**Liliana Mota Cardoso Marques da Silva**

# A Teoria dos Grafos no Ensino

**Dissertação submetida à Universidade Portucalense Infante D. Henrique para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática/Educação**

**Trabalho realizado sob a orientação da Professora Dr.ª Ana Júlia Viamonte**

**Universidade Portucalense Infante D. Henrique**
**Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia**

**Dezembro de 2009**

***DECLARAÇÃO***

Nome:_______________________________________________________________

Nº. do B. I.: _______________ Tel/Telem.: ________________ e-mail: _______________

Curso de Pós-Graduação:

Doutoramento ◻

Área do doutoramento: _______________________________ Ano de conclusão: __-__-____

Mestrado ◻

Designação do mestrado: ______________________________ Ano de conclusão: __-__-____

Título da tese / dissertação

______________________________________________________________________

Orientador (es):

______________________________________________________________________

**Declaro, para os devidos efeitos, que concedo, gratuitamente, à Universidade Portucalense Infante D. Henrique, para além da livre utilização do título e do resumo por mim disponibilizados, autorização, para esta arquivar nos respectivos ficheiros e tornar acessível aos interessados, nomeadamente através do seu repositório institucional, o trabalho supra-identificado, nas condições abaixo indicadas:**

[Assinalar as opções aplicáveis em 1 e 2]

**1. Tipo de Divulgação**:

◻ **Total**.

◻ **Parcial**.

**2. Âmbito de Divulgação**:

◻ **Mundial (Internet aberta)**

◻ **Intranet da Universidade Portucalense.**

◻ **Internet, apenas a partir de ◻ 1 ano ◻ 2 anos ◻ 3 anos – até lá, apenas Intranet da UPT**

**Advertência**: O direito de autor da obra pertence ao criador intelectual, pelo que a subscrição desta declaração não implica a renúncia de propriedade dos respectivos direitos de autor ou o direito de a usar em trabalhos futuros, os quais são pertença do subscritor desta declaração.

Assinatura: ____________________________________________

Porto, ____/____/____

# Agradecimentos

Este trabalho não é nem nunca poderia ser só meu. Por essa razão, aproveito este espaço para deixar algumas palavras de agradecimento àqueles que para ele contribuiram ao longo destes anos. Não são muitos, mas foram indispensáveis.

À minha orientadora, Drª Ana Júlia Viamonte, pelo seu acompanhamento que já se estende há algum tempo, pela seu apoio e orientação e pelo esforço dispendido na revisão desta tese.

Aos meus pais e à minha irmã, pela sua compreensão, pela presença constante, pela paciência, pelo apoio, pelo companheirismo e por nunca me terem deixado desistir.

# Resumo

Muitas vezes, para resolver uma determinada situação problemática temos tendência a fazer um esquema, ou um modelo, que nos facilite na organização dos dados e na estruturação das ideias e do pensamento. Com base nesses modelos, conseguimos visualizar melhor qual é a solução para o nosso problema ou, então, definir uma estratégia para a sua resolução.

A resolução de problemas deverá ser encarada como uma metodologia, através da qual são desenvolvidos diversos conteúdos e não como um conteúdo por si só. Assim, enquanto professores, cabe-nos o papel de preparar tarefas, partindo da resolução de problemas do quotidiano dos alunos, de modo a que estes se sintam motivados e integrados nas próprias actividades. Esta motivação e integração poderá ser alcançada através da modelação de realidades vivenciadas pelos alunos, os quais devem ter um papel central na construção dos conhecimentos.

Uma das áreas que nos permite obter com relativa facilidade uma simbiose entre a resolução de problemas e a modelação é a Teoria dos Grafos pois, em muitas situações, o tipo de modelos utilizados são grafos, que não são mais do que esquemas onde se utilizam pontos ligados por linhas conforme a relação que é estabelecida no problema.

Neste trabalho, podemos encontrar alguma informação relativamente à origem dos grafos, alguns conceitos gerais sobre grafos bem como alguns exemplos de suas aplicações. Por fim, e com o intuito de evidenciar as suas potencialidades inerentes e as da sua exploração na sala de aula, partindo de situações possivelmente consideradas pelos alunos como não estando relacionadas com a Matemática, apresentamos um conjunto de tarefas que constituem uma sugestão para a abordagem e desenvolvimento de conteúdos constantes na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

# Abstract

Many times, to solve a problematic situation we have trend to make a schema or a model, that facilitates in the organization of the data and in the structuring of the ideas and the thought. Based in these models, we can visualize which is the best solution for our problem or, then, define a strategy for its resolution.

The resolution of problems must be faced as a methodology, through which many contents are developed and not as a content by itself. Thus, as teachers, fit us the paper to prepare tasks, where we present the resolution of problems of everyday life of the students, in order that they feel motivated and integrated in the proper activities. This motivation and integration could be reached through the modeling of realities lived by the students, which must have a central paper in the construction of the knowledge.

One of the areas that allow us to get with relative easiness a symbiosis between the resolution of problems and the modeling is the Theory of the Graphs therefore, in many situations, the type of models that are used are graphs, that are not more than schemas where are used points connected by lines in agreement of the relation that is established in the problem.

In this work, we can find some information of the origin of the graphs, some general concepts on graphs as well as some examples of its applications. Finally, and with intention to evidence its inherent potentialities and the ones that are succeded of its exploration in the classroom, through situations considered by the students as not being related with the Mathematics, we present a set of tasks that constitutes a suggestion for the introduction and development of contents that are present in the subject of Mathematics Applied to Social Sciences

# Sumário

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

Consultando as Orientações Curriculares e Programas, desde o 1.º Ciclo ao Ensino Secundário verificamos que, de forma mais ou menos explícita, a resolução de problemas e a modelação constituem duas das competências fulcrais no ensino da Matemática [6]. A resolução de problemas aparece-nos de forma mais explícita nos primeiros anos, no entanto, à medida que se avança ao longo da escolaridade, a sua associação à modelação vai assumindo um papel de destaque.

Para que a resolução de problemas e a modelação assumam um papel de promoção de efectivas aprendizagens conduzindo os alunos a um nível de raciocínio superior, é importante que ocorram associados a tarefas cuidadosamente preparadas para que encorajem à realização de múltiplas abordagens e interpretações, dêem prioridade à comunicação matemática, desenvolvam a transmissão de informação de forma organizada, promovam a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade e desenvolvam capacidades de intervenção social pela compreensão e discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

Uma das áreas que nos permite obter com relativa facilidade uma simbiose entre a resolução de problemas e a modelação é a Teoria dos Grafos, tema este que desde sempre me suscitou grande interesse investigar pelo facto de considerar que constituiu uma lacuna no programa curricular do meu percurso académico. Aliado a esta curiososidade, como professora, considero imprescindível efectuar uma constante actualização científica e pedagógica, nomeadamente no que diz respeito a temas que não são tradicionais nos programas de Matematica portugueses, como alguns dos contemplados no programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

## 1.2 Objectivo da tese

O facto de me deparar todos os anos com colegas que se mostram pouco receptivos à leccionação da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Socais pelo facto de este tema não ter constado igualmente do programa curricular dos seus percursos académicos, e apercebendo-me das dificulades por eles sentidas, pretendo que este trabalho, para além de constituir uma mais-valia para mim, lhes possa servir de motivação e auxílio no estudo e preparação das aulas relativas a este tema.

Com esse objectivo em mente, preparei um conjunto de tarefas em que, partindo de realidades vivenciadas pelos alunos e de situações por eles consideradas como não estando relacionadas com a matemática, permitam abordar e desenvolver tópicos da Teoria dos Grafos, contribuindo também para uma consciencialização da presença da ciência em todas as situações do quotidiano.

Estas tarefas norteiam-se pelo objectivo de que sejam os alunos a elaborar as suas própias estratégias de resolução, comunicando-as ao grupo turma de forma a tornar as aprendizagens efectivamente colaborativas e em que todos são responsáveis pela aprendizagem de todos. Durante o processo pretende-se que os alunos vão construindo a noção de grafo que seja válida bem como algumas propriedades destes, sem que para isso seja inicialmente necessária qualquer tipo de formalização, ocorrendo esta posteriormente e quando considerada estritamente necessária.

## 1.3 Estrutura da tese

Esta dissertação encontra-se organizada em sete capítulos que seguem a seguinte estrutura: este capítulo é um capítulo introdutório onde se apresentam os motivos e as finalidades da escolha do tema. Deste modo, são descritos os resultados de investigação realizada sobre o mesmo e as dificuldades que se pretendem, não resolver totalmente mas, pelo menos, minimizar.

No segundo, terceiro e quarto capítulos, **"Notações e noções fundamentais"**, **"Grafos de Euler e Grafos de Hamilton"** e **"Árvores"**, é efectuada a fundamentação teórica do tema onde se evidenciam os conceitos e notações fundamentais da Teoria dos Grafos.

Assim, na primeira secção do segundo capítulo, *“Breve referência histórica”*, faz-se uma apresentação sucinta da história da Teoria dos Grafos e, nas secções seguintes, *“Linguagem e simbologia”*, *“Incidência, adjacência, ordem e dimensão”*, *“Grau de um vértice”*, “*Subgrafos*”, “*Grafos especiais*” e “*Caminhos e Circuitos*”, introduzem-se as definições e notações necessárias para a compreensão dos capítulos seguintes.

No capítulo 3, apresenta-se um estudo de duas classes particulares de grafos: os grafos eulerianos, na secção *“Circuitos e trajectos de Euler”*, e os grafos hamiltonianos, na secção *“Ciclos de Hamilton”*.

Por sua vez, no quarto capítulo, também se refere uma classe de grafos conexos muitas vezes imprescindível na resolução de problemas associados à Teoria dos Grafos. Este capítulo encontra-se dividido em três secções: *“Árvores”*, *“Árvores abrangentes”* e *“Árvores abrangentes de custo mínimo”*. Esta última secção encontra-se dividida em duas subsecções, onde se apresentam dois algoritmos que permitem determinar árvores abrangentes de custo mínimo: *“Algoritmo de Kruskal”* e *“Algoritmo de Prim”*.

No quinto capítulo **“Aplicações”**, nas secções *“Em Psicologia”*, *“Em Computação”*, *“Em Química”*, *“Em Electricidade”* e *“Em Biologia”*, apresentam-se alguns exemplos de aplicações práticas da Teoria dos Grafos em diversas áreas do conhecimento.

Para além da sugestão da planificação das aulas apresentadas na terceira secção do capítulo 6, **“Aulas”**, denominada *“Planificação das aulas”*, são inicialmente dadas as orientações gerais do Ministério da Educação para a leccionação do tema, nas duas primeiras secções: *“Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais”* e *“Desenvolvimento do tema “Modelo de Grafos” e sugestões metodológicas”*

A dissertação termina com o capítulo **“Conclusão”**, no qual se faz uma reflexão sobre o percurso efectuado, se apresenta um balanço do trabalho realizado e se descrevem as conclusões decorrentes do mesmo.

# 2 Notações e noções fundamentais

Em seguida é apresentada uma breve referência à história da Teoria dos Grafos e, posteriormente, introduzem-se as definições e notações básicas. Uma vez que na literatura a terminologia e a notação utilizadas não são únicas, apresentaremos as que consideramos mais frequentes.

## 2.1 Breve referência histórica

Enquanto outros temas de matemática têm uma longa e gloriosa história, o mesmo não acontece com a Teoria dos Grafos.

A primeira referência conhecida sobre a Teoria dos Grafos data de 1736 e terá surgido devido às Pontes de Königsberg (antiga capital da Prússia Oriental que, actualmente, se designa por Kaliningrad).

Na cidade de Königsberg, existiam sete pontes que atravessavam o rio Pregel. As pontes ligavam duas pequenas ilhas entre si e a cada uma das margens, conforme a Figura 1 documenta.

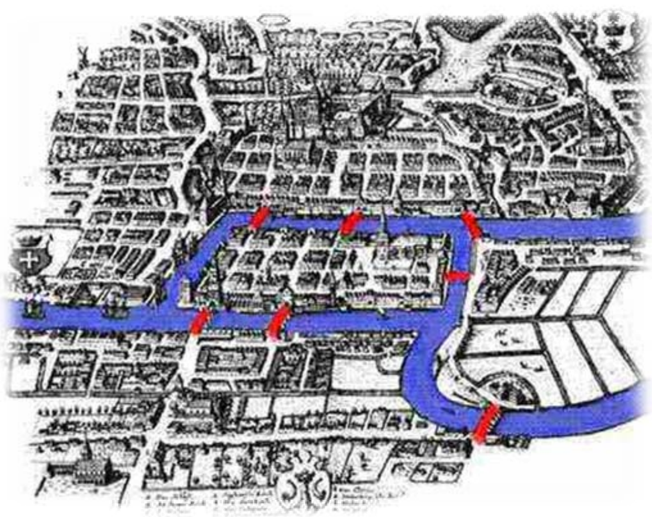


**Figura 1**

Conta a história que os habitantes da cidade, nos seus passeios, tentavam encontrar um percurso (com partida e chegada no mesmo lugar) que permitisse atravessarem todas as pontes uma e uma só vez. Tendo tido dificuldade em encontrar tal caminho apresentaram, numa carta, o problema ao matemático suíço Leonard Euler (1707-1783).

Para responder à questão, Euler modelou o problema associando um vértice a cada região de terra e ligando dois vértices através de uma aresta sempre que havia uma ponte entre duas regiões (Figura 2)

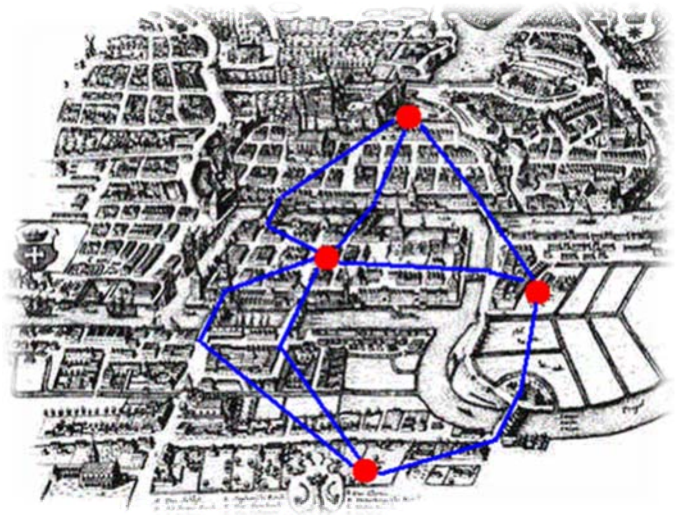


**Figura 2**

Assim, o problema ficou reduzido à determinação de um ciclo[1] contendo cada aresta apenas uma vez. Para demonstrar que tal passeio não era possível, Euler começou por admitir que existia um percurso nas condições indicadas dizendo que, para atingir qualquer vértice utiliza-se uma aresta e para continuar o passeio é necessário utilizar outra aresta diferente da anterior. Daqui se conclui que cada um dos vértices tinha que ter um número par de arestas para que o trajecto de saída do vértice fosse diferente do trajecto de chegada. Ora, isto é absurdo pois todos os vértices têm um número ímpar de arestas como se pode verificar pela Figura 2.

A impossibilidade da existência de tal percurso foi publicada por Euler, em 1736, numa memória em S. Petersburgo.

Um problema semelhante ao das pontes de Königsberg foi formulado e resolvido cerca de um século mais tarde (em 1857), pelo matemático irlandês sir William Hamilton (1805-1865).

Este problema, que foi designado por *viagem à volta do mundo*, consiste em percorrer todos os vértices do dodecaedro representado na Figura 3, estando cada um

---

[1] Todas as definições específicas da Teoria dos Grafos utilizadas nesta secção serão apresentadas na secção seguinte.

deles rotulado com o nome de uma cidade importante: Dublin, Roma, Paris, Madrid, etc.

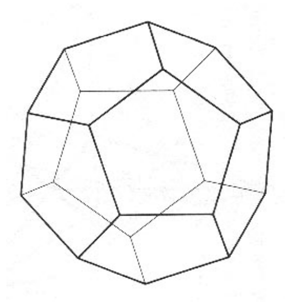


**Figura 3**

O desafio colocado é o de encontrar um caminho que incluísse todas as cidades exactamente uma vez e regressar ao ponto de partida, sendo só possível "viajar" de uma cidade para outra se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes.

A figura seguinte (Figura 4) mostra um grafo que representa este problema.

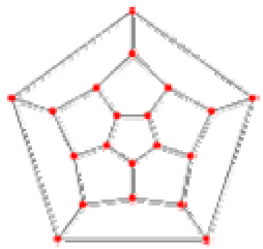


**Figura 4**

O despertar do interesse pelo estudo e desenvolvimento dos grafos surgiu após os contributos de Euler e Hamilton, a partir de meados do século XIX.

Um outro problema, formulado pela mesma altura, está relacionado com a coloração de mapas.

Com este problema, pretende-se saber qual o menor número de cores necessárias para pintar um mapa de modo que não existam países, com fronteira comum, pintados da mesma cor.

O cartógrafo inglês Francis Guthrie, em 1852, reclamava a suficiência de quatro cores para distinguir os países num mapa plano. Esta conjectura, apresentada a De Morgan, provocou considerável discussão entre vários matemáticos. Entre os primeiros documentos sobre este problema designado por *problema das 4 cores*, encontram-se uma carta de De Morgan a Hamilton e um relatório do matemático Cayley, apresentado em 1978 à "London Mahematical Society", afirmando não ter conseguido resolver o problema.

O problema permaneceu sem solução durante mais de um século. Apenas em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Hanken apresentaram uma prova para a conjectura, mas a demonstração apresentada não convenceu a comunidade científica por envolver a análise, por computador, de cerca de 1500 casos especiais, e o programa computacional elaborado ser bastante complexo.

Este problema, embora tivesse apenas um interesse teórico, foi importante para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos em diferentes áreas. Na primeira metade do século XX, vários matemáticos, na tentativa de o resolver, contribuíram para o aprofundamento do estudo e para o grande interesse que a Teoria dos Grafos tem vindo a despertar até aos nossos dias.

Em 1912, Birkhoff definiu polinómios cromáticos, em 1931 Whitney criou a noção de grafo dual e Brooks, em 1941 fundamentou um teorema estabelecendo um limite para o número cromático de um grafo. Em 1930, deu-se com Kuratowski outro passo importante ao estabelecer-se uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo.

Uma demonstração mais simples (de que quatro cores chegam), considerando um número bem menor de casos, foi apresentada 20 anos depois da apresentada por Appel e Hanken, por Neil Robertson, Daniel Seymor, Paul Sanders e Robin Thomas.

A resolução do problema passa por construir um grafo a partir do mapa dado, criando um vértice para cada país do mapa e ligando dois vértices por arestas sempre que os países que esses vértices representam partilham uma fronteira (Figura 5).

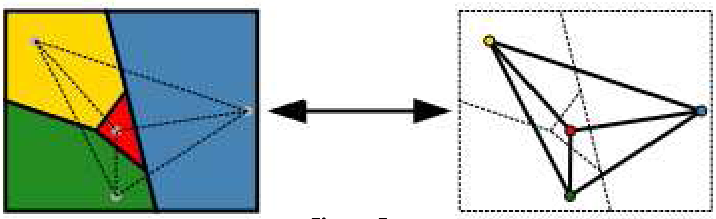


**Figura 5**

O termo grafo foi utilizado pela primeira vez por Sylvester (1814-1897) e só em 1936 foi publicado, pelo húngaro Déneskonig, o primeiro livro abordando especificamente a teoria dos grafos.

Desde então, num pequeno período de tempo aconteceram os principais desenvolvimentos da teoria dos grafos, inspirados, sobretudo pela evolução das ciências ligadas aos computadores.

## 2.2 Linguagem e simbologia

Um *grafo* é uma representação de um conjunto de pontos e do modo como eles estão ligados. Aos pontos de um grafo chamamos *vértices* e às ligações (que representamos por linhas) chamamos *arestas* ou *arcos.*

**Definição 2.1** Designa-se por *grafo* um par ordenado $G=(V,E)$, tal que $V=V(G)=\{v_1,\ldots,v_n\}$ é o conjunto de vértices e $E=E(G)$ é o conjunto das arestas. A cada aresta corresponde um subconjunto de $V(G)$ de cardinalidade 2, isto é, $E(G)=\{e_1,\ldots,e_m\}$ com $e_k=\{v_i,v_j\}$, para $k\in\{1,\ldots,m\}$ e $i,j\in\{1,\ldots,n\}$.

Duas arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por *arestas paralelas*. Por sua vez, uma aresta $e_i$ com ambos os extremos no mesmo vértice diz-se um *lacete*.

**Definição 2.2** Um grafo diz-se *simples* se não existem arestas paralelas nem lacetes.

**Exemplo 2.1** O grafo da Figura 6 é simples. De facto, $V=\{a,b,c,d\}$ e $E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}\}$.

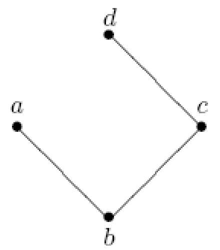



**Figura 6**

Tendo em conta as definições anteriores, dois grafos $G=(V,E)$ e $G'=(V',E')$ são iguais se $V=V'$ e $E=E'$.

