Matemática como um todo integrado. O desenvolvimento do raciocínio matemático, uma das principais capacidades transversais a desenvolver no ensino da Matemática, pode ser explorado através do reconhecimento de padrões, estabelecimento de conjecturas e de generalizações através de métodos iterativos e recursivos.

CAPÍTULO IV

*“Conhece a Matemática e dominarás o mundo”.
Galileu Galilei*

Conclusão

O objectivo principal deste trabalho consistiu em mostrar de que forma a Geometria Fractal pode ser explorada para introduzir ou trabalhar conceitos matemáticos, de acordo com os programas portugueses de Matemática e as suas recomendações metodológicas, desde o 1º ciclo até ao secundário. Neste sentido, foram propostas quatro tarefas práticas de exploração do triângulo de Sierpinski, permitindo a integração da Geometria Fractal nos quatro primeiros níveis de ensino portugueses, ao abrigo dos programas do ensino básico e secundário. Com este estudo, pretendeu-se colmatar a lacuna que existe em Portugal relativamente à exploração da Geometria Fractal, onde poucos manuais propõem tarefas com fractais, apesar de permitirem a formulação de problemas estruturados para a aprendizagem de diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos e a construção de cadeias argumentativas seguidas de debates construtivos sobre ideias, processos e resultados matemáticos. Este tipo de tarefas permite o desenvolvimento das três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática: resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática.

No Capítulo I, apresentou-se a triangulação “fractais – computador – visualização”, como a associação perfeita para a nova visão da Matemática escolar, que passa pelo uso do poder visual das imagens na assimilação de conceitos e capacidades matemáticas. O

computador constitui, de facto, uma ferramenta indispensável para a visualização das imagens geradas por repetição de regras matemáticas muito simples – iterações de certas funções, incluindo-se aqui os fractais como limite da sucessão de imagens geradas por computador. As imagens dos fractais possibilitam conexões entre diversos temas da Matemática, a exploração e aperfeiçoamento de conjecturas baseadas em evidências, permitindo a utilização de diversas técnicas de raciocínio e de prova. Ainda, segundo o NCTM (2011, p. 3), a nova Matemática escolar deverá ser regida por programas curriculares bastante ricos ao nível da Matemática que proporcionem aos alunos uma aprendizagem compreensiva dos conceitos e procedimentos matemáticos importantes, onde a tecnologia se enquadra como componente essencial deste tipo de aprendizagem.

No Capítulo II, a Geometria Fractal foi apresentada como a verdadeira Geometria da natureza através de vários exemplos e referido o seu uso na modelação de fenómenos sociais e económicos. Seguiu-se uma perspectiva histórica da Geometria Fractal dividida em dois períodos distintos: século XIX e século XX. Em cada um destes períodos, foi apresentada a descrição dos fractais. No século XIX, Curva de Weirstrass, Função de Riemann, Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Hilbert e Curva de Von Koch, e, no século XX, Triângulo de Sierpinski, Conjuntos de Julia e Fatou e o Conjunto de Mandelbrot. Ainda dentro desta perspectiva histórica, apresentou-se a Teoria do Caos e a sua relação com fractais. Após a introdução histórica, apresentou-se a evolução do conceito de fractal e descreveram-se as duas características principais: dimensão fractal e auto-semelhança.

No Capítulo III, para responder à questão *“Como é que se pode relacionar a Geometria Fractal com os conceitos matemáticos dos programas de Matemática portugueses e suas recomendações metodológicas”*, foi elaborada uma análise exaustiva do *Novo Programa do Ensino Básico* e dos actuais programas do ensino secundário relativamente à disciplina de Matemática.

Desta análise, concluiu-se que, relativamente ao ensino básico, os fractais permitem a exploração dos conceitos de isometrias nos três ciclos de escolaridade, de sequências e regularidades nos 2º e 3º ciclos e semelhança de figuras no 3º ciclo. No que se refere ao desenvolvimento das capacidades transversais a toda a aprendizagem matemática no ensino básico – a resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemáticos, o estudo dos fractais permite o seu desenvolvimento através da formulação de problemas

estruturados para a aprendizagem de conceitos, representações e procedimentos matemáticos, construção de cadeias argumentativas e debate de ideias sobre os processos utilizados e os resultados alcançados.

