

Merícia Ramos da Silva Carneiro Paiva

UMA INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DA VALIDADE
EM LÓGICA MATEMÁTICA

Universidade Portucalense



Merícia Ramos da Silva Carneiro Paiva

UMA INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DA VALIDADE
EM LÓGICA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia da Universidade Portucalense como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática/Educação sob a orientação do Professor Doutor António José Ferreira Pascoal.

Universidade Portucalense



AGRADECIMENTOS

Esta tese não teria certamente sido possível, sem o apoio, motivação e encorajamento que fui tendo ao longo da sua realização. Expresso aqui os meus agradecimentos a todos, que de uma forma ou de outra, contribuíram para a sua realização.

Ao meu orientador, Professor Doutor António José Ferreira Pascoal, pela sua orientação, disponibilidade, exigência e acompanhamento sempre constante. O meu profundo agradecimento por tudo o que com ele aprendi.

Aos meus pais, pela sólida formação dada até minha juventude, que me proporcionou a continuidade nos estudos até a chegada a este mestrado, meus eternos agradecimentos.

Por fim, ao Luís, pela sua ajuda incondicional, pelo seu apoio e confiança que em mim depositou.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	I
ÍNDICE DE TABELAS	II
RESUMO	III
ABSTRACT	IV
1. INTRODUÇÃO HISTÓRICA	1
2. LÓGICA PROPOSICIONAL	26
2.1. TABELAS DA VERDADE.....	30
2.2. EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS	35
2.3. ÁRVORE DE ANÁLISE.....	37
2.4. ALGORITMO TAUTOLOGIA.....	38
2.5. REGRAS DE INFERÊNCIA	40
2.6. FORMAS NORMAIS.....	44
3. LÓGICA BOOLEANA	49
3.1. FUNÇÕES BOOLEANAS.....	59
3.1.1. MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES BOOLEANAS	59
3.1.1.1. Mapa K.....	59
3.1.1.2. Método de Quine McCluskey.....	65
4. LÓGICA PREDICATIVA	74
4.1. FORMAS PRENEX	77
4.2. SKOLEMIZAÇÃO	78
4.3. INTERPRETAÇÃO	80
4.4. REGRAS DE INFERÊNCIA	82
5. SISTEMA FORMAL	88

6. MODELOS.....	93
6.1. CONCEITO SEMÂNTICO DE VERDADE – TARSKI	93
6.2. TEOREMA DA COMPLETUDE DE GÖDEL (DEMONSTRAÇÃO DE HENKIN)	94
6.2.1. Teorema da Satisfabilidade de Henkin.....	95
6.2.2. Teorema da Completude de Gödel ou 1º Teorema de Gödel.....	96
6.4. TEOREMA DE LÖWENHEIM – SKOLEM.....	97
6.5. TEOREMA DA COMPACIDADE	98
6.6. PROBLEMA DA DECISÃO.....	99
6.7. TEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL	101
7. SATISFABILIDADE.....	105
7.1. RESOLUÇÃO	108
7.2. DAVIS – PUTNAM – PROCEDURE	114
7.3. TEOREMA DE TSEITIN.....	123
7.4. PRINCÍPIO DE DIRICHLET.....	128
7.5. COMPARANDO OS ALGORITMOS.....	131
8. CONCLUSÃO.....	135
BIBLIOGRAFIA.....	137
OUTRAS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	139

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>FIGURA 1 – ÁRVORE DE ANÁLISE DE UMA PROPOSIÇÃO</i>	<i>38</i>
<i>FIGURA 2 – ÁRVORE</i>	<i>55</i>
<i>FIGURA 3 – ÁRVORE</i>	<i>58</i>
<i>FIGURA 5 – CIDADE DE KÖNIGSBERG</i>	<i>118</i>
<i>FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DAS PONTES DA CIDADE DE KÖNIGSBERG.....</i>	<i>119</i>
<i>FIGURA 7 – LIGAÇÕES ENTRE AS CASAS E AS UTILIDADES.....</i>	<i>120</i>
<i>FIGURA 8 – GRAFO ASSOCIADO À FIGURA 7</i>	<i>120</i>
<i>FIGURA 9 - GRAFO $G = (V,A)$</i>	<i>122</i>
<i>FIGURA 10 – EXEMPLO DE UM GRAFO PESADO</i>	<i>125</i>

ÍNDICE DE TABELAS

<i>TABELA 1 – TABELA DA VERDADE DA NEGAÇÃO</i>	30
<i>TABELA 2 – TABELA DA VERDADE DA CONJUNÇÃO</i>	31
<i>TABELA 3 – TABELA DA VERDADE DA DISJUNÇÃO</i>	31
<i>TABELA 4 – TABELA DA VERDADE DA DISJUNÇÃO EXCLUSIVA</i>	31
<i>TABELA 5 – TABELA DA VERDADE DA IMPLICAÇÃO</i>	32
<i>TABELA 6 – TABELA DA VERDADE DA EQUIVALÊNCIA</i>	33
<i>TABELA 7 – MAPA K EM DUAS VARIÁVEIS</i>	60
<i>TABELA 8 – MAPA K EM DUAS VARIÁVEIS</i>	61
<i>TABELA 9 – MAPA K COM OS MINTERMOS</i>	62
<i>TABELA 10 – MAPA K MINIMIZADO</i>	62
<i>TABELA 11 – MAPA K – REDUNDANTE</i>	63
<i>TABELA 12 – DÍGITOS ESCRITOS EM BITS</i>	64
<i>TABELA 13 – MAPA K COM OS MINTERMOS</i>	64
<i>TABELA 14 – MAPA K COM OS MINTERMOS E OS TERMOS “DON’T CARE”</i>	65
<i>TABELA 15 – ESCREVER A FUNÇÃO BOOLEANA EM BITS</i>	66
<i>TABELA 16 – CONTAGENS DE 1’S</i>	67
<i>TABELA 17 – AGRUPAR EM CLASSES DE ACORDO COM O NÚMERO DE 1’S</i>	67
<i>TABELA 18 – 1ª COMPARAÇÃO</i>	68
<i>TABELA 19 - 2ª COMPARAÇÃO</i>	68
<i>TABELA 20 – ANALISAR SE ALGUM TERMO PODERÁ SER DISPENSADO</i>	69
<i>TABELA 21 – CONTAGENS DE 1’S</i>	71
<i>TABELA 22 - AGRUPAR EM CLASSES DE ACORDO COM O NÚMERO DE 1’S</i>	71
<i>TABELA 23 – 1ª COMPARAÇÃO</i>	71
<i>TABELA 24 – ANALISAR SE ALGUM TERMO PODERÁ SER DISPENSADO</i>	72
<i>TABELA 25 – PROPOSIÇÕES NÃO QUANTIFICADAS/QUANTIFICADAS</i>	81

RESUMO

O problema da validade em Lógica Matemática é talvez o problema mais importante cuja solução constitui um dos principais temas que tem conduzido à evolução da Lógica Matemática. Com este trabalho pretende-se mostrar alguns dos meios, em particular raciocínios e mais tarde meios computacionais, que têm vindo a ser utilizados pelos estudiosos da Lógica, na tentativa de encontrar uma solução que terá de fazer parte do pensamento humano, e na procura da qual se pode dizer que existe uma evolução natural da razão, do espírito e da inteligência do Homem, desde a Antiguidade Grega até ao nosso século.

No trabalho estuda-se a Lógica Proposicional e a Lógica Predicativa como generalização da Lógica Proposicional, sendo feita referência a vários procedimentos da razão e a alguns algoritmos, que pretendem obter a desejada resposta, passando por Löwenheim, Skolem, Church, Gödel até chegarmos a Tarski, que com a sua Teoria dos Modelos marca a possível continuação deste trabalho.

ABSTRACT

The problem of the validity in Mathematical Logic is perhaps the problem most important whose solution constitutes one of the main subjects that have lead to the evolution of the Mathematical Logic. With this work it is intended to show some ways, in particular reasoning's and later computational ways, that have come to be used by the scholars of the Logic, in the attempt to find a solution that will have to be part of the human thought, and in the search of which if it can say that a natural evolution of the reason, the spirit and the intelligence of the Man, since the Antiquity Greek until the ours century.

In the work it is studied Propositional Logical and Predicate Logic as generalization of the Propositional Logic, being make reference to some procedures of the reason and some algorithms, that they intend to get the desired reply, passing for Löwenheim, Skolem, Church, Gödel until arriving the Tarski, that with its Theory of the Models marks the possible continuation of this work.

1. INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Quando se pensa em escrever um trabalho sobre a Lógica Matemática que permita explicar a situação actual, sobretudo no que diz respeito à Matemática, é obrigatório distinguir os dois aspectos sob os quais a Lógica Matemática se pode apresentar:

- 1) Por um lado, trata-se de um ramo da Matemática e como tal deve ser considerado o seu desenvolvimento.
- 2) Por outro lado, a Matemática tem os seus fundamentos na Lógica.

Quer dizer, ao estudar Lógica, podemos estar a estudar teoremas matemáticos, mas também poderemos estudar metateoremas, quer dizer, teoremas que fundamentam as bases do raciocínio matemático.

Na actualidade coloca-se ainda uma outra questão, com o aparecimento das máquinas de calcular de que os computadores mais sofisticados fazem parte: será possível “mecanizar” o raciocínio ou a argumentação lógica? Será possível construir algoritmos que permitam verificar mecanicamente a validade de uma proposição?

Usando o raciocínio dedutivo típico da Matemática, será possível construir axiomáticas para os diversos ramos da Matemática, que permitam verificar a validade ou não validade de uma proposição?

Vamos ver no nosso trabalho qual a situação destes problemas na actualidade. Mas não devemos apresentar essa situação sem uma breve

referência à evolução da Lógica, até para entendermos melhor a “estranha” situação actual da que foi considerada a ciência humana mais bem conseguida e estudada: a **Matemática**.

A Lógica é a ciência do raciocínio correcto. Pode ser vista como um sistema de princípios subjacentes a toda a ciência. A Lógica descreve o relacionamento entre proposições, com a finalidade de fornecer instrumentos para verificar a exactidão de um argumento, para deduzir conclusões das premissas, e consequentemente para estabelecer a consistência de uma teoria. A fim de alcançar este alvo, a Lógica deve ter as ferramentas simbólicas descritivas para representar proposições, e determinísticas e regras formais para trabalhar nelas. Na aproximação simbólica clássica, ambos os elementos acima devem ser meramente mecânicos e completamente independentes do significado das proposições consideradas.

Esta independência dos conteúdos estava já desobstruída desde o tempo dos filósofos Gregos, em particular Aristóteles (384-322 a.C.) com o desenvolvimento do silogismo.

A procura de fundamentos do nosso pensamento, e em particular da Matemática, vem já da antiguidade clássica, desde a conhecida polémica que opôs Zenão de Eleia (490-485 a.C.) às concepções pitagóricas, até Platão (428-348 a.C.) e Aristóteles. A este se deve a primeira abordagem da Lógica. Essa procura andou a par com o desenvolvimento das geometrias e o das axiomáticas.

A questão central dos paradoxos de Zenão reside na impossibilidade de considerar segmentos de espaço e de tempo como sendo formados por uma infinidade de elementos individuais e, não obstante, separados uns dos outros, isto é, descontínuos.

O paradoxo de Aquiles e a tartaruga é um dos paradoxos mais conhecidos. Neste paradoxo, Zenão considera a questão do movimento relativo de dois corpos. O argumento é o seguinte:

Aquiles nunca pode alcançar a tartaruga; porque na altura em que atinge o ponto donde a tartaruga partiu, ela ter-se-á deslocado para outro ponto; na altura em que alcança esse segundo ponto, ela ter-se-á deslocado de novo; e assim sucessivamente.

Zenão sabia, evidentemente, que Aquiles podia apanhar a tartaruga, que um corredor pode percorrer o estádio, e que uma seta em voo se move. Pretendia simplesmente demonstrar as consequências paradoxais de encarar o tempo e o espaço como constituídos por uma sucessão infinita de pontos e instantes individuais consecutivos como as contas de um colar.

No paradoxo da seta Zenão declara que o movimento, tal como o conhecemos, é impossível. Com efeito num dado instante de tempo qualquer corpo em movimento “aparente” (a seta) ocupa exactamente uma certa porção do espaço. Ora como não pode ocupar mais do que uma e uma só porção do espaço num certo instante de tempo, forçosamente estará estacionário nesse instante. Logo a seta não pode estar em movimento como aparentemente parece estar.

De todos os paradoxos de Zenão, o paradoxo da seta é normalmente visto e tratado como um problema diferente dos outros. De facto todos os paradoxos de Zenão são usualmente considerados como tratando de problemas diferentes e com diferentes soluções. Em particular o paradoxo da seta é resolvido por alguns seguindo duas linhas diferentes de pensamento. Uma delas assume uma ligação especial, embora vaga, como a relatividade restrita admitindo que: “A teoria da relatividade restrita responde aos preconceitos de Zenão sobre a falta de uma diferença instantânea entre o movimento e o não-movimento da seta estabelecendo uma reestruturação fundamental da maneira básica segundo a qual o espaço e o tempo se ajustam em conjunto, tal que “existe” realmente uma diferença instantânea entre um objecto em movimento e um objecto estacionado, desde que faça sentido falar de “um instante” de um sistema físico com os seus elementos deslocando-se mutuamente. Assim, objectos em movimento relativo têm diferentes planos de simultaneidade, em todas as respectivas consequências relativísticas, ou seja, não só um objecto em movimento parece diferente ao resto do mundo, como também o mundo parece diferente ao referido objecto”¹.

Contudo estes parecem ser os tipos de argumentos que são usados por aqueles que parecem não entender bem a relatividade e/ou a sua formulação matemática. Com efeito, é difícil ver como e em que termos é relevante a relatividade restrita para o problema de Zenão.

Uma outra solução proposta para o problema da seta é admitir que, embora não se encontre em movimento em qualquer instante considerado isoladamente, a seta está em movimento em “todos” os instantes de tempo

¹ Kevin Brown, “Zeno and the Paradox of Plotion”, www.mathpages.com/home/iphysics.html

(aliás em número **infinito**) logo nunca se encontra em repouso. Esta conclusão resulta do estudo das funções contínuas no cálculo infinitesimal de Weirstrass, afirmando que embora o “valor” da função $f(t)$ seja constante para um dado tempo t , a função $f(t)$ pode ser não constante em t .

Mas também há quem proponha desprezar completamente as velocidades instantâneas, para resolver o paradoxo da seta².

O modo como o cálculo clássico resolve, por exemplo, o paradoxo de Aquiles e da Tartaruga consiste em determinar a soma de uma série infinita, empregando técnicas matemáticas desenvolvidas por Cauchy (1789 – 1857), Weirstrass (1815 – 1897), Dedekind (1831 – 1916) e Cantor (1845-1918), e essa soma dá a resposta correcta no estrito sentido matemático do termo, fornecendo as soluções desejadas. No entanto o processo de cálculo desses grandes matemáticos depende contudo, em sentido estritamente físico, de um objecto em movimento, tendo uma posição precisamente definida em cada instante de tempo. Ora isto não representa de forma alguma a maneira como o universo funciona. Além disso a soma de séries infinitas determina a solução sem considerar os infinitamente grandes, resolvendo os paradoxos do movimento da forma “actualmente possível”.

²Albert, D., “Time and Chance”, Harvard University Press, chapt. II, 2000.

E o que dizer **do raciocínio lógico**?

Aristóteles foi o criador da Lógica formal como uma ciência que estuda e classifica as formas de raciocínio (válidas ou não):

- Noção de proposição (verdadeiras ou falsas);
- Conjunção, disjunção, implicação e negação;
- Quantificadores;
- Silogismos exemplo: modus ponens de $A \rightarrow B$ e de A inferir B .

Os principais escritos de Aristóteles sobre Lógica, foram reunidos pelos seus continuadores após a sua morte, numa obra a que deram o nome de "*Organon*", e que significa "Instrumento da Ciência".

Essa obra monumental da Lógica cujo principal mérito consistiu em ter conseguido sistematizar e codificar pela primeira vez os processos de raciocínio, que os seus antecessores não tinham formulado ou continuavam confusos.

Aristóteles era um discípulo de Platão e parece não ter tido particular interesse pela Matemática, embora deva ter tido conhecimentos do espantoso sucesso da logificação da Geometria por Euclides.

Na obra "*Organon*" Aristóteles define a Lógica como um método do discurso demonstrativo que utiliza três operações da inteligência: o conceito, o juízo e o raciocínio. O conceito é a representação mental dos objectos. O juízo é a afirmação ou negação da relação entre o sujeito (o objecto) e o seu predicado. E o raciocínio é a operação que leva à

conclusão sobre os vários juízos contidos no discurso. Os raciocínios podem ser analisados como silogismos, nos quais uma conclusão se segue de duas premissas. Como podemos ver no seguinte exemplo já bem conhecido,

“Todo homem é mortal.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.”

“Sócrates”, “homem” e “mortal” são conceitos. “Todo o homem é mortal”, “Sócrates é mortal” e “Sócrates é homem” são juízos. O raciocínio é a progressão do pensamento que se dá entre as premissas “Todo homem é mortal”, “Sócrates é homem” e, a conclusão, “Sócrates é mortal”.

O postulado essencial implícito no Organon, que persistiu até ao nosso tempo, é o de que:

“É possível reduzir todo o raciocínio correcto a um pequeno número de regras fixas, sejam quais forem os objectos sobre os quais incide o raciocínio”.

Usando este postulado e adaptando a técnica dos géometras, Aristóteles usa letras para efectuar a notação dos conceitos e proposições, sendo neste aspecto o grande precursor dos algebristas modernos. No entanto, como o próprio Aristóteles reconheceu, a Lógica Silogística não compreende todas as operações lógicas usadas pelos matemáticos da sua época. Efectivamente corresponde apenas a uma parte daquilo que actualmente chamamos Lógica Formal, mas Aristóteles já distinguia proposições particulares e universais, embora sem utilizar os

quantificadores que apareceriam muito mais tarde, e que irão permitir a passagem da lógica a ordens superiores.

Ainda na Antiguidade grega, temos a Lógica da escola dos Estóicos e Megáricos (Euclides de Megara – 400 a.C.). Esta Lógica apresenta-se de modo diferente da Aristotélica e a sua principal contribuição parece ter sido a criação de um Cálculo Proposicional. Pertenceu a essa escola Zenão que fundou o estoicismo, e cujos paradoxos ainda hoje são analisados e estudados, como vimos.

Infelizmente o nosso conhecimento sobre os Estóicos e os Megáricos é quase todo em segunda mão, via comentadores não muito correctos.

Euclides (330 a. C. - 260 a. C.) nasceu na Síria e estudou em Atenas. Foi um dos primeiros geómetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.

Muito pouco se sabe da sua vida. Sabe-se que foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu (306 a. C. - 283 a. C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu". Aí alcançou grande prestígio pela forma brilhante como ensinava Geometria e Álgebra, conseguindo atrair para as suas lições um grande número de discípulos.

O desenvolvimento das suas teorias está contido nos treze volumes dos seus “*Elementos*”. Deu à Geometria um tratamento lógico e dotou-a de uma série de axiomas e postulados que não se modificaram durante dezanove séculos, até à aparição das Geometrias Não – Euclidianas, o que constitui um facto simplesmente espantoso.

Entre as suas investigações e soluções há que citar as seguintes: demonstra que a sucessão de números primos é ilimitada e que a raiz quadrada de dois é um número irracional; estuda as fracções e as proporções e enuncia uma teoria dos números; idealiza um processo de cálculo destinado à obtenção do máximo divisor comum, o chamado algoritmo de Euclides; escreve também diversas obras sobre música, astronomia e geometria esférica e desenvolve os princípios da óptica geométrica.

Como já dissemos, o trabalho de Euclides deve ter influenciado o trabalho de Aristóteles, e do que não temos dúvida é que influenciou a Matemática até à actualidade.

E depois dos Gregos? Nada de relevante até ... Leibniz. Vamos então referir os grandes nomes da Lógica até ao século XXI.

No século XVII (é verdade, passaram dezassete séculos sem nada digno de registo na evolução da Lógica e do Homem), aparecem as obras de Descartes (1596-1650) e Viète (1540-1603) que usando letras como variáveis e símbolos de operações, estabelecem de forma definitiva a **notação algébrica**. Surgem então as primeiras tentativas de utilização de uma escrita simbólica da Lógica, quando os matemáticos devem ter notado certas analogias entre a Lógica Formal e a Álgebra. E surge Leibniz...

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ocupa um lugar especial na história da Lógica. Este filósofo procurou aplicar à Lógica o modelo de cálculo algébrico da sua época. A Lógica é concebida como um conjunto de operações dedutivas de natureza mecânica onde são utilizados símbolos

técnicos. Era sua intenção submeter a estes cálculos algébricos a totalidade do conhecimento científico. Na sua obra que se pode traduzir por “Dissertação da Arte Combinatória”, apresenta os princípios desta nova Lógica:

- Criação de uma nova linguagem, com notação universal e artificial;
- Fazer o inventário das ideias simples e simbolizá-las de modo a obter um "alfabeto dos pensamentos" simples expressos em caracteres elementares;
- Produzir ideias compostas combinando estes caracteres elementares;
- Estabelecer técnicas de raciocínio automatizáveis, de modo a substituir o pensamento e a intuição, por um cálculo de signos.

O raciocínio torna-se, neste projecto de Leibniz, um cálculo susceptível de ser efectuado por uma máquina organizada para o efeito. Esta ideia irá inspirar até aos nossos dias não apenas o desenvolvimento da Lógica, mas a criação de máquinas inteligentes.

Depois de Aristóteles ter elevado a Lógica à categoria de Formal, Leibniz ao tentar reduzir o raciocínio a um cálculo automático, dá um golpe de degradação na Lógica, tal como a viam os seus contemporâneos: afinal tratava-se de um formalismo que poderia ser executado por uma simples máquina.