**Observações:**

- Existem representações "aparentemente" diferentes de um mesmo grafo. Numa representação de um grafo, o importante é o número de vértices, o número de arestas e o modo como estas se dispõem em relação àqueles.
  Por exemplo, o grafo da Figura 6 pode ser representado por qualquer um dos grafos apresentados nas Figuras 7 e 8.

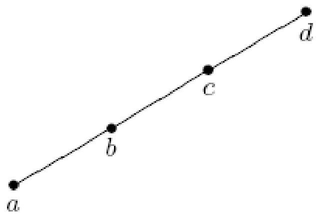



**Figura 7**

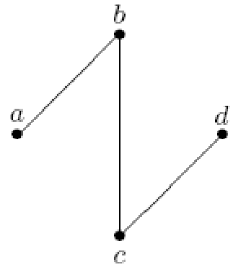



**Figura 8**

- Uma mesma representação pode descrever grafos que, por definição são distintos. Por exemplo, a descrição apresentada a seguir na Figura 9

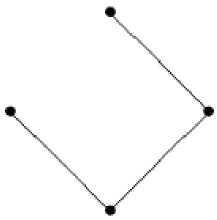


**Figura 9**

tanto pode representar o grafo $G_1 = (V_1, E_1)$, onde

$$V_1 = \{a,b,c,d\} \text{ e } E_1 = \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}\}$$

como o grafo $G_2 = (V_2, E_2)$, onde

$$V_2 = \{1,2,3,4\} \text{ e } E_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}.$$

No entanto, por simplificação de linguagem, não distinguiremos grafos que diferem na natureza dos seus vértices.

**Definição 2.3** Chama-se *grafo orientado*, *grafo dirigido* ou, mais simplesmente *digrafo,* a um par $G = (V, E)$ onde $V$ é um conjunto não vazio e $E \subseteq V \times V$. Aos elementos de $V$ chamamos vértices e aos elementos de $E$, arcos.

Na representação de um grafo orientado, um arco $(a,b)$ é representada por uma linha orientada, o vértice $a$ designa-se por *cauda* e o vértice $b$ designa-se por *cabeça*.

Da definição de grafo orientado resultam algumas observações pertinentes:

- Por definição, os arcos de um grafo orientado são um par ordenado. Assim, dados dois vértices distintos $a$ e $b$, os arcos $(a,b)$ e $(b,a)$ são distintos.
- Para cada vértice $a$, o arco $(a,a)$ é representado por um *lacete orientado*.

**Exemplo 2.2** O grafo orientado $G=(V,E)$ onde $V=\{a,b,c,d\}$ e $E=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,d),(d,c)\}$ pode ser representado por:

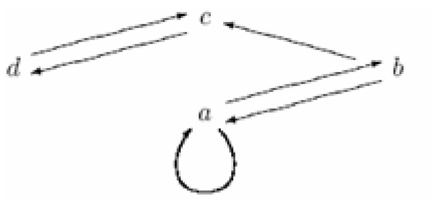



**Figura 10**

Um *multigrafo* (respectivamente, *multidigrafo*) é um grafo no qual se admite a existência de lacetes e de múltiplas arestas (respectivamente, arcos) entre dois vértices.

No caso de um multigrafo (respectivamente, multidigrafo) não faz sentido representar as arestas à custa dos vértices, pois há ambiguidade, uma vez que dois vértices podem estar ligados por mais do que uma aresta (respectivamente, mais do que dois arcos).

A partir de agora, sempre que se tornar irrelevante distinguir se o grafo é orientado ou não, adoptaremos a terminologia e a notação associada aos grafos não orientados, o mesmo se aplicando às respectivas propriedades. Também por simplicidade de notação, uma aresta entre os vértices $u$ e $v$ será representada por $uv$.

## 2.3 Incidência, adjacência, ordem e dimensão

Seja $G=(V,E)$ um grafo (grafo simples, digrafo, multigrafo ou multidigrafo) com $n$ vértices e $m$ arestas ($n\in\mathbb{N}$ e $m\in\mathbb{N}_0$). Para facilitar a escrita, consideremos $V=\{v_i{:}1\le i\le n\}$ e $E=\{e_j{:}1\le j\le m\}$.

**Definição 2.4** Diz-se que $e_j\in E$ é *incidente* a $v_i\in V$ se existe $v_k\in V$ tal que a aresta $e_j$ liga os vértices $v_i$ a $v_k$.

**Definição 2.5** Dois *vértices* $v_i$ e $v_j$ de $G$ dizem-se *adjacentes* se existe uma aresta em $G$ incidente a ambos. Do mesmo modo, duas *arestas* distintas de $G$ dizem-se *adjacentes* se tiverem pelo menos um vértice em comum. Um vértice que não é adjacente a nenhum outro diz-se i*solado*.

**Definição 2.6** O número de vértices de um grafo $G$, ou seja, $|V(G)|$, designa-se por *ordem* de $G$ e denota-se por $\nu(G)$ ou $\nu$, no caso de não haver dúvidas em relação ao grafo a que se refere. Por outro lado, o número de arestas $|E(G)|$ designa-se por *dimensão* do grafo $G$ e denota-se por $\varepsilon(G)$ ou, simplesmente, por $\varepsilon$.

**Exemplo 2.3** O grafo $G=(V,E)$ (Figura 11) onde $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ e $E=\{\{1,2\},\{2,4\},\{4,3\},\{3,6\},\{6,5\},\{5,4\},\{1,6\}\}$ tem ordem 6 e dimensão 7.

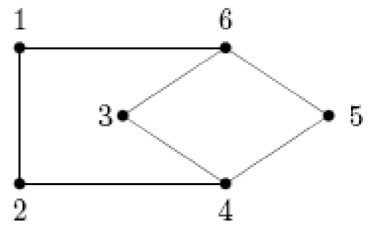



**Figura 11**

Os vértices 1 e 6 são vértices adjacentes, as arestas $\{1,2\}$ e $\{1,6\}$ são adjacentes, a aresta $\{1,2\}$ é incidente no vértice 1.

## 2.4 Grau de um vértice

**Definição 2.7** Dado um grafo $G$ e um vértice $v \in V(G)$, designa-se por *grau* (ou *valência*) de $v$ e denota-se por $d_G(v)$, ou simplesmente, por $d(v)$, o número de arestas incidentes no vértice $v$ (onde os lacetes, caso existam, contam duas vezes). O maior grau dos vértices denota-se por $\Delta(G)$ e o menor grau por $\delta(G)$, ou seja,

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(\nu) \text{ e } \delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v).$$

**Exemplo 2.4** Por observação da figura 11, facilmente se conclui que $d_G(1) = 2$, $d_G(2) = 2$, $d_G(3) = 2$, $d_G(4) = 3$, $d_G(5) = 2$ e $d_G(6) = 3$. Logo, $\Delta(G) = 3$ e $\delta(G) = 2$.

Um grafo $G$ onde todos os vértices têm grau $r$ designa-se por grafo *regular* de grau $r$.

É muitas vezes útil representar um grafo através de uma matriz, como seja, a *matriz de incidência* ou a *matriz de adjacência.*

**Definição 2.8** Dado um grafo $G$, tal que $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_\nu\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_\varepsilon\}$, designa-se por *matriz de incidência aresta vértice* de $G$ ou, simplesmente, *matriz de incidência* de $G$, a matriz $M_G = m_{ij}$, $1 \le i \le \nu$, $1 \le j \le \varepsilon$, tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } e_j = v_p v_q, \text{ com } i \notin \{p, q\}; \\ 1, \text{ se } e_j = v_i v_k, \text{ com } k \neq i; \\ 2, \text{ se } e_j = v_i v_i \end{cases}$$

No caso de grafos orientados sem lacetes, as entradas da matriz de incidência são definidas por:

$$m_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ se } e_j=v_pv_q, \text{ com } i\notin\{p,q\}; \\ -1, \text{ se } e_j=v_kv_i, \text{ para algum vértice } v_k; \\ 1, \text{ se } e_j=v_iv_k, \text{ para algum vértice } v_k. \end{cases}$$

**Definição 2.8** Dado um grafo $G$, tal que $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_\nu\}$, designa-se por *matriz de adjacência dos vértices* de $G$ ou, simplesmente, *matriz de adjacência de* $G$ e denota-se por $A_G=(a_{ij})$, a matriz de dimensão $\nu\times\nu$, tal que $a_{ij}$ é igual ao número de arestas entre os vértices $v_i$ e $v_j$. No caso de grafos orientados, $a_{ij}$ é igual ao número de arcos com cauda em $v_i$ e cabeça em $v_j$.

**Exemplo 2.5** Uma vez que o grafo $G=(V,E)$ representado na figura 11, tem ordem 6, dimensão 7, $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ e $E=\{\{1,2\},\{2,4\},\{4,3\},\{3,6\},\{6,5\},\{5,4\},\{1,6\}\}$, a matriz de incidência vem dada por:

$$M_G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que temos 6 linhas, pois existem 6 vértices, e 7 colunas, correspondentes às 7 arestas.

Por sua vez, a matriz de adjacência toma a forma:

$$A_G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deve observar-se que no caso dos grafos simples não orientados a respectiva matriz de adjacência é simétrica e a diagonal é preenchida por zeros.

Dado um grafo (simples, digrafo, multigrafo ou multidigrafo), a construção de uma matriz de incidência (ou de adjacência) depende da ordem pela qual se consideram os vértices e as arestas. Assim, o mesmo grafo admite várias matrizes de incidência (ou de adjacência) mas estas matrizes são semelhantes, pois obtêm-se umas das outras por troca de linhas e/ou colunas.

O próximo teorema é fundamental para todo o estudo que faremos a seguir. A sua demonstração constitui um exemplo de aplicação da matriz de incidência na obtenção de resultados relacionados com a estrutura de um grafo.

**Teorema 2.1** Dado um grafo $G$, verifica-se que a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja, $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$.

**Demonstração**

Vamos fazer esta prova apenas para grafos não orientados, sendo imediata a respectiva generalização para grafos orientados.

Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_\varepsilon\}$ e seja $M_G = (m_{ij})$ a correspondente matriz de incidência. Logo, a soma das entradas da linha correspondente ao vértice $v$ é igual a $d_G(v)$ e, como consequência, $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$ é igual à soma de todas as entradas da matriz $M_G$. Por outro lado, uma vez que a soma das entradas de cada coluna de $M_G$ é igual a 2, podemos concluir que a soma de todas as entradas de $M_G$ é igual a $2|E(G)|$.

Como consequência deste teorema, podemos concluir que num grafo arbitrário $G$ o número de vértices de grau ímpar é par.

Este Teorema também é conhecido pelo Teorema do aperto de mãos. De facto, se um grupo de pessoas der apertos de mão, o número de mãos apertadas é o dobro do número de apertos.

## 2.5 Subgrafos

**Definição 2.9** Dados dois grafos $G=(V,E)$ e $H=(W,F)$, diz-se que $H$ é um *subgrafo* de $G$ e, por sua vez, que $G$ é um *supergrafo* de $H$ quando $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$.

Em particular:

i. Se $W=V$, isto é, se $H$ e $G$ têm exactamente o mesmo número de vértices, então dizemos que $H$ é um *subgrafo gerador* de $G$.

ii. Se $W=V$ e $F \subseteq E$, isto é, se o conjunto de arestas de $H$ é $F$ e o conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $F$, então dizemos que $H$ é um subgrafo de $G$ induzido pelo conjunto de arestas de $F$, e denota-se $H \equiv G(F)$.

iii. Se $W \subseteq V$ e $F=E(W)$, isto é, se o conjunto de vértices de $H$ é $W$ e o conjunto de arestas coincide com as arestas de $G$ com extremos em $W$, então dizemos que $H$ é um subgrafo de $G$ induzido pelo conjunto de vértices de $W$, e denota-se $H \equiv G[W]$.

A partir de agora, por simplicidade de linguagem, sempre que nos referirmos a um grafo induzido estaremos a referir-nos a um grafo induzido pelo conjunto de vértices.

**Exemplo 2.6** O grafo da Figura 12 é um subgrafo do grafo da Figura 13.

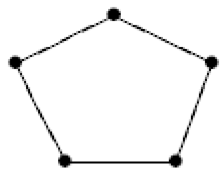


**Figura 12**

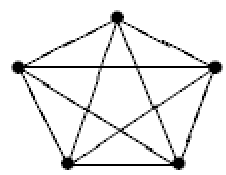


**Figura 13**

**Exemplo 2.7** Dado o grafo

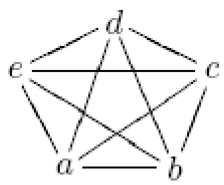



**Figura 14**

o subgrafo induzido por $\{a,b,c,e\}$ é

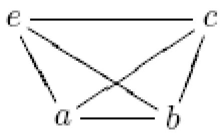



**Figura 15**

## 2.6 Grafos especiais

Seguidamente apresentam-se algumas definições de grafos especiais que, por características próprias, merecem destaque especial.

**Definição 2.10** Seja $G$ um grafo simples de ordem $n > 0$. Diz-se que $G$ é um *grafo completo de ordem* $n$, e denota-se por $K_n$, quando quaisquer dois dos seus vértices são adjacentes. Por sua vez, diz-se que $G$ é um grafo *nulo* quando não tem arestas, ou seja, $E(G) = \varnothing$. Se $G$ tem apenas um vértice, isto é, se $E(G) = \varnothing$ e $V(G) = 1$, então diz-se que $G$ é um grafo *trivial*.

**Exemplo 2.8** Para $n = 1,2,3,4,5$, os grafos completos são:

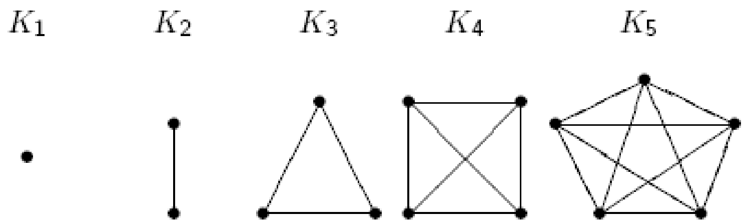



**Figura 16**

Note-se que o grafo completo com $n$ vértices $k_n$ é regular de grau $n-1$.

**Definição 2.11** Um grafo $G$ diz-se *bipartido* se existe uma partição do seu conjunto de vértices em $X$ e $Y$ tal que não existem arestas entre qualquer par de vértices de $X$ nem entre qualquer par de vértices de $Y$ (ou seja, cada aresta de $G$ tem um extremo em $X$ e outro em $Y$). Esta partição $(X,Y)$ do conjunto dos vértices de $G$ designa-se por *bipartição dos seus vértices* e, neste caso, o grafo $G$ denota-se pelo terno $(X,Y,E)$, onde $E=E(G)$.

**Exemplo 2.9** O grafo $G=(X,Y,E)$ da Figura 17 é um grafo bipartido. Basta considerar a partição $X=\{A,B,C\}$ e $Y=\{D,E,F\}$.

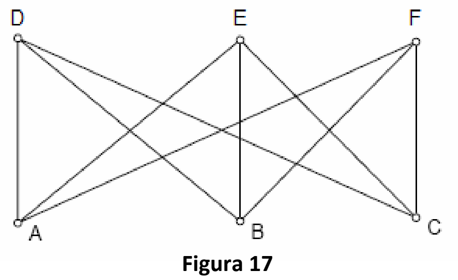



Figura 17

**Definição 2.12** Um grafo bipartido $G=(X,Y,E)$, tal que $\forall_{x\in X}\forall_{y\in Y}xy\in E(G)$, onde $|X|=m$ e $|Y|=n$, designa-se por grafo *bipartido completo*, e denota-se por $K_{m,n}$.

É de salientar que um grafo $K_{m,n}$ tem $m+n$ vértices ($m$ vértices de grau $n$ e $n$ vértices de grau $m$), e $mn$ arestas.

**Exemplo 2.10** Os grafos $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$ são representados respectivamente por:

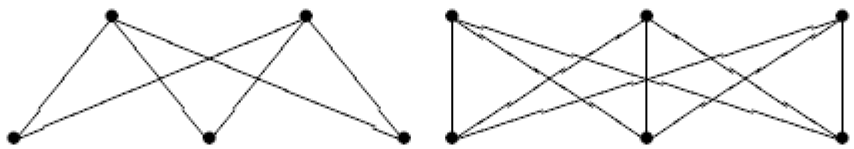


Figura 18

**Definição 2.13** Dado um grafo $G$ simples, designa-se por grafo *complementar* de $G$ e denota-se por $G^C$, um grafo simples cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e no qual dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em $G$.

**Exemplo 2.11** Na figura 19 representa-se um grafo $G$ e o seu complementar $G^C$.

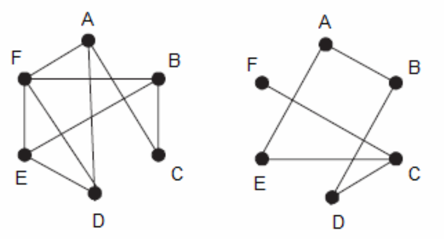



Figura 19

## 2.7 Caminhos e Circuitos

Grande parte da Teoria de Grafos envolve sequências especiais de vértices. Nesta secção apresentam-se as mais relevantes.

**Definição 2.14** Dado um grafo $G$, designa-se por *passeio* entre os seus vértices $v_0$ e $v_k$, toda a sequência de vértices e arestas da forma

$$P = \langle v_0, v_0v_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k \rangle,$$

com eventual repetição de vértices e arestas. Neste caso, os vértices $v_0$ e $v_k$ designam-se por vértices extremos do passeio (sendo $v_0$ o vértice inicial e $v_k$ o vértice final). Desta forma diz-se que $P$ é um passeio entre os vértices $v_0$ e $v_k$ ou um $(v_0, v_k)-$ passeio.

Se em $P$ todas as arestas são distintas então o passeio $P$ designa-se por *trajecto* e se, adicionalmente, todos os vértices são distintos o passeio $P$ designa-se por *caminho*.

Nos grafos simples todas as arestas são determinadas pelos seus extremos e, como consequência, um passeio pode ser representado omitindo as arestas, ou seja, $P = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k \rangle$.

**Exemplo 2.12** No grafo da figura seguinte tem-se que:

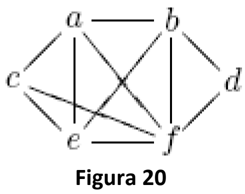



**Figura 20**

- O passeio $\langle a, b, d, f, c, e, f, b \rangle$ é um trajecto;
- O passeio $\langle a, f, d, b \rangle$ é um caminho.

**Definição 2.15** Um trajecto com pelo menos uma aresta e tal que o vértice inicial coincide com o final, designa-se por *circuito* ou por *trajecto fechado*. Por sua vez, um caminho, isto é, um passeio com pelo menos uma aresta e sem repetição de arestas nem vértices (com excepção dos vértices inicial e final), designa-se por *ciclo* ou por *caminho fechado*.

**Exemplo 2.13** No grafo da figura 20, o passeio $\langle a,b,d,f,c,e,f,a \rangle$ é um circuito e o passeio $\langle f,c,e,f \rangle$ é um ciclo.

**Definição 2.16** Dado um passeio $P$ de um grafo $G$ designa-se por *comprimento* de $P$ e denota-se por $comp(P)$, o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui. No caso dos caminhos, o comprimento coincide exactamente com o respectivo número de arestas distintas.

**Exemplo 2.14** O trajecto apresentado no exemplo 2.12 tem o comprimento 7.

**Definição 2.17** Dados dois vértices $x$, $y \in V(G)$, denota-se por $P_{x,y}$ o conjunto de todos os $(x,y)-$caminhos de $G$ e designa-se por *distância* entre vértices de $G$ a função $dist_G : V(G) \times V(G) \longrightarrow \{0,\ldots,\nu(G)-1,\infty\}$ tal que

$$dist_G(x,y) = \begin{cases} \min\limits_{P \in P_{x,y}} comp(P) & \text{se } P_{x,y} \neq \emptyset \\ \infty & \text{se } P_{x,y} = \emptyset \end{cases}$$

**Exemplo 2.15** Considerando o grafo representado na Figura 20, apresentam-se todas as distâncias entre os seus vértices na tabela seguinte.

| $dist$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| $b$ | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $c$ | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| $d$ | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| $e$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| $f$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Definição 2.18** Um grafo diz-se *conexo* quando, dados quaisquer dois dos seus vértices, existe sempre um caminho que os une. Caso contrário o grafo diz-se *desconexo* (ou *não conexo*).

Observe-se que um grafo com um único vértice $v$ é conexo, uma vez que, neste caso, podemos considerar que existe um caminho de comprimento nulo entre $u$ e $v$ (isto é, existe um caminho – $(u,v)$ sem arestas).

**Exemplo 2.16** O grafo da figura 21 é um grafo conexo e o grafo da figura 22 é um grafo desconexo.

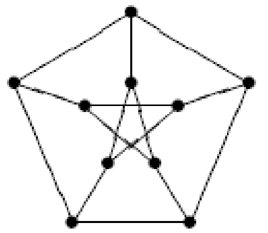


**Figura 21**

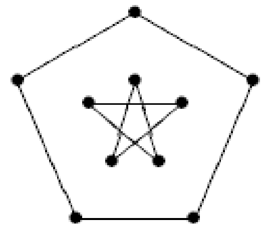


**Figura 22**

**Definição 2.19** Dado um grafo $G$, dois vértices $u$ e $v \in V(G)$ dizem-se *conexos* se existe em $G$ um caminho – $(u,v)$. A relação de conexidade entre vértices é uma relação de equivalência sobre o conjunto de vértices $V(G)$. Supondo que $V(G)$ se parte nas classes de equivalência $V_1, V_2, \ldots, V_k$, designa-se por *componente conexa* (ou, simplesmente, componente) de $G$ cada um dos subgrafos induzidos $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$.