No ensino secundário, os fractais podem ser usados para rever conceitos e para explorar e introduzir novos conceitos. Dado que permitem a conexão entre vários conceitos matemáticos, também permitem que a Matemática seja vista como um todo integrado, em que as tarefas que os envolvem se apresentam como ideais para o módulo inicial do programa de Matemática A do 10º ano. O objectivo principal deste módulo inicial é a proposta de tarefas que, a partir de um determinado tema, permitam estabelecer conexões com outros através do desenvolvimento de capacidades de experimentação, raciocínio matemático (o raciocínio geométrico ganha uma especial importância neste módulo) e da análise crítica e do estabelecimento de conjecturas e sua verificação.

Ainda no ensino secundário, o estudo da Geometria segue as recomendações metodológicas do programa de Matemática A do 11º ano (2002, p. 9). No tema Álgebra, subtema Sucessões, é possível explorar os conceitos (sucessões, termos, termo geral, sucessão definida recursivamente, limite, sucessão limitada, infinitésimo, infinitamente grande, noção de infinito, progressões geométricas, razão e termo geral de uma progressão geométrica) através da Geometria Fractal. Um dos temas transversais do mesmo programa, a Perspectiva Histórico–Cultural, pode também ser desenvolvido através de trabalhos de projecto sobre a Geometria Fractal e a Teoria do Caos, uma vez que estas permitem mostrar a Matemática como uma ciência em construção e em constante interacção com outras ciências, permitindo recolha de informação sobre a génese e o percurso dos conceitos em estudo e a sua relação com o progresso da humanidade, enquadrando-se no espírito do desenvolvimento científico.

Na segunda secção deste capítulo, foram apresentadas as características principais e o respectivo processo de construção de alguns fractais – Curva de Von Koch, Floco de Neve de Von Koch, Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Esponja de Menger e Pirâmide de Sierpinski, que podem ser utilizados para fins pedagógicos. Na descrição de cada um destes fractais foram utilizados processos recursivos e indutivos para a dedução das fórmulas de áreas e perímetros dos polígonos fractais e dos volumes dos poliedros fractais, permitindo a estimulação do raciocínio matemático e do pensamento abstracto.

Foram também realçadas as suas propriedades de auto-semelhança, que podem ser aproveitadas para explorar conceitos relativos a semelhança de figuras.

O Capítulo III termina com a proposta de quatro tarefas exemplificadoras de algumas das formas de exploração do triângulo de Sierpinski desde o 1º ciclo até ao secundário, respeitando as directivas dos programas do ensino básico e secundário e as recomendações metodológicas do NCTM, que concretizam o objectivo principal deste trabalho.

A tarefa do 1º ciclo permite o estabelecimento da interdisciplinaridade com a disciplina de Língua Portuguesa e o desenvolvimento da percepção espacial e de conceitos geométricos, tal como o preconizado nas recomendações do NCTM sobre o ensino da Geometria no 1º ciclo do ensino básico (2011, p. 191). A tarefa do 2º ciclo do ensino básico é um jogo que serve o propósito de exploração de conceitos previamente adquiridos - reflexões, rotações, translações e simetrias axial e rotacional, aliando as actividades lúdicas e o trabalho em sala de aula. A tarefa do 3º ciclo do ensino básico destina-se a alunos do 7º ano de escolaridade e é uma tarefa exploratória e investigativa, que recorre do uso de software de Geometria, liga a Álgebra e a Geometria, seguindo as recomendações do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007, p. 51) e do NCTM sobre o ensino da Geometria (2011, p. 275) e desenvolve o raciocínio matemático (2011, p. 310). A tarefa do ensino secundário destina-se a alunos do 11º ano de escolaridade, permitindo também o estabelecimento de conexões entre a Álgebra e a Geometria, o desenvolvimento do raciocínio matemático através da identificação e análise de padrões e estruturas, estabelecimento de conjecturas e generalizações pelo uso de métodos iterativos e recursivos, seguindo as recomendações do NCTM (2011, p. 361).