Embora Leibniz nunca tenha levado até ao fim o seu ambicioso projecto a que chamou “*mathesis universalis*” ou “*calculus ratiocinator*”, análogo ao seu Cálculo Infinitesimal, apresentou ideias extraordinariamente revolucionárias para a sua época, como por exemplo tentar associar a cada conceito um número primo, e fazendo corresponder a cada termo constituído por vários termos primitivos e produto dos números primos correspondentes. (ideia que Gödel retomou em alguns dos seus trabalhos sobre Metamatemática). A ideia era simples: podemos dizer que a decomposição de qualquer inteiro num produto de factores primos constitui o seu “Bilhete de Identidade”; Leibniz tenta traduzir neste sistema as regras silogísticas, embora com grandes problemas derivados da representação da negação. Acaba por construir, embora com fortes dificuldades de notação, a adição lógica, a multiplicação lógica, a negação, a identidade, a classe vazia, a inclusão, a correspondência biunívoca e multívoca e a equivalência. Não conseguiu no entanto libertar-se totalmente da formação clássica, não passando além do estudo das regras dos silogismos, que ele sabia não corresponder à Lógica completa da Matemática.

Entre os matemáticos que se interessavam por Lógica quando esta ciência declinou como um ramo da filosofia, Leibniz é o mais importante, mas há outros que também merecem ser referidos como por exemplo Gerolamo Saccheri (1667-1733) que publicou um livro chamado “*Lógica Demonstrativa*” e que mais tarde demonstrou os primeiros teoremas das Geometrias Não – Euclidianas (sem efectivamente saber que se tratava mesmo de Geometrias Não – Euclidianas).

As ideias de Leibniz e Saccheri não tiveram sucesso significativo na sua época, talvez devido à influência negativa de Immanuel Kant (1724-1804) que sustentou dogmaticamente que:

“Não precisamos de nenhuma invenção nova em Lógica, porque é suficiente a forma que lhe foi dada por Aristóteles”

afirmação que demonstra claramente a ignorância matemática desse grande filósofo alemão.

No século XIX surgiram duas novas teorias que produziram a fundamentação da Matemática que vigorou durante todo o século XX:

- A Lógica Matemática, iniciada, de modo embrionário, por George Boole (1815-1864) em 1847 e atingindo a maturidade com Gottlob Frege (1848-1925) em 1893;
- A Teoria dos Conjuntos iniciada por George Cantor em 1872, e por ele desenvolvida a um elevado grau de sofisticação.

Cada uma das teorias foi e continua a ser desenvolvida, de forma intensa, ao longo de todo o século XX.

É atribuída a George Boole a criação da Lógica Matemática. Nas suas obras “*Mathematical Analysis of Logic*”, publicada em 1847 e “*An Investigation of the Laws of Thought*” de 1854, a Lógica foi pela primeira vez de uma forma consistente tratada como um cálculo de signos algébricos. Esta Álgebra Booleana será fundamental para o desenho dos

circuitos nos computadores electrónicos modernos. É ainda a base da teoria dos conjuntos. Outras das suas contribuições decisivas foi ter acabado com as restrições impostas à Lógica desde Aristóteles, afirmando que existia uma infinidade de raciocínios válidos e uma infinidade de raciocínios não válidos.

Boole desenvolve o conceito de Lógica de Classes ou Conjuntos e nas operações lógicas de **intersecção** (a que chamava selecção), **reunião** (mas só para conjuntos disjuntos; só Jevons (1835-1882) é que generalizou este conceito), **complemento** e relações de **inclusão** e **identidade**, deduzindo dos seus conceitos todas as regras do silogismo clássico.

Nasceu assim o Cálculo Proposicional (Cálculo de Classes de Proposições) que foi posteriormente muito mais desenvolvido por Charles S. Peirce (1839-1914) que introduziu pela primeira vez o seguinte:

- a) A diferença entre Proposição (“Sócrates é Homem” só com constantes) e Função Proposicional (“ x é Homem” que contém variável).
- b) Enquanto uma Proposição ou é verdadeira ou falsa, uma Função Proposicional é, em geral, verdadeira para certos valores da variável e falsa para outros.
- c) Os dois operadores da quantificação, o quantificador existencial \exists e o quantificador universal \forall .
- d) O uso das tabelas de verdade.

e) Libertação das equações e das operações inversas proveniente da Álgebra, utilizando simultaneamente a implicação e a inclusão hipotética e tendo restabelecido a noção aristotélica de abdução que veio a cair no esquecimento, tendo sido reabilitada na obra de Umberto Eco (1932), “*Sugli Specchi ed Altri Saggi*” de 1982.

f) Introduzindo a negação conjunta notada pela seta de Peirce:

$$A \downarrow B = \sim (A \vee B) \quad \text{“NOR”}$$

que em alternativa com a incompatibilidade notada pela barra de Sheffer

$$A / B = \sim (A \vee B) \quad \text{“NAND”}$$

virá a constituir o fundamento básico do suporte material “hardware” dos sistemas informáticos, pois pode demonstrar-se que toda a expressão lógica que contenha as operações negação, adição e multiplicação lógicas pode ser escrita em função somente dos símbolos de Peirce e Sheffer o que permite uma simplificação notável dos circuitos lógicos que passam a poder ser constituídos por um único tipo de componente, NAND ou NOR.

Paralelamente, Augustus De Morgan (1806-1871) desenvolveu, também, a Álgebra da Lógica. A sua maior contribuição para o conhecimento foi como reformador da Lógica Aristotélica. De facto, o renascimento dos estudos de Lógica que começaram na primeira metade do século XIX deveu-se quase que inteiramente aos trabalhos de De Morgan e

Boole. As realizações mais importantes de De Morgan foram o lançamento dos fundamentos de relações e a preparação do caminho para o nascimento da Lógica Simbólica (ou Matemática).

De Morgan no seu “*Formal Logic, or the Calculos of Inference, necessary and probable*”, 1847, melhorou e ampliou a Lógica Aristotélica, juntando-lhe um novo princípio: a quantificação dos termos que permite a introdução de uma multiplicidade de novas formas válidas de silogismo. Mais ainda, a quantificação elimina um dos piores defeitos da Lógica de Aristóteles que considerando como premissa todos os X são Y deduz a conclusão alguns X são Y que implica a existência material dos X, o que não é formalmente necessário.

De Morgan iniciou também, como foi dito anteriormente, o estudo da Lógica de Relações, ampliando a Lógica de Aristóteles que se limitava a tratar apenas da relação “ser”, afirmando-a ou negando-a.

Depois da obra de Boole, De Morgan e Peirce o grande passo em frente em Lógica é dado por Gottlob Frege. Mas enquanto Boole queria mostrar que a Lógica era uma parte da Matemática, Frege pretendeu mostrar que a Aritmética era idêntica à Lógica.

Gottlob Frege iniciou a Lógica de Predicados, utilizando:

- Notação simbólica para formalizar as demonstrações da Matemática;
- Estabelecendo a noção de sistema formal e respectiva axiomática.

Gottlob Frege desenvolve a sua obra (*“Begriffsschrift”*, 1879, *“Die Grundlagen der Arithmetik”*, 1884 e *“Grundgesetze der Arithmetik”*, 1893, 1903) de uma forma quase autística, sem ligar aos seus precursores. Generalizou o uso das variáveis lógicas e das funções proposicionais, bem como dos quantificadores e tornando bem clara a distinção entre:

- a) O enunciado de uma proposição e o seu valor lógico, tanto do nível notacional como conceptual.
- b) Um objecto e um conjunto formado somente por ele.
- c) Pertença e inclusão.

Clarificar os conceitos de:

- a) Quantificação de funções proposicionais, isto é, a determinação dos respectivos universos ou domínios.
- b) Implicação material.

Tendo edificado a Lógica sobre um sistema explícito de axiomas (a sua axiomática), Frege tentou então construir a Aritmética como extensão da Lógica, para em seguida passar a toda a Matemática. Infelizmente as notações de Frege e toda a sua simbologia é extremamente complicada e a sua obra somente se tornou conhecida depois de Bertrand Russell (1872-1970) a ter divulgado, o mesmo Russell que quase a tinha destruído com o famoso paradoxo do barbeiro:

“Um barbeiro afixou um cartaz onde proclamou que, embora não barbeasse aqueles que se barbeavam a si próprios, barbeava todos os que não se barbeavam a si próprios”.

Um dia, ao fazer a barba a si próprio lembrou-se que se o fizesse, seria um dos que se barbeariam a si próprios e não deveria ser barbeado pelo barbeiro; por outro lado, se não se barbeasse a si próprio, o cartaz seria incorrecto, pois realmente não barbeava todos os que não se barbeavam a si próprios. Tinha sido definido um problema aparentemente insolúvel da Teoria dos Conjuntos, não tendo no entanto nada a ver com a teoria do contínuo ou do infinito.

George Cantor foi um grande matemático do século XIX, pai da Teoria dos Conjuntos, que observou:

“Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se for possível estabelecer uma relação entre eles tal que a cada elemento de cada um desses conjuntos corresponde um e um só elemento do outro conjunto”.

Giuseppe Peano (1858-1932) foi o fundador da Lógica Simbólica e o centro de seus interesses foram os fundamentos da Matemática e o desenvolvimento de uma linguagem Lógica Formal.

O programa de Peano era mais vasto e mais robusto que o programa de Frege. Peano pretendia publicar uma espécie de “*Formulário das Matemáticas*” completamente escrito em linguagem formal e contendo não somente a Lógica Matemática, mas todas as proposições válidas dos diferentes ramos da Matemática. Trabalhando em conjunto com Fano

(1871-1952), Burali- Forti (1861-1931) e outros colaboradores, realizou com relativa rapidez o seu ambicioso projecto , tornando evidente a conveniência do simbolismo adoptado. A sua linguagem tornou-se facilmente legível, com a introdução de numerosas abreviaturas e simbolismos bem escolhidos, além de um engenhoso sistema de substituição de cascatas de parêntesis por pontos de separação (convenção que alguns matemáticos actuais ainda usam). Muitas das notações devidas a Peano, como por exemplo \supset (que hoje significa contém) era usada por Peano no sentido inverso (de contido ou implica). Por outro lado a quantificação, segundo Peano, somente se pode aplicar a relações da forma equivalência, implicação ou igualdade, o que constitui uma restrição muito severa.

Em 1889 Peano desenvolveu uma axiomática para os números naturais constituída por cinco axiomas (A1-A5):

A1-Um (1) é um número natural;

A2-Todo o número natural tem um sucessor que é ainda um número natural;

A3-Um (1) não é sucessor de qualquer número natural;

A4-Os números naturais a e b , $a \neq b$, não têm o mesmo sucessor;

A5-Princípio de indução finita (completa ou matemática):

Todo o subconjunto do conjunto \mathbb{N} dos números naturais que contenha o número um e que contendo um número natural contém o seu sucessor, coincide com o conjunto \mathbb{N} dos números naturais, e daqui resulta o

Método de indução finita (completa ou matemática)

Se num enunciado,

$T(1)$ é verdadeiro e se

$T(n+1)$ é verdadeiro sempre que $T(n)$ o seja,

Então $T(n)$ é verdadeiro para todo o número natural n .

Embora Peano seja realmente um dos fundadores da Lógica Matemática, o filósofo e matemático alemão Gottlob Frege é considerado o fundador da Lógica Matemática actual.

Bertrand Russell em 1901 encontra um paradoxo (o paradoxo do barbeiro, já anteriormente referido) nos axiomas de Frege para a teoria dos conjuntos. Juntamente com Whitehead (1861-1947) escreve os “*Principia Mathematica*” (1910-1913), onde se pretende que todos os teoremas da Matemática se podem deduzir de princípios puramente lógicos e que constitui o cume das contribuições da escola logicista, iniciada por Frege.

Segundo Russell, a Matemática é "uma ciência dedutiva". Partindo de certas premissas chegamos, através de um rigoroso processo de dedução aos vários teoremas que a constituem.

Da mesma forma que Russell queria usar a Lógica para clarificar conceitos da Matemática, também queria usá-la para clarificar conceitos em Filosofia. Enquanto um dos fundadores da Filosofia Analítica, Russell é recordado pelo seu trabalho em que usa a Lógica de primeira ordem e pelo seu empenho na importância da forma Lógica para a resolução de muitos problemas filosóficos. Aqui, tal como na Matemática, a sua esperança era

que aplicando maquinaria lógica pudéssemos ser capazes de resolver grandes dificuldades.

O programa de investigação de David Hilbert (1862-1943) apresentado no congresso internacional de Matemática de Bolonha em 1928, constituía essencialmente uma extensão do trabalho que iniciara na década de 1890. Não tentava responder à questão que Frege e Russell haviam colocado, quanto ao que a Matemática era verdadeiramente. Nesse aspecto mostrava-se menos filosófico, menos ambicioso. Por outro lado era muito mais penetrante pois levantava questões profundas e difíceis acerca dos sistemas como os que Russell produzira. De facto Hilbert fez a pergunta sobre quais eram, por princípio, as limitações de um esquema como o de “Principia Mathematica”. Haveria algum modo de descobrir o que se podia, e o que não se podia, demonstrar dentro de tal teoria?

Nesse congresso de 1928, Hilbert tornou as suas questões muito precisas. Primeiro, seria a Matemática **completa**? No sentido técnico de que toda a afirmação (tal como “todo o inteiro é a soma de quatro números quadrados”) podia ser demonstrada, ou declarada falsa. Segundo, era a Matemática **consistente**? No sentido de que a afirmação “ $2+2=5$ ” nunca poderia ser alcançada por uma sequência de passos válidos de uma demonstração. E terceiro, era a Matemática **decidível**? Queria com isto dizer, se existiria um método bem definido o qual, em princípio, ao ser aplicado a qualquer asserção, conseguiria garantidamente produzir uma decisão correcta quanto à validade da asserção.

Em 1928, nenhuma destas questões tinha resposta. Opinava Hilbert que a resposta era “sim” em todos os casos. Na opinião dele, “não havia

problemas irresolúveis.” Mas em breve o jovem matemático da Áustria, Kurt Gödel (1906-1978), anunciou resultados que vibraram um sério golpe no programa de Hilbert.

Então surge finalmente uma axiomática para os conjuntos.

Fundamentando-se na Matemática e nos seus diversos ramos: no caso dos Inteiros a axiomática de Peano, no caso dos Conjuntos a axiomática de Zermelo – Fraenkel. A Lógica ajudava a construção da Matemática que utilizando o método dedutivo construía os seus teoremas com base na axiomática. E tudo correu bem até Gödel.

Kurt Gödel, matemático austríaco, foi um dos mais importantes lógicos de todos os tempos. Em 1931, com a publicação do seu artigo “*On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*”, Gödel desfez algumas das suposições fundamentais que serviam de base à Matemática e à Lógica.

Ironicamente, poucos matemáticos do seu tempo foram capazes de compreender a complexa prova do seu teorema e a total importância do seu trabalho foi durante muito tempo ignorada.

O Teorema de Gödel surge como a Proposição VI do seu artigo de 1931 e afirma que qualquer sistema axiomático coerente suficientemente poderoso para definir os conceitos da aritmética dos números naturais é incompleto, isto é, existem fórmulas da linguagem dos números naturais tais que nem elas nem as suas negações são teoremas desse sistema.

Eis como um simples teorema conseguiu destruir o que até ao seu enunciado sempre tinha sido considerado como uma verdade adquirida: afinal a Matemática raciocinava bem sobre dados incompletos. Estava em jogo o conceito de verdade e o problema da decisão.

Não se pense porém que demonstrar a possibilidade da axiomatização de uma teoria equivale a demonstrar a sua coerência interna; o próprio programa formalista de David Hilbert exige essa demonstração para cada sistema axiomático, pondo no entanto duas sérias restrições aos métodos de demonstração a usar:

- 1) A indução matemática é permitida, mas somente na forma finita.
- 2) Não é permitido a utilização do princípio do terceiro excluído tal como foi solicitado por Bernays (1926) e Herbrand (1930).

Mas foi Kurt Gödel quem, demonstrando o Teorema da Completude da Lógica de Predicados Monádica ou Lógica de 1ª ordem, em 1930, pareceu dar a prova de que o modelo axiomático era um modelo válido. Só que em 1931 o mesmo Gödel demonstrou os seus Teoremas da Incompletude (como vamos ver no Capítulo 6), destruindo totalmente os pensamentos axiomáticos tão queridos da Matemática.

A Tarski (1901-1983) deve-se muito no que respeita ao progresso dos estudos lógicos. De entre as suas contribuições, destaca-se, a definição semântica de verdade, que tem aplicações em numerosos campos da Matemática, com repercussões na Filosofia. É difícil dar hoje uma ideia da ampliação do campo de estudos da Lógica, quanto às pesquisas e

possibilidades, mas o que é certo é que um conhecimento preliminar ainda que intuitivo é necessário em quase todos os ramos de conhecimento.

Alan M. Turing (1912-1954) trabalhou com Kurt Gödel, Alonso Church (1903-1995), e John Von Neumann (1903-1957) sobre o problema da decisão, as máquinas (de Turing) universais, a quebra do código Enigma e o cérebro artificial. Em 1950 escreve o artigo: “*Computing Machinery and Intelligence*” e formula o teste de Turing.

É bem conhecida a previsão de A. M. Turing:

“Nos próximos 50 anos, seremos capazes de construir computadores que serão bons a realizar o jogo da imitação que um perguntador médio tem só 70% de oportunidades em identificar correctamente se ele ou ela é uma pessoa ou uma máquina.”³

Mais tarde Church e Turing em 1936 chegaram à conclusão que a Lógica de Predicados não é decidível.

Ao longo do século XX assistiu-se por um lado à generalização e diversificação dos estudos da Lógica Matemática, atingindo um elevado grau de formalização. A Lógica possui actualmente um sistema completo de símbolos e regras de combinação de símbolos para obter conclusões válidas. Este facto tornou-a particularmente adaptada a ser aplicada à concepção de máquinas inteligentes.

³ in A. M. Turing “Computational Machinery and Intelligence”, Mind, 1950, <http://www.gecad.isep.ipp.pt/>.

A ideia de criar máquinas inteligentes não é nova. Desde o Renascimento que se tem procurado de forma sistemática conceber máquinas capazes de substituírem o homem em certas tarefas.

A disponibilidade dos computadores na segunda metade do século XX levantou a esperança que as computações na Lógica poderiam ser usadas para resolver problemas do mundo real. Nasceram novas disciplinas como a Robótica e a Inteligência Artificial e a evolução é hoje extraordinariamente rápida, sobretudo a nível de Hardware.

Este trabalho pretende efectuar uma introdução à Lógica em que é válido o princípio do terceiro excluído, usando sempre que possível termos simples e que possam ser entendidos por qualquer estudioso que se inicia neste tipo de estudo. O trabalho consta de:

Capítulo 1: Introdução Histórica. Constitui um breve resumo sobre a evolução da Lógica.

Capítulo 2: Uma introdução à Lógica Proposicional e alguns aspectos referentes a esta, tais como tabelas da verdade, equivalências lógicas, árvore de análise, algoritmo tautologia, regras de inferência e as formas normais.

Capítulo 3: Uma introdução à Lógica Booleana e como minimizar uma função Booleana utilizando o Mapa K e o método de Quine McCluskey.

Capítulo 4: Uma introdução à Lógica Predicativa, e alguns aspectos referentes a esta tais como formas Prenex, Skolemização e regras de inferência.

Capítulo 5: Uma introdução ao Sistema Formal.

Capítulo 6: O conceito de verdade segundo Tarski, os Teoremas da Completude e Incompletude de Gödel, o problema de decisão de Church entre outros.

Capítulo 7: É um capítulo mais detalhado que aborda o problema da satisfabilidade, para sabermos se é possível “mecanizar” o raciocínio ou a argumentação lógica ou construir algoritmos que permitam verificar mecanicamente a validade de uma proposição como por exemplo a resolução, o algoritmo Davis – Putnam– Procedure (D.P.P.), o Teorema de Tseitin e o Princípio de Dirichlet.

2. LÓGICA PROPOSICIONAL

“Uma vez que a Lógica não é apenas argumento válido mas também reflexão sobre os princípios da validade, esta só aparecerá naturalmente quando já existe à disposição um corpo considerável de inferências ou argumentos. A investigação Lógica, a de pura narrativa, não é suscitada por qualquer tipo de linguagem. A linguagem literária, por exemplo, não fornece suficiente material de argumentos e inferências. As investigações em que se pretende ou procura uma *demonstração* é que naturalmente dão origem à reflexão lógica, uma vez que demonstrar uma proposição é inferi-la validamente de premissas verdadeiras. Há duas condições para a demonstração: premissas verdadeiras e argumentos válidos.” [8, pág. 3]

A Lógica é o estudo de argumentos válidos. **Argumento** é constituído por duas ou mais condições iniciais – premissas – e dessas premissas que se admitem ser verdadeiras nós chegaremos a uma conclusão. Os **raciocínios**, os chamados silogismos pelos Gregos, são hoje a dedução (Gregos), a indução e a abdução.

Enquanto que o argumento diz respeito à forma o raciocínio diz respeito ao conteúdo.

Se admitirmos o Princípio do Terceiro Excluído (“Tertio non Datur”) um argumento ou é verdadeiro ou é falso, podendo determinar-se sempre a sua validade. Partindo de premissas válidas podemos ter um raciocínio válido ou não válido, conforme estejamos a analisar a forma ou o conteúdo.

Exemplo:

O céu é verde.

O mar é cor-de-rosa.

Logo o céu é verde e o mar é cor-de-rosa.

É um silogismo, e se admitirmos que as premissas são verdadeiras, a conclusão é verdadeira quanto à forma (sintaxe) embora seja falsa quanto ao conteúdo (semântica).

A Lógica formal é uma ciência abstracta que tem por objectivo a análise formal dos argumentos.

A matematização implica o uso de símbolos: variáveis, constantes e símbolos de operações. A Lógica tem dois tipos de **sinais elementares**, os sonoros e os gráficos: os sonoros dão origem à linguagem falada, os gráficos dão origem à linguagem escrita que pode ser de dois tipos: fonética (letras e dígitos) e ideográfica (tipo de escrita com símbolos que representam ideias).

O conjunto de símbolos numa linguagem designa-se por **expressão** ou **enunciado**.

Chamam-se **proposições** a todos os enunciados cujo valor lógico é possível determinar, ou seja, são expressões a respeito das quais faz sentido dizer que são verdadeiras ou que são falsas.

Dentro das proposições podemos considerar a **tautologia**, se for sempre verdadeira, a **contradição**, se for sempre falsa e **contingente**, tanto pode ser verdadeira como falsa.