Com base nesta definição, podemos concluir que dois vértices são conexos se e só se pertencem a uma mesma componente.

Ao longo deste texto, vamos denotar o número das componentes conexas de um grafo por $cc(G)$ (ou, simplesmente, $cc$ quando não existem dúvidas relativamente ao grafo). Note-se que se $cc(G)=1$, então o grafo $G$ é conexo e, no caso contrário $(cc(G)>1)$, $G$ não é conexo.

**Definição 2.20** Seja $G$ uma grafo conexo. Designa-se por *ponte* uma aresta que, ao ser eliminada, faz com que $G$ deixe de ser conexo.

# 3 Grafos de Euler e Grafos de Hamilton

Neste capítulo, vamos fazer o estudo detalhado dos circuitos de Euler e Hamilton, das implicações que a sua existência tem na estrutura de um grafo e dos principais algoritmos para a sua determinação.

## 3.1 Circuitos e trajectos de Euler

O estudo que se fará nesta secção, permitir-nos-á responder à questão levantada a Euler sobre as pontes de Köninsberg em 1736.

**Definição 3.1** Um trajecto designa-se por *trajecto de Euler* se contém todas as arestas (logo também todos os vértices) do grafo a que se refere. Por sua vez, designa-se por *circuito de Euler*, todo o circuito que contenha todas as arestas do grafo.

Desta definição decorre que um circuito de Euler é um trajecto de Euler fechado. Também se podem definir trajectos e circuitos de Euler em grafos orientados (utilizando, nesse caso, as noções de trajecto e circuito orientado).

**Definição 3.2** Um grafo diz-se *Euleriano* (ou *grafo de Euler*) se admite um circuito de Euler e diz-se *semi-euleriano* se admite um trajecto de Euler.

É claro que todo o grafo euleriano é também semi-euleriano.

**Exemplo 3.1** O grafo da Figura 23 é euleriano, pois nele podemos definir o circuito euleriano $\langle a, f, b, c, e, d, a, b, d, c, a \rangle$.

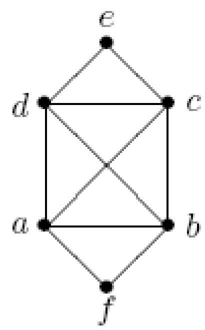



Figura 23

**Exemplo 3.2** O grafo da Figura 24 é semi-euleriano, pois nele podemos definir o trajecto euleriano $\langle a,b,c,e,d,a,c,d,b \rangle$.

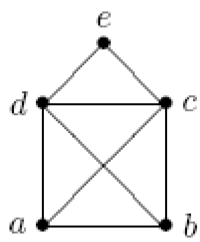



Figura 24

**Exemplo 3.3** O grafo da Figura 25 não é euleriano nem semi-euleriano, pois não é possível definir, neste grafo, um circuito ou um trajecto euleriano.

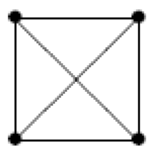


Figura 25

**Lema 3.1.** Seja $G$ um grafo conexo onde todos os vértices têm grau par. Então qualquer trajecto pode-se estender a um circuito.

**Demonstração**

Seja $C = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n \rangle$ um trajecto em $G$. Temos duas situações:

- $v_1 = v_n$

Neste caso, o trajecto é, ele próprio, um circuito.

- $v_1 \neq v_n$

  Seja $m$ o número de vezes que uma qualquer aresta do passeio é incidente a $v_n$. Então, $m$ é um número ímpar. Como $v_n$ tem grau par, existe pelo menos uma aresta incidente a $v_n$ que não pertence ao passeio. Seja $\{v_n, v_{n+1}\}$ essa aresta.

  Então, $C' = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_{n+1} \rangle$ é um trajecto.

  Aplicando agora o raciocínio anterior a $C'$ e repetindo-o um número necessário de vezes, concluímos que existe $v_k \in V$ tal que $C' = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_k \rangle$ é um trajecto e $v_1 = v_k$.

Estamos então em condições de caracterizar os grafos eulerianos conexos.

O teorema que se segue é conhecido como *Teorema de Euler* (dada a sua relação com a resolução do problema das sete pontes de Königsberg, obtida por Euler em 1736). A sua primeira demonstração, porém, foi publicada por Carl Hierholzer[2] em 1873.

**Teorema 3.1** Seja $G$ um grafo conexo não trivial. Então, $G$ é euleriano se e só se todos os seus vértices têm grau par.

**Demonstração:** Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e euleriano Sejam $C = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ um circuito euleriano em $G$ (estamos a considerar, portanto, $v_n = v_1$) e $x$ um dos vértices de $G$. Como $G$ é conexo e $C$ é euleriano, $x = v_i$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Vejamos que $v_i$ tem grau par. Claramente $\{v_{i-1}, v_i\}$ e $\{v_i, v_{i+1}\}$ são arestas de $G$. Se existir outra aresta incidente a $v_i$ em $C$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $j \notin \{i-1, i, i+1\}$ e $v_i = v_j$. Então, $\{v_{j-1}, v_j\}$ e $\{v_j, v_{j+1}\}$ são arestas de $C$ incidentes a $v_i$ distintas das duas encontradas anteriormente. Repetindo o raciocínio até considerarmos todas as arestas incidentes a $v_i$, concluímos que $v_i$ tem grau par.

Assim, resta provar a implicação recíproca que demonstraremos por redução ao absurdo.

[2] Carl Fridolin Bernhard Hierholzer (1840-1871) foi um matemático alemão.

Suponhamos que $G=(V,E)$ é um grafo conexo onde todos os vértices têm grau par. Então existem circuitos em $G$. Seja $C=\langle v_1,v_2,\ldots,v_n,v_1\rangle$ um circuito com o comprimento máximo possível. Se $C$ não é euleriano, então, existe uma aresta que não se encontra em $C$. Seja $\{v_i,v_{n+1}\}$ essa aresta, para algum $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Então, $C'=\langle v_{i+1},v_{i+2},\ldots,v_n,v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{n+1}\rangle$ é um trajecto que, pelo lema anterior, se pode estender a um circuito com mais arestas que $C$, o que contradiz que $C$ tem comprimento máximo. A contradição resulta de termos suposto que $C$ não era euleriano. Logo, $C$ é euleriano.

Os grafos semi-eulerianos conexos caracterizam-se de modo semelhante.

**Teorema 3.2** Um grafo conexo é semi-euleriano se e só se existem exactamente dois vértices de grau ímpar.

**Demonstração**

Se $G$ contém um trajecto de Euler com vértices inicial e final coincidentes, então este trajecto é um circuito de Euler e pelo Teorema 3.1., todos os vértices têm grau par. Se os vértices inicial e final do trajecto são distintos, então ligando-os por uma nova aresta $e$, obtém-se um grafo $G+e$ que é euleriano e, novamente pelo Teorema 3.1., todos os vértices de $G+e$ têm grau par. Logo, no grafo $G$ apenas os vértices extremos da aresta $e$ têm grau ímpar.

Reciprocamente, seja $G$ um grafo conexo com não mais do que dois vértices de grau ímpar. Uma vez que em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é par, temos dois casos – o número de vértices de grau ímpar é zero ou dois. No primeiro caso (ausência de vértices de grau ímpar), o Teorema 3.1. implica que $G$ tenha um circuito (que é também um trajecto) de Euler. No segundo caso, existindo dois vértices de grau ímpar, podemos ligar estes vértices por uma nova aresta $e$ e o grafo obtido, $G+e$, não tem vértices de grau ímpar. Logo, aplicando o Teorema 3.1., o grafo $G+e$ tem um circuito de Euler $C$, donde $C-e$ é um trajecto de Euler para $G$.

Prova-se que os resultados apresentados são válidos para multigrafos. Em relação ao problema das pontes de Könisberg, tendo em conta os dois últimos teoremas, podemos concluir que o multigrafo que modela o problema não é euleriano, nem semi-euleriano, já que cada um dos quatro vértices do multigrafo tem grau ímpar. A solução do problema seria encontrar um caminho euleriano naquele multigrafo. Se tal caminho existisse, como o multigrafo não é semi-euleriano, teria de ser um circuito euleriano, o que também não acontece. Assim, o passeio que os habitantes de Könisberg queriam fazer, não é possível realizar.

Observe-se que, se $G$ é um grafo semi-euleriano, basta adicionarmos uma nova aresta (incidente aos dois vértices de grau ímpar) para obtermos um grafo euleriano com os mesmos vértices de $G$.

Ao processo que consiste em transformar um grafo que não é de Euler num grafo de Euler, duplicando arestas, chama-se *eulerizar um grafo*.

Um processo de eulerização que mantenha dois vértices com grau ímpar chama-se *semi-eulerização*.

**Exemplo 3.4** Considere-se grafo da Figura 26. As Figuras 27 e 28 representam duas possíveis eulerizações para o mesmo.

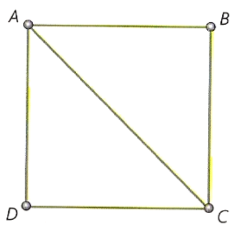



**Figura 26**

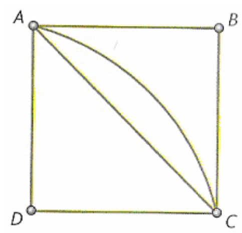



**Figura 27**

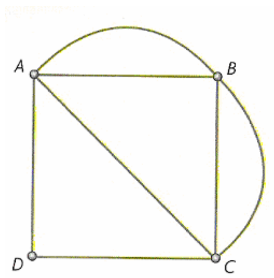



**Figura 28**

O exemplo anterior mostra que na maior parte dos casos há possibilidade de se fazer mais do que uma eulerização de um grafo.

Chama-se *melhor eulerização* àquela que acrescenta o número mínimo de arestas, podendo haver mais do que uma "melhor eulerização".

Se um grafo tem um número reduzido de arestas e verifica as condições para a existência de um circuito de Euler, é relativamente fácil de identificá-lo por tentativas sucessivas. No entanto, se o número de arestas é muito elevado, o processo torna-se muito complexo, dificultando a identificação desse circuito.

O algoritmo seguinte, conhecido por *algoritmo de Hierholzer*, descreve um método sistemático para determinar um circuito de Euler num grafo $G$:

1. Escolher um vértice $v \in V(G)$ como vértice de partida.
2. Determinar um circuito $C$ que se inicie e termine em $v$.
3. Se $C$ inclui todas as arestas do grafo, passar para o ponto 8. Caso contrário, seguir para o ponto 4.
4. Escolher um vértice $v \in V(C)$, do qual parta uma aresta que não pertença a $C$.
5. Determinar um circuito $C'$ que se inicie e termine em $v$, utilizando somente arestas que não pertençam a $C$.
6. Juntar os circuitos $C$ e $C'$ e denotar o novo circuito por $C$.
7. Voltar ao ponto 3.
8. O circuito de Euler está encontrado.

**Exemplo 3.5** Observe-se o grafo $G$ da Figura 29. Pelo Teorema 3.1, facilmente se conclui que existe um circuito de Euler.

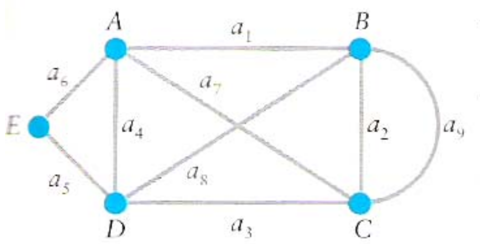



**Figura 29**

Vejamos como, seguindo o algoritmo de Hierholzer, podemos encontrar um circuito de Euler para o grafo $G$.

1. Iniciar o circuito em A.
2. Escolher um circuito $C$ que se inicie e termine em A, percorrendo sempre arestas não usadas, Por exemplo, A B D C B C A. (Figura 30).

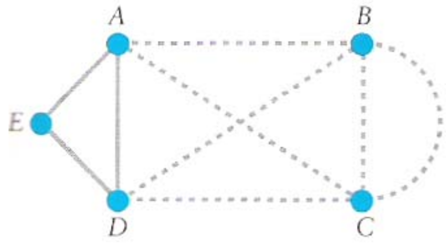



**Figura 30**

3. $C$ não inclui todas as arestas do grafo.

4. Escolher um vértice entre o A e o D, e reiniciar o processo de construção no ponto 1 com o novo vértice de partida escolhido, por exemplo o vértice D.

5. Determinar então um novo circuito $C'$ iniciado em D, por exemplo, D E A D.

6. Juntar $C$ e $C'$ e obter o circuito que se passará a designar por $C$ (Figura 31).

A B D C B C A e D E A D

A B D E A D C B A

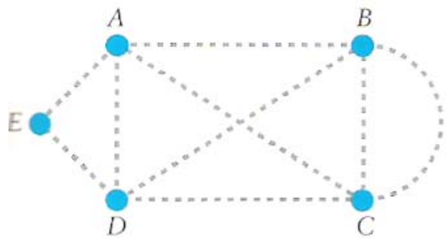



**Figura 31**

7. Voltar ao ponto 3 do algoritmo.

3. O circuito resultante já contém todas as arestas do grafo.

8. O circuito de Euler está encontrado.

Um outro algoritmo igualmente eficiente para a determinação de circuitos de Euler é o *algoritmo de Fleury* publicado em 1883, cuja estratégia consiste em juntar ao trajecto corrente uma nova aresta que se possível não seja uma ponte.

Segue-se a descrição desse algoritmo.

Seja $G$ um grafo que contém um circuito de Euler.

1. Escolher um vértice $v \in V(G)$ como vértice de partida.

2. Escolher um circuito, partindo de $v$, e eliminar todas as arestas percorridas e todos os vértices que entretanto fiquem isolados.

3. Se a aresta candidata for uma ponte, então só pode ser percorrida se pelo menos um dos seus vértices ficar isolado.

4. Terminar quando não houver mais vértices.

**Exemplo 3.6** Observe-se grafo $G$ da Figura 32. Pelo Teorema 3.1, facilmente se conclui que existe um circuito de Euler.

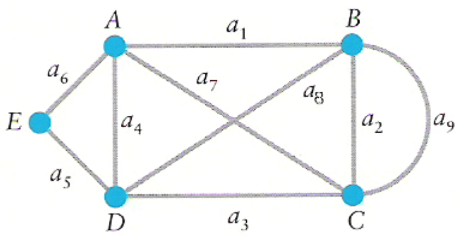



**Figura 32**

Vejamos como, seguindo o algoritmo de Fleury, podemos encontrar um circuito de Euler para o grafo $G$.

1. Iniciar o circuito em A.

2. Escolher um circuito $C$. Sempre que uma aresta for percorrida é "eliminada" sendo colocada a tracejado e, sempre que um vértice fique isolado, é colocado um círculo à volta dele.

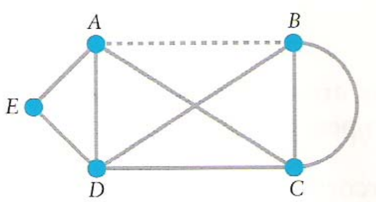



**Figura 33**

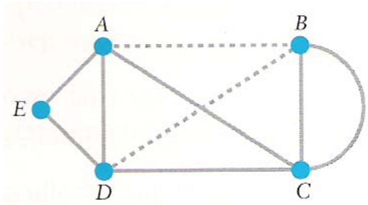



**Figura 34**

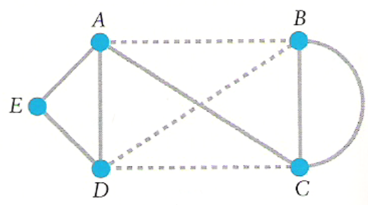



**Figura 35**

**Figura 36**

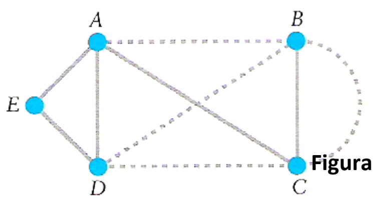



**Figura 37**

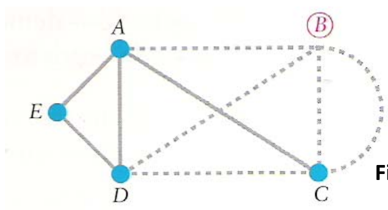
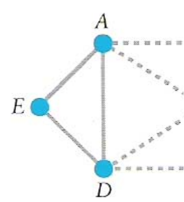



**Figura 38**



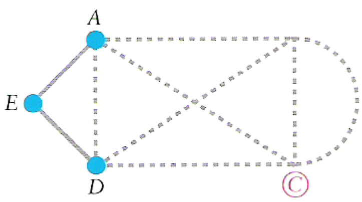




**Figura 39**

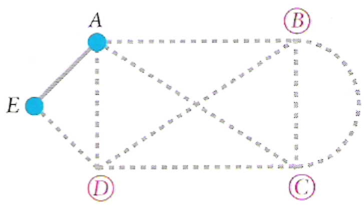



**Figura 40**

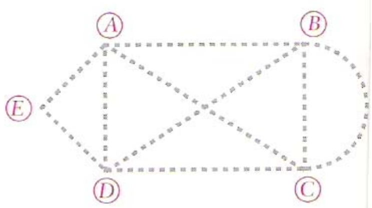



**Figura 41**

Partindo de A tem-se 4 arestas à escolha: opta-se por $a_1$ (Figura 33). Em B, tem-se três arestas à escolha, podendo-se escolher qualquer uma delas. Opta-se por $a_8$ (Figura 34). Em D, com três arestas à escolha opta-se por $a_3$ (Figura 35). Em C tem-se três arestas à escolha: $a_7$, $a_2$ e $a_9$.

3. A aresta $a_7$ é uma ponte logo não pode ser escolhida pois, se for retirada, o grafo fica desconexo. Não podendo seguir $a_7$, selecciona-se $a_9$ (Figura 36).

Saindo de B tem-se uma única aresta a percorrer, a aresta $a_2$ (Figura 37). O ponto B fica isolado. Em C tem-se uma única aresta disponível, $a_7$ (Figura 38). C fica isolado. Em A tem-se duas arestas disponíveis: opta-se por $a_4$ (Figura 39). Em D tem-se uma aresta disponível, $a_5$ (Figura 40). Finalmente percorre-se $a_6$ (Figura 41).

4. Já não existem mais vértices. O circuito pretendido é A B D C B C A D E A.

## 3.2 Ciclos de Hamilton

Nesta secção estudamos uma classe particular de grafos – os grafos hamiltonianos. Conforme já se referiu na introdução, a associação do nome do matemático irlandês Hamilton[3] a estes grafos, deve-se ao facto de ter sido ele a propor e a resolver um problema que designou por *viagem à volta do mundo* que consiste em percorrer todos os vértices de um dodecaedro passando uma única vez em cada um, com partida e chegada no mesmo vértice.

**Definição 3.3** Um caminho que contém todos os vértices de um grafo diz-se um *caminho de Hamilton* (ou *hamiltoniano*). Por sua vez, um ciclo que contém todos os vértices de um grafo, designa-se por *ciclo de Hamilton* (ou *hamiltoniano*).

**Exemplo 3.7** No grafo da Figura 42 o caminho $\langle a, f, b, d, c, e \rangle$ é hamiltoniano e o ciclo $\langle a, f, b, c, e, d, a \rangle$ é hamiltoniano.

[3] Sir Wiliiam Rowan Hamilton nasceu em Dublin na Irlanda em 1805 e faleceu em 1865.

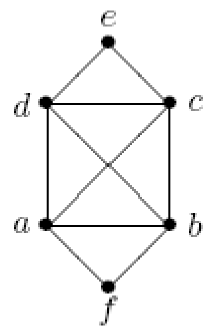



**Figura 42**

Também se podem definir caminhos e ciclos de Hamilton para grafos orientados (utilizando, nesse caso, a noção de caminho e ciclo orientado).

**Definição 3.4** Um grafo que admite um ciclo de Hamilton designa-se por *grafo hamiltoniano* (ou *grafo de Hamilton*). Um grafo que admite um caminho de Hamilton diz-se um *grafo semi-hamiltoniano*.

Encontrar um ciclo de Hamilton num grafo de pequena dimensão que o admita é relativamente fácil. Porém, quando a dimensão cresce, provar que não existe qualquer ciclo de Hamilton pode tornar-se muito difícil.

Contrariamente ao que acontece no caso dos circuitos eulerianos, não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para a existência de um ciclo de Hamilton. No entanto, existem algumas propriedades que os grafos hamiltonianos satisfazem, que podem ajudar a construir, ou a deduzir que é impossível construir, um ciclo hamiltoniano. De facto, se um grafo $G=(V,E)$ é hamiltoniano, temos que:

i. Se um vértice $v \in V$ tem grau 2, então, as duas arestas incidentes a $v$ fazem parte de qualquer ciclo hamiltoniano.
ii. Na construção de um ciclo hamiltoniano, nenhum ciclo se pode formar até se percorrerem todos os vértices.
iii. Se na construção de um ciclo hamiltoniano duas arestas incidentes num mesmo vértice não podem ser consideradas na construção do ciclo, então, as restantes arestas incidentes a esse vértice não podem ser consideradas na construção do ciclo hamiltoniano.