Concluindo, a Geometria Fractal tem potencialidades para ser trabalhada em qualquer nível de ensino. Além de os exemplos de aplicação serem facilmente encontrados na natureza, promove a criatividade, o raciocínio lógico e o sentido estético pelas formas que pode apresentar. Promove uma perspectiva nova da Matemática e enriquece a sala de aula com a identificação e análise de padrões, favorecendo a aprendizagem da disciplina.

Bibliografia

- Barbosa, R. M. (2005). *Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Autêntica.
- Barbosa, R. M. (s.d.). *MESA: Materiais de apoio para o ensino de Matemática (limites e possibilidades)*. Obtido em 5 de Julho de 2011, de www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas.../mr19b.doc
- Batanete, A., Castro, A., & Lago, H. (2005). *Natureza - caos ou ordem?* Coimbra.
- Blog de Matemáticas*. (21 de Julho de 2010). Obtido em 18 de Novembro de 2010, de *Imágenes fractales: triângulo y pirâmide de Sierpinski*: <http://cscmates.blogspot.com/2010/07/filesierpinski-pyramidjpg.html>
- Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática* (2ª ed.). São Paulo: Editora Edgard Blucher.
- Boyer, C. B. (1999). *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher Ltda.
- Canavarro, A. P. (2009). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. Quadrante 16(2) , 81-118.
- César de Sá, A. J. (1997). *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*. APM.
- Choate, J., Devaney, R. L., & Foster, A. (1999). *Fractals - a tool kit of dynamics activities*. Key Curriculum Press.
- Conceição, A., & Almeida, M. (2010). *Matematicamente falando 7*. Areal Editores.
- Coxford, J. A., Burks, L., Giamati, C., & Jonik, J. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas*. APM.
- Devaney, R. L., & Keen, L. (1989). *Chaos and Fractals: the mathematics behind the computer graphics*. American Mathematical Society.
- Escola Secundária da Amadora. (s.d.). Obtido em 10 de Maio de 2011, de http://www.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/materiais_produzidos/pdf_amadora/Triang_Sierpinski_A.pdf
- Falconer, K. (2003). *FRACTAL GEOMETRY - Mathematical Foundations and Applications*. WILEY.
- Fernandes, R. (1973). *Situação da Educação em Portugal*. Lisboa: Moraes Editores.
- FRACTALES DE SIERPINSKI - Fractalese*. (s.d.). Obtido em 12 de Novembro de 2012, de <http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales>

- Fractint - Wikipedia, the free encyclopedia.* (11 de Julho de 2009). Obtido em 22 de Julho de 2009, de Wikipedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractint>
- Geometria com Cabri - géomètre.* (2001). APM.
- Gleick, J. (2005). *Caos - a construção de uma nova ciência.* Gradiva.
- Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., & Edney, R. (2001). *Introducing Fractal Geometry.* Totem Books.
- Lima, E. L. (1993). *Espaços Métricos.* Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.
- Lima, Y., & Gomes, F. (1997). *XEQMAT.* Editorial O LIVRO.
- Mandelbrot, B. (1998). *Objectos Fractais - Forma, Acaso e Dimensão.* Gradiva.
- Mandelbrot, B. (2004). *The Fractal Geometry of Nature.* W. H. Freeman and Company.
- Martins, M. A. (1998). *Utilização dos fractais no estudo dos conceitos relativos a sucessões.* Porto.
- Ministério da Educação. (1996). Obtido em 2009, de <http://www.prodep.min-edu.pt/>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2011). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* APM.
- Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals - New Frontiers of Science.* Springer.
- Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., & Perciante, T. (1999). *Fractals for the classroom - strategic activities.* Springer.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., et al. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Ministério da Educação.
- Rossi, F. (18 de Janeiro de 2008). Obtido em 10 de Maio de 2011, de Sierpinski: <http://sierpinski.wetpaint.com>
- Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (22 de Fevereiro de 2001). MATEMÁTICA A 10º ANO - Cursos Científico-Humanísticos de ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Portugal: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - Departamento do Ensino Secundário.
- Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (1 de Abril de 2002). MATEMÁTICA A 11º ANO - Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - Departamento do Ensino Secundário.