As proposições podem ser de dois tipos: **atómicas** e **moleculares**. As atômicas são aquelas que não podem ser subdivididas. As moleculares ou também chamadas compostas são proposições atômicas ligadas pelos sinais das conexões lógicas que têm pelo menos uma conexão lógica.

As **conexões lógicas** são: negação (\sim), conjunção (\wedge), disjunção (\vee), disjunção exclusiva ($\dot{\vee}$), implicação (\Rightarrow) e equivalência (\Leftrightarrow).

As proposições dependem de uma **linguagem**. Uma linguagem lógica pode ser considerada uma estrutura tridimensional, isto é, constituída por:

- Vocabulário é o elemento lexicográfico, isto é, as palavras que constituem o idioma;
- Sintaxe é o elemento que efectua o estudo da estrutura puramente formal da Lógica, ou seja, estabelece as leis da Lógica, que regulam a construção das expressões lógicas;
- Semântica é o elemento que tem por objectivo a interpretação do significado de expressões.

Existem dois tipos de **relações lógicas**: a relação de identidade e a relação pertença/inclusão.

A relação identidade pressupõe dois axiomas:

- Axioma 1: todo o ser é idêntico a si próprio.
- Axioma 2: todo o ser é diferente de outro ser.

A relação pertença/inclusão diz-nos que:

- $A \in M$ (relação entre um elemento e um conjunto)
- $\alpha \subset B$ (relação entre conjuntos)

Chama-se **universo lógico** ou simplesmente universo de uma teoria ao conjunto de todos os entes que são sempre considerados indivíduos nessa teoria.

A Lógica que vamos estudar pressupõe os seguintes axiomas:

- 1) Axioma da não contradição: uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.
- 2) Axioma do terceiro excluído (dicotomia): uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, nunca se verifica uma terceira hipótese.

Para obtermos os princípios gerais da Lógica vamos trabalhar com variáveis proposicionais que vamos representar por P, Q, R, \dots

Na Lógica Proposicional temos em conta diversos algoritmos possíveis para analisar proposições: tabelas da verdade, equivalências lógicas, árvores de análise, algoritmo tautologia e regras de inferência.

2.1. Tabelas da Verdade

É sempre possível, teoricamente, determinar a validade de uma proposição pela **tabela da verdade**.

Ao usarmos a tabela da verdade necessitamos na prática de linhas e colunas. Nas linhas estão os valores lógicos, nas colunas as proposições. Se o número de proposições for n (número de proposições atômicas diferentes) então temos 2^n linhas, e o algoritmo é simples, mas ineficiente, pois é um algoritmo cuja complexidade é exponencial.

As conexões lógicas podem ser definidas usando tabelas de verdade. Assim temos:

- Negação – not: A proposição resultante da negação de uma outra proposição é verdadeira se a outra for falsa e é falsa se a outra for verdadeira. A negação é representada pela conectiva “ \sim ”. A tabela de verdade da negação é:

P	\bar{P}
V	F
F	V

Tabela 1 – Tabela da verdade da negação

- Conjunção – and: A proposição resultante da conjunção de duas proposições é verdadeira quando, e só quando, ambas o forem. A

conjunção é representada pela conectiva “ \wedge ” (também é designada por produto lógico pois trata-se efectivamente de um produto logico). A tabela da verdade da conjunção lógica é:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 2 – Tabela da verdade da conjunção

▪ Disjunção inclusiva – or: A proposição resultante da disjunção de duas proposições é falsa quando, e só quando, ambas o forem. A disjunção inclusiva é representada pela conectiva “ \vee ” (sinal de soma, pois representa a adição lógica). A tabela de verdade desta operação lógica é:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 3 – Tabela da verdade da disjunção

▪ Disjunção exclusiva – Xor: A operação Lógica Xor é derivada das operações fundamentais (conjunção, disjunção inclusiva e negação) da seguinte forma: $(\bar{P} \wedge Q) \vee (P \wedge \bar{Q})$. Para a representação da disjunção exclusiva, vamos adoptar a conectiva “ $\dot{\vee}$ ”.

P	Q	$P \dot{\vee} Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 4 – Tabela da verdade da disjunção exclusiva

- **Implicação:** Na linguagem corrente usamos frequentes vezes frases condicionais, por exemplo, “Se hoje chover, então vou ao cinema”. Esta frase só é falsa se hoje chover e eu não for ao cinema; se hoje não chover a frase é verdadeira, tal como o é se hoje chover e eu for ao cinema. A operação que traduz, em termos de Lógica Matemática, a ideia de uma frase condicional é a implicação. Trata-se de uma operação lógica de grande importância que é designada por “ \Rightarrow ”. Sendo P e Q duas proposições quaisquer, a proposição $P \Rightarrow Q$ (leia-se “ P implica Q ”) é falsa se P for verdadeira e Q falsa e é verdadeira em todos os outros casos; por outras palavras, a tabela de verdade para a implicação é, por definição, a seguinte:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 5 – Tabela da verdade da implicação

Na implicação $P \Rightarrow Q$ chama-se antecedente à proposição P e conseqüente à proposição Q . Repare-se que uma implicação só é falsa se o antecedente for verdadeiro e o conseqüente for falso; em todos os outros casos a implicação é verdadeira.

- **Equivalência:** Dadas duas proposições, digamos P e Q , podemos construir uma nova Proposição $P \Leftrightarrow Q$, que se lê “ P equivalente a Q ”, e que é verdadeira se e só se P e Q tiverem o mesmo valor lógico (ambas verdadeiras ou ambas falsas) e falsa se e só se P e Q tiverem valores lógicos diferentes (uma for verdadeira e a outra for falsa).

Assim, por exemplo, a proposição

$$\text{Lisboa é uma cidade} \Leftrightarrow \text{Londres é uma vila}$$

é falsa, visto a proposição “Lisboa é uma cidade” ser verdadeira e a proposição “Londres é uma vila” ser falsa. Já a proposição

$$\text{oito é um número primo} \Leftrightarrow \text{dois é um número irracional}$$

é verdadeira, visto as proposições “oito é um número primo” e “dois é um número irracional” serem ambas falsas.

Uma forma visual bastante útil de exprimir o valor lógico da proposição $P \Leftrightarrow Q$ como função dos valores lógicos de P e de Q é a utilização das chamadas tabelas de verdade:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 6 - Tabela da verdade da equivalência

Na primeira coluna da tabela anterior estão os valores lógicos de P , na segunda coluna os valores lógicos de Q e na coluna da direita os valores lógicos de $P \Leftrightarrow Q$. É óbvio que, nas duas primeiras colunas, teremos de ter todas as combinações possíveis de valores lógicos das proposições P e Q .

Exemplo 1:

Classificar a proposição $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$, utilizando tabelas da verdade.

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$(A \Rightarrow B)$	$(\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

A proposição é uma tautologia pois o resultado final é sempre V.

Exemplo 2:

Classificar a proposição $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$, utilizando a tabela da verdade.

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

A proposição é contingente pois o resultado tanto é V como F.

Sendo a tabela da verdade um algoritmo torna-se intratável pela impossibilidade da aplicação devido à sua complexidade algorítmica, que é do tipo 2^n como vimos. Com efeito, para representar uma tabela de verdade, por exemplo, com seis proposições atômicas, são necessárias $2^6 = 64$ linhas. E se $n > 6$, como é óbvio o procedimento é intratável.

Veremos no capítulo 7, um exemplo mais completo como analisar proposições utilizando a tabela da verdade.

2.2. Equivalências Lógicas

Duas expressões dizem-se equivalentes se tiverem o mesmo significado, isto é, a mesma tabela da verdade. Para indicar se duas expressões A e B são equivalentes, escrevemos: $A \Leftrightarrow B$, como vimos.

Note-se que dizer que A e B são logicamente equivalentes é o mesmo que dizer que $A \Leftrightarrow B$ é uma tautologia.

Algumas equivalências Lógicas:

- Identidade

$$P \wedge V \Leftrightarrow P$$

$$P \vee F \Leftrightarrow P$$

- Dominação

$$P \vee V \Leftrightarrow V$$

$$P \wedge F \Leftrightarrow F$$

- Idempotência

$$P \vee P \Leftrightarrow P$$

$$P \wedge P \Leftrightarrow P$$

- 3º Excluído

$$P \vee \bar{P} \Leftrightarrow V$$

- Contradição

$$P \wedge \bar{P} \Leftrightarrow F$$

- Dupla negação

$$\bar{\bar{P}} \Leftrightarrow P$$

- Comutativa

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

- Associativa

$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$$

- Absorção

$$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$$

$$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$$

- Distributiva

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

- De Morgan

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$$

$$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$$

- Tautologia da implicação

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P} \vee Q$$

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P \wedge \overline{Q}}$$

Usando as equivalências lógicas podemos determinar a validade ou não validade de uma proposição lógica.

As dificuldades práticas na utilização deste processo aparecem quando a proposição é complexa ou extensa, sobretudo se não for estabelecida uma **regra de precedência** entre as conexões lógicas, equivalente às regras da Álgebra elementar.

Exemplo:

Admitindo a regra de precedência $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

2.3. *Árvore de Análise*

A **árvore de análise** analisa a proposição subdividindo-a nas proposições atômicas que a constituem. Se partimos das proposições atômicas até chegarmos à proposição inicial temos uma árvore de síntese.

Exemplo:

Analisar a proposição $(P \wedge Q) \vee \bar{R} \Rightarrow (P \vee R) \wedge Q$, utilizando a árvore de análise.

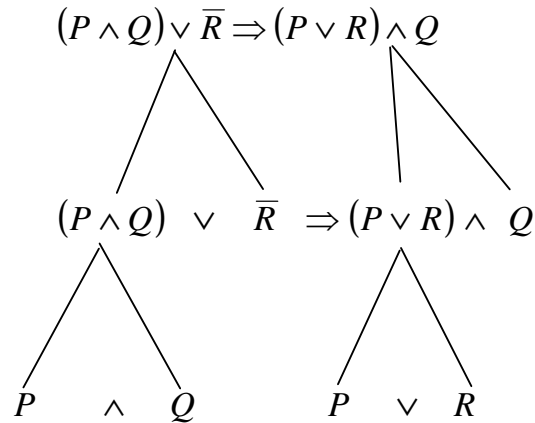


Figura 1 – Árvore de análise de uma proposição

Vimos então como subdividir uma proposição utilizando a árvore de análise, e obtivemos no final as proposições atômicas que a constituem, que neste caso são: P, Q e R.

A árvore de análise pode ser utilizada em varias aplicações como descrições completas da sintaxe e da semântica de linguagens de programação, como a definição formal de uma linguagem e sistemas de processamento de linguagens naturais.

2.4. Algoritmo Tautologia

O **algoritmo tautologia** é um algoritmo que nos permite analisar proposições, mas este algoritmo tem uma particularidade: só pode ser usado se a expressão tiver pelo menos uma implicação, porque utiliza a implicação $(V \Rightarrow F) \leftarrow F$, sendo \leftarrow o sinal de atribuição do valor lógico.

Exemplo:

Determinar o valor lógico da proposição usando o algoritmo tautologia.

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

Este algoritmo somente se pode usar se a conexão principal for uma implicação ou equivalência o que acontece no nosso caso, tal como foi dito.

Passos do algoritmo:

- 1) Assignar valores lógicos V ao antecedente e F ao conseqüente.

$$\underbrace{(A \Rightarrow B)}_V \Rightarrow \underbrace{(\bar{B} \Rightarrow \bar{A})}_F$$

- 2) Estudar separadamente os dois casos, atribuindo valores lógicos às proposições atômicas.

- Estudar o caso de: $(\bar{B} \Rightarrow \bar{A} \leftarrow F)$. Isto só acontece se

$$\begin{cases} \bar{B} \leftarrow V \\ \bar{A} \leftarrow F \end{cases}$$

- Estudar o caso de: $(A \Rightarrow B \leftarrow V)$. Isto acontece quando

$$\begin{cases} A \leftarrow V \\ B \leftarrow V \end{cases} \quad \begin{cases} A \leftarrow F \\ B \leftarrow V \end{cases} \quad \begin{cases} A \leftarrow F \\ B \leftarrow F \end{cases}$$

3) Comparação dos resultados obtidos

Demonstramos que é falso que a implicação seja falsa (como foi admitido por hipótese), logo ela é verdadeira. Então a proposição é uma tautologia. Trata-se obviamente de um procedimento baseado na hipótese do terceiro excluído, ou melhor, da redução ao absurdo.

2.5. Regras de Inferência

No nosso dia a dia raciocinamos e tiramos conclusões usando determinadas regras. A Lógica ajuda a compreender essas regras permitindo distinguir entre argumentos correctos e não correctos. Seguem-se as **regras de inferência** estudadas na Lógica, admitindo que acima do traço estão premissas verdadeiras, abaixo estará a conclusão verdadeira.

- S – Simplificação

$$\frac{P \wedge Q}{P}, \frac{P \wedge Q}{Q}$$

- C – Conjunção

$$\frac{P, Q}{P \wedge Q}$$

- A – Adição

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

- MP – Modus Ponens

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

- MT – Modus Tollens

$$\frac{P \Rightarrow Q, \bar{Q}}{\bar{P}}$$

- ST – Silogismo Transitivo

$$\frac{P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R}{P \Rightarrow R}$$

- SD – Silogismo Disjuntivo

$$\frac{P \vee Q, \bar{P}}{Q}$$

- DC – Dilema Construtivo

$$\frac{P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S, P \vee R}{Q \vee S}$$

Ainda se poderiam acrescentar outras regras de inferência, mas estas são as principais.

Mas como aplicamos as regras de inferência?

As regras de inferência podem-se aplicar por exemplo na derivação de uma proposição. A derivação consiste: na **interpretação** da proposição onde assignamos os valores lógicos a cada proposição, na **formalização** escrevendo a proposição com todas as suas conexões lógicas e por fim a

derivação propriamente dita é partir de um conjunto de verdades até atingirmos uma última que é verdade, isto é atingir a conclusão. Para derivarmos utilizamos as regras de derivação seguintes:

- Regra P: Introdução de premissas ou hipóteses

Qualquer proposição pode ser uma premissa P ou uma hipótese H tendo um único número de premissa que é igual ao número da linha da sequência.

- Regra T: Uso de tautologias

Pode-se sempre introduzir na sequência da derivação uma proposição que já seja conhecida anteriormente como tautologia.

- Regra MP

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

- Regra MT

$$\frac{P \Rightarrow Q, \bar{Q}}{\bar{P}}$$

- Regra C: Condicionalização

Estabelecida a sequência de derivações pode sempre escrever-se a proposição $\varphi \Rightarrow \psi$ desde que ambas sejam válidas isoladamente e φ seja anterior a ψ .

$$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \Rightarrow \psi}$$

▪ Regra E: Equivalência

Se duas proposições forem equivalentes podemos sempre ligá-las por qualquer conexão lógica na sequência da derivação.

Exemplo:

Interpretar, formalizar e derivar o seguinte enunciado, utilizando regras de inferência:

“Se um programa é eficiente, ele executa-se rapidamente; o programa, ou é eficiente ou tem um erro. Contudo o programa não se executa rapidamente, portanto há um erro.”

1) Interpretar

“O programa é eficiente” $\leftarrow P$

“O programa executa-se rapidamente” $\leftarrow Q$

“O programa tem um erro” $\leftarrow R$

2) Formalizar

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \dot{\vee} R) \wedge \bar{Q} \Rightarrow R$$

3) Derivar

(1) $P \Rightarrow Q$	P
(2) $P \dot{\vee} R$	P
(3) \bar{Q}	P
(4) $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \dot{\vee} R) \wedge \bar{Q}$	Conjunção (1,2,3)
(5) \bar{P}	MT (1,3)
(6) R	Disjunção exclusiva (2,5)
(7) $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \dot{\vee} R) \wedge \bar{Q} \Rightarrow R$	C (4,6)

2.6. Formas Normais

Por vezes para simplificar expressões ou para analisar proposições é necessário passar essas proposições para as **formas normais** conforme o caso.

Uma expressão lógica diz-se que está na **forma normal disjuntiva** (DNF – disjuntive normal form) se puder ser escrita como uma disjunção cujos termos são conjunções.

Exemplo:

$$P \vee \underbrace{(Q \wedge R)}_{\text{conjunção de literais}} \vee \underbrace{(\bar{P} \wedge Q \wedge \bar{R})}_{\text{conjunção de literais}}$$

De outro modo também existe a **forma normal conjuntiva** (CNF – conjuntive normal form), ou seja, quando puder ser escrita como uma conjunção cujos termos são disjunções.

Exemplo:

$$\underbrace{(P \vee Q)}_{\text{disjunção de literais}} \wedge \underbrace{(\bar{R} \vee P)}_{\text{disjunção de literais}} \wedge \bar{Q}$$

É sempre possível colocar uma proposição lógica numa das formas normais. A regra prática para esse efeito poderá ser a seguinte:

- Retirar todas as implicações e equivalências, utilizando as seguintes equivalências:

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$$
$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P \wedge \bar{Q}}$$

- Usar as leis de Morgan no caso de negações, conjunções ou disjunções;
- Usar as propriedades comutativa e distributiva.

A uma conjunção de literais vamos chamar mintermo, e a uma disjunção de literais, maxtermo.

Se uma função Lógica $f(P,Q,R)$ for dada por uma tabela de verdade como a seguinte:

P	Q	R	f
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

podemos escrever imediatamente a função na forma DNF e na forma CNF.

Este método conduz-nos às formas normais disjuntiva e conjuntiva usando a tabela de verdade da função proposicional. O método está baseado na notável propriedade do conjunto standard de conectivas que foi notada por Post (1897 – 1954) em 1921, ou mais correctamente:

“Para qualquer tabela de verdade existe uma fórmula proposicional com essa tabela de verdade”.

Para escrevermos a DNF temos de ter em conta que é uma disjunção em que os termos são conjunções, então para isso escolhemos sempre onde a função é verdadeira, pois assim temos a certeza que os mintermos são verdadeiros.

$$f_{\text{DNF}} = (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \bar{Q} \wedge R) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge R)$$

Para escrevermos a CNF temos de ter em conta que é uma conjunção em que os termos são disjunções, então neste caso escolhemos sempre os termos para os quais a função é falsa.

$$f_{\text{CNF}} = (P \vee Q \vee \bar{R}) \wedge (P \vee \bar{Q} \vee \bar{R}) \wedge (\bar{P} \vee Q \vee R) \wedge (\bar{P} \vee Q \vee \bar{R}) \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q} \vee \bar{R})$$

Então os constituintes DNF e CNF da função $f(P, Q, R)$ definida anteriormente são:

P	Q	R	Constituinte DNF	Constituinte CNF
V	V	V	$P \wedge Q \wedge R$	$\bar{P} \vee \bar{Q} \vee \bar{R}$
V	V	F	$P \wedge Q \wedge \bar{R}$	$\bar{P} \vee \bar{Q} \vee R$
V	F	V	$P \wedge \bar{Q} \wedge R$	$\bar{P} \vee Q \vee \bar{R}$
V	F	F	$P \wedge \bar{Q} \wedge \bar{R}$	$\bar{P} \vee Q \vee R$
F	V	V	$\bar{P} \wedge Q \wedge R$	$P \vee \bar{Q} \vee \bar{R}$
F	V	F	$\bar{P} \wedge Q \wedge \bar{R}$	$P \vee \bar{Q} \vee R$
F	F	V	$\bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge R$	$P \vee Q \vee \bar{R}$
F	F	F	$\bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge \bar{R}$	$P \vee Q \vee R$

Se A for uma expressão o **complemento** de A obtém-se construindo primeiro o dual de A e depois substituindo todos os literais pelos seus complementos.

Exemplo:

$$A \wedge (B \vee F) \vee (\bar{C} \wedge V) \wedge (F \vee V)$$

$$\text{Dual: } A \vee (B \wedge V) \wedge (\bar{C} \wedge F) \vee (V \wedge F)$$

$$\text{Complementar: } \bar{A} \vee (\bar{B} \wedge V) \wedge (C \wedge F) \vee (V \wedge F)$$

A complementação é uma das maneiras mais simples de negar uma proposição extensa.

A **forma de Horn** é um caso particular duma forma normal conjuntiva no qual cada disjunção tem no máximo um literal positivo.

Exemplo:

$$(P \vee \bar{Q}) \wedge (\bar{R} \vee \bar{S}) \wedge (\bar{P} \vee Q \vee \bar{S}) \wedge P \wedge \bar{Q}$$

As formas de Horn podem ser equivalentemente escritas transformando os maxtermos em implicações. Este processo designa-se por escrever a **forma algorítmica de Horn**.

Para isso pode seguir-se a seguinte rotina:

- 1) Escrever os literais negativos como antecedentes da implicação (escrever V ou 1 se não houver literais negativos).

- 2) Escrever os literais positivos como consequente da implicação (escrever F ou 0 se não houver literais positivos).

No nosso exemplo, a forma algorítmica de Horn é

$$(Q \Rightarrow P) \wedge (\sim (R \wedge S) \Rightarrow 0) \wedge (\sim (P \wedge S) \Rightarrow Q) \wedge (1 \Rightarrow P) \wedge (\bar{Q} \Rightarrow 0)$$

onde os valores lógicos V e F estão substituídos por 1 e 0 respectivamente.

Até aqui, a Lógica é chamada Proposicional, porque se baseia em proposições claramente V ou F. Mas, isso é incompleto para descrever o mundo, senão vejamos o silogismo famoso:

Sócrates é homem. Todo homem é mortal, logo... Sócrates é mortal.

O problema surge ao ter que se tratar o facto de que Sócrates é uma instância de homem. A regra não se aplica só a Sócrates, e sim a todos os homens. Nasce a necessidade de quantificadores, a menos que estejamos interessados em fazer uma proposição distinta para cada um dos homens da terra. Nasce assim a Lógica Predicativa ou de Predicados que irá ser analisada no capítulo 4.

3. LÓGICA BOOLEANA

Na matemática e na ciência da computação, as **Álgebras Booleanas** são estruturas algébricas que "capturam a essência" das operações lógicas E, OU e NÃO, ou seja as operações da teoria de conjuntos, adição, multiplicação e determinação do complementar estão na base deste algoritmo.