Vejamos um exemplo em como podemos fazer uso destas propriedades:

**Exemplo 3.8** Considere-se o grafo da Figura 43.

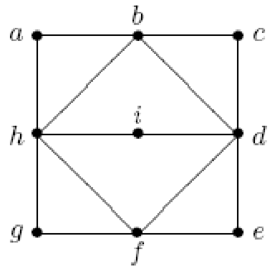



**Figura 43**

Este grafo não é hamiltoniano pois se o fosse: por i., as arestas $\{a,b\}$, $\{a,h\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$, $\{e,d\}$, $\{e,f\}$, $\{f,g\}$ e $\{h,g\}$ estariam em qualquer ciclo hamiltoniano (os vértices $a$, $c$, $g$ e $e$ são vértices de grau 2); então, por iii., todas as restantes arestas de $G$ não poderiam ser consideradas na construção do ciclo hamiltoniano; obteríamos então o ciclo $\langle a,b,c,d,e,f,g,h,a \rangle$, o que contradiz ii..

Os grafos completos, isto é, os grafos onde todos os vértices estão ligados entre si, são hamiltonianos. Assim sendo, dado um grafo $G$ não hamiltoniano, adicionando arestas a $G$ necessariamente se obterá um grafo hamiltoniano.

**Definição 3.5** Um grafo $G$ simples chama-se *grafo maximal não hamiltoniano* se não é um grafo hamiltoniano mas a adição de qualquer aresta que ligue dois vértices não adjacentes forma um grafo hamiltoniano.

O teorema a seguir, designado por *Teorema de Ore*[4], dá-nos uma condição suficiente, mas não necessária, para que um grafo admita um ciclo de Hamilton.

**Teorema 3.3** Seja $G$ um grafo simples com $\nu(G) \geq 3$. Se para todos os pares de vértices $u$, $v$ de $G$ não adjacentes, a soma dos respectivos graus é não inferior a $\nu(G)$, isto é,

[4] Oystein Ore (1899-1968), matemático norueguês que trabalhou em teoria dos grafos, teoria dos anéis e teoria dos corpos.

$$\forall_{u,v \in V(G)} d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G),$$

então $G$ é hamiltoniano.

**Demonstração**

Vamos fazer esta prova por redução ao absurdo. Suponha-se que existe um grafo $G$ que satisfaz as condições do teorema, mas não é um grafo hamiltoniano. Acrescentando tantas arestas quantas as necessárias, podemos supor que $G$ é um grafo maximal com esta propriedade, significando isso que, se acrescentarmos mais uma aresta, o grafo passa a hamiltoniano. Como $G$ não é completo (caso contrário seria hamiltoniano) existe um par de vértices não adjacentes $u$ e $v$. Uma vez que $G+uv$ é hamiltoniano, deve conter um ciclo de Hamilton. Este ciclo conterá certamente a aresta $e=uv$. Como consequência, em $G$ existe um caminho de Hamilton $\langle u=v_1,v_2,\ldots,v_\nu=v\rangle$. Note-se que não existe nenhum índice $i$ em $G$ tal que $uv_{i+1} \in E(G)$ e $v_i v \in E(G)$, caso contrário existiria em $G$ o ciclo de Hamilton $\langle v_1 v_2,\ldots,v_i,v_\nu,v_{\nu-1},\ldots,v_{i+1},v_1\rangle$ (ver Figura 44). Logo, sendo $k=d_G(u)$ e $N_G(u)=\{v_{j1},\ldots,v_{jk}\}$, não existe um índice $j_i$ tal que $v_{j-1} \in N_G(v)$. Consequentemente, existem $d_G(v) \leq \nu(G)-(d_G(u)+1)$, o que é equivalente a $d_G(v)+d_G(u) \leq \nu(G)-1$, contrariando a hipótese. Logo, $G$ não é hamiltoniano.

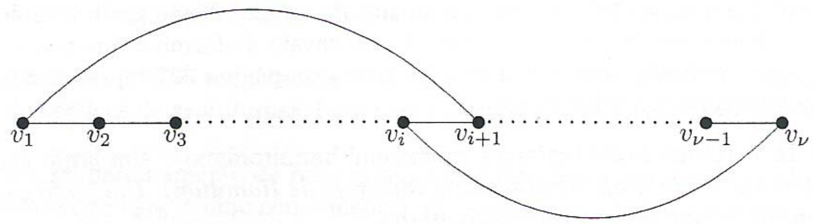



**Figura 44**

Notemos que, qualquer grafo nas hipóteses do Teorema de Ore é um grafo conexo.

O teorema seguinte, designado por *Teorema de Dirac*[5], resulta imediatamente do anterior.

---

[5] Gabriel Andrew Dirac (1925-1984), matemático, filho da mulher do físico teórico e fundador da mecânica quântica (prémio Nobel da Física em 1933) Paul Dirac.

**Teorema 3.4** Seja $G$ um grafo tal que $\nu(G) \geq 3$. Se $\delta(G) \geq \frac{1}{2}\nu(G)$, então $G$ é hamiltoniano.

**Demonstração**

Uma vez que para cada vértice $v \in V(G)$ se obtém $d_G(v) \geq \frac{1}{2}\nu(G)$, então, $\forall_{u,v \in V(G)} d_G(u) + d_G(v) \geq \nu(G)$.

Logo, pelo Teorema de Ore, $G$ é hamiltoniano.

Note-se que o teorema de Dirac é um caso particular do Teorema de Ore.

**Exemplo 3.9** A Figura 45 mostra um grafo simples, de ordem 5 e para quaisquer vértices $u, v$ distintos e não adjacentes, $d(u) + d(v) \geq 5$. Logo, pelo Teorema de Ore, o grafo tem ciclos hamiltonianos, por exemplo, $\langle 1,2,3,4,5,1 \rangle$.

No entanto, $d(1) = 2 < \frac{5}{2}$, logo o grafo não satisfaz a condição indicada no Teorema de Dirac.

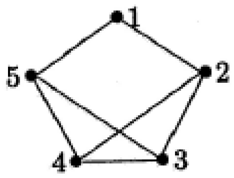



**Figura 45**

Nesse sentido o Teorema de Ore é mais geral do que o Teorema de Dirac, a condição indicada no Teorema de Ore não é necessária para que um grafo tenha um ciclo hamiltoniano e, consequentemente, também a condição indicada no Teorama de Dirac não é necessária.

**Exemplo 3.10** O grafo da Figura 46 é um grafo simples com 5 vértices. Os vértices 1 e 3 são distintos e não adjacentes e $d(1) + d(3) = 4 < 5$, logo o grafo não satisfaz a condição indicada no Teorema de Ore. No entanto, tem ciclos hamiltonianos, por exemplo, $\langle 1,2,3,4,5,1 \rangle$. Este exemplo ilustra como a condição indicada no Teorema de Ore não é necessária para que o grafo tenha um ciclo de Hamilton.

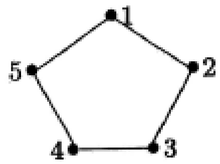



**Figura 46**

# 4 Árvores

Neste capítulo, apresentamos uma classe de grafos conexos – a classe das árvores. O facto da resolução de muitos problemas associados a grafos se fazer com recurso a uma ou várias das suas árvores abrangentes, tornam as árvores especialmente importantes no contexto da Teoria dos Grafos. Os primeiros estudos sobre árvores foram realizados por Cayley[6] em 1857, pelo que o reconhecimento da sua importância vem, praticamente, desde as origens da teoria dos grafos.

## 4.1 Árvores

**Definição 4.1** Um grafo $G$ diz-se uma *árvore* se $G$ é conexo e não contém circuitos.

**Exemplo 4.1** Nas Figuras 47, 48 e 49 estão representadas algumas árvores.

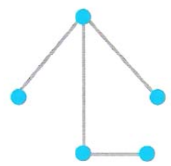


**Figura 47**

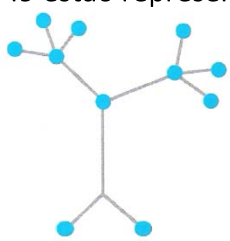


**Figura 48**

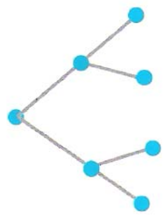


**Figura 49**

**Teorema 4.1** Se $G=(V,E)$ é um grafo simples com $\nu$ vértices, então são equivalentes as seguintes afirmações:

a) $G$ é uma árvore;
b) $G$ não contém ciclos e tem $\nu-1$ arestas;
c) $G$ é conexo e tem $\nu-1$ arestas;
d) $G$ é conexo e cada aresta é uma ponte;
e) Quaisquer dois vértices de $G$ estão ligados por um único caminho;
f) $G$ não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.

[6] Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglês que publicou mais de 900 artigos, com resultados em várias áreas da matemática.

**Demonstração**

a) $\Rightarrow$ b) Vamos fazer a prova por indução sobre o número de vértices $\nu$. É claro que se $\nu = 1$, então a única árvore com 1 vértice é o grafo trivial com $0 = \nu - 1$ arestas, pelo que a implicação se verifica. Suponha que a implicação é verdadeira para todas as árvores com menos de $\nu \geq 2$ vértices. Uma vez que, por definição, $G$ não contém ciclos, a remoção de qualquer aresta, subdivide o grafo em duas componentes $G_1$ e $G_2$, cada uma das quais é uma árvores. Supondo que $G_1$ tem $\nu_1$ vértices e que $G_2$ tem $\nu_2$ vértices, com $\nu_1 + \nu_2 = \nu$, por hipótese de indução, $\varepsilon(G_1) = \nu_1 - 1$ e $\varepsilon(G_2) = \nu_2 - 1$. Logo, o número total de arestas de $G$ é igual a $\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = \nu_1 - 1 + \nu_2 - 1 + 1 = \nu - 1$

b) $\Rightarrow$ c) Suponha que $G$ não é conexo. Então, cada componente de $G$ é um grafo conexo sem circuitos, pelo que, por hipótese, o número de vértices de cada componente excede em uma unidade o número de arestas. Logo, o número total de vértices de $G$, excede o número total de arestas de $G$ em pelo menos duas unidades, contradizendo a hipótese de $G$ ter $\nu - 1$ arestas.

c) $\Rightarrow$ d) Como $G$ é conexo, com $\nu - 1$ arestas, a remoção de uma qualquer aresta produz um grafo com $\nu$ vértices e $\nu - 2$ arestas e, consequentemente, esse grafo não é conexo uma vez que um grafo conexo de ordem $\nu$ tem, pelo menos, $\nu - 1$ arestas.

d) $\Rightarrow$ e) Dados dois vértices arbitrários $u$ e $v$, por definição de grafo conexo, existe um caminho – $(u,v)$. Uma vez que, por hipótese, qualquer aresta desse caminho é uma ponte, podemos concluir que esse caminho é único.

e) $\Rightarrow$ f) Supondo que $G$ contém um ciclo, então quaisquer dois vértices desse ciclo estão ligados por, pelo menos, dois caminhos e, consequentemente, existem vértices de $G$ que estão ligados por mais do que u caminho. Logo, se entre quaisquer dois vértices de $G$ existe um único caminho, então $G$ não contém ciclos. Porém, acrescentando uma aresta entre dois vértices $u$ e $v$, como, por hipótese, já existe um caminho – $(u,v)$, criamos um ciclo.

f) $\Rightarrow$ a) Note-se que basta provar que se $G$ satisfaz a hipótese, então é conexo. Suponha que $G$ satisfaz a hipótese, mas não é conexo. Se acrescentarmos uma aresta a $G$, ligando dois vértices pertencentes a componentes distintas, não se cria qualquer ciclo, o que constitui uma contradição.

**Teorema 4.2** Cada árvore não trivial contém pelo menos dois vértices de grau um (que se designam por folhas).

**Demonstração**

Seja $G$ uma árvore não trivial com $\nu$ vértices. Como uma árvore é conexa, então $\forall_{v\in V(G)} d(v) \geq 1$. Recorrendo ao Teorema 2.1 sobre o número de arestas e ao Teorema 4.1, podemos concluir que

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2\nu - 2$$

Como consequência, pelo menos dois vértices têm grau um (caso contrário, $\sum_{v\in V} d(v) \geq 2\nu - 2$).

## 4.2 Árvores abrangentes

**Definição 4.2** Dado um grafo conexo $G$, designa-se por *árvore abrangente* ou *árvore geradora* de $G$, todo o subgrafo de $G$ que é uma árvore e contém todos os vértices de $G$.

**Exemplo 4.2** Seja $G$ o grafo representado na Figura 50.

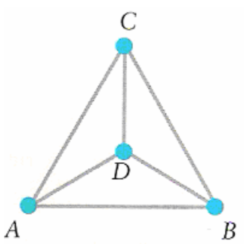



**Figura 50**

São árvores abrangentes do grafo $G$, por exemplo:

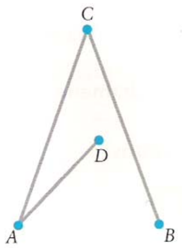



Figura 51

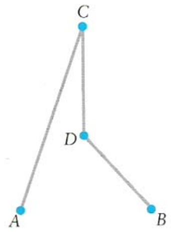



Figura 52

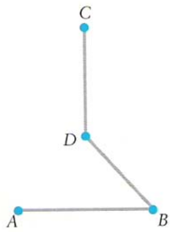



Figura 53

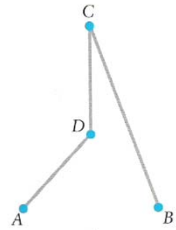



Figura 54

**Teorema 4.3** Todo o grafo conexo admite uma árvore abrangente.

**Demonstração**

Seja $G$ um grafo conexo e seja $T$ um subgrafo abrangente conexo minimal de $G$, ou seja, tal que $cc(T)=1$ e $cc(T-e)>1$, para cada $e \in T$. Então, cada aresta de $T$ é uma ponte e, tendo em conta o Teorema 4.1, $T$ é uma árvore.

**Teorema 4.4** Seja $G$ um grafo conexo, então $e \in E(G)$ é uma ponte se e só se $e$ pertence a todas as árvores abrangentes de $G$.

**Demonstração**

Seja $e$ uma ponte de $G$, com extremos $u$ e $v$, e suponha que existem uma árvore abrangente $T$ de $G$ tal que $e \notin E(T)$. Por definição de árvore abrangente, em $T$ existe um caminho – $(u,v)$, o que entra em contradição com a a aresta $e=uv$ ser uma ponte.

## 4.3 Árvores abrangentes de custo mínimo

Se a cada aresta de um grafo associarmos um número, ou seja, um *custo* ou *peso*, então o grafo designa-se por grafo com custos ou pesos nas arestas. Neste caso, o *custo de um subgrafo* corresponde ao custo determinado pela soma dos custos das suas arestas. Em muitas aplicações, é frequente a determinação de árvores de custo mínimo. Os algoritmos mais populares para a determinação de árvores abrangentes de custo mínimo, são o algoritmo de Kruskal e o algoritmo de Prim, o quais se apresentam a seguir.

### 4.3.1 Algoritmo de Kruskal

O passo básico do algoritmo de Kruskal, aplicado a um grafo $G$ com custos nas arestas, consiste na escolha sucessiva de uma aresta com custo mínimo e na sua posterior eliminação, obtendo-se uma versão modificada do grafo original. Uma vez determinado um subconjunto de arestas $S \subset E(G)$ com menor custo e que não formam um ciclo no grafo original, determina-se uma aresta $e$ de custo mínimo em $E(G) \setminus S$ tal que $S \cup \{e\}$ continua a não formar um ciclo no grafo original (note-se que a aresta de custo mínimo que é analisada é eliminada do grafo modificando, independentemente de ser ou não escolhida para $S$). Este procedimento é repetido até se obterem $\nu(G)-1$ arestas ou até não existirem mais arestas no grafo modificado (neste ultimo caso, conclui-se que o grafo original não é conexo)

O teorema que se segue, mostra que o algoritmo de Kruskal determina uma árvore abrangente de custo mínimo de um grafo conexo com custos nas arestas.

**Teorema 4.5** Se $G$ é um grafo conexo, então o algoritmo de kruskal determina uma árvore abrangente de custo mínimo.

**Demonstração**

É claro que o algoritmo de Kruskal determina uma árvore abrangente (no caso de grafos conexos). Vamos mostrar, por redução ao absurdo, que esta árvore tem custo mínimo.

Primeiramente deve observar-se que após ordenar as arestas segundo os respectivos custos, vem $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_\varepsilon)$, onde $w(e)$ denota o custo da aresta $e$. Suponha que a árvore $T'$, determinada pelo algoritmo de Kruskal não é óptima, ou seja, não tem custo mínimo.

Considere-se uma árvore abrangente óptima $T$ tal que $T$ e $T'$ têm as mesmas arestas com índices não superiores a $k-1$ e que $k$ é o maior índice nestas condições. Então, $e_k$ é a próxima aresta a inserir no conjunto de arestas que vão formar $T'$ e é tal que $e_k \notin E(T)$. Logo, $E(T) \cup \{e_k\}$ contém um ciclo $C$ que, necessariamente, contém uma aresta $e$ e que não pertence a $E(T')$ e é tal que $w(e) \geq w(e_k)$. Logo, substituindo $E(T)$ por $(E(T) \setminus \{e\}) \cup \{e_k\}$ obtém-se uma árvore abrangente $T'$ de custo não superior ao custo de $T$.

1. Se $w(e) > w(e_k)$, então $T'$ tem custo igual ao de $T$ o que é absurdo, uma vez que, por hipótese, $T$ é uma árvore óptima.
2. Se $w(e) = w(e_k)$, então $T'$ tem custo igual ao de $T$ o que é absurdo, uma vez que $T'$ tem pelo menos as $k$ primeiras arestas coincidentes com as de $T'$, o que contraria a definição de $T$.

Como consequência, podemos concluir que $T'$ é uma árvore abrangente óptima.

**Exemplo 4.3** Observe-se o grafo $G$ da Figura 55.

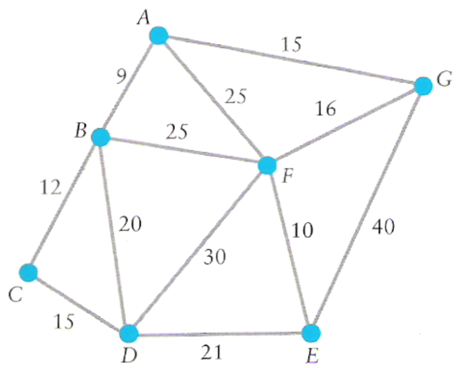



**Figura 55**

Vejamos como, utilizando o algoritmo de Kruskal, podemos determinar uma árvore abrangente de custo mínimo do grafo $G$ com custos nas arestas.

O primeiro passo do algoritmo consiste na ordenação das arestas de $G$. Vamos assumir que, como resultado desta ordenação se obtém: $e_1 = AB$, $e_2 = EF$, $e_3 = BC$, $e_4 = AG$, $e_5 = CD$, $e_6 = FG$, $e_7 = BD$, $e_8 = DE$, $e_9 = AF$, $e_{10} = BF$, $e_{11} = DF$ e $e_{12} = EG$.

Segue-se uma tabela, onde se pretende descrever cada um dos passos resultantes da aplicação do algoritmo.

| $k$ | $e_k$ | $w(e_k)$ | Insere $e_k$ ? | Árvore |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $AB$ | 9 | Sim | $\{AB\}$ |
| 2 | $EF$ | 10 | Sim | $\{AB,EF\}$ |
| 3 | $BC$ | 12 | Sim | $\{AB,EF,BC\}$ |
| 4 | $AG$ | 15 | Sim | $\{AB,EF,BC,AG\}$ |
| 5 | $CD$ | 15 | Sim | $\{AB,EF,BC,AG,CD\}$ |
| 6 | $FG$ | 16 | Sim | $\{AB,EF,BC,AG,CD,FG\}$ |

Note-se que o algoritmo termina após a inserção da sexta aresta. Na Figura 56 representa-se a árvore abrangente de custo mínimo obtida. O peso total é $9+10+12+15+15+16=77$.

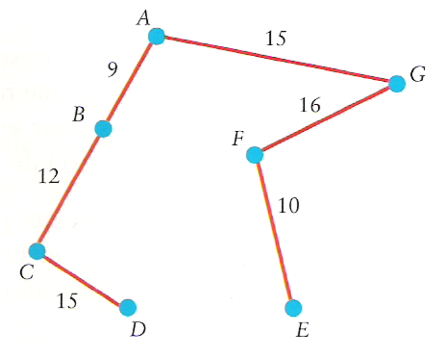



**Figura 56**

## 4.3.2 Algoritmo de Prim

O algoritmo de Prim, também conhecido por *algoritmo do vizinho mais próximo*, aplicado a um grafo $G$, começa com um vértice arbitrário $a \in V(G)$, a partir do qual se escolhe a aresta de custo mínimo $ab$, de entre as que lhe são incidentes, com a qual se forma o conjunto corrente de arestas candidatas a incluir na árvore abrangente de custo mínimo. Sendo $S$ o conjunto formado pelas arestas candidatas a incluir na árvore abrangente de custo mínimo, determina-se a aresta de custo mínimo, de entre as arestas incidentes num dos vértices extremos das arestas de $S$ que, conjuntamente com elas, não forma qualquer ciclo. Este procedimento é repetido, até não ser possível incluir em $S$ qualquer aresta adicional. A determinação do vizinho mais próximo de um vértice $v_i$ pode fazer-se, com recurso a uma estrutura de dados $(\alpha_i, \beta_i)$, onde $\alpha_i$ é um vértice mais próximo de $v_i$, de entre os vértices da árvore corrente $S$, e $\beta_i$ é a distância entre o vértice $v_i$ e a árvore $S$, ou seja, o custo da aresta $v_i \alpha_i$.