Stewart, I. (1997). *Does God play dice? - the new mathematica of chaos*. PENGUIN BOOKS.

Struik, D. J. (1997). *História concisa das matemáticas*. Gradiva.

Tomé, A. (2003). *Geometria Fractal: uma geometria a várias dimensões*. Porto.

Viegas, C., Gomes, F., & Lima, Y. (2011). *XEQMAT 11 - Volume 2*. Texto Editores.

A NEXOS



Anexo A: “Triângulo de Sierpinski”

TAREFA:

“Triângulo de Sierpinski”

TEMA: Geometria e Medida

SUBTEMA: Figuras no plano e sólidos geométricos

DESCRIÇÃO:

A tarefa destina-se a alunos do 3º e 4º ano de escolaridade do 1º ciclo do ensino básico e pode ser desenvolvida através da formação de grupos de trabalho.

OBJECTIVOS:

Analisar a forma geométrica do Triângulo de Sierpinski;
Compreender as características do Triângulo de Sierpinski;
Desenhar ou construir manualmente o Triângulo de Sierpinski;
Construir a Pirâmide de Sierpinski.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER PELOS ALUNOS:

A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis;
A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas e em outras áreas da Matemática;
A compreensão do conceito de comprimento, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre este conceito na resolução e formulação de problemas;
A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;
A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas.

MATERIAIS:

Papel cavalinho A4; Lápis; Régua; Borracha; tesoura; Cola; Cartolina; Jogos de construção de figuras geométricas.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA

1. Leitura da história do triângulo de Sierpinski
2. Apresentação e explicação das características do Triângulo de Sierpinski
3. Desenho ou construção do Triângulo de Sierpinski
4. Construção da Pirâmide de Sierpinski

1. Leitura da história do triângulo de Sierpinski

História do Triângulo de Sierpinski

Era uma vez um menino muito distraído que perdeu o seu gato e partiu à sua procura. Tanto andou, tanto andou que chegou à Terra das Formas Coloridas. Ficou espantado com o que viu e disse:

- Tantas formas bonitas!

De repente, encontrou uma forma geométrica muito infeliz e chorosa e perguntou:

- Como te chamas?

- Triângulo. – respondeu a forma.

- E por que é que choras? – tornou o menino a perguntar à forma.

- Sinto-me muito sozinho. Todos gostam dos quadrados, círculos, rectângulos e usam-nos para fazerem pacotes, pacotinhos e balões. Viajam por todo o lado e fazem muitos amigos.

O triângulo chorava cada vez mais e, então, o menino disse-lhe:

- Não estejas triste. Eu posso ajudar-te. Chama todos os triângulos desta terra e nunca mais nenhum se irá sentir triste e sozinho. Vais ver!

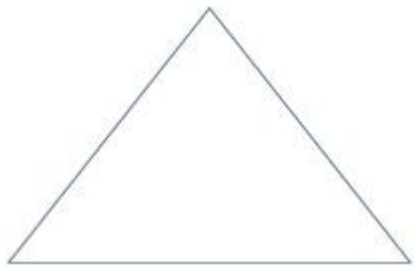



Milhões de triângulos de vários tamanhos e cores responderam ao chamamento e começaram a encaixar-se uns nos outros. O triângulo ficou tão lindo e feliz que o seu nome já não podia ser o mesmo. O menino pensou e de Sierpinski o baptizou. Sierpinski agradeceu-lhe e nunca mais triste ficou.

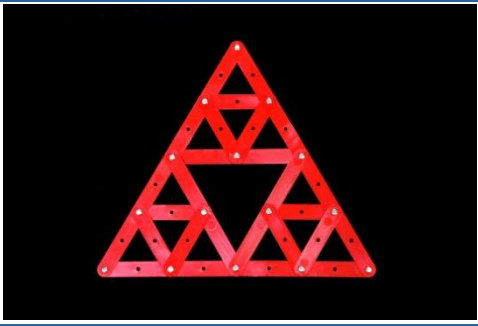
Moral da história: Todos os problemas se resolvem, se os amigos ajudarem.