Receberam o nome de George Boole, que foi o primeiro a defini-las como parte de um sistema de lógica em meados do século XIX. Mais especificamente, a Álgebra Booleana foi uma tentativa de utilizar técnicas algébricas para lidar com expressões no cálculo proposicional. Hoje, as Álgebras Booleanas têm muitas aplicações na electrónica. Foram pela primeira vez aplicadas a interruptores por Claude Shannon (1916 – 2001), no século XX.

Vamos principiar por lembrar algumas noções conhecidas⁴.

Definição:

Uma **álgebra Booleana** (ou anel Booleano) é um anel $\langle B, +, *, 0, 1 \rangle$ em que cada elemento é um idempotente para a multiplicação (isto é, é igual ao seu quadrado).

⁴ MACLANE and BIRKHOFF, *A Survey of Modern Algebra* . Mac Millan, 1965.

Exemplo:

- 1) O anel $\langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, *, 0, 1 \rangle$
- 2) O anel $\langle P(E), \Delta, \cap, \emptyset, E \rangle$ onde E é um conjunto não vazio arbitrário, Δ e \cap são as operações da diferença simétrica e intersecção e $P(E)$ é o conjunto potência de E .
- 3) Cálculo Proposicional

Um **anel** (com identidade) $R = (R, +, *, 1)$ é um conjunto R munido de duas operações binárias, adição e multiplicação (podem-se chamar assim sem qualquer perda de generalidade, ao contrario das ideias “Bovebakianas”) e de uma operação de ordem zero, “escolher 1”, tais que:

- a) $(R, +)$ é um **grupo abeliano** para a adição.
- b) $(R, *, 1)$ é um **monóide** para a multiplicação.
- c) A multiplicação é distributiva (à esquerda e à direita) em relação à adição.

Grupo e qualquer grupóide associativo (A, θ) (constituído pelo conjunto A e pela operação θ , sendo esta operação fechada sobre esse conjunto), que tenha elemento neutro e em que todo o elemento do conjunto tem inverso.

Monóide é um grupóide associativo (semi – grupo) com elemento neutro.

A definição de **Anel** corresponde a dizer que ele é um conjunto R com um elemento distinto $1 \in R$ e duas operações binárias $a + b$ e $a * b$, ambas associativas, sendo a adição comutativa (o anel é um grupo abeliano) e contem um elemento unidade 1 e um elemento zero 0 tais que

$$a + 0 = a$$
$$a * 1 = a = 1 * a$$

para todo o $a \in R$, e contem elemento inverso que é simétrico aditivo ou oposto ($-a$) tal que $a + (-a) = 0$, e onde são válidas as propriedades distributivas.

O exemplo 1) é um exemplo da única Álgebra Booleana que é um **anel**, um **corpo** e também um **domínio de integridade**.

Corpo é um anel comutativo R com elemento neutro (identidade) não igual a zero e para o qual todo o elemento não nulo $a \in R$ tem um inverso multiplicativo, isto é, $a^{-1} \in R$ sendo $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$.

Domínio de integridade é um anel comutativo R com elemento neutro (identidade) e que não tem divisores de zero, isto é, $a * b = 0$ se e só se $a = 0 \vee b = 0$.

Obviamente um corpo é um domínio de integridade.

Pode-se demonstrar que:

- a) Qualquer Álgebra Booleana é comutativa.

- b) Em qualquer Álgebra Booleana, qualquer elemento é o seu próprio inverso aditivo.

- c) 0 é o elemento mínimo e 1 é o elemento máximo para a relação \leq .

- d) Quaisquer dois elementos x, y de B têm m.d.c. notado por $x \cap y$ e que é o seu produto $x * y$.

- e) Quaisquer dois elementos x, y de B têm m.m.c. notado por $x \cup y$ e que é $x + y + x * y$.

A Lógica Booleana começou praticamente com os trabalhos de Boole “*The Mathematical Analysis of Logic*” em 1847 e “*An Investigation of the Laws of Thought*” em 1854.

Trata-se de trabalhos iniciais sobre um assunto nada fácil: a algebrização da Lógica. E o caminho seguido por Boole foi considerar as proposições lógicas como sendo referidas a **classes** de objectos ou indivíduos. Boole pretendia que a álgebra da Lógica funcionasse da forma idêntica à álgebra dos números, pretendendo usar equações lógicas em todos os casos, mesmo que se tratasse de proposições existenciais que hoje estão no foro da Lógica Predicativa e dos seus quantificadores.

O ponto de vista actual sobre este assunto é que o domínio no qual as leis do pensamento estão de acordo com leis numéricas é coincidência pura [13, pág.30]. A lógica de classes de Boole nunca teve uma axiomática na qual tivesse as suas bases de desenvolvimento, e muitas das demonstrações de Boole não fazem qualquer sentido [13]. Consequentemente os livros de Boole nunca foram considerados como introdução à Lógica Matemática.

Um dos maiores problemas que torna praticamente intratável a Lógica Booleana de classes é que, a despeito da sua beleza, os cálculos podem ser praticamente impossíveis de realizar em tempo útil.

A ideia teoricamente era interessante, mas como se diz actualmente, traduziu-se numa complexidade algorítmica muito elevada, praticamente intratável.

Lewis Carroll (1832 – 1898) apresentou em 1886 no seu livro “The Game of Logic” soluções que pareciam ser mais práticas, pelo menos até um máximo de dez variáveis, tentando dar continuidade ao trabalho de Boole. Para isso seguiu o que se designa por **Problema de Eliminação**, na resolução do qual vão desaparecendo (vão eliminando) vários termos (classes) e que se tornou um dos pilares da álgebra da Lógica Matemática.

Vamos ver um desses problemas analisando em termos de Lógica de Classes.

Exemplo 1:

Verificar se o seguinte raciocínio é válido usando Lógica de Boole.

- 1) Os preguiçosos que ganham pouco são inúteis.
- 2) Os jogadores do clube A ganham pouco.
- 3) Os inúteis e preguiçosos são maus jogadores.
- 4) Os que ganham pouco são preguiçosos.

Conclusão: os jogadores do clube A são maus jogadores.

Neste enunciado podemos verificar a existência das classes seguintes:

$A = \{\text{homens que são preguiçosos}\}$

$B = \{\text{homens que ganham pouco}\}$

$C = \{\text{homens que são inúteis}\}$

$D = \{\text{jogadores do clube A}\}$

$E = \{\text{homens que são maus jogadores}\}$

Se considerarmos o Universo dos indivíduos que constituem as cinco classes acima definidas, podemos trabalhar com as proposições A , B , ... que designam as classes e com os seus complementares, traduzindo cada argumento para uma equação lógica, que passará a designar uma premissa. Omitindo o sinal de produto lógico, isto é, escrevendo por exemplo AB no lugar de $A * B$ (o que em geral e sobretudo nos casos dos produtos algébricos não deve ser feito, embora seja habitual entre os “matemáticos” efectuar uma tal “simplificação de escrita) temos

(1) $ABC = 0$, pois $ABC = 1$

(2) $DB = 0$ pois $DB = 1$

(3) $CAE = 0$ pois $CAE = 1$

(4) $B\bar{A} = 0$ pois $BA = 1$

Conclusão: $D\bar{E} = 0$ pois $DE = 1$

Vamos agora mostrar que o nosso raciocínio é válido utilizando um grafo ou melhor uma árvore cuja raiz é a conclusão do raciocínio.

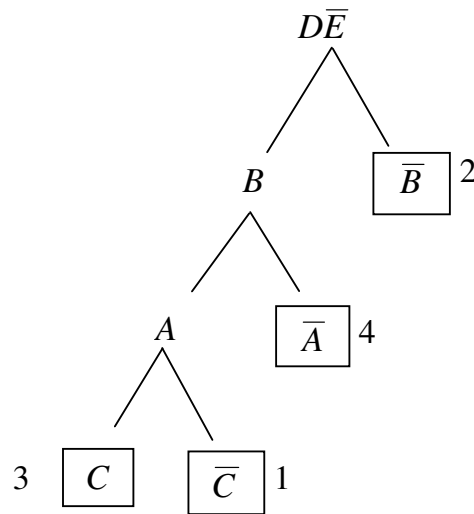


Figura 2 – Árvore

Esta árvore mostra uma estratégia que Lewis Carroll propõe para resolver este tipo de problemas com “papel e lápis”. A raiz da árvore é a conclusão que pretendemos obter, neste caso, $D\bar{E} = 0$ e encontra-se no topo como é habitual nas árvores com raiz (claro que não é habitual nas árvores da floresta, mas os matemáticos gostam de “baralhar um pouco”...).

Para qualquer classe X é óbvio que $D\bar{E}X \cup D\bar{E}\bar{X} = D\bar{E}$, pois $X \cup \bar{X} = 1$ é um dos axiomas da Lógica Proposicional que já vimos. Seguidamente procuremos entre as premissas uma classe X tal que ou $D\bar{E}X = 0$ ou $D\bar{E}\bar{X} = 0$. Encontramos $D\bar{E}\bar{B} = 0$. Então para mostrar que

$D\bar{E} = 0$, basta mostrar que $D\bar{E}X = 0$ e seguimos por esse ramo da árvore, bloqueando o ramo $D\bar{E}\bar{B} = 0$ e indicando o número da premissa que justifica esse facto, neste caso o número 2. Repetindo o procedimento, poderemos atingir o caso de ambos os ramos da árvore poderem ser bloqueados por corresponderem a premissas do problema. Quando esta situação for atingida, se verificarmos que todas as premissas foram usadas, então não haverá qualquer dúvida de que o raciocínio está correcto, isto é, a conclusão resulta efectivamente das premissas.

Vamos ver um exemplo um pouco mais complicado.

Exemplo 2:

- 1) Os Professores de Matemática trabalhadores de bom carácter são dinâmicos.
- 2) Os Psicólogos irritados jogam slot machines.
- 3) Os fumadores que usam camisas Havaianas são passivos.
- 4) Os Psicólogos engraçados são Professores de Matemática.
- 5) Os fumadores que não trabalham são nervosos.
- 6) Os que usam camisas Havaianas trabalham e são passivos são engraçados.
- 7) Os Psicólogos que não são jogadores da bolsa são estudantes.
- 8) Os Psicólogos descontraídos são criativos.
- 9) Os estudantes criativos que não jogam slot machines usam camisas Havaianas.
- 10) Os fumadores nervosos jogam slot machines.
- 11) Os Psicólogos que jogam slot machines não são fumadores.
- 12) Os jogadores da bolsa de bom carácter criativos usam camisas Havaianas.

Conclusão: Nenhum Psicólogo é fumador.

Neste enunciado podemos verificar a existência das classes seguintes:

$A = \{\text{de bom carácter}\}$

$B = \{\text{trabalha}\}$

$C = \{\text{Professor de Matemática}\}$

$D = \{\text{dinâmicos}\}$

$E = \{\text{usa camisas Havaianas}\}$

$F = \{\text{fumador}\}$

$G = \{\text{engraçado}\}$

$H = \{\text{descontraído}\}$

$I = \{\text{jogadores da bolsa}\}$

$J = \{\text{estudante}\}$

$K = \{\text{criativo}\}$

$L = \{\text{joga slot machines}\}$

$M = \{\text{Psicólogo}\}$

Então as equações das nossas proposições são:

(1) $ABC\bar{D} = 0$

(2) $\bar{A}M\bar{L} = 0$

(3) $FED = 0$

(4) $GM\bar{C} = 0$

(5) $\bar{B}FH = 0$

(6) $\bar{D}B\bar{E}\bar{G} = 0$

(7) $M\bar{I}\bar{J} = 0$

(8) $H\bar{M}\bar{K} = 0$

(9) $K\bar{J}\bar{L}\bar{E} = 0$

(10) $\overline{HFL} = 0$

(11) $MLF = 0$

(12) $KIA\overline{E} = 0$

Conclusão: $MF = 0$.

Vamos agora mostrar que o nosso raciocínio é válido utilizando uma árvore cuja raiz é a conclusão do raciocínio.

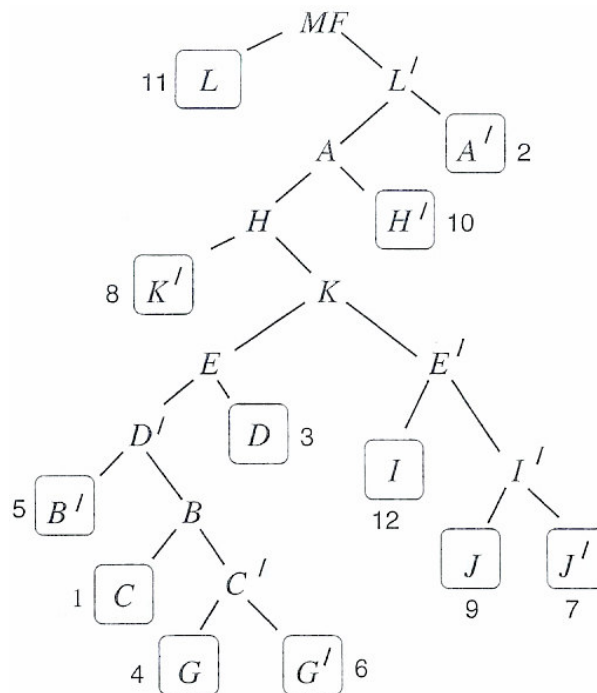


Figura 3 – Árvore

A raiz da árvore é a conclusão que pretendemos obter, neste caso, $MF = 0$.

Para esta árvore vejamos por exemplo o ramo que termina com o número 8. Vemos que o produto $NFLAH\overline{K} = 0$ porque a premissa 8 diz que $HM\overline{K} = 0$, e $NFLAH\overline{K} = 0 = (HM\overline{K})FLA = 0FLA = 0$.

3.1. Funções Booleanas

Consideremos uma função Booleana do tipo $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ ou $F(x, y, z, w, \dots)$, em que x_1, x_2, x_3, \dots ou x, y, z, w, \dots são as variáveis booleanas. Estes valores só podem ser 0 ou 1.

Para reduzir o número de termos numa função Booleana representamo-la através de um circuito, em que é necessário encontrar termos para combinar com a nossa função. A esse método chamamos **minimizar um circuito**. Para minimizar um circuito pomos em evidência as variáveis, como vemos no exemplo seguinte:

Exemplo: $F(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z = (xz)(y + \bar{y}) = (xz) \cdot 1 = xz$

3.1.1. Minimização de Funções Booleanas

Mas se for um circuito com várias variáveis é impossível saber qual se vai por em evidência, e então podemos usar dois métodos: o mapa de Karnaugh (mapa K) ou o método de Quine McCluskey.

3.1.1.1. Mapa K

Reduzir o número de termos numa expressão Booleana que representa um circuito, é encontrar as condições necessárias para combinar esses termos. Há um método gráfico, chamado mapa de Karnaugh, que combina os termos encontrados nas funções Booleanas que envolvem um número relativamente pequeno de variáveis. O método que descrevemos

foi introduzido por Maurice Karnaugh(1924) em 1953. Este método é baseado num trabalho anterior de E. W. Veitch. Este método é usualmente aplicado apenas quando a função envolve seis ou menos variáveis. O mapa K dá-nos um método visual para simplificar a soma de produtos mas eles não são apropriados para mecanizar este processo. Ilustraremos primeiro como o mapa K é usado para simplificar funções Booleanas em duas variáveis.

Há quatro possíveis mintermos na soma de produtos de uma função Booleana em duas variáveis x e y . O mapa K para esta função Booleana em duas variáveis consiste em quatro quadrados onde o 1 é colocado no quadrado que representa o mintermo. Os quadrados são ditos adjacentes se os mintermos que eles representam diferem em exactamente um literal. Por exemplo o quadrado $x\bar{y}$ representado é adjacente aos quadrados xy e $\bar{x}\bar{y}$ representado. Os quatro quadrados e os termos que eles representam podemos ver na Tabela 7.

	y	\bar{y}
x	xy	$x\bar{y}$
\bar{x}	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

Tabela 7 – Mapa K em duas variáveis

O mapa K em quatro variáveis (por exemplo) é um quadrado que é dividido em 16 quadrados. Os 16 quadrados representam os 16 possíveis mintermos em quatro variáveis. Uma das maneiras para formar o mapa K em quatro variáveis é mostrada na tabela 8.

	wx	$w\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}x$
yz	$wxyz$	$w\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$
$y\bar{z}$	$wxy\bar{z}$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}xy\bar{z}$
$\bar{y}z$	$wx\bar{y}z$	$w\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}x\bar{y}z$
$\bar{y}\bar{z}$	$wx\bar{y}\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$

Tabela 8 – Mapa K em duas variáveis

Dois quadrados são adjacentes se e só se os mintermos representados diferirem num literal. Consequentemente, cada quadrado é adjacente aos outros quatro quadrados. A simplificação de uma soma de produtos em quatro variáveis é levada a cabo identificando esses blocos de 2, 4, 8 ou 16 quadrados que representam mintermos que pode ser combinados.

Os exemplos seguintes mostram como o mapa K é usado em quatro variáveis.

Exemplo 1:

Considerar a função Booleana definida por:

$$F(x, y, z, w) = \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}xy\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}yz + wxy\bar{z}$$

Para minimizar esta função Booleana que está na forma DNF vamos utilizar o mapa K. Primeiro construímos o quadrado seguinte onde temos de preencher os quadrados com os mintermos da forma DNF.

	wx	$w\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}x$
yz			1	1
$y\bar{z}$		1	1	1
$\bar{y}\bar{z}$		1	1	
$\bar{y}z$	1	1		

Tabela 9 – Mapa K com os mintermos⁵

Se figurar o que não é o caso de “1” em todos os quadrados do mapa, o circuito ia anular-se.

Para minimizar um circuito temos de começar primeiro por procurar octetos ($2^3 = 8$), depois quartetos ($2^2 = 4$) e por final dupletos ($2^1 = 2$), isto é conjunto de pares de termos. O domínio da função é $2^4 = 16$ no caso de $n = 4$.

Na nossa função temos dois quartetos e um duplete como vemos na tabela abaixo:

	wx	$w\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}x$
yz			1	1
$y\bar{z}$		1	1	1
$\bar{y}\bar{z}$		1	1	
$\bar{y}z$	1	1		

Tabela 10 – Mapa K minimizado

⁵ As arestas definidas a vermelho coincidem, tal como as azuis.

Definição:

Diz-se redundante quando se “casa” um número que já está casado com outro.

Vejamos na nossa função um exemplo de um redundante:

	wx	$w\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}x$
yz			1	1
$y\bar{z}$		1	1	1
$\bar{y}\bar{z}$		1	1	
$\bar{y}z$	1	1		

Tabela 11 – Mapa K – Redundante

A nossa função minimizada é: $F(x, y, z, w) = \bar{w}y + \bar{x}\bar{z} + w\bar{y}z$.

Existência de Termos Não Essenciais

Suponhamos que se pretende construir um circuito lógico que produza um output 1 se o dígito decimal for maior ou igual a cinco e um output 0 se o dígito decimal for menor do que cinco. Vamos agora construir o circuito booleano na forma mínima possível.

Uma forma de codificar números decimais é usar os 4 bits correspondentes à codificação binária dos dígitos usados em numeração decimal. Como há 16 conjuntos de 4 bits e somente existem 10 símbolos para os dígitos decimais então existem $16 - 10 = 6$ combinações de 4 bits que não são usadas para codificação.

Para construir a função Booleana convertamos os dígitos em bits.

Digitos	2^3	2^2	2^1	2^0	f
	x	y	z	w	
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1

Tabela 12 – Dígitos escritos em bits

	wx	$w\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}x$
yz			0	1
$y\bar{z}$			0	1
$\bar{y}\bar{z}$		1	0	0
$\bar{y}z$		1	0	1

Tabela 13 – Mapa K com os mintermos

Sabemos que o domínio de uma função Booleana com quatro variáveis é 16, mas na tabela anterior vemos que há seis termos não presentes, a esses termos vamos chamar, termos “don’t care” ou termos não essenciais.

Definição:

Os termos “don’t care” (d) são os termos possíveis disponíveis e podem ser colocados como “1”, para formar dupletos, quartetos e octetos.

Então colocamos “d” nos espaços vazios para construir dupletos, quartetos ou octetos.

	wx	$w\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}x$
yz	d	d	0	1
$y\bar{z}$	d	d	0	1
$\bar{y}\bar{z}$	d	1	0	0
$\bar{y}z$	d	1	0	1

Tabela 14 – Mapa K com os mintermos e os termos “don’t care”

A verde temos um octeto, a amarelo um quarteto e a laranja um duplete.

A nossa função minimizada é: $F(x, y, z, w) = w + xz + xy$.

3.1.1.2. Método de Quine McCluskey

Vimos até agora que o mapa K pode ser usado para minimizar um circuito de uma função Booleana como somas booleanas de produtos booleanos. Contudo, o mapa K torna-se intratável quando houver mais de quatro variáveis. Além disso, o uso do mapa K confia na inspeção visual para identificar condições que se agrupam. Por estas razões há a necessidade de um procedimento para simplificar a soma de produtos que possa ser mecanizado. O método de Quine McCluskey é um tal procedimento. Pode ser usado para funções Booleanas de qualquer número de variáveis. Foi desenvolvido por volta de 1950 por W. V. Quine (1929) e E. J. McCluskey (1908). O método de Quine McCluskey consiste em duas partes. A primeira parte procura os termos que são os candidatos para

inclusão num circuito mínimo como uma soma booleana de produtos booleanos. A segunda parte determina quais destes termos vamos usar na realidade. De seguida para vermos como funciona este procedimento damos alguns exemplos.

Exemplo 1:

Vamos considerar a função Booleana definida por:

$$F(x, y, z, w) = \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}xyz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + wxyz$$

Para minimizar a função Booleana utilizando o método de Quine McCluskey é necessário primeiramente escrever a função Booleana em bits.

Mintermos	2 ³	2 ²	2 ¹	2 ⁰
	w	x	y	z
0	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
13	1	1	0	1

Tabela 15 – Escrever a função Booleana em bits

Então a nossa função Booleana vem:

$$F(x, y, z, w) = \sum m(0,2,3,6,7,8,9,10,13), \text{ sendo "m" os mintermos.}$$

O próximo passo é contar o número de 1's para cada mintermo.