**Exemplo 4.4** Vamos determinar uma árvore abrangente de custo mínimo, para o grafo do exemplo 4.3, por aplicação do algoritmo de Prim.

Seja $A$, por exemplo, o vértice inicial, pelo que $T = \{A\}$ e $\acute{A}rvore = \varnothing$. Depois de iniciadas as diferentes variáveis, na tabela a seguir, apresentam-se os diferentes atributos associados aos vértices de $V \setminus T$.

| $i$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ | $A$ | | | | $A$ | $A$ |
| $\beta_i$ | 9 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 25 | 15 |

Seguem-se as tabelas dos valores (dos atributos) obtidos ao longo das seis iterações necessárias para a determinação da árvore abrangente de custo mínimo, por aplicação do algoritmo de Prim.

1. O menor valor de $\beta_i$ é $\beta_B = 9$. Logo, inserimos o vértice $B$ em $T$ e a aresta $AB$ na árvore. Como consequência, $T = \{A, B\}$, $\acute{A}rvore = \{AB\}$ e, actualizando os atributos, obtém-se:

| $i$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ | $B$ | $B$ | | $A$ | $A$ |
| $\beta_i$ | 12 | 20 | $\infty$ | 25 | 15 |

2. Neste caso, o menor valor de $\beta_i$ é $\beta_C = 12$. Logo, $T = \{A, B, C\}$, $\acute{A}rvore = \{AB, BC\}$ e, actualizando os atributos, obtém-se:

| $i$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ | $C$ | | $A$ | $A$ |
| $\beta_i$ | 15 | $\infty$ | 25 | 15 |

3. O menor valor de $\beta_i$ é $\beta_D = 15$. Logo, $T = \{A, B, C, D\}$, $Árvore = \{AB, BC, CD\}$ e, actualizando os atributos, obtém-se:

| $i$ | $E$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha_i$ | $D$ | $A$ | $A$ |
| $\beta_i$ | 21 | 25 | 15 |

4. O menor valor de $\beta_i$ é $\beta_G = 15$. Logo, $T = \{A, B, C, D, G\}$, $Árvore = \{AB, BC, CD, AG\}$ e:

| $i$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|
| $\alpha_i$ | $D$ | $G$ |
| $\beta_i$ | 21 | 16 |

5. O menor valor de $\beta_i$ é $\beta_F = 16$. Logo, $T = \{A, B, C, D, G, F\}$, $Árvore = \{AB, BC, CD, AG, FG\}$ e:

| $i$ | $E$ |
|---|---|
| $\alpha_i$ | $F$ |
| $\beta_i$ | 10 |

6. Tendo em conta a ultima tabela obtida, conclui-se que o vértice $F$ é o vértice da árvore mais próximo de $E$. Logo, obtém-se a árvore abrangente de custo mínimo: $T = V(G)$ e $Árvore = \{AB, BC, CD, AG, FG, EF\}$.

Note-se que, embora as arestas tenham sido inseridas por uma ordem distinta, a árvore abrangente de custo mínimo obtida pelo algoritmo de Prim é a mesma que foi obtida pelo algoritmo de Kruskal. No caso geral, porém, quando existem várias árvores abrangentes óptimas, nem sempre os algoritmos de Kruskal e de Prim produzem a mesma árvore abrangente de custo mínimo.

Em geral, é difícil dizer qual é o melhor algoritmo, de entre os algoritmos de Kruskal e de Prim. Na prática, porém, verifica-se que o algoritmo de Prim é mais rápido para grafos de ordem pequena e dimensão elevada e o algoritmo de Kruskal comporta-se melhor para grafos de ordem elevada e com poucas arestas.[2].

# 5 Aplicações

O desenvolvimento das Ciências e Tecnologias nas décadas mais recentes tem levado a uma cada vez mais ampla aplicação da Teoria dos Grafos. Sendo esta área altamente transdisciplinar e sendo estimulada por problemas do mundo real, tem-se desenvolvido muito, continuando sempre a ter um potencial enorme de aplicações.

Neste capítulo, apresentamos uma breve descrição de algumas das suas aplicabilidades práticas em diversas áreas do conhecimento.

## 5.1 Em Psicologia

Uma importante parte da Psicologia social é a dinâmica de grupos. Esta área centra-se na estrutura das relações que cada pessoa estabelece num grupo.

Designam-se como redes de comunicação, os canais e o modo como as pessoas se relacionam no interior de um grupo. Na grande parte das vezes, verifica-se que o estudo dos elementos que compõem a rede é insuficiente para explicar o seu comportamento observável. Há variáveis importantes inerentes às ligações dos constituintes da rede e às formas de construção de tais relações.

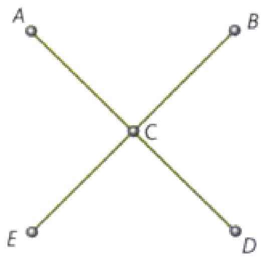



**Figura 57**

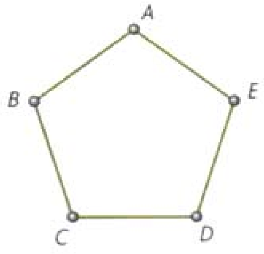



**Figura 58**


**Figura 59**

Os três tipos de redes existentes, em estrela (Figura 57), em círculo (Figura 58) e cadeia (Figura 59), representam-se por grafos que reproduzem os modelos de transmissão de mensagens que se estabelecem entre os membros de um grupo. Na realidade, a Teoria dos Grafos constitui uma das bases do estudo das redes socais. Os vértices representam as pessoas e a existência de uma aresta unindo dois vértices representa a relação de comunicação entre as pessoas.

## 5.2 Em Computação

As redes de comunicação são estruturas de grande importância em Ciências da Computação.

A disposição física dos computadores, relativamente às cablagens e dispositivos que os unem, podem ser de vários tipos, nomeadamente, em estrela, em anel e linear. Essa disposição pode ser modelada por um grafo, em que os vértices representam os computadores e as arestas as conexões físicas entre eles.

Na disposição em estrela (Figura 60), cada nó (computador) é interligado a uma nó central (mestre) através do qual todas as mensagens devem passar. Tal nó age, assim, como centro de controlo da rede, interligando os restantes nós que, usualmente, podem comunicar apenas com um outro nó de cada vez.

Na disposição em anel (Figura 61), é possível transmitir e receber dados em qualquer direcção. Quando uma mensagem é enviada por um nó, ela entra no anel e circula até ser retirada pelo nó de destino, ou então até voltar ao nó fonte.

Relativamente à disposição linear (Figura 62), os nós encontram-se todos ligados ao mesmo meio de transmissão. Contrariamente às disposições anteriormente apresentadas que são configurações ponto a ponto, isto é, em que cada enlace físico de transmissão conecta apenas dois dispositivos, a disposição linear tem uma configuração multiponto, isto é, mais do que dois dispositivos estão conectados ao meio de comunicação.

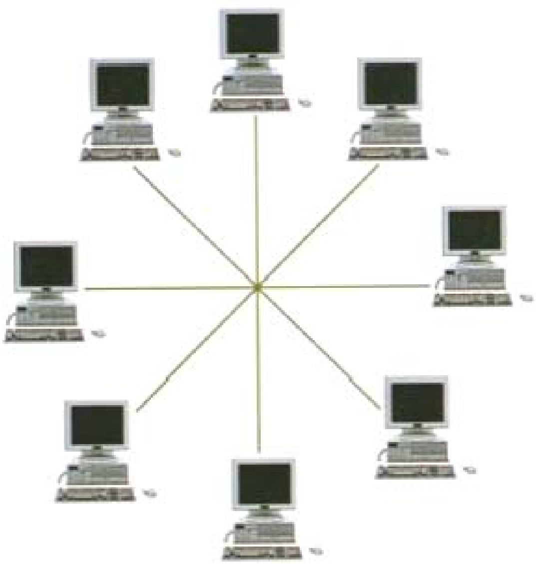


**Figura 60**

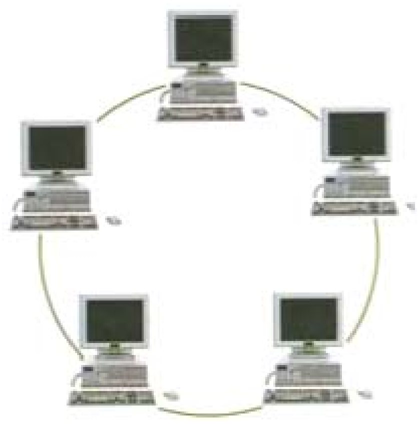


**Figura 61**

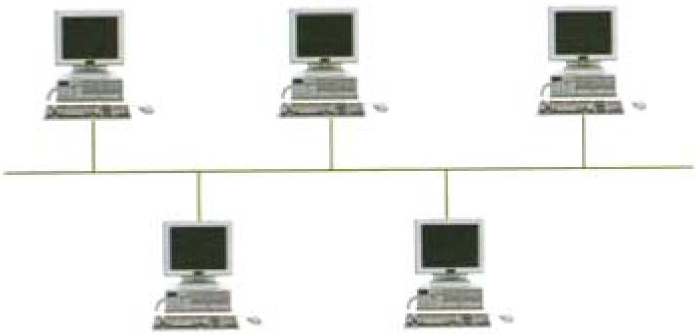


**Figura 62**

As redes de comunicação de dados, também vulgarmente designadas por redes de computadores, têm-se desenvolvido a um ritmo acentuado, sobretudo devido aos avanços nas áreas da microelectrónica e da informática, sendo hoje imprescindíveis em praticamente todas as áreas de actividade. Estas redes disponibilizam aos utilizadores um conjunto de vantagens que as tornam atractivas. Entre outras, podem destacar-se a possibilidade de acesso a computadores remotos, o uso e a partilha de recursos diversificados e/ou dispendiosos, o acesso a informação e a facilidade de transferência de dados.

## 5.3 Em Química

Uma molécula é a parte mais pequena de uma substância que conserva as propriedades químicas características dessa mesma substância.

As moléculas podem ser constituídas por átomos do mesmo elemento ou por átomos de elementos diferentes.

Por exemplo, a molécula da água ( $H_2O$ ) é constituída por um único átomo de oxigénio ligado a dois átomos de hidrogénio, podendo ser representada pela seguinte fórmula estrutural (Figura 63):

H−O−H

**Figura 63**

A fórmula estrutural das moléculas pode ser interpretada como um grafo em que cada átomo é um vértice e cada ligação uma aresta.

A molécula do etanol ($C_2H_5OH$) (Figura 64), por exemplo, pode ser representada pelo seguinte grafo (Figura 65):

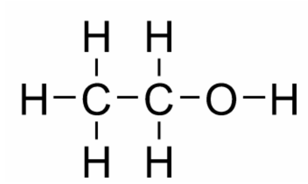



**Figura 64**

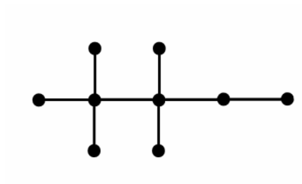


**Figura 65**

É de salientar que a fórmula estrutural não nos permite obter informações sobre a forma como os átomos estão dispostos no espaço, no entanto, é extremamente útil pois, através de uma representação plana, descreve todos os elementos presentes na molécula e a disposição dos átomos.

Em Química, o termo *valência* é usado para indicar o número de ligações que um átomo precisa fazer com os átomos "vizinhos".

No grafo anterior, o grau de cada vértice é, simplesmente, a valência de cada átomo correspondente. Assim, os vértices correspondentes ao átomo de carbono, oxigénio e hidrogénio têm, respectivamente, grau 4, 2 e 1.

## 5.4 Em Electricidade

Para descrever completamente um circuito eléctrico precisamos relacionar não só os elementos (geradores, receptores, fios condutores, interruptores, etc.) que o compõem como ainda indicar a maneira pela qual estes elementos estão interligados.

Cada dipolo é representado por um segmento linear, terminado por dois pontos, sendo este segmento designado por ramo. A interconexão entre dipolos é representada pela união dos segmentos lineares representativos, em que os pontos de interconexão se designam por nós.

A descrição dessas interconexões pode ser interpretada como um grafo em que as arestas representam os ramos e os vértices os nós.

Se transpusermos para o grafo de um circuito os sentidos de referência positivos adoptados para as correntes em todos os ramos, passamos a ter um grafo orientado.

As figuras 66, 67 e 68 mostram, respectivamente, um circuito eléctrico, o grafo e o grafo orientado do mesmo circuito.

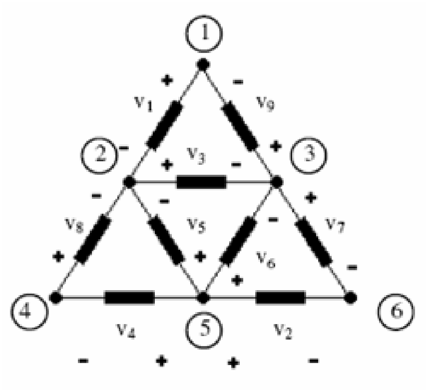



Figura 66

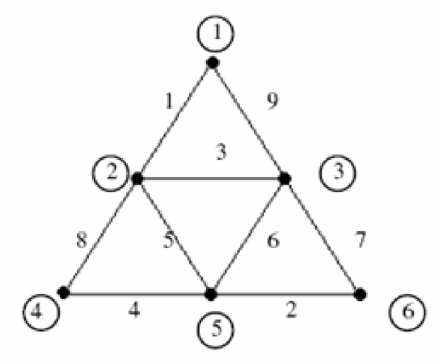



Figura 67

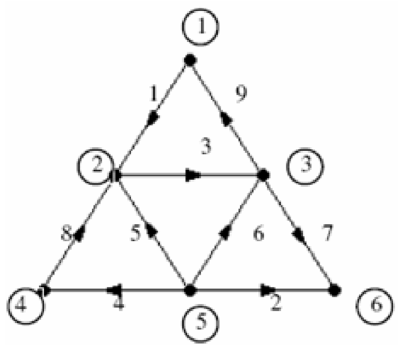



Figura 68

## 5.5 Em Biologia

As cadeias alimentares são representações gráficas lineares do fluxo de energia entre os vários níveis tróficos. Indicam, mediante setas, quem fornece a energia e quem a consome indicando o percurso do alimento desde o produtor até aos consumidores.

Para construir uma cadeira alimentar coloca-se o produtor à esquerda (ou por baixo) e o consumidor final à direita (ou em cima).

A figura seguinte (Figura 69) representa uma cadeia alimentar típica de um ecossistema terrestre.

Figura 69

Esta cadeia pode ser representada pelo grafo orientado da Figura 70, com cinco vértices (cinco espécies de seres vivos) e quatro arcos.

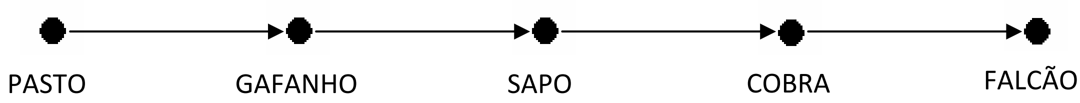



**Figura 70**

O mundo real é muito mais complicado que uma cadeia alimentar. Há seres vivos que têm dietas muito especializadas e monótonas como por exemplo o urso formigueiro que se alimenta quase exclusivamente de formigas, mas a maior parte dos organismos vivos têm dietas muito variadas. Os falcões não se limitam a comer apenas cobras, as cobras comem outros seres para além dos sapos, os sapos comem mais do que gafanhotos, etc. A representação mais realista de quem come quem é uma rede alimentar, rede trófica ou teia alimentar, como podemos observar na seguinte figura:

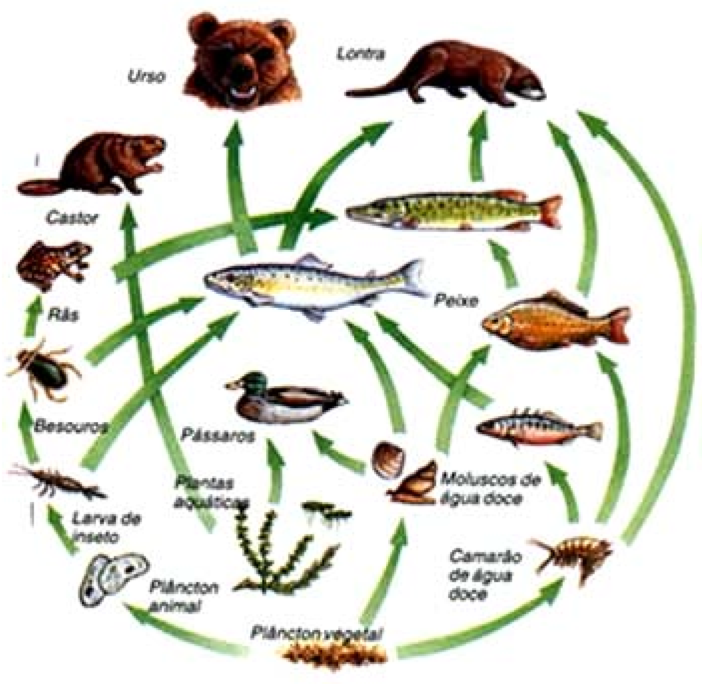



**Figura 71**

Esta teia alimentar pode ser representada pelo grafo orientado da Figura 72.

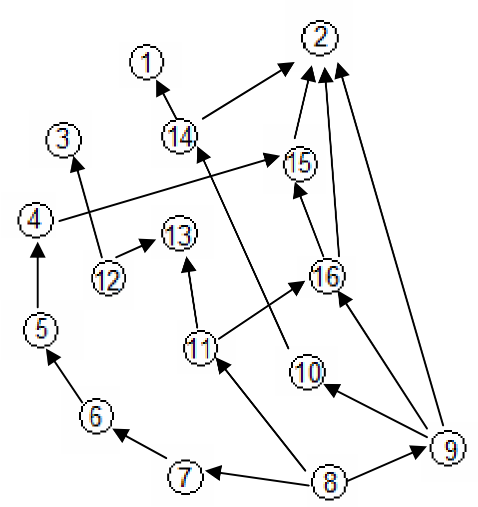



**Figura 72**

Da análise deste grafo podemos, por exemplo, concluir que a cadeia é constituída por dezasseis espécies (o grafo tem ordem 16), e com dimensão 23 que é o número total de arcos. É um grafo orientado pois o fluxo é unidireccional. O comprimento máximo do caminho é 6, ou seja, uma sequência de sete seres vivos e seis arcos.

Podemos ainda, por exemplo, observar que há duas espécies que são consideradas como produtores: a espécie 8 e a espécie 12. Verificamos que os produtores 8 e 12 têm grau de saída 3 e 2, respectivamente, ou seja, há três espécies que se alimentam do produtor 8 e duas que se alimentam do 12. Quanto maior é o grau de saída de uma espécie na rede, maior é a ligação dele com outros vértices, logo o seu desaparecimento afectaria gravemente toda a teia.

Como herbívoros existem cinco espécies, as quais se encontram ligadas por arcos aos produtores (3, 7, 9, 11 e 13). Podemos referir que os herbívoros 3 e 13 não servem de alimento ao resto da teia, ou seja, não têm predadores naturais o que poderá levar ao aumento destas duas espécies.

Existem seis animais ligados aos herbívoros sendo, portanto, designados por carnívoros, e são eles, 2, 6, 10, 13, 14 e 16. Verificamos que o número 13 é simultaneamente carnívoro e herbívoro e a este tipo de alimentação normalmente dá-se o nome de omnívoro.

Da análise da rede alimentar é ainda possível identificar que há três espécies sem predadores naturais, ou seja, que têm grau zero de saída (números 1, 2 e 3).

# 6 Aulas

Neste capítulo, apresentamos as orientações gerais do Ministério da Educação para o programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais [15] e, posteriormente, preparámos um conjunto de tarefas que permitem abordar e desenvolver alguns dos conteúdos constantes do programa da referida disciplina.

## 6.1 Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

### 6.1.1 Apresentação do programa

A disciplina de Matemática Aplicada nas Ciências Sociais destina-se ao Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas e ao Curso Tecnológico de Ordenamento do Território. Para o Curso Geral trata-se de uma disciplina bienal da componente de formação específica com uma carga horária distribuída por 3 aulas de 90 minutos por semana. Para o Curso Tecnológico é uma disciplina trienal da componente de formação científico-tecnológica com uma carga horária semanal distribuída por 2 aulas de 90 minutos.

Esta disciplina pretende, essencialmente, fazer com que os estudantes dos cursos referidos desenvolvam a capacidade de formular e resolver matematicamente problemas e a capacidade de comunicação de ideias matemáticas. Pretende ainda que os estudantes tenham experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras actividades.

De entre assuntos interessantes que ligam a Matemática à vida do dia-a-dia, foram seleccionados alguns que são potencialmente mais aliciantes, nomeadamente: *Métodos de apoio à decisão* (Teoria Matemática das Eleições e Teoria da partilha equilibrada), *Modelação Matemática* (Modelos de crescimento Populacional, Modelos Financeiros e Modelos de Grafos) e *Estatística*.