(História adaptada do site: <http://sierpinski.wetpaint.com>)

2. Apresentação e explicação das características do Triângulo de Sierpinski

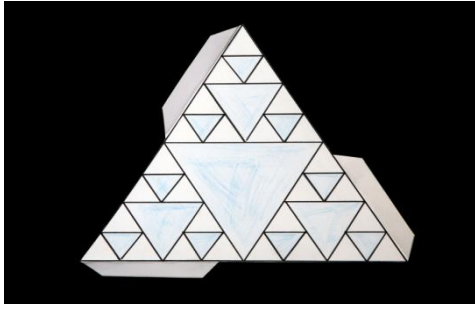
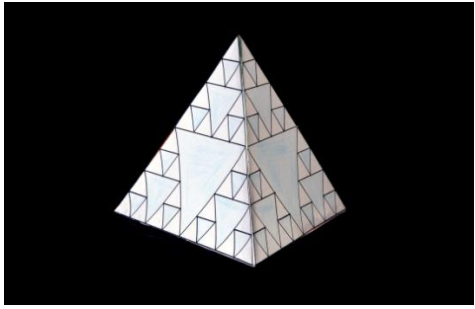
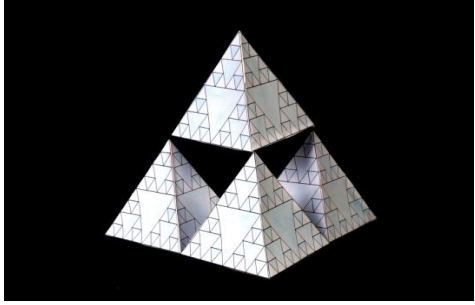
3. Desenho ou construção do Triângulo de Sierpinski

Desenho do Triângulo de Sierpinski	
<p>Passo 1: Desenhar um triângulo equilátero.</p>	
<p>Passo 2: Marcar os pontos médios dos lados do triângulo e uni-los: o triângulo inicial fica assim dividido em quatro triângulos equiláteros iguais. Pintar o triângulo central.</p>	
<p>Passo 3: Para cada um dos triângulos não coloridos:</p> <ul style="list-style-type: none">- marcar os pontos médios dos lados do triângulo e uni-los : cada triângulo fica dividido em quatro triângulos equiláteros iguais;- pintar o triângulo central.	
<p>Passo 4: Para os triângulos não coloridos resultantes, repetir o processo descrito no Passo 3. Este processo pode ser repetido indefinidamente.</p>	

Construção do Triângulo de Sierpinski	
<p>Construir o Triângulo de Sierpinski usando materiais de construção manipuláveis.</p>	

Sugestão: Podem-se substituir os materiais manipuláveis por tiras de cartolina.

4. Construção da Pirâmide de Sierpinski

Construção da Pirâmide de Sierpinski	
<p>Passo 1: Recortar os triângulos de Sierpinski desenhados.</p>	
<p>Passo 2: Colar os triângulos recortados numa cartolina. Colar os triângulos entre si de forma a construir quatro tetraedros.</p>	
<p>Passo 3: Construir a Pirâmide de Sierpinski.</p>	



Anexo B: “Jogo do Caos”

TAREFA:

“Jogo do Caos”

TEMA: Geometria

SUBTEMA: Figuras no plano

DESCRIÇÃO:

A actividade destina-se a alunos do 6º ano do 2º ciclo do ensino básico e pode ser desenvolvida em trabalho de pares.

OBJECTIVOS:

Construir o Triângulo de Sierpinski;
Analisar a forma geométrica do Triângulo de Sierpinski;
Compreender as características do Triângulo de Sierpinski.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER PELOS ALUNOS:

A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
A tendência para procurar, ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza e à arte, envolva ela elementos geométricos ou ambos;
A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;
A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação.

MATERIAIS:

Papel, lápis e borracha; Régua; Marcador; Papel de acetato; Dados; Retroprojector; Computador com acesso à internet.

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA

- 1. Explicação das regras do jogo**
- 2. Durante o jogo**
- 3. Análise da forma geométrica do Triângulo de Sierpinski e compreensão das suas características.**

1. Explicação das regras do jogo do caos

O jogo é jogado por 2 jogadores que, alternadamente, lançam o dado ou marcam os pontos.