Mintermo	Forma binária	Número de 1's
m ₀	0 0 0 0	0
m ₂	0 0 1 0	1
m ₃	0 0 1 1	2
m ₆	0 1 1 0	2
m ₇	0 1 1 1	3
m ₈	1 0 0 0	1
m ₉	1 0 0 1	2
m ₁₀	1 0 1 0	2
m ₁₃	1 1 0 1	3

Tabela 16 –Contagens de 1's

De seguida agrupamos os mintermos em classes de acordo com o número de 1's como se mostra na tabela abaixo:

Classes	Mintermo	Forma binária
0	m ₀	0 0 0 0
1	m ₂	0 0 1 0
	m ₈	1 0 0 0
2	m ₃	0 0 1 1
	m ₆	0 1 1 0
	m ₉	1 0 0 1
	m ₁₀	1 0 1 0
3	m ₇	0 1 1 1
	m ₁₃	1 1 0 1

Tabela 17 – Agrupar em classes de acordo com o número de 1's

1ª Comparação: dois elementos são comparáveis se diferem num só elemento, num só bit (na tabela o elemento que difere é substituído pelo asterisco).

Classes	Forma binária				Lugar do asterisco em potência de base 2
0,2	0	0	*	0	(2)
0,8	*	0	0	0	(8)
2,3	0	0	1	*	(1)
2,6	0	*	1	0	(4)
2,10	*	0	1	0	(8)
8,9	1	0	0	*	(1)
8,10	1	0	*	0	(2)
3,7	0	*	1	1	(4)
6,7	0	1	1	*	(1)
9,13	1	*	0	1	(4)

Tabela 18 – 1ª comparação

2ª Comparação: somente são comparáveis aqueles que têm asterisco na mesma posição e diferem num outro elemento.

Classes	Forma binária				Lugar do asterisco em potencia de base 2
0,2,8,10	*	0	*	0	(2,8)
0,8,2,10	*	0	*	0	(2,8)
2,3,6,7	0	*	1	*	(1,4)
2,6,3,7	0	*	1	*	(1,4)

Tabela 19 - 2ª comparação

3ª Comparação: somente são comparáveis aqueles que têm os dois asteriscos na mesma posição e diferem num elemento.

Não existe comparação possível.

Como não existem mais combinações possíveis, então os termos que não podem ser comparados vamos chamar implicantes primos.

Definição:

Chamam-se **implicantes primos** os termos de uma classe que não fazem parte da classe superior.

No nosso exemplo os implicantes primos são:

0, 2, 8, 10 (2,8)

2, 3, 6, 7 (1,4)

8, 9 (1)

9, 13 (4)

Construindo uma tabela com os implicantes primos, vejamos se existe algum termo que possa ser dispensado:

	m_0	m_2	m_3	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{13}
0, 2, 8, 10	★	★				★		★	
2, 3, 6, 7		★	★	★	★				
8, 9						★	★		
9, 13							★		★

Tabela 20 – Analisar se algum termo poderá ser dispensado

Identificando na tabela os implicantes primos essenciais, ou seja, aqueles que definem um “★” em uma coluna com um único “★”.

Definição:

Chamam-se **implicantes primos essenciais**, os implicantes primos que não contêm termos repetidos.

Uma vez que o termo 8 já pertence à classe 1 e o termo 9 pertence à classe 4, podemos dispensar o termo 8,9 pertencente à classe 3 porque este se encontra repetido.

Os implicantes primos essenciais são:

$$0, 2, 8, 10 (2,8) \rightarrow \bar{x}\bar{z}$$

$$2, 3, 6, 7 (1,4) \rightarrow \bar{w}y$$

$$9, 13 (4) \rightarrow w\bar{y}z$$

O **teorema de Quine** diz-nos que qualquer soma de produtos (mintermos) que seja mínima deve ser constituída por implicantes primos essenciais.

A nossa função minimizada é: $F(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{z} + \bar{w}y + w\bar{y}z$.

Exemplo 2:

Minimizar a seguinte função booleana utilizando o método de Quine McCluskey, com termos “don’t care” indicados pelo somatório com inicial “d” e “m” os mintermos.

$$F(x, y, z, w) = \sum m(1,2,5,6,9) + \sum d(10,11)$$

Mintermo	Forma binária				Número de 1's
M ₁	0	0	0	1	1
m ₂	0	0	1	0	1
M ₅	0	1	0	1	2
m ₆	0	1	1	0	2
m ₉	1	0	0	1	2
d ₁₀	1	0	1	0	2
d ₁₁	1	0	1	1	3

Tabela 21 – Contagens de 1's

Classes	Mintermo	Forma binária			
1	m ₁	0	0	0	1
	m ₂	0	0	1	0
2	m ₅	0	1	0	1
	m ₆	0	1	1	0
	m ₉	1	0	0	1
	d ₁₀	1	0	1	0
3	d ₁₁	1	0	1	1

Tabela 22 - Agrupar em classes de acordo com o número de 1's

1ª Comparação:

Classes	Forma binária				Lugar do asterisco em potência de base 2
1,5	0	*	0	1	(4)
1,9	*	0	0	1	(8)
2,6	0	*	1	0	(4)
2,10	*	0	1	0	(8)
9,11	1	0	*	1	(2)

Tabela 23 – 1ª comparação

2ª Comparação:

Não existe comparação possível.

No nosso exemplo os implicantes primos são:

1,5 (4)

1,9 (8)

2,6 (4)

2, 10 (8)

9, 11 (2)

	m_1	m_2	m_5	m_6	m_9
1, 5	★		★		
1, 9	★				★
2, 6		★		★	
2, 10		★			
9, 11					★

Tabela 24 – Analisar se algum termo poderá ser dispensado

Podemos dispensar os termos 2, 10 e 9, 11 pois contêm termos não essenciais.

Os implicantes primos essenciais são:

1,5 (4) $\rightarrow \bar{x}\bar{z}w$

1,9 (8) $\rightarrow \bar{y}\bar{z}w$

2,6 (4) $\rightarrow \bar{x}z\bar{w}$

A nossa função minimizada é: $F(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{z}w + \bar{y}\bar{z}w + \bar{x}z\bar{w}$.

Ao compararmos o mesmo exemplo (Exemplo 1 do Mapa K e Exemplo 1 do método de Quine McCluskey) pelos dois métodos observamos que o exemplo do mapa K é muito mais simples e rápido, mas nem sempre é assim. No nosso exemplo a função Booleana tem quatro variáveis por isso o método mais rápido foi usar o mapa K, mas se o número de variáveis fosse superior já não poderíamos usar este método porque é intratável e utilizaríamos o método de Quine McCluskey, pois este método permite-nos minimizar uma função qualquer que seja o número de variáveis. Por este motivo o método de Quine McCluskey é muito mais rápido e eficiente, além de que também poderemos utilizar o computador para este método por se tratar de um procedimento mecanizável.

4. LÓGICA PREDICATIVA

Vamos generalizar a Lógica Proposicional, usando a **Lógica de Predicados** ou **Predicativa**.

Os **predicados** podem ser atributos (monádicos), quando dizem respeito a uma propriedade, ou relacionais (diádicos, triádicos...poliádicos), quando envolvem relações e assim, a Lógica de Predicados com uma variável diz-se monádica e a Lógica de Predicados com duas variáveis diz-se diádica, etc.

Em geral, uma afirmação envolvendo as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n pode ser denotada por $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$; p diz-se um predicado de *aridade* n ou um predicado n -ário. Em particular se $n = 1$, p diz-se unário, se $n = 2$, diz-se binário.

As **variáveis Lógicas** vão designar os valores que correspondem ao que vamos tratar: **Universo** ou **domínio** do assunto. Entre as variáveis Lógicas podemos considerar as variáveis e as constantes. Vamos designar as variáveis por x, y, z, w e as constantes por a, b, c, d , por exemplo.

As **conexões Lógicas** usadas na Lógica de predicados são as mesmas usadas na Lógica proposicional.

Para expressar afirmações podemos usar, para além dos símbolos de predicado, os **quantificadores universal e existencial**. Usamos \forall_x para significar “para todo o x ”, “todo o x ”, “para qualquer x ”, etc. Escrevemos

\exists_x para expressar de “existe um x ”, “existe algum x ”, “existe pelo menos um x ”, “para algum x ”, etc.

Desde já se deve salientar que a ordem dos quantificadores depende de serem ou não do mesmo tipo. Se forem do mesmo tipo, a ordem é arbitrária, se forem de tipo diferente não se pode trocar a ordem dos quantificadores.

Exemplo:

$$\forall_x \forall_y \Leftrightarrow \forall_y \forall_x$$

$$\exists_x \exists_y \Leftrightarrow \exists_y \exists_x$$

$$\forall_x \exists_y \not\Leftrightarrow \exists_y \forall_x$$

Para compreendermos melhor o que se passa ao trocar um quantificador existencial com um universal, seja $P(x, y)$ uma expressão proposicional qualquer nas variáveis x e y , de domínios respectivamente D_1 e D_2 , e consideremos as duas proposições seguintes

$$\mathbf{(a)} \quad \forall_{x \in D_1} \exists_{y \in D_2} P(x, y)$$

$$\mathbf{(b)} \quad \exists_{y \in D_2} \forall_{x \in D_1} P(x, y)$$

Na proposição **(a)** afirma-se que, para cada x em D_1 existe um y em D_2 tal que $P(x, y)$; naturalmente que esse y depende do x considerado. Na proposição **(b)** afirma-se que existe um y em D_2 (independente de x) tal que, para todo o x em D_1 , se tem $P(x, y)$. Isto mostra que **(b)** implica **(a)**, ou seja, a proposição

$$(c) \exists_{y \in D_2} \forall_{x \in D_1} P(x, y) \Rightarrow \forall_{x \in D_1} \exists_{y \in D_2} P(x, y)$$

é verdadeira. Atenção! Não há equivalência entre **(a)** e **(b)**; o que se passa é que **(b)** implica **(a)**, pelo que **(c)** é verdadeira. Por outras palavras, $\exists_y \forall_x$ é mais forte do que $\forall_x \exists_y$.

Consideremos, por exemplo, a proposição

$$\exists_{y \in \mathbb{R}} \forall_{x \in \mathbb{R}} xy(y-1) = 0$$

trata-se de uma proposição verdadeira, pois basta tomar $y = 0$ (alternativamente poderíamos ter tomado $y = 1$). Então a proposição

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} xy(y-1) = 0$$

é seguramente verdadeira. Já a proposição

$$\exists_{y \in \mathbb{R}} \forall_{x \in [0, +\infty[} y^2 = x$$

é obviamente falsa, enquanto a proposição

$$\forall_{x \in [0, +\infty[} \exists_{y \in \mathbb{R}} y^2 = x$$

é verdadeira porque basta tomarmos para y uma raiz quadrada de x o que é possível pois, como sabemos, todo o número real ≥ 0 tem pelo menos uma raiz quadrada.

O que dissemos para duas variáveis estende-se a um qualquer número delas. Numa expressão proposicional num certo número de variáveis, por cada variável quantificada obtemos uma expressão proposicional nas variáveis restantes; se todas as variáveis estiverem quantificadas, obtemos uma proposição. Quantificadores consecutivos da mesma espécie podem ser trocados; de espécie diferente não, como já foi dito.

Alguns autores, para representar o “existe um e um só”, costumam usar o quantificador existencial acompanhado de um sinal, por exemplo, \exists' .

É muito importante referir que um dado quantificador diz respeito a uma única variável, quer dizer, deve escrever-se $\forall_x \forall_y$ quando se pretende representar o enunciado “quaisquer que sejam os valores das variáveis x e y ” e não deve escrever-se $\forall_{x,y}$, representação esta que não deve ser usada em Lógica. Isto porque qualquer quantificador actua somente sobre uma só variável, logo cada variável tem o seu quantificador.

4.1. Formas Prenex

Diz-se que uma expressão lógica está na **forma prenex** se todos os quantificadores da expressão se encontram no início da proposição.

Exemplo 1:

Escrever a expressão $\sim \exists_y (\forall_x P(x, y))$ na forma prenex.

Então a expressão ficaria da seguinte forma: $\forall_y \exists_x \bar{P}(x, y)$.

Exemplo 2:

Escrever a expressão $\forall_x P(x) \wedge \exists_y Q(y) \wedge \forall_x \forall_z R(x, z) \vee \sim \exists_y \forall_z S(y, z)$ na forma prenex.

- 1) Indexar as variáveis pois são diferentes em vários casos

$$\forall_{x_1} P(x_1) \wedge \exists_{y_1} Q(y_1) \wedge \forall_{x_2} \forall_{z_1} R(x_2, z_1) \vee \sim \exists_{y_2} \forall_{z_2} S(y_2, z_2)$$

- 2) Retirar a negação após a disjunção

$$\forall_{x_1} P(x_1) \wedge \exists_{y_1} Q(y_1) \wedge \forall_{x_2} \forall_{z_1} R(x_2, z_1) \vee \forall_{y_2} \exists_{z_2} \bar{S}(y_2, z_2)$$

- 3) Passar todos os quantificadores para o início da proposição

$$\forall_{x_1} \exists_{y_1} \forall_{x_2} \forall_{z_1} \forall_{y_2} \exists_{z_2} (P(x_1) \wedge Q(y_1) \wedge R(x_2, z_1) \vee \bar{S}(y_2, z_2))$$

4.2. Skolemização

Uma fórmula da lógica predicativa está na forma normal de Skolem (nome devido a Thoralf Skolem (1887-1963)), se a sua forma normal prenex contiver somente quantificadores universais. Cada fórmula de primeira ordem ou monádica pode ser convertida na forma normal de Skolem através do processo de skolemização. A fórmula resultante deste processo não é necessariamente equivalente à original, mas é satisfazível se e somente se a original também o for.

A skolemização é feita substituindo cada variável y , quantificada existencialmente, por um termo $f(x_1, \dots, x_n)$ no qual o símbolo de uma função f é uma nova função (não existe outra ocorrência dele na fórmula). Se a fórmula estiver na forma normal prenex, x_1, \dots, x_n , são as variáveis universalmente quantificadas cujos quantificadores precedem a variável y .

A skolemização trabalha tentando eliminar a quantificação existencial.

Exemplo:

$$\forall x \exists y (x \leq y)$$

Se $x = 5$, então $y \in \{5, 6, 7, 8, \dots\}$

Se $x = 6$, então $y \in \{6, 7, 8, 9, \dots\}$

Se $x = 20$, então $y \in \{20, 21, 22, \dots\}$

Então o y varia em função do x .

Logo pode-se trocar $\forall x \exists y (x \leq y)$ por $\forall x ((x) \leq f(x))$.

Generalizando, troca-se $\forall x \exists y P(x, y)$ por $\forall x P(x, f(x))$. f chama-se **função de Skolem**.

4.3. Interpretação

Quando queremos escrever uma proposição na Lógica de Predicados devemos ter em conta a sua **interpretação**. Em que consiste a interpretação?

- 1) Consiste em determinar o universo ou domínio da interpretação, que tem de ser um conjunto com pelo menos um indivíduo;
- 2) Assignar uma propriedade dos elementos do domínio a cada predicado da expressão;
- 3) Assignar um elemento particular do domínio a cada símbolo constante na expressão.

Definição:

Se B é uma expressão lógica então qualquer interpretação que faz com que B tenha o valor lógico V , diz-se que satisfaz B ; qualquer interpretação que satisfaça B chama-se um modelo.

Se B tem um modelo então diz-se satisfazível. Uma expressão lógica que não tenha nenhum modelo diz-se contraditória. Então atendendo ao princípio da não contradição, se B for válida \bar{B} é contraditório.

Se compararmos as proposições não quantificadas com as proposições quantificadas, verificamos que:

Proposições não quantificadas	Proposições quantificadas
V ou F dependendo das assignações dos valores lógicos às proposições.	Válida ou não válida dependendo da interpretação.
Tautologia: proposições verdadeiras para todos os valores lógicos assignados.	Proposições universalmente válidas: proposições verdadeiras para todas as interpretações.
Existem algoritmos, processos mecânicos ou mecanizáveis que permitem determinar o valor lógico da proposição.	Não existe qualquer algoritmo que permita determinar se a proposição é ou não válida.

Tabela 25 – Proposições não quantificadas/quantificadas

Definição:

Sejam A e B duas expressões lógicas: elas dizem-se **logicamente equivalentes** se $A \Leftrightarrow B$ é válido.

Eis algumas equivalências lógicas:

- $\forall_x (A \wedge B) \Leftrightarrow \forall_x A \wedge \forall_x B$
- $\exists_x (A \vee B) \Leftrightarrow \exists_x A \vee \exists_x B$
- $\forall_x \forall_y A \Leftrightarrow \forall_y \forall_x A$
- $\exists_x \exists_y A \Leftrightarrow \exists_y \exists_x A$
- $\sim \exists_x A \Leftrightarrow \forall_x \sim A$
- $\sim \forall_x A \Leftrightarrow \exists_x \sim A$

As duas últimas são as Leis de De Morgan em Lógica Predicativa.

4.4. Regras de Inferência

Tudo o que vimos na Lógica Proposicional mantém-se, pois a Lógica Predicativa tem como caso particular a Lógica Proposicional.

Temos então de, em presença de uma proposição quantificada, escrevê-la sem quantificadores, de forma a poder usar as regras de inferência da Lógica Proposicional. Para este efeito podemos usar as seguintes regras:

- Regra P: Introdução de premissas ou hipóteses

Qualquer proposição pode ser introduzida numa linha da derivação.

- Regra T: Uso de tautologias

Qualquer proposição que seja válida pode ser introduzida numa linha desde que a validade já esteja demonstrada.

- Regra C: Condicionização

A proposição $\varphi \Rightarrow \psi$ pode ser considerada válida e introduzida numa linha da derivação se ψ aparecer numa linha anterior e φ numa linha anterior a ψ .

$$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \Rightarrow \psi}$$

▪ Regra EU: Especificação Universal

Se $\varphi = \forall_x P(x)$ é verdade e quando $x = a$ vem $\beta = P(a)$, então é verdade que $\beta = P(a)$ é verdadeiro. Se a proposição P é verdadeira num dado domínio para qualquer valor de x então podemos escolher um valor que vamos chamar a e a proposição é verdadeira. A especificação universal elimina o quantificador universal. Se $\varphi = \forall_x P(x)$ aparecer numa dada linha e portanto é uma proposição válida, então $\beta = P(a)$ pode ser introduzido numa nova linha.

$$\frac{\varphi = \forall_x P(x)}{\beta = P(a)}$$

▪ Regra GU: Generalização Universal

y é um valor qualquer, constante ou variável, quer dizer que cada individuo y tem aquela propriedade. A generalização universal corresponde à inserção do quantificador universal. Se $\beta = P(y)$ é uma proposição válida (isto é, se é verdade que cada indivíduo do universo considerado goza de uma certa propriedade), então, $\varphi = \forall_x P(x)$ é também válido e pode ser introduzida numa linha, desde que β não ocorra nem em φ nem em nenhuma premissa dessa linha anterior.

$$\frac{\beta = P(y)}{\varphi = \forall_x P(x)}$$

▪ Regra GE: Generalização Existencial

Há uma constante ou valor a e tem uma dada propriedade. A generalização existencial corresponde à inserção do quantificador existencial. Se $\beta = P(a)$ é uma proposição válida, então a proposição $\varphi = \exists_x P(x)$ também é válida e pode ser introduzida numa linha, desde que a variável x não apareça anteriormente em $P(a)$.

$$\frac{\beta = P(a)}{\varphi = \exists_x P(x)}$$

▪ Regra EE: Especificação Existencial

Se existe algum x então existe uma constante ou valor a . A especificação existencial corresponde à eliminação do quantificador existencial. Se $\varphi = \exists_x P(x)$ é uma proposição válida então $\beta = P(a)$ é também válido e pode ser introduzida numa nova linha, desde que a constante a não apareça em quaisquer linhas anteriores de todo o argumento, ou seja, é uma **variável livre**.

$$\frac{\varphi = \exists_x P(x)}{\beta = P(a)}$$

▪ Regra QE: Quantificação Existencial

Segundo estas regras podemos usar as segundas Leis de Morgan em todo o raciocínio. Simbolicamente:

$$\sim \forall_x \Leftrightarrow \exists_x \sim$$

$$\text{Dualmente: } \sim \exists_x \Leftrightarrow \forall_x \sim$$

Exemplo:

Interpretar, formalizar e derivar o seguinte enunciado, utilizando regras de inferência:

“Toda a gente está infeliz ou atarefado. No entanto alguém está infeliz. Logo alguém está atarefado.”

1) Interpretar

Domínio: pessoas $\leftarrow x$

“A gente está feliz” $\leftarrow P(x)$

“A gente está atarefada” $\leftarrow Q(x)$

2) Formalizar

$$\forall_x (P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists_x \overline{P(x)} \Rightarrow \exists_x Q(x)$$

3) Derivar

(1) $\forall_x (P(x) \vee Q(x))$	P
(2) $\exists_x \overline{P(x)}$	P
(3) $\forall_x (P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists_x \overline{P(x)}$	Conjunção (1,2)
(4) $P(a) \vee \overline{Q(a)}$	EU (1)
(5) $\overline{P(a)}$	H
(6) $Q(a)$	Disjunção (4,5)
(7) $\exists_x Q(x)$	GE (6)
(8) $\exists_x Q(x)$	EE (1,4,6,7)
(9) $\forall_x (P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists_x \overline{P(x)} \Rightarrow \exists_x Q(x)$	C (3,8)

Como já vimos não podemos usar um algoritmo para verificar a validade de uma proposição na lógica quantificada. Em relação com este assunto temos:

Teorema de Alonso Church (1936):

Não existe qualquer conjunto de métodos (algoritmo) para testar a validade de uma proposição quantificável.

Na Lógica de Predicados não existe qualquer algoritmo que permita determinar se a proposição é ou não válida, logo teremos de usar raciocínios baseados nas regras de inferência.

Então o que podemos fazer para verificar a validade de uma proposição quantificada?

Resta-nos usar a razão devidamente auxiliada por regras de inferência típicas da Lógica de Predicados. A esta extensão da Lógica Proposicional, na qual aparecem variáveis e constantes pertencentes a um dado universo e sobretudo operadores de quantificação: os quantificadores universal e existencial chama-se Lógica de Predicados. Os predicados podem depender de uma ou mais variáveis, cujos valores pertencem ao universo.