O primeiro tema deve a sua pertinência ao facto de vivermos numa sociedade democrática e estarmos constantemente a ser solicitados para tomar decisões, tanto na escolha dos políticos que nos governam (*Teoria das eleições*), como ao nível da divisão mais justa do poder em comissões ou de alguns bens materiais, como por exemplo a partilha de uma herança pelos herdeiros (*Teoria da partilha equilibrada*) Além disso, estas áreas são temas muito importantes das Ciências Sociais e as ferramentas matemáticas dão contributos incontornáveis para a tomada de decisões.

Com o segundo tema pretende-se mostrar como alguns modelos matemáticos, ainda que simples, podem ser úteis tanto para explicar, por exemplo, o crescimento de populações biológicas (*Modelos de crescimento Populacional*), como o crescimento das poupanças no banco (*Modelos Financeiros*). Os *Modelos de grafos* introduzem outra forma de mobilizar a Matemática para outros fins, pensando de maneira não usual. Pretendem ser modelos úteis para enfrentar problemas de gestão e iniciar intervenções sociais ao nível da compreensão dos sistemas de distribuição ou recolha.

Finalmente, um lugar de destaque é dado á *Estatística*, que hoje em dia ocupa uma posição marcante junto de todas as profissões. É uma ciência que fornece os instrumentos próprios para melhor seleccionar e tratar a quantidade de informação que nos chega. Tentar-se-á ainda mostrar como se podem tirar conclusões a partir do estudo dessa informação, partindo do particular para o geral, ao mesmo tempo que se quantifica o erro cometido, fazendo assim uma referência à *Inferência Estatística*. Será ainda trabalhado o conceito de *Probabilidade* e realçado o papel por si desempenhado.

Como principais finalidades, a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais pretende promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa; desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real, a capacidade de formular e resolver problemas simples em situações do dia-a-dia e no domínio das Ciências Sociais bem como a capacidade de interpretar textos escritos em linguagem matemática; contribuir para formar uma atitude positiva face à ciência e particularmente para com a Matemática; promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade e desenvolver capacidades de intervenção social pela compreensão e discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

Relativamente a valores/atitudes, a disciplina pretende fazer com que os alunos sejam capazes de desenvolver confiança em si próprios, interesses culturais, hábitos de trabalho e persistência, sentido de responsabilidade e espírito de tolerância e de cooperação.

No que diz respeito a competências, visa desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real, o raciocínio e pensamento científico, a capacidade de comunicar e transmitir a informação organizada e a capacidade de utilização das novas tecnologias.

### 6.1.2 Visão Geral dos conteúdos/temas

Em seguida, é apresentada a distribuição dos diferentes temas pelos diferentes anos de escolaridade, os conteúdos abordados por tema, assim como o número de aulas aconselhadas. Observe-se, no entanto, que à excepção do tema *Teoria Matemática das Eleições* que funciona como módulo inicial, todos os outros podem ser ordenados de outro modo se o professor entender que, nas condições em que trabalha, daí resultar um maior proveito para os estudantes.

**Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas**

| 10.º Ano | 11.º Ano |
|---|---|
| **1. Métodos de apoio à Decisão -** *40 aulas*<br>• **Módulo inicial**<br>Teoria matemática das eleições.<br>• Teoria da partilha equilibrada.<br><br>**2. Estatística -** *40 aulas*<br>• Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos. | **1. Modelos matemáticos -** *30 aulas*<br>• Modelos de grafos.<br>• Modelos populacionais.<br><br>**2. Modelos de Probabilidade -** *35 aulas*<br>• Fenómenos aleatórios.<br>• Argumentos de simetria e Regra de Laplace. |

| | |
|---|---|
| • Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações. Exemplos.<br>• Aplicação e concretização dos processos anteriormente referidos, na elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola, com construção de tabelas e gráficos simples.<br>• Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência. Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos de dados considerados.<br>• Cálculo de estatísticas. Vantagens, desvantagens e limitações das medidas consideradas.<br>• Introdução gráfica à análise de dados bivariados, quantitativos.<br>• Modelos de regressão linear.<br>• Relação entre variáveis qualitativas.<br>**3. Modelos matemáticos -** *10 aulas*<br>• Modelos Financeiros. | • Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade.<br>• Probabilidade condicional. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes.<br>• Probabilidade Total. Regra de Bayes.<br>• Valor médio e variância populacional.<br>• Espaço de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos.<br>• Exemplos de modelos contínuos.<br>• Modelo Normal.<br>**3. Introdução à Inferência Estatística -** *25 aulas*<br>• Parâmetro e estatística.<br>• Distribuição de amostragem de uma estatística.<br>• Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio.<br>• Importância da amostragem aleatória, no contexto da Inferência Estatística. Utilização do Teorema do Limite Central na obtenção da distribuição de amostragem da média.<br>• Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio de uma variável.<br>• Estimativa pontual da proporção com que a população verifica uma propriedade.<br>• Construção de intervalos de confiança para a proporção.<br>• Interpretação do conceito de intervalo de confiança. |

**Tabela 1**

## Curso Tecnológico de Ordenamento do Território

| 10.º Ano | 11.º Ano | 12.º Ano |
|---|---|---|
| **1. Métodos de apoio à Decisão** - *40 aulas*<br>• **Módulo inicial**<br>Teoria matemática das eleições.<br>• Teoria da partilha equilibrada. | **1. Estatística -** *20 aulas*<br>• Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência.<br>Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos de dados considerados.<br>• Cálculo de estatísticas. Vantagens, desvantagens e limitações das medidas | **1. Modelos de Probabilidade -** *35 aulas*<br>• Fenómenos aleatórios.<br>• Argumentos de simetria e Regra de Laplace.<br>• Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade.<br>• Probabilidade |

| | | |
|---|---|---|
| | considaderadas.<br>• Introdução gráfica à análise de dados bivariados, quantitativos.<br>• Modelos de regressão linear.<br>• Relação entre variáveis qualitativas | condicional. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes.<br>• Probabilidade Total. Regra de Bayes.<br>• Valor médio e variância populacional.<br>• Espaço de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos.<br>• Exemplos de modelos contínuos.<br>• Modelo Normal. |
| **2. Estatística -** *20 aulas*<br>• Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos.<br>• Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações. Exemplos.<br>• Aplicação e concretização dos processos anteriormente referidos, na elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola, com construção de tabelas e gráficos simples. | **2. Modelos matemáticos -** *40 aulas*<br>• Modelos financeiros.<br>• Modelos de grafos.<br>• Modelos populacionais. | **2. Introdução à Inferência Estatística -** *25 aulas*<br>• Parâmetro e estatística.<br>• Distribuição de amostragem de uma estatística.<br>• Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio.<br>• Importância da amostragem aleatória, no contexto da Inferência Estatística. Utilização do Teorema do Limite Central na obtenção da distribuição de amostragem da média.<br>• Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio de uma variável.<br>• Estimativa pontual da proporção com que a população verifica uma propriedade.<br>• Construção de intervalos de confiança para a proporção.<br>• Interpretação do conceito de intervalo de confiança. |

**Tabela 2**

A escolha dos temas propostos teve em conta um dos objectivos prioritários da escola, que é o da educação para a cidadania, o qual subentende uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia. Assim, é necessário dotar os jovens de ferramentas necessárias para que possam, mais rapidamente e da melhor forma possível, responder às diversas solicitações do meio em que se inserem.

Os três temas encerram objectivos variados, permitindo desenvolver capacidades e competências diversas e fazer aparecer diferentes conceitos matemáticos.

### 6.1.3 Sugestões Metodológicas Gerais

Tal como já foi dito anteriormente, o programa desta disciplina visa, essencialmente, desenvolver as capacidades de usar a Matemática em situações de contexto real, formular e resolver problemas e comunicar e transmitir ideias matemáticas, sendo considerado menos relevante a utilização de rotinas e técnicas de cálculo e o domínio dos conceitos como objectos matemáticos.

Assim sendo, o grau de aprofundamento de cada tema dependerá das opções feitas pelo professor, tendo em conta as características dos alunos e os recursos disponíveis.

É de salientar a importância de o professor apresentar ou sugerir situações que possam ser objecto de estudo esclarecendo, a partir delas, conceitos necessários ao seu estudo e interpretação.

Os temas *Estatística*, *Probabilidades* e *Inferência Estatística* devem ser abordados de uma forma bastante direccionada para os interesses dos estudantes dos cursos em que a disciplina se integra, sendo por isso tratados com muitos exemplos e detalhe metodológico.

O estabelecimento de ligações entre os diferentes temas permite que os estudantes verifiquem como diferentes assuntos se podem interligar para que seja possível abordar situações mais complexas. Para além disso, permite que sejam recordados temas já estudados na disciplina, sendo de igual importância que os professores estabeleçam ligações com temas abordados no 3.º ciclo.

Para que a formação matemática seja considerada equilibrada, o professor deve fazer referência à História da Matemática sempre que seja pertinente. O estudante necessita ter conhecimento das sucessivas descobertas matemáticas que, juntamente com outras áreas do saber, têm contribuído ao longo dos tempos para a compreensão e resolução dos problemas do Homem.

O tipo de trabalho que se pretende desenvolver com os estudantes desta disciplina pressupõe uma alteração nos instrumentos de avaliação tradicionalmente utilizados. As provas escritas habitualmente usadas para verificar a actividade e aproveitamento dos estudantes, poderão ser substituídas por outras tarefas de avaliação, nomeadamente trabalhos de grupo e individuais, os quais podem assumir diferentes formatos: com posições, relatórios sobre actividades desenvolvidas, preparação de apresentações e participação em debates sobre temas devidamente seleccionados, etc.

A didáctica prevista para a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais pressupõe o uso de recursos diversificados, sendo considerado indispensável, entre outros, o uso de calculadoras gráficas e computadores.

Constituindo a modelação matemática um papel de elevada importância neste programa, o trabalho com os estudantes apenas será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática, embora não seja exigível que sejam todas tratadas simultaneamente em todas as ocasiões. É recomendada a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os estudantes tentarem identificar modelos matemáticos que permitam a sua interpretação.

O uso da tecnologia facilita ainda uma participação activa do estudante na sua aprendizagem, como já há muito recomendado por Sebastião e Silva quando escrevia que "*haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino fosse tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo*". (Guia para a utilização do Compêndio de Matemática). No entanto, o estudante deve ser constantemente confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia, devendo ser alertado para a pertinência da confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos, bem como para a importância da descrição dos raciocínios utilizados e da interpretação dos resultados que lhe são apresentados.

## 6.2 Desenvolvimento do tema "Modelos de Grafos" e indicações metodológicas

Com o tema "Modelos de Grafos" pretende-se que os estudantes interpretem algumas situações de sistemas de distribuição e explorem diversas soluções para problemas que lhes sejam postos em cada situação.

Não é de todo aconselhado que se efectue uma introdução teórica sistematizada da teoria de Grafos, no entanto, alguns dos raciocínios comuns aos teoremas e problemas dos circuitos de Euler e Hamilton não devem ser evitados.

As definições e notações devem ser introduzidas à medida que forem sendo necessárias e úteis para a clareza da linguagem e devem ser tanto quanto possível perceptíveis no âmbito das situações em estudo.

Os problemas históricos podem ser apresentados nas aulas, mas podem também ser utilizados para desenvolver actividades de consulta e projectos.

Se os exemplos apresentados se referirem a situações concretas nas comunidades, as propostas de solução podem ser apresentadas aos responsáveis, desenvolvendo-se, desta forma, competências úteis para a intervenção cívica e competências fundamentais ao nível da comunicação de ideias matemáticas.

**Sistemas de distribuição, de patrulhamento e controle de equipamentos sociais**

Objectivos a atingir:

- Desenvolver competências para determinar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados a uma boa descrição;
- Procurar modelos e esquemas que descrevam situações realistas de pequenas distribuições;
- Tomar conhecimento de métodos matemáticos próprios para encontrar soluções de problemas de gestão;
- Encontrar estratégias passo a passo para encontrar possíveis soluções;
- Descobrir resultados gerais na abordagem de uma situação.

O professor pode apresentar situações de sistemas de distribuição (distribuição postal, …), de patrulhamento (parcómetros, …) e controle de equipamentos sociais (sistemas de limpezas de ruas, recolha de lixo, …) que sejam modeladas por grafos de arestas

O aumento gradual do nível de exigência nos problemas apresentados pode ser fundamental para introduzir noções e técnicas. Por exemplo, dado um problema de patrulhamento pode ser proposto inicialmente que, sobre um mapa, os estudantes encontrem quaisquer caminhos possíveis. Posteriormente devem encontrar caminhos sem repetir arestas, seguindo de caminhos sem repetições a começar e a acabar num mesmo ponto.

As noções de vértice, aresta, caminho e circuito são quase intuitivas. Indispensáveis são também as condições para que um grafo admita circuitos de Euler e a procura de algoritmos para encontrar uma solução com o mínimo de repetições na falta de uma solução sem repetições.

**Planos de viagens, problemas de caixeiros viajantes, localização de sedes ou grandes equipamentos que carecem de abastecimento a partir de vários pontos de uma região**

Objectivos a atingir:

Para além de prosseguir os objectivos já definidos para a primeira parte do tema, há objectivos específicos, a saber:

- Para cada modelo, procurar esquemas combinatórios (árvores) que permitam calcular pesos totais de caminhos possíveis;
- Encontrar algoritmos - decisões passo a passo para encontrar soluções satisfatórias;
- Discussão sobre a utilidade e viabilidade económica (e não só) da procura das soluções óptimas.

É indispensável a apresentação de situações que sejam modeladas por grafos em que o que se pretende é visitar todos os vértices, de preferência sem repetições e com partida e chegada do mesmo ponto, isto é, afigura-se obrigatória uma abordagem aos circuitos hamiltonianos e um exemplo para introdução do Problema do Caixeiro Viajante. Também é absolutamente necessário o trabalho com árvores que visa facilitar as somas de pesos atribuídos às arestas de modo a ser possível comparar os pesos totais das várias soluções. A procura de algoritmos próprios para obter soluções aceitáveis é também um exercício de importante utilidade formativa.

## 6.3 Planificação das aulas

### 6.3.1 Plano de aula n.º 1

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Relacionar contextos reais com esquemas que têm o nome de grafos.
- Definir grafo.
- Distinguir grafo de grafo orientado.
- Escrever as arestas e os vértices de um grafo.
- Desenhar um grafo.
- Identificar grafos simples.
- Indicar vértices e arestas adjacentes.
- Indicar a ordem e a dimensão de um grafo.
- Indicar o grau de um vértice.
- Aplicar a relação entre a soma dos graus dos vértices com o número de arestas.
- Desenhar um subgrafo de um grafo.
- Identificar grafos conexos e grafos desconexos.
- Identificar grafos completos.

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 1:**

Pretendemos ligar três casas A, B e C, a três utilitários, gás (g), água (a) e electricidade (e).

a) Quantas ligações terão de ser feitas?

b) Por razões de segurança convém que as ligações não se cruzem. Será possível?

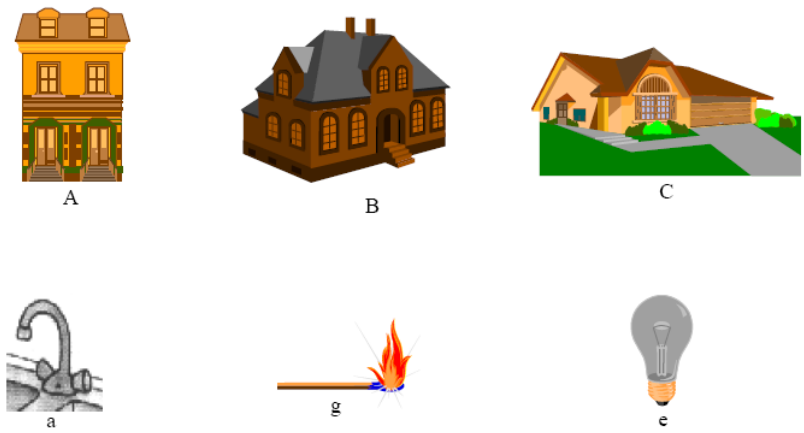



**Figura 73**

**Exploração:**

- Ao propor esta actividade pretende-se levar os alunos a realizarem um esquema que lhes facilite a organização de ideias e lhes permita encontrar uma estratégia para resolverem o problema para que, posteriormente, se comece a introduzir a linguagem básica e a simbologia da Teoria dos Grafos. Assim, será de esperar que representem as casas e os utilitários por pontos e as ligações por linhas, concluindo facilmente que serão necessárias nove ligações. Um possível esquema será o representado na figura seguinte:

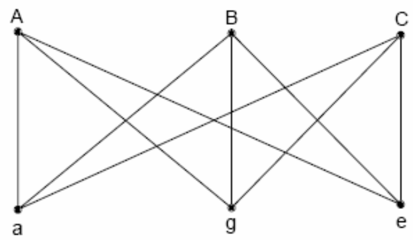



**Figura 74**

Embora este esquema tenha sido desenhado com as ligações a intersectarem-se, é possível representá-lo sem que isso aconteça.

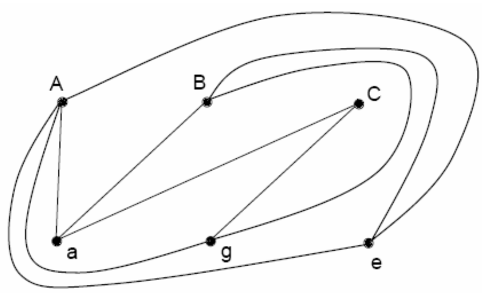



**Figura 75**

Nos dois casos, só interessou considerar um conjunto de pontos e um conjunto de ligações entre eles. Refere-se então, que as estruturas que utilizaram para resolverem a actividade proposta se designam por *grafos* e salienta-se que, na passagem de uma situação real para um grafo, é irrelevante se as linhas são longas ou curtas, rectilíneas ou curvas ou do lado de onde partem e que o que importa é conhecer os pontos e as linhas que os ligam.

- Dá-se a seguinte definição:

  **Definição:**

  Um grafo $G$ é um par $(V,E)$ em que $V$ representa o conjunto (não vazio) dos vértices e $E$ o conjunto das arestas, constituído por pares não ordenados de vértices.

- Refere-se que, no exemplo apresentado, os pontos $A,B,C,a,g$ e $e$ são os *vértices* do grafos e as linhas que unem os vértices são as *arestas* do grafo.

  Assim:

  O conjunto dos vértices é: $V=\{A,B,C,a,g,e\}$

  O conjunto das arestas é: $E=\{Aa,Ag,Ae,Ba,Bg,Be,Ca,Cg,Ce\}$

- Alerta-se que, escrever aresta $Aa$ ou $aA$ tem o mesmo significado, já que representa a existência de um caminho de $A$ para $a$ que pode ser percorrido nos dois sentidos. No entanto, se o caminho tivesse um só sentido, por exemplo, apenas de $A$ para $a$, no grafo havia uma seta e a aresta seria $(A,a)$, de onde resulta que $(A,a)\neq(a,A)$. Os grafos com arestas orientadas chamam-se *grafos orientados* ou *dígrafos* e as arestas designam-se, usualmente, por *arcos.*

  Quando nos referimos a um grafo, se nada for dito em contrário, reportamo-nos a um grafo não orientado.

- Apresentam-se as seguintes designações e o grafo $G$ representado na figura 76:
    - ⇨ Uma *aresta* liga um vértice com outro vértice ou o vértice com ele próprio. Uma aresta que liga um vértice com ele próprio chama-se *lacete* ou *laço*.
    - ⇨ Um vértice que não tem ligação com nenhum outro vértice é um *vértice isolado*.
    - ⇨ Se dois vértices estão ligados por mais do que uma aresta, então as arestas que os ligam chamam-se *arestas paralelas*.
    - ⇨ Um grafo sem arestas chama-se *grafo nulo*.
    - ⇨ Um grafo que não tenha arestas paralelas nem lacetes é designado por *grafo simples*.

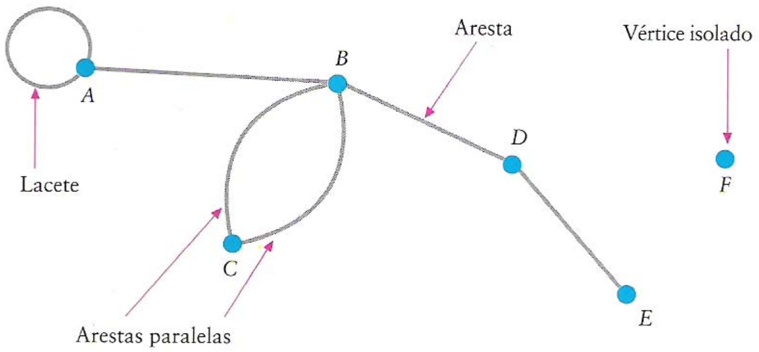



**Figura 76**

- Resolve-se os exercícios 1 e 2 das actividades práticas.

- Aproveitando o grafo $G$ (figura 76), introduzem-se as seguintes noções, sempre que possível, através de exemplos concretos:
    - ⇨ Os vértices $D$ e $E$ são *vértices adjacentes* porque têm uma aresta que os une. Os vértices $B$ e $E$ não são adjacentes.
    - ⇨ As arestas $AD$ e $DE$ são a*djacentes* porque têm em comum o vértice $D$. As arestas $AB$ e $DE$ não são adjacentes.
    - ⇨ A *ordem* de um grafo representa o número de vértices do grafo e a *dimensão* de um grafo representa o número de arestas do grafo. Neste exemplo, $G$ tem ordem e dimensão 6.