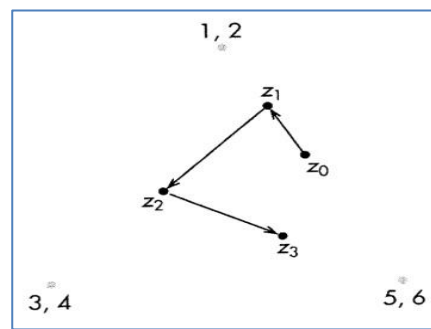
1º Desenhar um ponto (semente) no interior do triângulo equilátero delimitado pelos três vértices marcados na folha fornecida.

2º Para marcar um novo ponto, lançar o dado e seguir as regras seguintes:

- se sair a face 1 ou 2, é marcado no ponto médio entre o vértice (1, 2) e o último ponto marcado,
- se sair a face 3 ou 4, é marcado no ponto médio entre o vértice (3, 4) e o último ponto marcado,
- se sair a face 5 ou 6, é marcado no ponto médio entre o vértice (5, 6) e o último ponto marcado.

O processo descrito no segundo passo pode-se repetir indefinidamente.

Exemplo: Se o triângulo escolhido e o ponto Z_0 (semente) forem os da figura ao lado, e as faces resultantes do lançamento do dado forem sucessivamente 1, 3 e 6, então os pontos correspondentes (Z_1 , Z_2 e Z_3) são marcados segundo a figura.



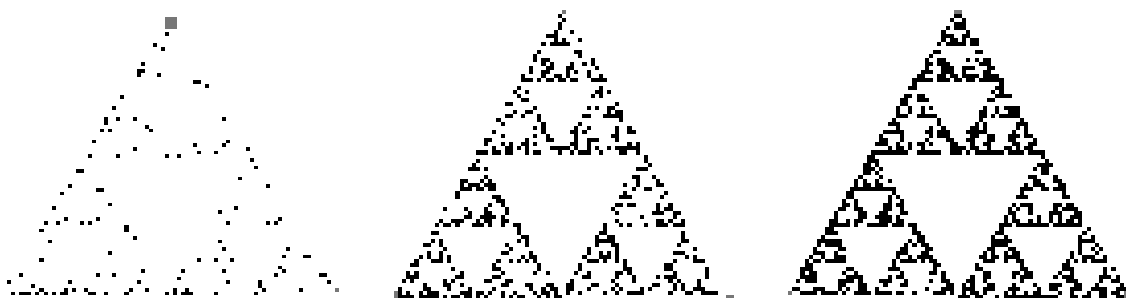
2. Durante o jogo

Depois de marcar os pontos Z_0 a Z_6 a lápis, trocar o lápis por um marcador e marcar os pontos Z_7 a Z_{15} . Apagar, de seguida, os pontos Z_0 a Z_6 .

Os alunos deverão descrever, neste estádio, a estrutura observada (uma boa estratégia será marcar os pontos numa folha transparente de acetato) e comparar os seus resultados com os dos colegas.

De 20 em 20 iterações, os alunos deverão analisar a estrutura e comparar os resultados com os dos colegas, até conseguirem identificar a estrutura emergente como sendo o Triângulo de Sierpinski. Ganha o par de jogadores que o fizer em primeiro lugar.

Exemplos de estruturas observadas ao longo das diferentes iterações



Os alunos poderão acelerar o processo de identificação jogando o “Jogo do Caos” em <http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html>.

3. Análise da forma geométrica do Triângulo de Sierpinski e compreensão das suas características.

No final, os grupos deverão debater todas as conclusões acerca das características da forma geométrica do triângulo de Sierpinski e redigir um texto comum.



Anexo C: “Investigando o Triângulo de Sierpinski”

TAREFA:

“Investigando o Triângulo de Sierpinski”

TEMA: Álgebra

SUBTEMA: Sequências e regularidades

DESCRIÇÃO:

A tarefa destina-se a alunos do 7º ano de escolaridade do 3º ciclo do ensino básico e pode ser desenvolvida em grupos de 4 alunos.