Num universo finito para sabermos se uma proposição é ou não universalmente válida não podemos usar algoritmos, pois Church provou que é impossível resolver este problema usando algoritmos.

Mas se uma proposição for uma tautologia então é universalmente válida porque é válida no universo onde foi definida. Se for universalmente

válida pode não ser uma tautologia. Logo a condição é necessária mas não é suficiente.

A única forma de verificar na Lógica Predicativa se uma proposição é ou não universalmente válida é usar as regras de inferência que já vimos na Lógica Proposicional, uma vez que a Lógica Predicativa tem como caso particular a Lógica Proposicional.

5. SISTEMA FORMAL

A axiomática da Lógica também chamada Z – F por ter sido sugerida por Zermelo (1871-1953) e Fraenkel (1891-1965) é a seguinte:

Axioma da extensão

Dois conjuntos são iguais se e só se têm os mesmos elementos.

Axioma Esquema de separação

Seja $P(x)$ um predicado. Para cada conjunto A existe um conjunto cujos elementos são precisamente os elementos a de A para os quais $P(a)$ é verdadeiro.

Axioma dos conjuntos elementares

Existe um conjunto que não tem qualquer elemento. Se a é um conjunto, existe um conjunto que tem a e apenas a como elemento. Se a e b são conjuntos, existe um conjunto que contem a e b , e apenas a e b , como elementos.

Axioma da União

Dado um conjunto de conjuntos, existe um conjunto cujos elementos pertencem a pelo menos um dos conjuntos do conjunto dado.

Axioma da Potência

Dado um conjunto A , existe um conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A .

Axioma do Infinito.

Existe um conjunto contendo 0 ($= \{ \}$) e contendo o sucessor de cada um dos seus elementos. ($sucn = n \cup \{n\}$)

Axioma da Substituição

Se $P(a, b)$ é um predicado tal que, para cada elemento a do conjunto A , o conjunto $\{b | P(a, b)\}$ pode ser formado, então existe uma função F com domínio A tal que $F(a) = \{b | P(a, b)\}$ para cada $a \in A$.

A axiomática da Matemática usa a abstracção, a formalização e o método de dedução e estas são as três principais características que fazem diferir a Matemática em relação a quaisquer outras disciplinas. Estas características foram usadas pela primeira vez na civilização grega, por Euclides.

O sistema formal diz-se **funcionalmente completo** se em qualquer interpretação possível, qualquer fórmula funcionalmente verdadeira puder ser expressa no sistema por uma fórmula logicamente equivalente, mas que use somente os pares (\sim, \vee) ou (\sim, \wedge) .

Pode-se demonstrar que um sistema é funcionalmente completo usando tabelas da verdade e então nessas tabelas deve verificar-se o seguinte:

- I) Existe um e um só V numa das linhas e F em todas as outras;
- II) Não existe V em qualquer linha.

Entre as propriedades do sistema formal, figuram as seguintes: independência, completude, consistência, categoricidade, analiticidade e substituição.

A **independência** significa que os axiomas do sistema são independentes, isto é, não podem ser deduzidos uns dos outros.

O sistema diz-se **completo** se qualquer que seja a propriedade que se pretende demonstrar, isso é possível com o conjunto de axiomas do sistema formal.

Os axiomas que constituem o sistema formal dizem-se **consistentes** ou **coerentes**, quando não se contradizem, ou seja, obedecem ao princípio da não contradição.

Os axiomas do sistema são **categóricos**, no sentido em que qualquer modelo do sistema deve ser equivalente a qualquer outro modelo do mesmo sistema, isto é, devem ser isomorfos (têm as mesmas propriedades).

O sistema deve ser **analítico**, isto é, qualquer axioma ou teorema do sistema deve ser, ou uma tautologia ou uma proposição universalmente válida.

Se **substituir** uma propriedade P por outra equivalente Q , ou seja, se houver duas propriedades logicamente equivalentes elas podem substituir-se.

Estas propriedades não são independentes umas das outras e delas podemos extrair três que se não existirem não permitem também a existência do sistema formal e que são: **completude**, **consistência** e **categoricidade**.

Uma dedução é correcta quando a verdade das suas premissas torna a conclusão verdadeira.

Mas o que é a verdade?

Esta qualificação implica as de real e de imaginário, de realidade e de ficção, questões centrais tanto em antropologia cultural como na filosofia.

Quem concorda sinceramente com uma frase está alegando que ela é verdadeira. A filosofia estuda a **verdade** de diversas maneiras. A metafísica ocupa-se da natureza da verdade. A lógica ocupa-se da preservação da verdade. A epistemologia ocupa-se do conhecimento da verdade.

O primeiro problema para os filósofos é estabelecer o que é verdadeiro ou o, qual o portador da verdade. Depois há o problema de explicar-se o que torna verdadeiro ou falso o portador da verdade. Há teorias robustas que tratam a verdade como uma propriedade. E há teorias deflacionárias, para as quais a verdade é apenas uma ferramenta conveniente da nossa linguagem. Desenvolvimentos da Lógica Formal trazem alguma luz sobre o modo como nos ocupamos da verdade nas linguagens naturais e em linguagens formais.

Entre as muitas afirmações sobre a verdade uma em geral é bastante clara sobre o ponto de definição de verdade:

Definição de verdade:

A verdade é uma interpretação mental da realidade transmitida pelos sentidos, confirmada por outros seres humanos com cérebros normais e despidos de preconceitos (desejo de crer que algo seja verdade), e confirmada por equações matemáticas e linguísticas formando um modelo capaz de prever acontecimentos futuros diante das mesmas coordenadas.

6. MODELOS

6.1. Conceito Semântico de Verdade – Tarski

Segundo Tarski (1902-1983) a noção de verdade de um enunciado ou de uma proposição não é absoluta, mas é sim relativa a uma linguagem L , na qual, se verifica o enunciado cuja verdade se pretende obter. Tarski teve uma ideia para definir o enunciado “verdadeiro” recorrendo ao conceito de satisfação e construir esse conceito usando técnicas recursivas.

Uma definição recursiva de um conceito [9, pág. 227] é uma definição que procede por fases da definição de casos simples à de casos complexos baseados nos anteriores. A sintaxe de uma linguagem formal oferece uma estrutura recursiva que passa de fórmulas atômicas a fórmulas compostas cada vez mais complexas, que permite a definição com um número finito de palavras mesmo que as possibilidades sejam infinitas.

Tarski associou a noção de verdade à noção de modelo, entendido como uma estrutura que em princípio não é linguística mas é sim, uma estrutura de relações a que a teoria se refere. A partir da interpretação, que é a relação que põe em correspondência a linguagem formal com a estrutura, chega-se ao conceito de satisfação que se pode exprimir da seguinte forma: dada uma fórmula ou proposição A ou mesmo um conjunto de fórmulas num universo U , diz-se que uma interpretação I satisfaz essa fórmula ou esse conjunto de fórmulas se como resultado da interpretação essa fórmula se pode converter num enunciado verdadeiro.

Quando isto acontece diz-se que a interpretação é um modelo do enunciado A .

Então uma fórmula é verdadeira ou válida numa dada interpretação I e num universo U se e só se essa interpretação satisfaz a fórmula.

6.2. Teorema da Completude de Gödel (demonstração de Henkin)

O sistema formal da Lógica de Predicados monádica será completo se todas as fórmulas que representam verdades tautológicas puderem ser formalmente dedutíveis do sistema.

A completude da Lógica de Predicados monádica foi demonstrada por Gödel em 1930. Em 1949, Henkin (1967-2005) apresentou uma demonstração mais simples desse teorema. A forma de provar este teorema é estabelecer uma nova relação que conecta a sintaxe com a semântica: a relação entre o conceito (sintático) de consistência e o conceito (semântico) de satisfabilidade. A satisfabilidade levada ao seu extremo máximo é a validade universal ou verdade lógica.

Então Henkin demonstra um teorema, que se chama **Teorema da Satisfabilidade de Henkin**, segundo o qual todo o conjunto de fórmulas que seja consistente é satisfazível. Deste teorema se segue facilmente, como corolário, o **Teorema da Completude**.

Seguidamente iremos enunciar o teorema de Henkin e as suas linhas gerais e após isso enunciaremos também o teorema da completude de Gödel.

6.2.1. Teorema da Satisfabilidade de Henkin

O teorema da Satisfabilidade de Henkin (1949) pode enunciar-se da seguinte forma:

“Para qualquer conjunto de fórmulas da Lógica de 1ª ordem (monádica) se esse conjunto é consistente então é simultaneamente satisfazível num modelo numerável.”

Em matemática distingue-se usualmente entre infinito numerável e não numerável. Numerável é o conjunto dos números naturais: 0, 1, 2, ..., n, ... e qualquer outro conjunto equiparável ao dos números naturais (por exemplo o conjunto dos números inteiros negativos ou o conjunto dos números racionais). O infinito não numerável pode dizer-se uma “infinitude” imensamente superior à do conjunto dos números naturais.

A demonstração deste teorema divide-se estrategicamente em duas partes, uma sintáctica e outra semântica.

A parte sintáctica consiste na maximização de um conjunto consistente dado; a parte semântica consiste na apresentação de um modelo numerável.

6.2.2. Teorema da Completude de Gödel ou 1º Teorema de Gödel

Uma vez estabelecido o teorema de Henkin, que põe em conexão a consistência com a satisfabilidade (“se A é consistente, então A é satisfazível”), segue-se sem dificuldade, a modo de corolário, o Teorema da Completude de Gödel (1930).

“Para toda a Lógica quantificada de 1ª ordem ou monádica qualquer fórmula A se for logicamente verdadeira então é dedutível.” Este teorema significa que se uma fórmula for derivável é dedutível e vice-versa.

A demonstração do teorema de Gödel reduz-se às seguintes afirmações [9, pág. 336]:

- 1) Admitir a hipótese: A ser logicamente verdadeiro.
- 2) Se A é logicamente verdadeiro então \bar{A} não é satisfazível (Princípio de Tarski);
- 3) Se \bar{A} não é satisfazível então \bar{A} não é consistente;
- 4) Se \bar{A} não é consistente então \bar{A} pode ser derivável ou de uma proposição B ou de uma sua contraditória, logo há uma contradição;
- 5) Então A é derivável.

As afirmações justificam-se da seguinte forma: 1) é a hipótese do teorema de Gödel; 2) segue-se da definição do conceito de fórmula logicamente verdadeira: a sua negação há-de ser satisfazível; 3) é a contraposição do teorema de Henkin; 4) é uma mera análise da definição de consistência, e finalmente 5) baseia-se na regra da condicionalização.

6.3. Teorema de Löwenheim – Skolem

Do teorema da satisfabilidade de Henkin deriva como corolário o importante **Teorema de Löwenheim – Skolem**:

“Se um conjunto qualquer de fórmulas é simultaneamente satisfazível em qualquer domínio não vazio, então é simultaneamente satisfazível num domínio numerável.”

Este teorema foi descoberto por Löwenheim (1878-1957) em 1915, e posteriormente generalizado por Skolem em 1928. A formulação original de Löwenheim era:

“Se uma fórmula é válida num domínio numerosamente infinito, então é válida em todo o domínio não vazio.”

Por contraposição deste enunciado e substituição de válido por satisfazível, obtém-se a forma habitual deste teorema. Skolem generalizou este teorema estendendo o caso de uma só fórmula a qualquer conjunto de fórmulas, como vimos no enunciado acima.

A demonstração do teorema de Löwenheim – Skolem é conclusão das seguintes premissas:

1) Se um conjunto de fórmulas é simultaneamente satisfazível então é consistente (recíproco do teorema de Henkin).

Aceitar esta asserção é simples se pensarmos que as regras de inferência transmitem “hereditariamente” a propriedade de ser verdadeiro para qualquer interpretação dada, e excluem portanto o risco de contradição (inconsistência).

2) Se o conjunto de fórmulas é consistente então é simultaneamente satisfazível num domínio numerável (teorema de Henkin).

6.4. Teorema da Compacidade

Outra consequência importante do teorema de satisfabilidade é o **Teorema da Compacidade**:

“Se todo o sub conjunto finito de um conjunto infinito de fórmulas é satisfazível então o conjunto como um todo também é satisfazível.”

Para demonstrarmos este teorema basta considerar cada um dos extremos: ou esse conjunto é consistente, ou é inconsistente. Se é consistente, então é satisfazível (teorema de Henkin). Se é não consistente, então é possível derivar do teorema um par de fórmulas contraditórias. Porém em toda a dedução formal, e portanto, também neste caso de dedução contraditória, intervém, por definição, um conjunto de fórmulas

que é sempre *finito*, qual será, por conseguinte, neste caso um subconjunto do conjunto dado. Pela hipótese do teorema que se pretende demonstrar, esse subconjunto deve ser satisfazível; não se deve admitir portanto que o conjunto em questão seja inconsistente.

Resumindo, podemos dizer que se pode usar a seguinte terminologia: Consideremos A e B dois conjuntos de fórmulas do cálculo proposicional no conjunto das variáveis proposicionais P , consideremos G uma fórmula e δ a distribuição dos valores lógicos V de P .

- δ satisfaz A se e só se δ satisfaz todas as fórmulas pertencentes a A .
- A é satisfazível (ou consistente) se e só se existe pelo menos uma distribuição de valores lógicos V que satisfaz A .
- A é satisfazível e finito se e só se cada subconjunto finito de A é satisfazível.
- A é contraditório se e só se não é satisfazível.
- G é uma consequência de A se e só se a cada distribuição do valor lógico V que satisfaz A satisfaz G .
- A e B são equivalentes se e só se cada fórmula de A é uma consequência de B e cada fórmula de B é uma consequência de A .

6.5. *Problema da Decisão*

O problema da decisão num sistema dedutivo consiste em determinar um procedimento mecânico ou algoritmo que permita num número finito de passos verificar se uma dada fórmula (ou proposição) é ou não dedutível

no sistema. Se for dedutível passa a constituir um teorema dentro do sistema.

Um dos problemas de decisão mais antigo foi formulado por David Hilbert e é conhecido pelo décimo problema de Hilbert, e que em 1970 se provou que não é decidível. O décimo problema de Hilbert tem origem num problema enunciado num manual de Álgebra intitulado “Arithmetica”, escrito por volta do ano 250 da nossa era por Diofanto de Alexandria (200-284). De acordo com esse problema, os matemáticos passaram a chamar a esse tipo de problemas *equações diofantinas*.: são equações com coeficientes com uma ou mais incógnitas e para as quais se pretende obter uma solução que pertença exactamente ao conjunto dos números inteiros. David Hilbert não fez mais que colocar o problema da existência de um algoritmo para determinar se uma dada equação diofantina tem uma solução.

A primeira tentativa de resolução do problema, pelo menos que se possa considerar séria, deve-se a Martin Davis (1928) em 1950. Apesar de ter introduzido noções interessantes e novas, usando uma estratégia, em princípio válida, não foi bem sucedido.

Seguiu-se Júlia Robinson (1919-1985), que em colaboração com Davis e Hilary Putnam (1926) mostrou que bastaria uma só equação diofantina nas condições da estratégia de Davis para que fosse possível resolver o décimo problema de Hilbert.

E foi somente dez anos mais tarde que Youri Matyasevitch mostrou que a solução passava pela construção de um polinómio gerador de

números primos, somente não disse como. Em 1977, Daihachiro Sato, James Jones, Hideo Wada e Douglas Wiens encontraram um polinómio com vinte e seis variáveis e de grau 25 que satisfazia as condições de Matyasevitch.

O que respeita a Lógica de Predicados contrariamente ao que sucede na Lógica Proposicional o problema de decisão não tem em geral solução satisfatória. Com efeito, de acordo com um teorema descoberto em 1936 por Alonso Church não existe um procedimento efectivo (algoritmo ou qualquer outro procedimento mecânico) que permita resolver o problema da decisão em Lógica de Predicados de 1ª ordem (salvo casos excepcionais) e de qualquer ordem superior.

Isto não significa que não se consiga estabelecer diferentes teoremas que são válidos em Lógica Predicativa. Significa sim que a Lógica Predicativa de ordem de ordem $n \geq 2$ considerada como um todo, não é decidível.

6.6. Teoremas da Incompletude de Gödel

Em 1931, Kurt Gödel formulou dois teoremas célebres na Matemática, chamados teoremas de Gödel, às vezes também designados por **Teoremas da Incompletude**.

Com o aparecimento destes novos teoremas, a incompletude destruiu o sonho da escola formalista de David Hilbert, segundo o qual para toda e

qualquer proposição Matemática haveria uma maneira formal de se verificar se era falsa ou verdadeira.

Gödel mostrou que há verdades na aritmética que o sistema axiomático desconhece, isto é, um sistema formal que contenha a aritmética não consegue reconhecer nem negar determinadas afirmações sobre os números, ainda que sejam afirmações sintacticamente correctas e expressas na mesma linguagem em que outras proposições são reconhecidas por esse mesmo sistema formal como sendo falsas ou verdadeiras.

Os Teoremas de Gödel afirmam que:

Teorema 1:

“Se o conjunto axiomático de uma teoria é consistente, então nela existem teoremas que não podem ser demonstrados (ou negados)”.

E

Teorema 2:

“Não existe procedimento construtivo que demonstre que uma tal teoria seja consistente”.

O primeiro teorema indica que a “completude” de uma teoria axiomática não pode ser alcançada; o segundo indica que não há garantia de que não surjam eventuais inconsistências. A consistência só poderia ser demonstrada a partir de uma teoria mais geral, a qual necessitaria de outra ainda mais ampla e assim por diante.

Em geral, para verificar se uma Lógica é decidível, ou melhor, se uma proposição ou um teorema dessa Lógica é válido, devemos sempre usar a fórmula prenex e a partir daí verificar se o resultado é dedutível. Como vimos já Gödel tinha demonstrado o seu teorema da incompletude em 1931, segundo o qual qualquer sistema axiomático formal que pretenda por exemplo formalizar a aritmética elementar é incompleto.

Os três teoremas, quer os da Incompletude de Gödel, quer o de Church são três teoremas de certa forma limitativos que puseram em causa a fé que toda a gente depositava na Matemática.

Uma vez que não é possível tomar decisões sobre determinadas proposições da Matemática, os lógicos passaram o problema para a seguinte forma:

Será possível mesmo assim efectuar cálculos de forma correcta?

A resposta foi dada por Church que é conhecido pela sua tese, tese de Church (1936) – toda a função efectivamente calculável é uma função recursiva. Esta tese veio apoiar os cálculos efectuados em computadores porque as máquinas que têm actualmente este nome usam critérios recursivos.

Foi no final da década de 30, que Turing provou que o problema de paragem, para a máquina de Turing não é decidível. E deste modo, a máquina de Turing surge como um modelo de computação que fornece um modo de provar a existência de problemas não decidíveis, mas também ajuda a classificar os problemas computáveis, ou seja para os quais existe

um algoritmo que os resolva, pelo tempo necessário para executar o algoritmo.

É usual categorizar os problemas de decisão em duas classes de problemas, P e NP.

Os problemas de decisão pertencentes à classe P são aqueles que são decidíveis, ou seja, para os quais existe um algoritmo, em tempo polinomial.

Os problemas de classe NP são aqueles para os quais são conhecidos algoritmos não determinísticos polinomiais, é composta por problemas cuja solução pode ser verificada “facilmente”, enquanto que a classe P é composta por problemas que podem ser resolvidos “facilmente”.

7. SATISFABILIDADE

Um argumento lógico consiste como sabemos em através de várias premissas podermos obter certas conclusões. O principal objectivo na Lógica é determinar o que constitui um argumento válido, neste caso da Lógica verificar se é verdadeiro ou falso.

Veremos então algumas definições e proposições sobre o que é um argumento na Lógica Proposicional e como se determina o valor lógico desses mesmos argumentos.

Definição:

Um argumento $F_1, \dots, F_n \therefore F$, é válido na Lógica Proposicional desde que cada determinação do valor lógico V ou F que transforma F_1, \dots, F_n em verdadeiro, transforma também F em verdadeiro.

Proposição:

Um argumento em Lógica Proposicional é válido se e só se $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow F$ for uma tautologia.

Definição:

Um conjunto S de fórmulas proposicionais é satisfazível se existe determinação do valor lógico V ou F para as variáveis em S que transforma cada fórmula em S verdadeira. Então dizemos que o valor lógico satisfaz S .

Proposição:

Um argumento $F_1, \dots, F_n \therefore F$ em Lógica Proposicional é válido se o conjunto de fórmulas proposicionais $\{ F_1, \dots, F_n, \bar{F} \}$ é não satisfazível.

Concluindo, temos agora as diversas caracterizações do que é um argumento válido.

Teorema:

- O argumento $F_1, \dots, F_n \therefore F$ é válido.
- A fórmula $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow F$ é uma tautologia.
- Não satisfabilidade $\{ F_1, \dots, F_n, \bar{F} \}$.
- Não satisfabilidade $\{ F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \bar{F} \}$.

O conjunto S de fórmulas proposicionais é consistente se não conseguirmos derivar a contradição $F \wedge \bar{F}$ a partir de S . Para se verificar na prática se um conjunto de fórmulas é consistente e portanto satisfazível, suponhamos que um conjunto de fórmulas é $[F_1, F_2, \dots, F_n, \text{Logo } F]$ (1).

O conjunto $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ constitui o que se chama um conjunto de cláusulas, que tem forçosamente de ser conjuntos finitos. Se $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \bar{F}$ for considerada em conjunto com a operação \bar{F} e se esta conjunção não for satisfazível, então a inferência (1) é consistente e satisfazível, logo o argumento é válido.