- ⇨ O *grau* ou *valência* de um vértice é igual ao número de arestas que começam (ou terminam) nesse vértice. Por exemplo, o vértice $A$ tem grau dois pois o lacete conta duas vezes, o vértice $D$ também tem grau 2 e o vértice $B$ tem grau 4.
- ⇨ Um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau chama-se *grafo regular*.
- ⇨ Um grafo $H$ é chamado *subgrafo* de $G$ se todo o vértice de $H$ é vértice de $G$ e toda a aresta de $H$ é aresta de $G$.
- ⇨ $G$ não é *conexo*, pois, por exemplo, não há nenhuma aresta que una o vértice $E$ com o vértice $F$, logo, um grafo é *conexo* quando qualquer vértice está ligado por uma aresta ou por uma sequência de arestas a qualquer um dos outros vértices do grafo. No entanto, pode-se dizer que $\{A,B,C,D,E\}$ é uma parte conexa deste grafo.
- ⇨ Designa-se por *ponte* uma aresta que se for retirada torna um grafo desconexo.

- Resolve-se os exercícios 3 e 4 das actividades práticas.

- A partir da tabela obtida na resolução da alínea 4.9, pede-se que verifiquem que *a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas*, referindo que esta relação é válida para qualquer grafo.

- Resolve-se o exercício 5.

- Apresentam-se as seguintes definições:

**Definição:**

Chama-se *grafo completo* a um grafo em que quaisquer dois dos seus vértices são adjacentes, isto é, há pelo menos uma aresta para cada par dos seus vértices.

**Definição:**

OS grafos *completos* e *simples*, ou seja, os grafos em que qualquer par de vértices está ligado por uma única aresta, têm uma notação especial e são designados por $K_n$, em que $n$ representa a ordem do grafo.

- Resolve-se os exercícios 6 e 7.

**<u>Actividades Práticas:</u>**

1. Considere o grafo apresentado na figura seguinte.

   Indique:

   1.1. O conjunto dos vértices;

   1.2. O conjunto das arestas;

   1.3. Os vértices isolados;

   1.4. As arestas paralelas;

   1.5. Os lacetes.

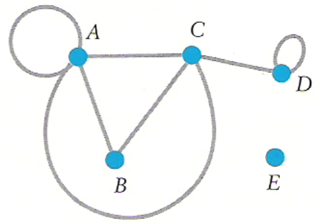



**Figura 77**

2. Desenhe os seguintes grafos/grafos orientados:

   2.1. $V=\{M,N,O,P,Q\}$, $E=\{MM,MM,MN,MN,MO,PO\}$

   2.2. $V=\{A,B,C,D,E,F\}$, $E=\{AB,BC,CA,DE,FF\}$

   2.3. $V=\{M,N,O,P,Q\}$, $E=\{(M,N),(N,M),(P,O),(Q,M),(N,P)\}$

   2.4. $V=\{A,B,C,D,E,F\}$, $E=\{(A,A),(A,B),(C,C),(D,A),(F,E),(E,E),(F,A)\}$

3. Desenhe um grafo:

   3.1. De ordem cinco em que cada vértice é adjacente a todos os outros;

   3.2. De ordem três em que todas as arestas são adjacentes;

   3.3. De ordem quatro e que não possua arestas adjacentes;

   3.4. De ordem quatro, dimensão quatro e com dois vértices isolados;

   3.5. Desconexo de ordem seis de modo que seja necessário acrescentar exactamente duas arestas para ficar conexo.

4. Considere o grafo apresentado na seguinte figura e indique:

   4.1. O conjunto dos vértices;

   4.2. O conjunto das arestas;

   4.3. Os vértices isolados;

   4.4. As arestas paralelas;

   4.5. Os lacetes;

   4.6. A dimensão do grafo;

   4.7. A ordem do grafo;

   4.8. As pontes (do subgrafo $ABCDEF$ );

   4.9. Uma tabela com o grau de cada vértice.

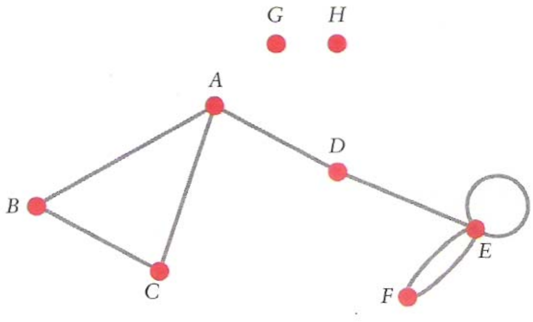



Figura 78

5. Um grafo tem os vértices $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ de graus 2, 2, 3, 4 e 6 respectivamente. Quantas arestas tem o grafo? Justifique a resposta.

6. Desenhe os grafos $K_2$, $K_3$, $K_4$, $K_5$, $K_6$ e $K_7$.

7. A figura representa a planta de uma casa.
   O ponto $E$ representa o exterior da casa.
   $A$, $B$, $C$, $D$, $F$, $G$, $H$, $I$, $J$ e $K$ são divisões.

   7.1. Represente por um grafo a planta da casa.

   7.2. O grafo que desenhou é completo? Justifique.

   7.3. O grafo que desenhou é conexo? Justifique.

   7.4. Quantas arestas tem o grafo que desenhou?

   7.5. Desenhe um subgrafo do grafo que desenhou, com menos uma aresta e que seja desconexo.

   7.6. Qual a relação entre o número de arestas e a soma das valências dos vértices do grafo?

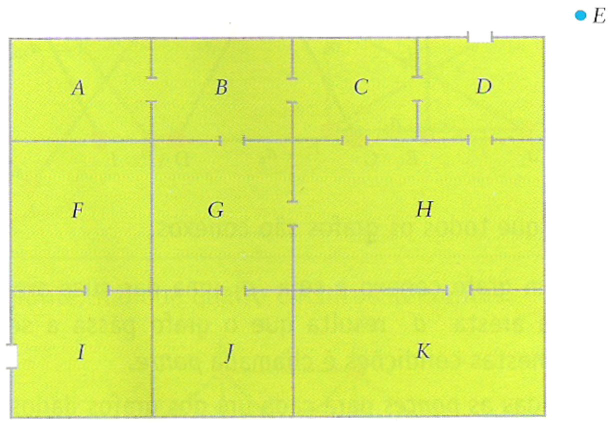



Figura 79

**Avaliação:**

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

**Materiais:**

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

## 6.3.2 Plano de aula n.º 2

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Indicar passeio, trajectos e caminhos.
- Indicar circuitos e ciclos.
- Construir grafos a partir de mapas e outros contextos reais.
- Resolver, por tentativa e erro, problemas modelados por grafos.

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 2:**

Será possível desenhar a casa sem levantar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma linha? Tente encontrar uma justificação que lhe permita fazê-lo.

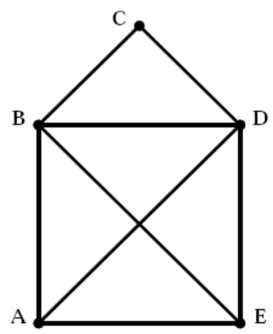



**Figura 80**

**Exploração:**

- Ao propor esta actividade pretende-se que os alunos, por tentativa e erro, descubram uma solução possível para o problema.

  Entre outras possíveis, são soluções os trajectos $AEBDCBADE$ e $ABCDAEBDE$.

  Os alunos serão levados a concluir que o que torna possível "desenhar" a casa sem levantar o lápis do papel é o facto de só existirem dois vértices de grau ímpar (vértices $A$ e $E$), sendo apenas possível concluir a tarefa com sucesso começando o trajecto num deles e terminando no outro.

- Torna-se, neste momento, essencial proceder à introdução de alguns conceitos para que seja possível estabelecer uma melhor comunicação:
    - ⇨ Um *passeio* é uma qualquer sequência de vértices e arestas, podendo haver repetições.
    - ⇨ Um *trajecto* é um passeio em que as arestas são todas distintas.
    - ⇨ Um *caminho* é um passeio em que os vértices são todos distintos.
    - ⇨ Um *circuito* é um trajecto que começa e acaba no mesmo vértice.
    - ⇨ Um *ciclo* é um caminho que começa e acaba no mesmo vértice.
    - ⇨ Chama-se *comprimento de um passeio* ao número de arestas por que é constituído.

- A partir do problema apresentado solicita-se que dêem exemplos de um passeio, um trajecto e um caminho, entre dois vértices quaisquer (por exemplo, vértices $A$ e $D$), e um circuito e um ciclo partindo, por exemplo, do vértice $C$, impondo condições quanto ao seu comprimento.

- Resolve-se os exercícios das actividades práticas.

**<u>Actividades Práticas:</u>**

1. Considere o grafo ao lado.

    1.1. Dê dois exemplos de caminhos com início em $A$ e fim em $C$.

    1.2. Dê dois exemplos de circuitos com início em $C$.

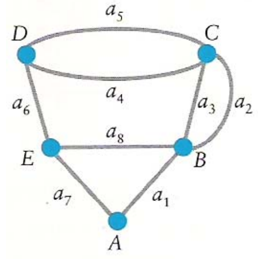



**Figura 81**

2. Considere o seguinte grafo.

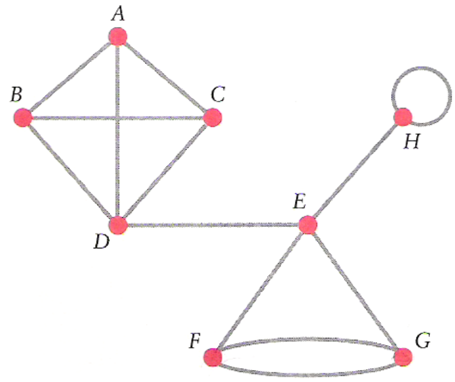



**Figura 82**

2.1. Encontre um caminho de $A$ para $E$ que passe por $AD$.

2.2. Encontre um caminho de $A$ para $E$ que não passe por $AD$.

2.3. Encontre um caminho de $A$ para $E$ que não passe por $AD$ nem $AC$ nem $BD$.

2.4. Encontre um passeio de $A$ para $E$ de tamanho 8.

2.5. Encontre um trajecto de $D$ para $H$ que passe duas vezes pelo vértice $E$.

2.6. Encontre um circuito de tamanho 3 que passe por $A$.

2.7. Encontre um circuito de tamanho 4 que passe por $A$.

2.8. Encontre um circuito de tamanho 3 que não passe por $A$.

2.9. Quantas arestas do grafo são pontes?

2.10. Acrescente uma aresta ao grafo de modo a eliminar as pontes.

3. A figura representa uma parte do mapa da cidade do Porto.

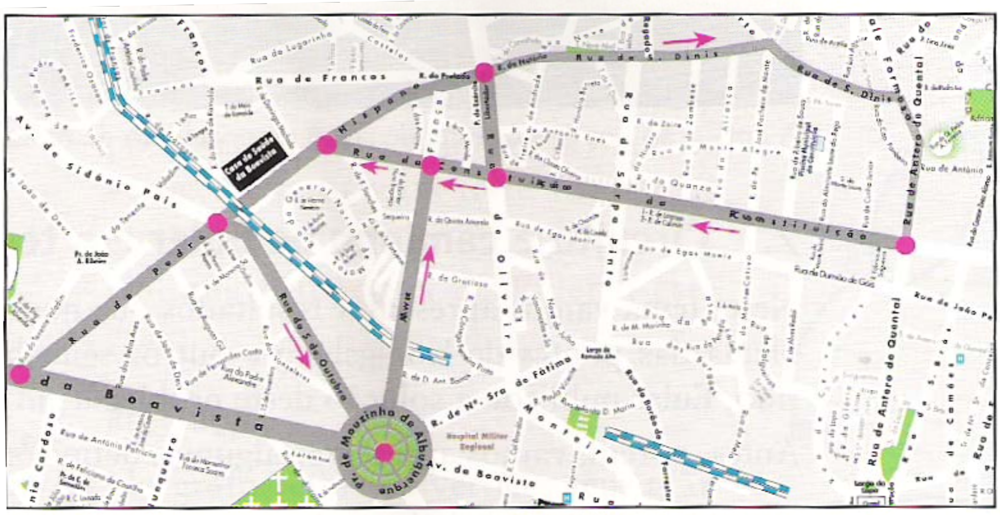


**Figura 83**

Do mapa retirou-se o seguinte grafo orientado:

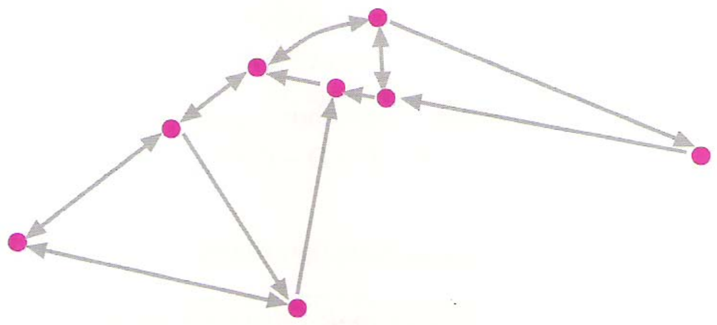


**Figura 84**

3.1. Represente os vértices por letras e indique:

3.1.1. O conjunto dos vértices;

3.1.2. O conjunto das arestas;

3.1.3. Um circuito partindo de cada um dos vértices.

4. A Isabel, o Jorge, o Luís, o Manuel, a Natália, a Olga e o Pedro encontraram-se num acampamento de escuteiros. Uma das actividades consistia em fazer vigias em grupos de dois. Durante todo o acampamento:

- a Isabel fez vigias com o Jorge e com o Pedro;
- o Jorge fez vigias com a Isabel, com a Natália e com o Pedro;
- o Luís fez vigias com o Manuel e com a Olga;
- o Manuel fez vigias com o Luís e com a Olga;
- a Natália fez vigias com o Jorge;
- a Olga fez vigias com o Luís e com o Manuel;
- o Pedro fez vigias com o Jorge e com a Isabel.

4.1. Construa um grafo que represente "quem não fez vigias com quem".

4.2. Sabendo que estes escuteiros faziam parte de um total de 12 que estavam equitativamente distribuídos em dois acampamentos $A$ e $B$ e que a Olga estava no acampamento $B$, onde estavam cada um dos outros escuteiros?

5. Considere o seguinte pormenor da cidade de Viseu e considere apenas as ruas sombreadas a verde.

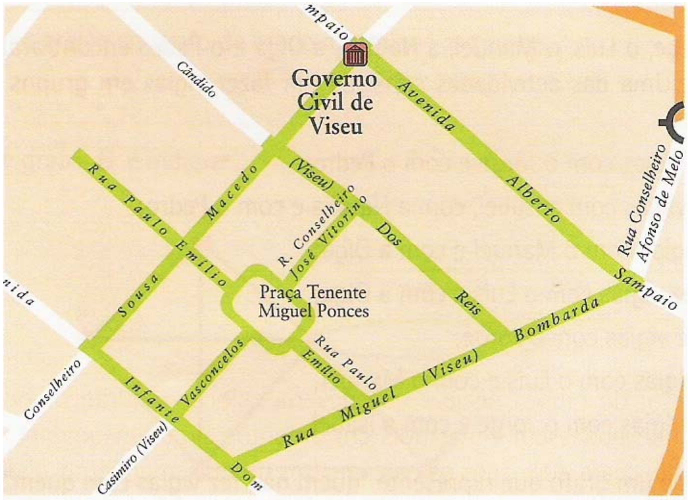



**Figura 85**

5.1. Desenhe um grafo correspondente às ruas sombreadas a verde.

5.2. O grafo possui pontes?

5.3. O grafo possui algum subgrafo completo de ordem superior a dois?

5.4. O grafo possui algum subgrafo conexo de ordem oito e dimensão dois?

**Avaliação:**

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

**Materiais:**

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

## 6.3.3 Plano de aula n.º 3

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Definir trajecto e circuito de Euler.
- Aplicar o Teorema de Euler.
- Aplicar o Teorema do caminho de Euler.
- Desenhar um circuito de Euler.

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 3:**

Na antiga cidade de Königsberg, situada na Prússia, hoje Kaliningrad na Rússia, existe uma ilha, chamada Kneiphoff, formada pelos dois braços do rio Pregel. Há sete pontes que atravessam esses dois braços.

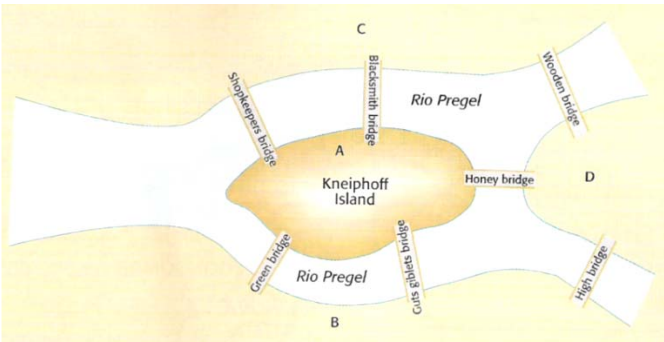



**Figura 86**

Será possível fazer uma visita a toda a cidade e regressar ao ponto de partida, atravessando cada ponte uma única vez?

**Exploração:**

- A proposta deste problema torna-se indispensável na medida em que é considerada como a primeira referência à Teoria dos Grafos. O problema deve ser enquadrado no seu contexto histórico, referindo-se que a solução do mesmo foi publicada pelo matemático Euler em 1736.

- Ao propor esta actividade pretende-se que os alunos através da representação das zonas terrestres por vértices e das pontes por arestas ilustrem a situação apresentada através de um grafo (Figura 87) tentando, por tentativa e erro, descobrir uma solução possível para o problema, acabando por concluir que, possivelmente, tal não existe.

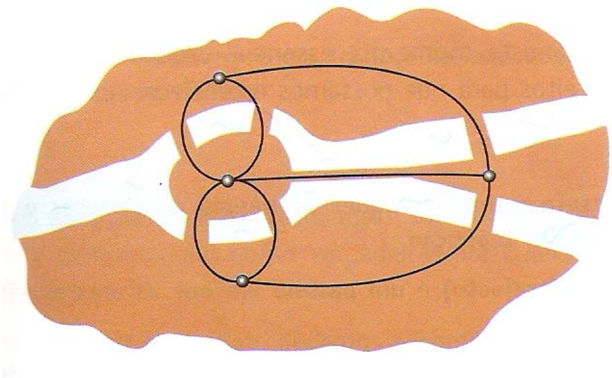


**Figura 87**

- Torna-se, neste momento, essencial proceder à introdução das seguintes definições:

  **Definição:**

  Um trajecto designa-se por *trajecto de Euler* se contém todas as arestas (logo também todos os vértices) do grafo a que se refere. Por sua vez, designa-se por *circuito de Euler*, todo o circuito que contenha todas as arestas do grafo.

  **Definição:**

  Um grafo diz-se *Euleriano* (ou *grafo de Euler*) se admite um circuito de Euler.

- Refere-se que facilmente se pode verificar que a questão colocada na actividade resume-se a saber se existe ou não um circuito de Euler, salientando-se que a resolução de problemas deste tipo pode não ser simples pois pode-se perder muito tempo a procurar um circuito que nem sequer existe. É, então, fundamental proceder à introdução de dois Teoremas que facilitam a resolução deste tipo de problemas:

**Teorema de Euler:**

Um grafo é euleriano se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

**Teorema do trajecto de Euler:**

Um grafo admite um trajecto euleriano se e só se é conexo e no máximo dois dos seus vértices têm grau ímpar. Tal trajecto terá início num dos vértices de grau ímpar e termina no outro vértice de grau ímpar.

- Por aplicação do Teorema de Euler os alunos devem verificar que, na realidade, não existe uma solução para o problema proposto. O grafo não contém um circuito euleriano pois todos os seus vértices têm grau ímpar, não sendo possível partir de um dos pontos de terra firma, atravessar todas as pontes uma só vez e regressar ao ponto de partida.

- Resolve-se os exercícios das actividades práticas.

<u>**Actividades Práticas:**</u>

1. Considere os seguintes grafos:

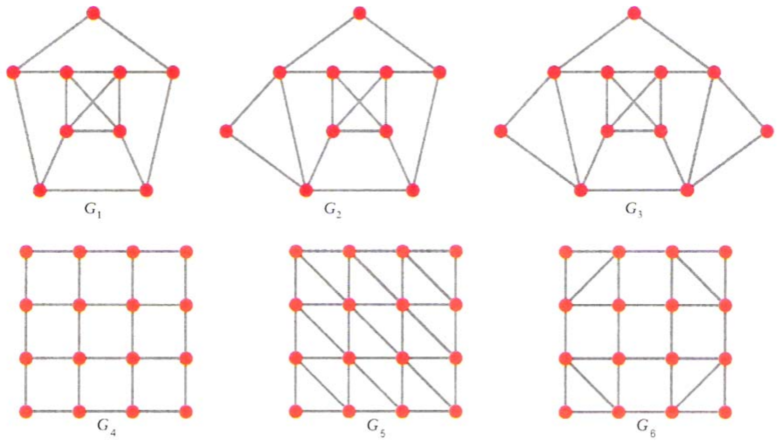



**Figura 88**

1.1. Classifique cada um deles quanto à existência de um circuito euleriano, um trajecto euleriano ou nem um nem outro.

1.2. Explique o raciocínio usado na alínea anterior sem desenhar os circuitos ou trajectos.

2. Indique um circuito de Euler para o seguinte grafo.

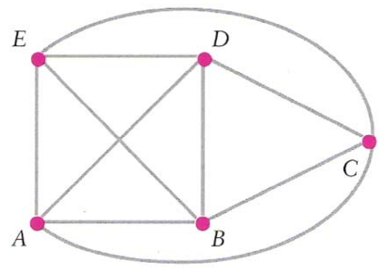



**Figura 89**

3. Observe a figura:

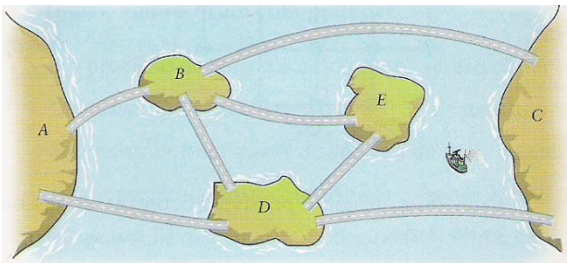



**Figura 90**

Num rio há três ilhas que estão ligadas por pontes entre si. Duas das ilhas têm ligação às duas margens do rio.