OBJECTIVOS:

Desenvolver uma actividade investigativa, contemplando os conteúdos do tema “Sequências e regularidades”, utilizando a Geometria Fractal como tema gerador de conceitos.

Construir as iterações iniciais do Triângulo de Sierpinski no software “Geogebra”.

Explorar, descobrir e formular conjecturas.

Argumentar e comunicar matematicamente.

Desenvolver o espírito crítico.

Discutir as conclusões encontradas nos diferentes grupos de trabalho.

Elaborar um relatório aglutinador das conclusões encontradas.

COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER PELOS ALUNOS:

A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;

A tendência para procurar, ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza e à arte, envolva ela elementos geométricos ou ambos;

A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação;

A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;

A aptidão para realizar construções geométricas;

A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas;

A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

MATERIAIS:

Ficha de trabalho; material de escrita; software “Geogebra”; um computador por grupo de trabalho.

1. Construção das iterações iniciais do triângulo de Sierpinski no software “Geogebra”

1.1. Construir um triângulo equilátero $[ABC]$ (etapa inicial da construção do Triângulo de Sierpinski).

1.2. Ao lado do triângulo anterior, construir, com as mesmas medidas, o triângulo equilátero $[A_1, B_1, C_1]$.

1.3. Construir os pontos médios D_1, E_1 e F_1 , dos lados do triângulo inicial.

1.4. Construir os segmentos de recta $[F_1E_1], [F_1D_1]$ e $[E_1D_1]$, com a finalidade de dividir o triângulo inicial nos triângulos $[A_1D_1F_1], [D_1C_1E_1], [F_1E_1B_1]$ e $[F_1D_1E_1]$.

1.5. Colorir o triângulo $[F_1D_1E_1]$ (1ª etapa da construção do Triângulo de Sierpinski).

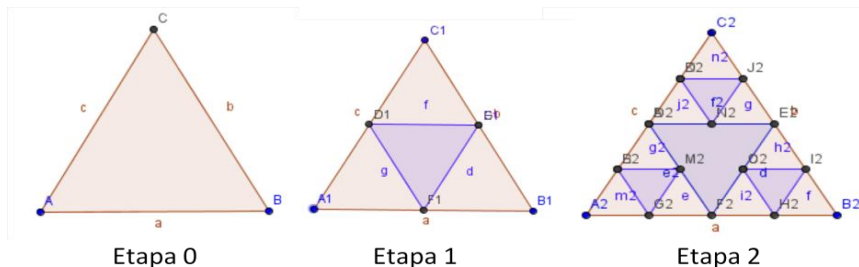
1.6. Voltar a construir, ao lado, a etapa 1 descrita acima, renomeando os vértices de A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 e F_2 .

1.7. Construir os pontos médios $G_2, H_2, I_2, J_2, K_2, L_2, M_2, N_2, O_2$ dos segmentos de recta $[A_2F_2], [F_2B_2], [B_2E_2], [E_2C_2], [D_2C_2], [A_2D_2], [F_2D_2], [D_2E_2]$ e $[E_2F_2]$, respectivamente.

1.8. Construir os segmentos $[G_2M_2], [M_2L_2], [L_2G_2], [I_2H_2], [I_2O_2], [O_2H_2], [N_2J_2], [J_2K_2], [K_2N_2]$ com a finalidade de dividir cada um dos triângulos não coloridos resultantes da etapa 1 em quatro triângulos e colorir os centrais (2ª etapa da construção do triângulo de Sierpinski).

Nota: Os alunos poderão, eventualmente, construir mais etapas repetindo este processo de construção.

2. Observa as três etapas de construção do triângulo de Sierpinski que acabaste de construir.



2.1 Desenha ou constrói o próximo triângulo da sequência.

2.2 Procura e regista as relações existentes entre o número de triângulos que não foram coloridos em cada uma das etapas de construção e as suas posições na sequência.

2.3 Haverá algum triângulo da sequência com 100 triângulos não coloridos? E com 125? Justifica.

2.4 Escreve uma expressão algébrica que te permita calcular o número de triângulos não coloridos em função da posição das etapas de construção do triângulo de Sierpinski na sequência.