Exemplo:

Vamos considerar as dez fórmulas proposicionais seguintes:

$$F1: \sim (R \Rightarrow \sim (R \vee P))$$

$$F2: R \wedge (R \Leftrightarrow (P \vee \sim Q))$$

$$F3: (Q \Leftrightarrow (R \Rightarrow \sim Q)) \wedge Q$$

$$F4: (Q \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)) \Leftrightarrow (R \wedge Q)$$

$$F5: (Q \vee P) \vee ((R \Rightarrow Q) \wedge \sim Q)$$

$$F6: (((P \vee (P \vee R)) \wedge P) \Leftrightarrow Q) \Rightarrow P$$

$$F7: (P \wedge (R \Rightarrow Q)) \wedge ((Q \Leftrightarrow R) \vee P)$$

$$F8: (R \wedge Q) \Rightarrow (R \vee ((R \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow P))$$

$$F9: ((P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Leftrightarrow P) \Leftrightarrow P)) \Rightarrow \sim (P \vee R)$$

$$F10: (((P \vee Q) \vee R) \vee (R \Rightarrow (\sim Q \Rightarrow R))) \Rightarrow R$$

E a sua tabela da verdade:

	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>F1</i>	<i>F2</i>	<i>F3</i>	<i>F4</i>	<i>F5</i>	<i>F6</i>	<i>F7</i>	<i>F8</i>	<i>F9</i>	<i>F10</i>
1.	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
2.	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
3.	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
4.	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
5.	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
6.	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
7.	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
8.	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0

Desta tabela podemos obter as seguintes informações:

a) As formas normais disjuntiva e conjuntiva:

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge \sim R)$ é a DNF da fórmula *F7*.

A CNF para a *F6* é $(P \vee Q \vee \sim R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

b) As fórmulas *F1* e *F10* são equivalentes.

Note-se que as colunas pertencentes a estas são idênticas.

c) As fórmulas $F5$ e $F6$ não são equivalentes.

As colunas pertencentes a estas estão em desacordo na linha 8.

d) A fórmula $F8$ é uma tautologia, pois todas as entradas da coluna são 1.

e) Nenhuma destas fórmulas é uma contradição, não existe uma fórmula com uma coluna de zeros.

f) O conjunto de fórmulas $F3, F4, F5, F6, F8, F9$ é satisfazível, todas estas fórmulas são verdadeiras na linha 6.

g) O conjunto de fórmulas $F6, F9, F10$ não é satisfazível porque em cada linha uma destas três formulas tem o valor 0.

h) O argumento " $F1, F2, F4, F5 \therefore F10$ " é válido, desde que a única linha com valor verdadeiro de $F1, F2, F4, F5$ seja a linha 1, e para esta linha $F10$ seja também verdadeira.

i) O argumento " $F4, F5, F6, F7 \therefore F3$ " não é válido, desde que na linha 1 todas as fórmulas $F4, F5, F6, F7$ sejam verdadeiras, mas a fórmula $F3$ seja falsa.

7.1. Resolução

A resolução é uma técnica inventada por Robinson (1918-1974) na década de 60. Ele usa a resolução para determinar a validade de uma fórmula: para um conjunto dado de cláusulas, a regra da resolução deriva

uma nova cláusula que é a consequência lógica de duas cláusulas de um conjunto.

Resolução é uma regra de inferência usada para demonstrar que um conjunto de fórmulas proposicionais da forma $\tilde{P}_1 \vee \dots \vee \tilde{P}_m$ não é satisfazível. Consideremos que \tilde{P}_i significa P_i ou \bar{P}_i , onde P_i é uma variável proposicional.

Vejamos agora o exemplo de como se determina a validade de um argumento.

Exemplo:

Determinar a validade do seguinte argumento:

$$\{P \Rightarrow Q, \bar{P} \Rightarrow R, Q \vee R \Rightarrow S\} \quad \therefore S$$

Para determinar essa validade temos de considerar se o conjunto $\{P \Rightarrow Q, \bar{P} \Rightarrow R, Q \vee R \Rightarrow S, \bar{S}\}$ é satisfazível.

1) Passar para a forma canônica CNF

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \Rightarrow R) \wedge (Q \vee R \Rightarrow S) \wedge (\bar{S})$$

2) Passar para a disjunção todos os maxtermos.

$$(\bar{P} \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\overline{Q \vee R \vee S}) \wedge (\bar{S})$$

$$(\bar{P} \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge ((\bar{Q} \wedge \bar{R}) \vee S) \wedge (\bar{S})$$

$$(\bar{P} \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\bar{Q} \vee S) \wedge (\bar{R} \vee S) \wedge (\bar{S})$$

3) Para determinar a satisfabilidade todos os termos têm de ter o valor lógico V, para a CNF ser verdade.

$$\underbrace{(\bar{P} \vee Q)}_V \wedge \underbrace{(P \vee R)}_V \wedge \underbrace{(\bar{Q} \vee S)}_V \wedge \underbrace{(\bar{R} \vee S)}_V \wedge \underbrace{(\bar{S})}_V$$

4) Comparando:

$$\bar{S} \leftarrow V \quad \therefore S \leftarrow F$$

$$\bar{R} \leftarrow V \quad \therefore R \leftarrow F$$

$$\bar{Q} \leftarrow V$$

$$P \leftarrow V \quad \therefore \bar{P} \leftarrow F$$

$$Q \leftarrow V$$

$$Q \wedge \bar{Q} \leftarrow V$$

Então é não satisfazível, ou seja, não é consistente, logo o conjunto de cláusulas iniciais é válido.

Quando trabalhamos com fórmulas da forma $\tilde{P}_1 \vee \dots \vee \tilde{P}_m$ não estamos interessados sobre a ordem de \tilde{P}_i , nem nos importamos com o número de ocorrências de um dado \tilde{P}_i . Toda a informação que necessitamos está presente no conjunto $\{\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m\}$.

Definição:

Uma variável proposicional P , assim como uma variável proposicional negada \bar{P} é chamada literal. Conjuntos finitos $\{L_1, \dots, L_n\}$ de literais são chamadas de cláusulas. Os literais de uma cláusula são membros dessa cláusula.

Definição de satisfabilidade:

- Se $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ é satisfazível se e só se a fórmula proposicional $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ é satisfazível.
- Por definição a cláusula vazio, $\{\}$, não é satisfazível.
- Um conjunto de cláusulas S é satisfazível se e só se o valor lógico V pode ser assignado a cada cláusula de S .

O argumento do exemplo anterior, $\{P \Rightarrow Q, \bar{P} \Rightarrow R, Q \vee R \Rightarrow S\} \therefore S$, é válido se e só se o conjunto de fórmulas proposicionais $\{\bar{P} \vee Q, P \vee R, \bar{Q} \vee S, \bar{R} \vee S, \bar{S}\}$ é não satisfazível, e isto depende se e só se o conjunto das cláusulas obtidas destas fórmulas, $\{\bar{P}, Q\} \{P, R\} \{\bar{Q}, S\} \{\bar{R}, S\} \{\bar{S}\}$, é não satisfazível.

Agora vemos qual o interesse em mostrar que um conjunto de cláusulas não é satisfazível, a saber, porque podemos usar esta propriedade para determinar se um argumento é válido, este é o método mais usado para mostrar que um conjunto de cláusulas não é satisfazível: o uso da resolução.

Definição:

Regra da resolução; $\frac{C \cup \{L\}, D \cup \{\bar{L}\}}{C \cup D}$,

Onde C e D são cláusulas e L é um literal. Dizemos que estamos a resolver duas cláusulas em ordem a L ; e $C \cup D$ é o resolvente.

A (resolução) derivação de um conjunto de cláusulas S é uma sequência finita das cláusulas tais que cada uma está em S ou vem das cláusulas precedentes na sequência pela resolução.

Exemplo:

A derivação da cláusula vazio de um conjunto de cláusulas $\{\bar{P}, Q\}, \{\bar{Q}, \bar{R}, S\}, \{R\}, \{P\}, \{\bar{S}\}$ é:

1. $\{\bar{S}\}$ dado
2. $\{\bar{Q}, \bar{R}, S\}$ dado
3. $\{\bar{Q}, \bar{R}\}$ resolução 1,2
4. $\{R\}$ dado
5. $\{\bar{Q}\}$ resolução 3,4
6. $\{\bar{P}, Q\}$ dado
7. $\{\bar{P}\}$ resolução 5,6
8. $\{P\}$ dado
9. $\{ \}$ resolução 7,8

7.2. *Davis – Putnam – Procedure*

O algoritmo Davis – Putnam– Procedure (D.P.P.) foi introduzido em 1950 como um teorema para a Lógica Proposicional. Este algoritmo teve como base a resolução.

Seja S um conjunto não vazio de cláusulas não vazias com as variáveis proposicionais P_1, \dots, P_n o D.P.P. repete as seguintes etapas até que não haja nenhuma variável:

- Eliminar todas as cláusulas que tenham simultaneamente P e \bar{P} .
- Escolher uma variável P que aparece numa das cláusulas.
- Juntar todas as cláusulas que contenham P e \bar{P} numa só cláusula.
- Eliminar todas as cláusulas com P e \bar{P} , isto é, que contenham P e \bar{P} em cada uma.

Depois de efectuados estes passos o resultado pode ser:

- a) A cláusula vazia; \therefore não é satisfazível.
- b) Não ficam cláusulas nenhuma; \therefore é satisfazível, isto é, existe um valor lógico V que satisfaz cada uma das cláusulas do conjunto inicial.

Exemplo: Aplicar o D.P.P. às seguintes cláusulas:

$$\{\bar{P}, Q\} \quad \{P, R\} \quad \{\bar{Q}\}.$$

- Eliminando P dá-nos: $\{Q, R\} \quad \{\bar{Q}\}$
- Eliminando Q dá-nos: $\{R\}$
- Eliminando R não nós dá cláusulas.

Então o output é “nenhuma cláusula”.

∴ É satisfazível

Exemplo: Aplicar o D.P.P. às seguintes cláusulas:

$$\{\bar{P}, Q\} \quad \{P, \bar{S}\} \quad \{\bar{Q}\} \quad \{S\}.$$

- Eliminando P dá-nos: $\{Q, \bar{S}\} \quad \{\bar{Q}\} \quad \{S\}$
- Eliminando Q dá-nos: $\{\bar{S}\} \quad \{S\}$
- Eliminando S dá-nos: $\{ \}$

Então o output é a cláusula vazio.

∴ Não é satisfazível

Vejamos agora o teorema que nos permite afirmar sobre a satisfabilidade ou não de um conjunto finito de cláusulas.

Teorema:

Seja S um conjunto finito de cláusulas então esse conjunto S é não satisfazível se e só se o output do algoritmo D.P.P. é a cláusula vazio.

Tal como já vimos na resolução quando o resultado é não satisfazível dizemos que o argumento é válido.

No exemplo resolvido anteriormente o conjunto é não satisfazível, logo o argumento é válido por definição.

Seguidamente iremos ver algumas cláusulas um pouco lentas para a resolução. Contudo, para cada certos tipos de cláusulas é sabido ser razoavelmente rápido.

As cláusulas de Horn são um exemplo desse tipo de cláusulas. Já vimos que uma cláusula de Horn é uma cláusula que tem no máximo um literal positivo.

Vejamos então algumas definições para essas cláusulas.

Lema:

Um resolvente de duas cláusulas de Horn é sempre uma cláusula de Horn.

Definição:

A cláusula unitária é uma cláusula do tipo $\{L\}$, por exemplo, com um único literal. A resolução unitária refere-se às derivações da resolução em que pelo menos uma das cláusulas usadas em cada etapa da resolução é uma cláusula unitária.

Exemplo:

Vamos aplicar a resolução unitária ao seguinte conjunto de cláusulas de Horn para determinar se elas são satisfazíveis.

$$\begin{array}{cccccc} \{R, \bar{S}\} & \{\bar{P}, Q, \bar{S}\} & \{P, \bar{R}, \bar{T}\} & \{\bar{Q}, \bar{S}\} & \{\bar{P}, \bar{Q}, \bar{S}, T\} \\ \{P\} & \{S\} & \{\bar{P}, Q, \bar{R}, \bar{T}\} & & \end{array}$$

Resolvente em ordem a P

- (1) $\{\bar{P}, Q, \bar{S}\}$ (2) $\{P, \bar{R}, \bar{T}\}$ (3) $\{\bar{P}, \bar{Q}, \bar{S}, T\}$ (4) $\{P\}$ (5) $\{\bar{P}, Q, \bar{R}, \bar{T}\}$
 (1,2) $\{Q, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T}\}$ (1,4) $\{Q, \bar{S}\}$ (2,3) $\{\bar{R}, \bar{Q}, \bar{S}\}$ (2,5) $\{Q, \bar{R}, \bar{T}\}$ (3,4) $\{\bar{Q}, \bar{S}, T\}$
 (4,5) $\{Q, \bar{R}, \bar{T}\}$

Resolvente em ordem a S

- (1) $\{R, \bar{S}\}$ (2) $\{\bar{Q}, \bar{S}\}$ (3) $\{S\}$ (4) $\{Q, \bar{R}, \bar{S}, \bar{T}\}$ (5) $\{Q, \bar{S}\}$ (6) $\{\bar{R}, \bar{Q}, \bar{S}\}$
 (7) $\{\bar{Q}, \bar{S}, T\}$
 (1,3) $\{R\}$ (2,3) $\{\bar{Q}\}$ (3,4) $\{Q, \bar{R}, \bar{T}\}$ (3,5) $\{Q\}$ (3,6) $\{\bar{R}, \bar{Q}\}$ (3,7) $\{\bar{Q}, T\}$

Resolvente em ordem a R

- (1) $\{R\}$ (2) $\{Q, \bar{R}, \bar{T}\}$ (3) $\{\bar{R}, \bar{Q}\}$
 (1,2) $\{Q, \bar{T}\}$ (1,3) $\{\bar{Q}\}$

Resolvente em ordem a Q

- (1) $\{Q\}$ (2) $\{\bar{Q}\}$ (3) $\{\bar{Q}, T\}$ (4) $\{Q, \bar{T}\}$
 (1,2) $\{\}$ (1,3) $\{T\}$ (2,4) $\{\bar{T}\}$ (3,4) $\{\}$

Resolvente em ordem a T

- (1) $\{T\}$ (2) $\{\bar{T}\}$
 (1,2) $\{\}$

∴ Uma vez que o resultado é a cláusula vazia, pela definição podemos afirmar que o conjunto não é satisfazível, logo o argumento inicial é válido.

Também para as cláusulas de Horn podemos falar em consistência e completude, então temos o seguinte teorema.

Teorema:

A resolução unitária é consistente e completa quando se usam cláusulas de Horn.

O D.P.P. foi programado por volta de 1950, mas os resultados não eram os esperados. Os computadores eram rápidos mas não o suficiente, como pareciam. Então a ideia que surgiu depois foi usar grafos.

A origem da Teoria dos Grafos apareceu com Euler em 1738, com o conhecido problema das sete pontes de Königsberg. Na antiga cidade de Königsberg situada na Prússia, hoje Haliningrad na Rússia, existe uma ilha, chamada Kneiphoff, formada pelos dois braços do rio Pregel, como mostra na figura 5. Existiam sete pontes que atravessavam esses dois braços.

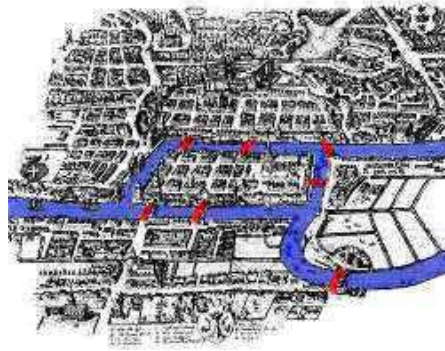


Figura 5 – Cidade de Königsberg

O problema consistia em averiguar a possibilidade de uma pessoa deslocar-se na cidade de tal forma que atravessasse cada uma das sete pontes uma e uma só vez.

Euler mostrou que isso era impossível, utilizando um modelo de grafos. Através desse modelo verificou que o trajecto só existe quando em cada região concorrem um número par de pontes, como vemos na figura 6.

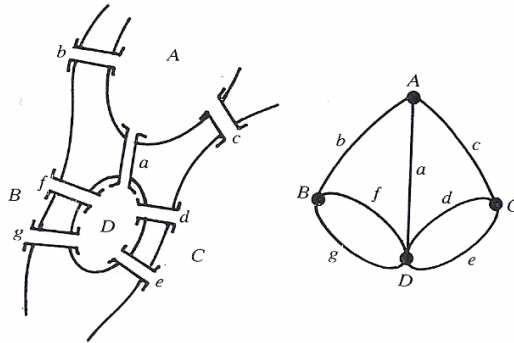


Figura 6 – Representação das pontes da Cidade de Königsberg

Este Problema foi considerado o 1º teorema em Teoria dos Grafos, mas após o trabalho de Euler, poucos trabalhos se realizaram sobre esta teoria.

Podemos dizer de uma forma simplificada, que um grafo é um diagrama que consiste num dado número de pontos, que são chamados vértices ou nós, unido por linhas, a que chamamos arestas ou ligações e cada aresta une exactamente dois vértices.

Através da definição dita anteriormente podemos utilizar diversos diagramas que representam as mesmas ligações. Vejamos por exemplo o problema de ligar três casas, A, B e C, e três utilidades necessárias, gás, água e luz. Ao observamos o diagrama vemos que é impossível ligar cada casa à sua utilidade sem pelo menos uma linha se cruzar.

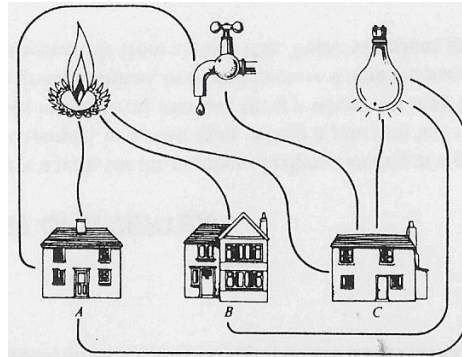


Figura 7 – Ligações entre as casas e as utilidades

Podemos representar este diagrama através de vários grafos, onde os vértices representam as três casas e as três utilidades.

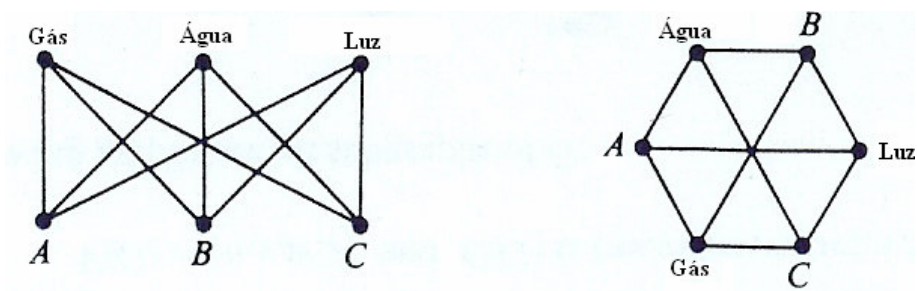


Figura 8 – Grafo associado à figura 7

No primeiro grafo ligamos os seis vértices através de nove arestas, e no segundo grafo temos novamente os seis vértices posicionados de forma diferente de modo a que as arestas não se cruzem.

Então um grafo $G = (V,A)$ é um conjunto finito não vazio V de elementos a que chamamos vértices e um conjunto A de pares não ordenados de elementos distintos de V a que chamamos arestas.

Para representar os vértices usamos os símbolos v_1, v_2, v_3, \dots e para representar as arestas usamos os símbolos a_1, a_2, a_3, \dots . Cada aresta a vem

representada pelo par de vértices $a = (b,c)$, sendo b e c as extremidades da aresta. Então dizemos que a aresta é incidente a b,c .

Mas quando uma aresta em A tiver mais do que um par de vértices distintos, então tem arestas adjacentes.

Um grafo diz-se simples se, no máximo, existe uma aresta entre cada par de vértices e, além disso, estes não têm lacetes, isto é, uma aresta que começa e termina no mesmo vértice.

Designam-se por multigrafos os grafos em que existem múltiplas arestas que ligam o mesmo par de vértices, podendo, assim, apresentar lacetes.

Geometricamente um grafo pode ser representado por um diagrama em que cada vértice é representado por um ponto ou círculo e a aresta é representada por uma linha que une os pontos ou círculos.

Exemplo:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$a_1 = (2,5)$$

$$a_2 = (3,3)$$

$$a_3 = (3,4)$$

$$a_4 = (2,4)$$

$$a_5 = (3,4)$$

$$a_6 = (1,5)$$

Então o grafo $G = (V, A)$ vem representado na figura 9:

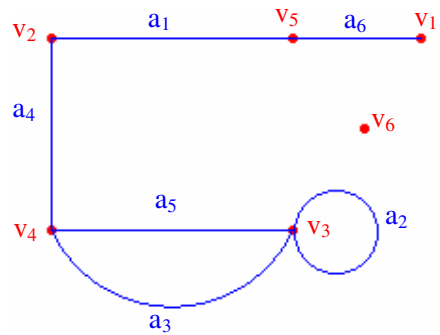


Figura 9 - Grafo $G = (V, A)$

Ao analisarmos o grafo verificamos que a_3 e a_5 são arestas que estão ligadas através do mesmo par de vértices e a_2 é um lacete.

Num grafo $G = (V, A)$, o grau de um vértice v_i , é o número de arestas incidentes nesse vértice, e é denotado por $d(v_i)$.

A um vértice de grau zero chamamos vértice isolado, de grau um chamamos vértice pendente e à sua aresta incidente nesse vértice é chamada aresta pendente.

Por definição, um lacete contribui duas vezes para o grau do vértice.

Então no grafo da figura 9 vem:

$$\begin{array}{ll}
 d(v_1) = 1 & d(v_4) = 3 \\
 d(v_2) = 2 & d(v_5) = 2 \\
 d(v_3) = 4 & d(v_6) = 0
 \end{array}$$

Note-se que v_6 é um vértice isolado, e v_1 é um vértice pendente.

Ainda no grafo da figura 9, verificamos que a soma dos graus dos vértices é igual a doze, e o número de arestas é seis. Então a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas de G e é sempre par.

Teorema:

A soma dos graus dos vértices de um grafo G é igual a $2m$, onde m é o número de arestas de G .

Teorema:

O número de vértices de grau ímpar em qualquer grafo é sempre par.

7.3. Teorema de Tseitin

Tseitin, em 1968, provou que o D.P.P. era lento pela sua construção em alguns conjuntos de cláusulas que obteve dos grafos.

Dado um grafo finito G , com o conjunto de vértices V , e um conjunto de arestas A , coloca-se em cada vértice o número 0 ou 1. Designa-se esse número por potencial ou carga do vértice. É obrigatório que a carga total do grafo que é o somatório das cargas dos vértices, seja um somatório módulo 2. A carga total só poderá ser 0 ou 1.

Seguidamente colocamos sobre cada aresta, uma variável proposicional (um literal), tal que arestas distintas ficam com variáveis distintas. Ficamos assim com uma rede (um grafo pesado \hat{G}), para cada vértice designa-se por $\text{Var}(v)$.

O conjunto de variáveis proposicionais das arestas incidentes nesse vértice e para cada vértice v constrói-se o conjunto de cláusulas $\text{Claus}(v)$ exigindo que $C \in \text{Claus}(v)$ se e só se:

- As variáveis que ocorrem em C são precisamente as de $\text{Var}(v)$.
- O número de literais negativos em C mais a carga de v é congruente com $1 \pmod{2}$.

Teorema de Tseitin:

O conjunto das cláusulas do grafo pesado, $\text{Claus}(\hat{G})$, é satisfazível se e só se a carga total for zero.

Exemplo:

Na seguinte figura temos um grafo G com 4 vértices a, b, c, d (diagrama da esquerda), colocamos cargas nestes vértices (diagrama central), e assignamos a cada aresta uma variável proposicional distinta (último diagrama), que nos dá finalmente o grafo pesado \hat{G} .

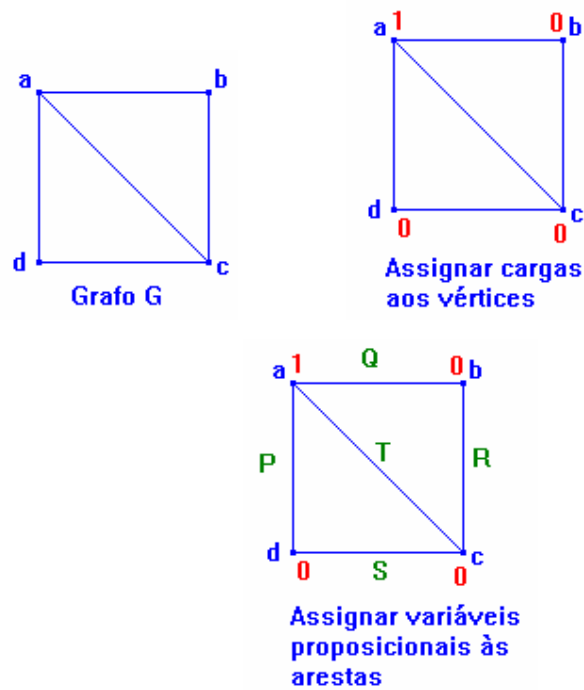


Figura 10 – Exemplo de um grafo pesado

Vamos escrever o conjunto das cláusulas referentes a cada vértice:

$$\text{Claus}(a) = \{\{P, Q, T\}, \{\bar{P}, \bar{Q}, T\}, \{P, \bar{Q}, \bar{T}\}, \{\bar{P}Q, \bar{T}\}\}$$

$$\text{Claus}(b) = \{\{\bar{Q}, R\}, \{Q, \bar{R}\}\}$$

$$\text{Claus}(c) = \{\{\bar{T}, R, S\}, \{T, \bar{R}, S\}, \{T, R, \bar{S}\}, \{\bar{T}, \bar{R}, \bar{S}\}\}$$

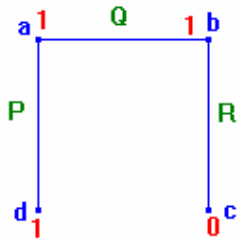
$$\text{Claus}(d) = \{\{\bar{P}, S\}, \{P, \bar{S}\}\}$$

Como a carga total é 1 (1+0+0+0), então pelo teorema de Tseitin as 12 cláusulas formam um conjunto não satisfazível.

Outros Exemplos:

Escrever as cláusulas de grafos associados com cada um dos seguintes grafos e em seguida determinar se o conjunto de cláusulas é ou não satisfazível.

1)



$$\text{Claus}(a) = \{ \{P, Q\}, \{\bar{P}, \bar{Q}\} \}$$

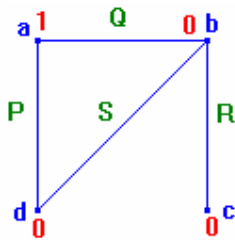
$$\text{Claus}(b) = \{ \{Q, R\}, \{\bar{Q}, \bar{R}\} \}$$

$$\text{Claus}(c) = \{ \bar{R} \}$$

$$\text{Claus}(d) = \{ P \}$$

Como a carga total é 3 (1+1+0+1) , pelo teorema de Tseitin as 6 cláusulas formam um conjunto não satisfazível.

2)



$$\text{Claus}(a) = \{\{P, Q\}, \{\bar{P}, \bar{Q}\}\}$$

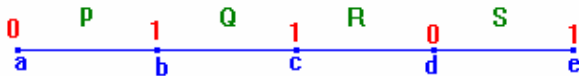
$$\text{Claus}(b) = \{\{\bar{Q}, R, S\}, \{Q, \bar{R}, S\}, \{Q, R, \bar{S}\}, \{\bar{Q}, \bar{R}, \bar{S}\}\}$$

$$\text{Claus}(c) = \{\bar{R}\}$$

$$\text{Claus}(d) = \{\{\bar{P}, S\}, \{P, \bar{S}\}\}$$

Como a carga total é 1 (1+0+0+0), pelo teorema de Tseitin as 9 cláusulas formam um conjunto não satisfazível.

3)



$$\text{Claus}(a) = \{\bar{P}\}$$

$$\text{Claus}(b) = \{\{P, Q\}, \{\bar{P}, \bar{Q}\}\}$$

$$\text{Claus}(c) = \{\{Q, R\}, \{\bar{Q}, \bar{R}\}\}$$

$$\text{Claus}(d) = \{\{\bar{R}, S\}, \{R, \bar{S}\}\}$$

$$\text{Claus}(E) = \{S\}$$

Como a carga total é 3 (0+1+1+0+1), pelo teorema de Tseitin as 8 cláusulas formam um conjunto não satisfazível.

7.4. Princípio de Dirichlet

Em 1974 Cook (1939) e Rechkow sugeriram que o conjunto das cláusulas que expressam o princípio de Dirichlet ou princípio das gaiolas de pombos seria difícil de provar a não satisfabilidade através da resolução.

Na sua primeira versão o princípio de Dirichlet (1805-1854) diz o seguinte: se n pombos voam para k gaiolas e se $k < n$ então alguma gaiola vai ficar com pelo menos dois pombos.

Uma aplicação trivial deste princípio é a seguinte: Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas nasceram no mesmo mês. Aqui as 13 pessoas identificadas com os pombos e os 12 meses com as gaiolas. O Princípio da Casa dos Pombos pode ser reformulado como se segue:

Se n pombos forem colocados em k gaiolas, então pelo menos uma gaiola conterá pelo menos $\left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor + 1$ pombos.⁶

Em linguagem Matemática podemos obter uma segunda versão que é a seguinte: se f é uma função de um conjunto finito X para um outro conjunto finito Y , sendo $|X| > |Y|$ ou $\#X > \#Y$, então $f(x_1) = f(x_2)$, para algum par $(x_1, x_2) \in X$ sendo $x_1 \neq x_2$.

Embora o princípio de Dirichlet possa parecer uma observação trivial, pode ser utilizado para demonstrar resultados inexplicáveis. Por

⁶ Aqui $\lfloor x \rfloor$ indica o menor inteiro menor do que ou igual a x .

exemplo, para provar que em Lisboa existem pelo menos duas pessoas com a mesma quantidade de cabelo nas cabeças.

Demonstração: uma cabeça normalmente contém por volta de 150000 cabelos. É sensato assumir que ninguém tem mais do que 1000000 cabelos. Em Lisboa existem mais de 1000000 pessoas. Se atribuirmos o princípio de Dirichlet para cada número de cabelos na cabeça e se assumirmos a quantidade de cabelo existente na cabeça por pessoa, então pelo menos devem existir duas pessoas com a mesma quantidade de cabelo na cabeça.

Outro exemplo prático do princípio de Dirichlet envolve a situação de 15 alunos que escreveram um ditado. O João teve 13 erros, cada um dos restantes tiveram menos do que este número. Agora provar que pelo menos dois alunos têm o mesmo número de erros.

Demonstração: para resolver este problema, vamos comparar os alunos com os pombos e coloca-los dentro de 14 buracos numerados de 0, 1, 2, ..., 13, de acordo com o número de erros. No buraco 0 colocamos os alunos com zero erros, no buraco 1 aqueles com apenas um erro, no buraco 2 aqueles com apenas dois erros e assim sucessivamente. Certamente, o buraco 13 apenas está atribuído ao João. Agora aplicando o princípio de Dirichlet para o número de erros, então existem dois alunos com o mesmo número de erros.

Exemplo:

Supondo que P_2 é o conjunto de 9 cláusulas em 6 variáveis e representemos as variáveis proposicionais P_{ij} que corresponde o objecto i vai para a gaiola j .

Sejam as 9 cláusulas:

$$\begin{array}{ccc} \{P_{11}, P_{12}\} & \{P_{21}, P_{22}\} & \{P_{31}, P_{32}\} \\ \{\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}\} & \{\bar{P}_{12}, \bar{P}_{22}\} & \{\bar{P}_{11}, \bar{P}_{31}\} \\ \{\bar{P}_{12}, \bar{P}_{32}\} & \{\bar{P}_{21}, \bar{P}_{31}\} & \{\bar{P}_{22}, \bar{P}_{32}\} \end{array}$$

Pretende-se saber se este conjunto de cláusulas relativas ao princípio de Dirichlet são satisfazíveis.

- Resolvente em ordem a P_{11}

$$\begin{array}{l} (1) \{P_{11}, P_{12}\} \quad (2) \{\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}\} \quad (3) \{\bar{P}_{11}, \bar{P}_{31}\} \\ (1,2) \{P_{12}, \bar{P}_{21}\} \quad (1,3) \{P_{12}, \bar{P}_{31}\} \end{array}$$

- Resolvente em ordem a P_{12}

$$\begin{array}{l} (1) \{P_{12}, \bar{P}_{21}\} \quad (2) \{P_{12}, \bar{P}_{31}\} \quad (3) \{\bar{P}_{12}, \bar{P}_{22}\} \quad (4) \{\bar{P}_{12}, \bar{P}_{32}\} \\ (1,3) \{\bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}\} \quad (1,4) \{\bar{P}_{21}, \bar{P}_{32}\} \quad (2,3) \{\bar{P}_{31}, \bar{P}_{22}\} \quad (2,4) \{\bar{P}_{31}, \bar{P}_{32}\} \end{array}$$

- Resolvente em ordem a P_{21}

$$\begin{array}{l} (1) \{\bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}\} \quad (2) \{\bar{P}_{21}, \bar{P}_{32}\} \quad (3) \{P_{21}, P_{22}\} \quad (4) \{\bar{P}_{21}, \bar{P}_{31}\} \\ (1,3) \{ \} \quad (2,3) \{\bar{P}_{32}, \bar{P}_{22}\} \quad (3,4) \{P_{22}, \bar{P}_{31}\} \end{array}$$

- Resolvente em ordem a P_{31}

(1) $\{\bar{P}_{31}, \bar{P}_{22}\}$ (2) $\{\bar{P}_{31}, \bar{P}_{32}\}$ (3) $\{P_{22}, \bar{P}_{31}\}$ (4) $\{P_{31}, P_{32}\}$

(1,4) $\{\bar{P}_{22}, P_{32}\}$ (2,4) $\{\}$ (3,4) $\{P_{22}, P_{32}\}$

- Resolvente em ordem a P_{22}

(1) $\{\bar{P}_{32}, \bar{P}_{22}\}$ (2) $\{\bar{P}_{22}, P_{32}\}$ (3) $\{P_{22}, P_{32}\}$ (4) $\{\bar{P}_{22}, \bar{P}_{32}\}$

(1,2) $\{\}$ (1,4) $\{\bar{P}_{32}\}$ (2,3) $\{P_{32}\}$ (3,4) $\{\}$

- Resolvente em ordem a P_{32}

(1) $\{\bar{P}_{32}\}$ (2) $\{P_{32}\}$

(1,2) $\{\}$

∴ O conjunto de cláusulas não é satisfazível pois o resultado é a cláusula vazio.

7.5. Comparando os Algoritmos

Na Lógica Proposicional temos definidos três problemas básicos de inferência:

- É uma fórmula dada satisfazível?
- É uma fórmula dada uma tautologia?
- Uma fórmula implica a outra?

Todos os três podem ser resolvidos de varias formas, por exemplo, para verificar se diferentes cláusulas são ou não satisfazíveis podemos

utilizar vários algoritmos, dentro dos quais: a Resolução, D.P.P., Tseitin e Dirichlet.

Mas todos eles estão reduzidos a um único problema, a que chamamos problema da satisfabilidade.

Para determinar a validade necessitamos primeiramente de verificar se as cláusulas são ou não satisfazíveis, pois como já vimos se o conjunto de fórmulas proposicionais $\{ F_1, \dots, F_n, \bar{F} \}$ é não satisfazível, então o argumento $F_1, \dots, F_n \therefore F$ em Lógica Proposicional é válido.

A resolução é o método popular para verificar a consistência Lógica de um conjunto de fórmulas proposicionais. A resolução requer que o conjunto das fórmulas proposicionais seja transformado em formas normais conjuntivas (CNF). Um conjunto de fórmulas proposicionais na CNF é feito então num conjunto cláusulas, onde a cláusula é um conjunto de literais. As cláusulas resolvem-se utilizando a regra da resolução.

Um conjunto de cláusulas é satisfazível se e somente se existe um valor assignado verdadeiro que satisfaz todas as cláusulas nesse conjunto de cláusulas.

É possível que um conjunto de cláusulas não seja satisfazível se e somente se a cláusula vazia pode ser resolvida do conjunto de cláusulas.

Muitos algoritmos são baseados na resolução para determinar a satisfabilidade. Alguns usados mais extensamente na prova do teorema proposicional são o D.P.P. e o princípio de Dirichlet. A ideia geral do

procedimento é deduzir um problema eliminando uma variável: o D.P.P. fá-lo por todas as etapas possíveis da resolução numa variável escolhida, e o Dirichlet procede da mesma forma mas com variáveis proposicionais da forma P_{ij} .

O algoritmo D.P.P. utiliza a resolução para verificar se as cláusulas são ou não satisfazíveis. Como nas cláusulas a cláusula vazio é não satisfazível, também no D.P.P. quando o resultado final é a cláusula vazio através da eliminação de vários literais dizemos também que é não satisfazível.

No algoritmo D.P.P. o que é feito é uma disjunção de conjuntos disjuntos. Se $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \bar{F}$ levarem ao conjunto vazio então $F_1, F_2, \dots, F_n \therefore F$ não é satisfazível. Se tiver o resultado $\{A, B\}; \{\bar{A}\}; \{B\}$, fazemos desaparecer as cláusulas e não atingimos o conjunto vazio. Quando não se atinge o conjunto vazio é satisfazível.

O algoritmo D.P.P. é um dos melhores métodos mais completos para testar a satisfabilidade numa fórmula proposicional.

Enquanto o D.P.P. verifica um conjunto de cláusulas dadas se são ou não satisfazíveis, Tseitin escreve as cláusulas utilizando os grafos e após isso verifica a satisfabilidade.

Para determinar a satisfabilidade de um conjunto de cláusulas utilizando o teorema de Tseitin, utilizamos o conjunto das cláusulas do grafo pesado, de modo que o número de literais negativos em cada cláusula

mais a carga do vértice seja congruente com $1 \pmod{2}$. Se a carga total do grafo for zero, então o conjunto das cláusulas é satisfazível.

Estes algoritmos são distintos por si só, e um veio para substituir o outro, uma vez que o D.P.P. era lento pela sua construção.

O D.P.P. só deverá ser utilizado com um conjunto de cláusulas muito reduzido, pois como os computadores eram muito lentos na altura, era quase impossível determinar a satisfabilidade de algumas cláusulas, então com os grafos que surgiram pela 1ª vez em 1738 com o conhecido problemas das sete pontes de Königsberg, Tseitin conseguiu um algoritmo mais simples e eficaz.

O algoritmo de Dirichlet é semelhante ao D.P.P., pois utiliza um conjunto de cláusulas dadas e verifica se estas são ou não satisfazíveis.

O principal objectivo na Lógica é determinar se um argumento é válido ou não, isto é, encontrar um conjunto de cláusulas e verificar a sua satisfabilidade. Para isso podemos usar diversos algoritmos, mas Cook e Rechkow dizem ser difícil provar a não satisfabilidade através da resolução, então pelo princípio de Dirichlet obtiveram melhores resultados.

Estes algoritmos são unicamente válidos para a Lógica Proposicional, uma vez que com um teorema descoberto em 1936 por Alonso Church que afirma que não existe um algoritmo que permite resolver o problema de decisão.

8. CONCLUSÃO

Para a Lógica Proposicional temos um processo mecânico de decisão ou regra mecânica pelo qual podemos determinar se um esquema dado é válido ou não. Reduzimo-lo à forma normal conjuntiva e depois para determinar a satisfabilidade, todos os termos têm de ter o valor lógico V, para a CNF ser verdade, então dizemos que é válido ou que não é válido. Ou então poderemos construir uma tabela de verdade para a fórmula e ver se recebe o valor verdade para todas as possibilidades que foram enumeradas.

Em Lógica de Predicados a situação é muito diferente, mas é natural que nos perguntemos se aqui também podemos encontrar um processo de decisão com o qual podemos determinar se uma dada fórmula é universalmente válida ou não, e no caso de não ser universalmente válida, quais serão os domínios, se os houver, em que esta será válida.

Mas como vimos, pelo teorema de Church, não há resolução para o problema de decisão para a Lógica de Predicados, mas sim outros processos.

Na década de 1950 vários matemáticos tentaram utilizar o computador para comprovar teoremas matemáticos. Mas revelou-se que as fórmulas proposicionais eram de difícil análise, mesmo para os computadores.

Um dos métodos usados para analisar fórmulas proposicionais era trabalhar com cláusulas e resolução. Depois disso foi descoberto que este

método pode ser lento na prática, e vários matemáticos tentaram provar isso para alguns problemas. O primeiro sucesso foi o trabalho de Tseitin em 1968, em que ele mostrou que o D.P.P. é lento para cláusulas de grafos. Entretanto, a pergunta de se ou não a resolução seria lenta permanecia em aberto até 1985, quando A. Haken provou que as cláusulas de Dirichlet eram de difícil resolução. Então, em 1987, A. Urquhart provou que as cláusulas de grafos de Tseitin também eram de difícil resolução, e em 1988 Chvátal e Szemerédi ambos provaram que famílias escassas de cláusulas geradas aleatoriamente usualmente requerem tempo exponencial para as confrontar pela resolução.

A dificuldade aparente do problema de testar uma fórmula proposicional para verificar se é uma tautologia, ou satisfazível, tornou-se mais clara com o trabalho de S. Cook e R. Karp em 1971, quando mostraram que poderiam responder à pergunta da satisfabilidade de forma razoavelmente rápida. No entanto a pergunta de se há ou não um algoritmo rápido permanece em aberto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALBERT, D., *Time and Chance*, Harvard University Press, chapt. II, 2000
- [2] BÉLA BOLLOBAS, *Graduate textes in Mathematics, Graph Theory, An Introduction Course*. Springer-verlag new York Heidelberg berlin, 1979
- [3] Boletim – Sociedade portuguesa de Matemática n.º48 – Maio 2003
- [4] C. L. LIN, *Elements of Discrete Mathematics*. Mc Graw-Hill. International editions, 1986.
- [5] DAVID E. JOHNSON, JOHNNY R. JOHNSON, *Graph Theory With Engineering Applications*. The Ronald Press Company, 1972.
- [6] FRANK HARAY, *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishings Company, Inc, 1969.
- [7] K. THULASIRAMAN, M.N.S. SWAMY, *Graphs: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons. Inc., 1992.
- [8] KNEALE WILLIAM, KNEALE MARTHA, *O Desenvolvimento da Lógica*. Fundação Calouste Gulbenkian, 1991
- [9] MANUEL GARRIDO, *Lógica Simbólica*. Editorial Tecnos, 1991.
- [10] MACLANE and BIRKHOFF, *A Survey of Modern Algebra* . Mac Millan, 1965.

[11] RENÉ CORI AND DANIEL LASCAR, *Mathematical Logic, A Course with exercises, Part I: Propositional Calculos, Boolean Algebras, Predicate Calculos, Completeness Theorems*. Oxford University Press, 2000.

[12] RENÉ CORI AND DANIEL LASCAR, *Mathematical Logic, A Course with exercises, Part II: Recursion Theory, Gödel's Theorems, Set Theory, Model Theory*. Oxford University Press, 2001.

[13] STANLEY N. BURRIS, *Logic for Mathematics and Computer Science*. Upper saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

Outras Referências Bibliográficas

- <http://www.estv.ipv.pt/estv/>
- <http://www.rpi.edu/>
- <http://www.math.uwaterloo.ca/>
- <http://www.educ.fc.ul.pt/>
- <http://www.mat.uc.pt/>
- <http://www.ipb.pt/>
- <http://matematizando.no.sapo.pt/>
- <http://www.ncc.up.pt/>
- <http://www.fl.ul.pt/>
- <http://www.mat.ua.pt/>
- <http://sat.inesc-id.pt/>
- <http://www.dis.uniroma1.it/>
- <http://www.inesc-id.pt/>
- <http://alexandria.tue.nl/extra2/200511887.pdf>
- <http://dme.uma.pt/mauricio/>
- <http://www2.apm.pt/portal/index.php>
- <http://www.inf.ufsc.br/>
- <http://www.lcc.ufrn.br/lcc/>
- <http://web.educom.pt/>
- <http://pt.wikipedia.org/>
- <http://preprint.math.ist.utl.pt/files/>
- Kevin Brown, “Zeno and the Paradox of Plotion”,
www.mathpages.com/home/ipphysics.html
- in A. M. Turing “Computational Machinery and Intelligence”, Mind,
1950, <http://www.gecad.isep.ipp.pt/>