Anexo D: “O Triângulo de Sierpinski e as Progressões Geométricas”

TAREFA:

“O Triângulo de Sierpinski e as Progressões Geométricas”

TEMA: Álgebra

SUBTEMA: Sucessões

DESCRIÇÃO:

A tarefa destina-se a alunos do 11^º ano de escolaridade e pode ser desenvolvida em trabalho de pares, constituindo, eventualmente, um instrumento de avaliação final do tema.

OBJECTIVOS:

Desenvolver uma actividade investigativa, contemplando os conteúdos do tema “Sucessões”, utilizando a Geometria Fractal como tema gerador de conceitos.

Construir as iterações iniciais do Triângulo de Sierpinski no software “Geogebra” (opcional).

Explorar, descobrir e formular conjecturas.

Argumentar e comunicar matematicamente.

Desenvolver o espírito crítico.

Partilhar as conclusões com os colegas de turma.

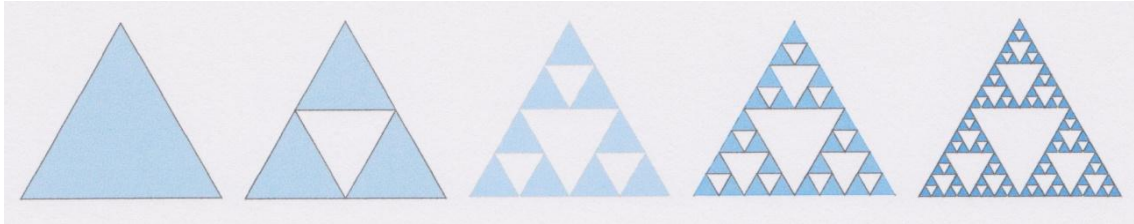
MATERIAIS:

Ficha de trabalho; Material de escrita; Régua; Software “Geogebra” (opcional); Computador (opcional).

FICHA DE TRABALHO

A. Constrói o triângulo de Sierpinski”

A construção inicia-se a partir de um triângulo equilátero: este triângulo inicial é dividido em quatro triângulos menores, sendo removido o triângulo do meio. Os três triângulos restantes são divididos exactamente da mesma maneira. Este processo iterativo de construção repete-se indefinidamente, sendo o Triângulo de Sierpinski, a figura limite deste processo iterativo.



A esta sequência de figuras pode-se associar várias sucessões: a sucessão do número de triângulos da figura, a sucessão das áreas de cada triângulo retirado, a sucessão da área total dos triângulos de cada triângulo e a sucessão do perímetro total dos triângulos.

B. Responde às seguintes questões.

1. Atribuindo ao comprimento do lado do triângulo equilátero inicial a variável c , completa a seguinte tabela:

Posição	0	1	2	3	...	n
Número de triângulos	1				...	
Perímetro de cada triângulo	$3c$...	
Perímetro Total	$3c$...	

- Mostra que a sucessão (P_n) dos perímetros totais dos triângulos das figuras é uma progressão geométrica.
- Define a sucessão (P_n) por recorrência.
- Escreve o termo geral da sucessão (P_n) .
- Estuda a monotonia da sucessão (P_n) .
- Mostra, justificando, que a sucessão (P_n) é um infinitamente grande.

2. Atribuindo à área do triângulo equilátero inicial a variável Δ , completa a seguinte tabela:

Posição	0	1	2	3	...	n
Número de Triângulos	1				...	
Área de cada Triângulo	Δ				...	
Área Total	Δ				...	

- Mostra que a sucessão (A_n) das áreas totais dos triângulos das figuras é uma progressão geométrica.
- Define a sucessão (A_n) por recorrência.
- Escreve o termo geral da sucessão (A_n) .
- Estuda a monotonia da sucessão (A_n) .
- Mostra, justificando, que a sucessão (A_n) é um infinitésimo.

3. Com base nas respostas dadas nas questões anteriores, comenta a seguinte afirmação numa breve mas fundamentada composição: **“Fractal de Sierpinski: Um perímetro infinito limitando uma área nula.”**

Sugestão: Pode ser proposto a construção das diferentes etapas de construção do Triângulo de Sierpinski no programa Geogebra (ou outro), como um factor enriquecedor da investigação.