Representе por $A$ e $C$ cada uma das margens e por $B$, $E$ e $D$ as ilhas.

Mostre, usando um grafo, que é possível dar um passeio, partindo de qualquer um dos pontos de terra firme, percorrer todas as pontes uma só vez, visitando as ilhas e as margens do rio, e voltar ao ponto de partida.

4. A figura representa um jardim com várias secções de flores diferentes.

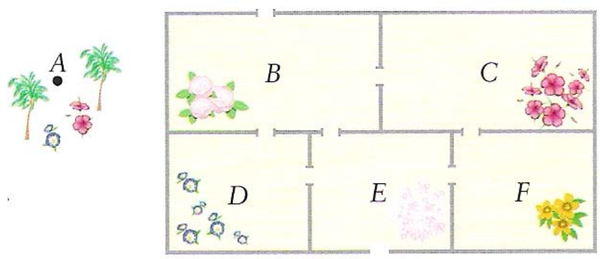



**Figura 91**

O ponto **A** representa o exterior do jardim.

Pretendemos partir de uma secção ou do exterior do jardim, percorrer todas as secções, passando por cada entrada exactamente uma vez, e voltar ao ponto de partida.

Será possível efectuar esse percurso?

5. Observe a figura.

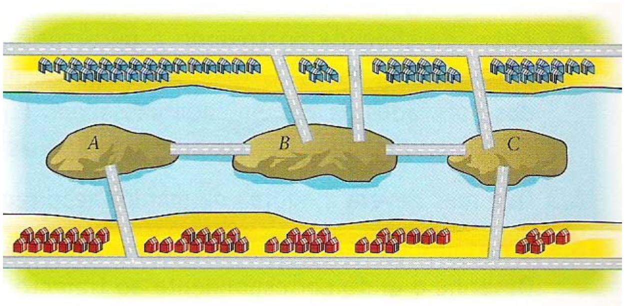



**Figura 92**

Será possível partir de uma margem do rio, atravessar todas as pontes uma só vez e regressar ao ponto de partida? Justifique a sua resposta.

6. Considere o mapa abaixo indicado representando um pormenor da cidade do Porto. Admita que todas as ruas têm dois sentidos.

Imagine um camião do lixo que tem de percorrer todas as ruas para proceder à respectiva limpeza. Por cada passagem numa rua, os funcionários procedem à recolha dos dois lados, bastando assim uma passagem em cada rua.

É possível o camião percorrer todas as ruas passando uma única vez por cada uma delas?

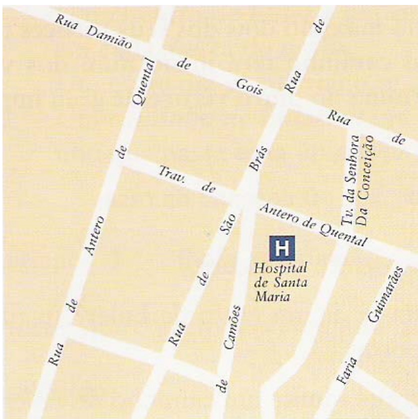



**Figura 93**

7. No mesmo mapa do exercício anterior estão representados os pequenos contentores fixos do lixo que será necessário despejar diariamente. Este serviço é normalmente efectuado por um funcionário que limpa um dos lados da rua de cada vez.

Será possível o funcionário percorrer ambos os lados de cada rua sem ter que repetir nenhum deles?


**Figura 94**

## Avaliação:

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

## Materiais:

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

## 6.3.4 Plano de aula n.º 4

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Eulerizar um grafo.
- Eulerizar grelhas.

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 4:**

Mais uma vez vamos a Königsberg, onde, actualmente, já existem mais duas pontes sobre o rio Pregel – com a seguinte localização (a vermelho):

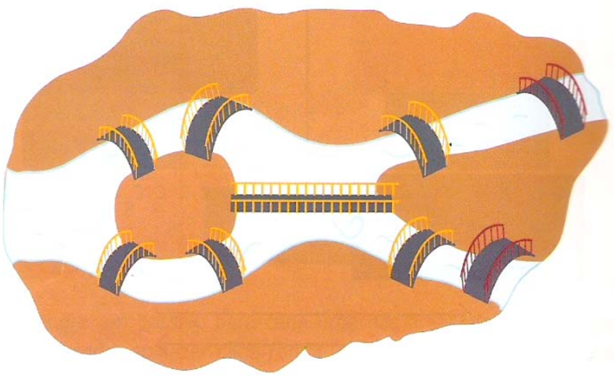


Figura 95

Será agora possível fazer uma visita à cidade e regressar ao ponto de partida, passando uma única vez por cada ponte?

Caso não seja possível, onde se deveria construir mais uma ponte, de modo a resolver definitivamente o problema?

**Exploração:**

- Após a análise e resolução de situações anteriores, os alunos serão levados a concluir que, por vezes, para encontrar um determinado percurso é necessário repetir ruas. Traduzindo para linguagem de grafos, se não se quiser repetir arestas, tem-se que acrescentar mais. Seguindo este raciocínio, solicita-se que os alunos tentem resolver a actividade proposta, uma nova versão do problema das pontes.

- Inicia-se a resolução da actividade motivacional representando a situação apresentada através de um grafo (Figura 96).

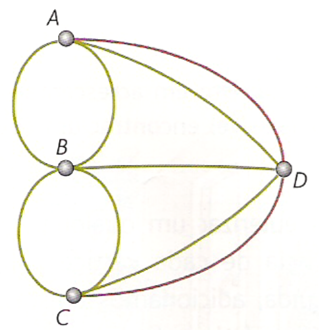


**Figura 96**

- Ao analisar o grau de cada vértice, verifica-se que $A$ e $C$ têm grau 4 (par) enquanto que $B$ e $D$ têm grau 5 (ímpar). Pode-se então afirmar, pelo Teorema de Euler, que não existe nenhum circuito de Euler, pois, para que isso pudesse acontecer, todos os vértices teriam de ter grau par. Assim, mesmo com a construção de estas duas pontes, ainda não é possível percorrer todas as pontes uma e uma só vez e regressar ao ponto de partida.

- Para resolver definitivamente o problema, é necessário que todos os vértices tenham grau par pois, só assim, é possível encontrar um circuito euleriano. Acrescentando-se uma aresta como mostra a figura 97, já todos os vértices têm grau par e, portanto, na cidade de Königsberg já é possível fazer a tão desejada visita (Figura 98).

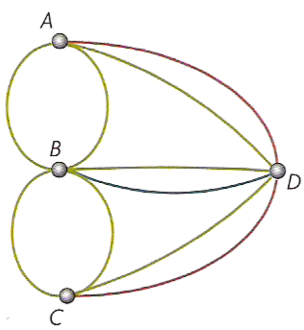


**Figura 97**

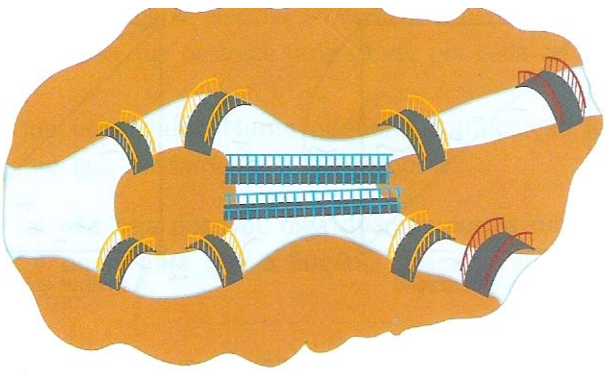


**Figura 98**

- Neste momento refere-se que, ao processo que se usou para resolver o problema, ou seja, ao processo que consiste em transformar um grafo que não é de Euler num grafo de Euler, designa-se *eulerizar um grafo*. Alerta-se os alunos que na maior parte dos casos há possibilidade de se fazer mais do que uma eulerização de um grafo, sendo a melhor aquela que acrescenta o menor número de arestas. Pode, no entanto, haver mais do que uma "melhor eulerização".

- Resolve-se os exercícios 1 a 4 das actividades práticas.

- Refere-se que existe um caso particular da eulerização de grafos que é a eulerização de redes viárias rectangulares que podem ser representadas por grelhas. A eulerização deste tipo de grafos segue uma técnica muito simples:
    - Parte-se sempre de um canto e segue-se no sentido dos ponteiros do relógio;
    - Sempre que se chegar a um vértice de grau ímpar, faz-se uma ligação ao próximo vértice, acrescentando uma aresta;
    - Se esse vértice ficar par, segue-se para o próximo vértice; se ficar ímpar, liga-se ao vértice seguinte acrescentando uma aresta;
    - Continua-se, sucessivamente, aplicando o mesmo raciocínio até chegar ao ponto de partida.

- Resolve-se os exercícios 5 a 8 das actividades práticas.

- Propõe-se a realização de um trabalho, realizado em pequenos grupos, em que sejam aplicados conhecimentos adquiridos ao longo das últimas aulas, apresentando um tema possível para esse trabalho. OS trabalhos deverão ser apresentados aos restantes elementos da turma.

**Actividades Práticas:**

1. Eugénia Castel'Negro, ultima descendente de uma família brasonada da Beira Interior, vive numa mansão em que a comunicação entre divisões se faz apenas por portas (não há corredores), como mostra o esquema seguinte:

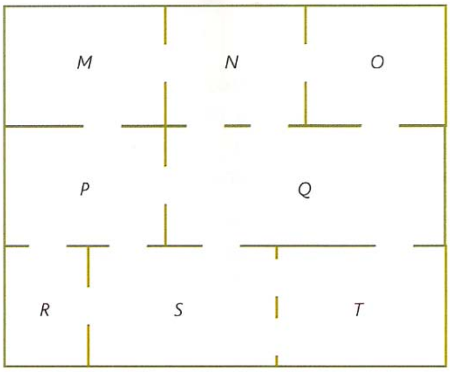



**Figura 99**

Para se entreter, Eugénia decidiu procurar um percurso por todos os quartos da mansão que passasse uma só vez por cada uma das portas.

1.1. Será que conseguiu? Numa pequena composição, explique o raciocínio que fundamenta a sua resposta.

1.2. Caso tal não seja possível, diga quantas portas mais são necessárias, e onde, para que a Eugénia possa levar e sua tarefa a bom termo.

2. O grafo que se segue não contém um circuito de Euler. Que aresta poderia eliminar para que passasse a existir esse circuito?

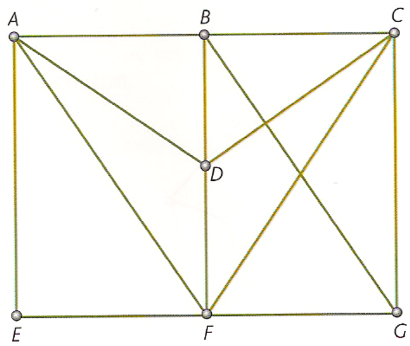



**Figura 100**

3. O grafo que se segue representa o percurso que tem que ser efectuado por uma gente de controlo de parqueamento. Será que pode fazer o controlo em todas as

ruas usando um circuito de Euler? Justifique. Em caso afirmativo, indique o circuito encontrado.

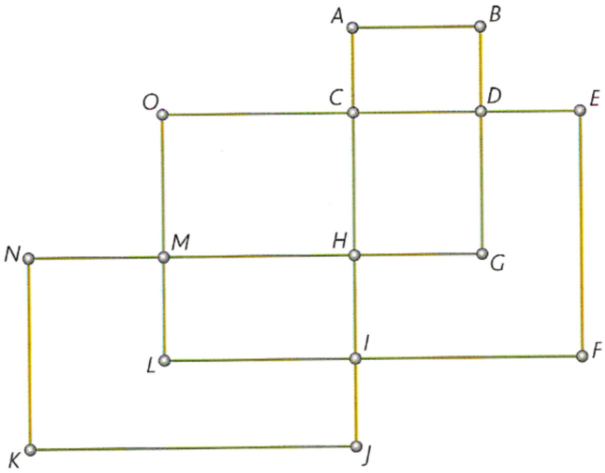



**Figura 101**

4. Considere o seguinte mapa representando um pormenor da cidade de Vila Nova de Gaia.

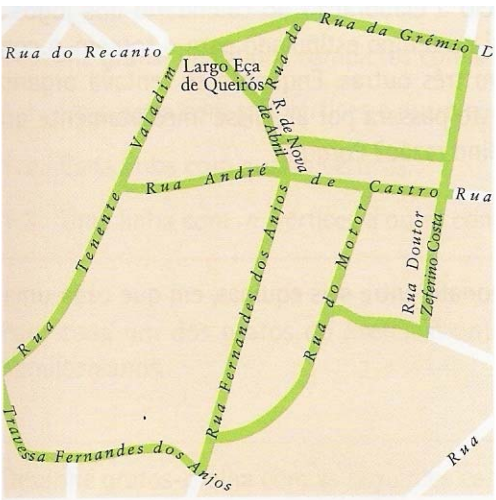



**Figura 102**

4.1. Construa um grafo representativo deste mapa, considerando apenas as ruas sombreadas a verde.

4.2. Eulerize o grafo de modo a repetir o menor número possível de arestas.

4.3. Imagine que faz parte de uma equipa de um *rally paper* que tem que cumprir uma tarefa em cada um dos cruzamentos do mapa indicado (uma vez mais considere apenas as ruas sombreadas a verde). Admita que os valores indicados a azul no mapa representam a distância em metros entre cada dois cruzamentos. Verifique na eulerização encontrada na alínea anterior quantos metros de rua repetiu.

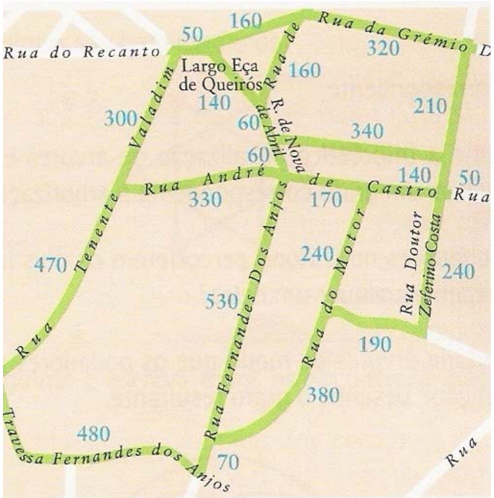



**Figura 103**

4.4. Tente encontrar uma outra eulerização que lhe permita repetir o menor número possível de metros de rua.

5. Encontre a melhor eulerização para os grafos seguintes:

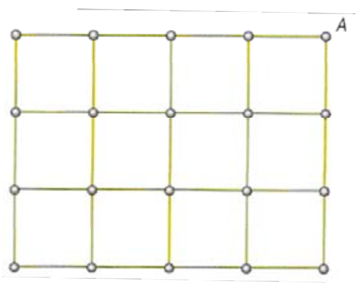



**Figura 104**

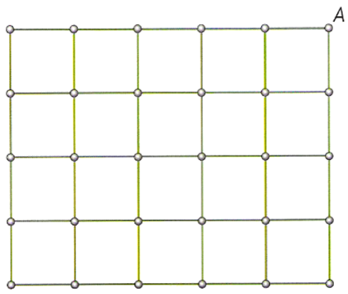



**Figura 105**

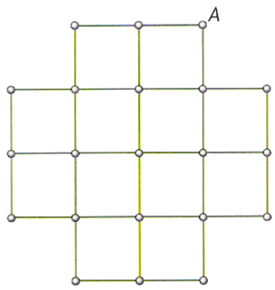



**Figura 106**

6. No grafo que se segue não existe um circuito de Euler.

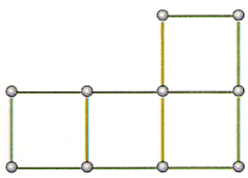


**Figura 107**

6.1. Explique porquê.

6.2. Encontre uma eulerização para o grafo.

7. Encontre uma boa eulerização para o grafo que se segue.

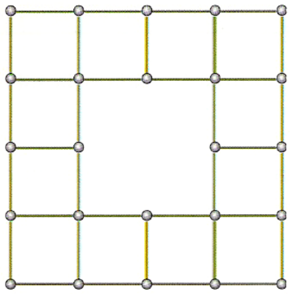


**Figura 108**

8. Considere o seguinte pormenor da cidade do Porto. Considere apenas as ruas sombreadas a verde.

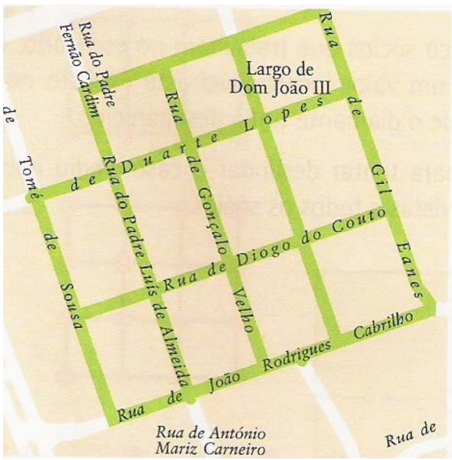



**Figura 109**

8.1. Desenhe um grafo representativo deste mapa.

8.2. Imagine um camião do lixo que deverá percorrer todas as ruas uma única vez. Suponha que o camião parte do cruzamento entre a *Rua de João Rodrigues Cabrilho* e a *Rua de Gil Eanes*, onde deverá regressar. Que ruas aconselharia o motorista a repetir?

8.3. Admita que no cruzamento da *Rua de Gonçalo Velho* com a *Rua de Diogo do Couto* foi instalada uma padaria. O padeiro tratou de propor aos moradores das redondezas a entrega de pão nas suas casas, tendo conseguido contratos com todas as residências marcadas a vermelho. Sabendo que o padeiro não consegue distribuir simultaneamente o pão

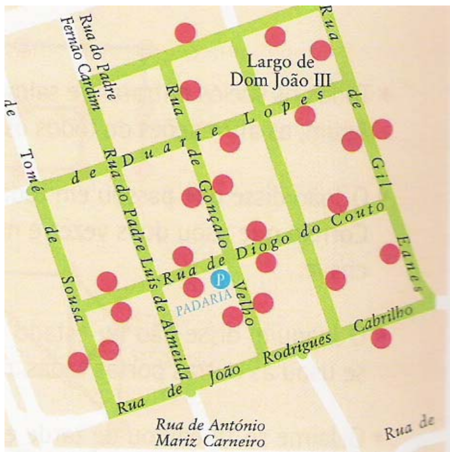



**Figura 110**

dos dois lados da rua, verifique se tem que repetir algum troço. Caso seja possível, apresente uma solução.

8.4. Foi realizada uma campanha sem precedentes para reciclagem de frigoríficos. Nos cruzamentos indicados no mapa (a azul) foram colocados pelos moradores determinadas quantidades de frigoríficos para serem transportados.

Devido às suas dimensões o camião que os vai levar para reciclar só pode circular pela *Rua de João Rodrigues Cabrilho*. A empresa de transportes contratou o Sr. Cunha para juntar os frigoríficos num único cruzamento, havendo assim a possibilidade de ser em $A$, $B$, $C$, $D$ ou $E$. O Sr. Cunha tem apenas uma pequena carrinha que leva um frigorífico de cada vez. Admitindo que cada pequeno troço de rua entre dois cruzamentos demora 2 minutos a percorrer, em que local aconselharia o Sr. Cunha a colocar todos os frigoríficos para demorar o menor tempo possível?

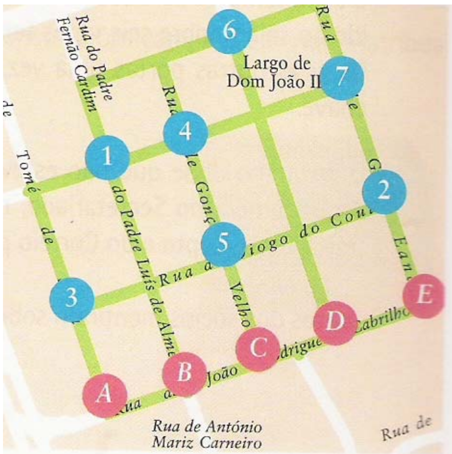



**Figura 111**

## <u>Proposta de Trabalho de Grupo:</u>

Faça uma visita à sua Câmara Municipal ou Junta de Freguesia e peça uma entrevista à pessoa encarregue da distribuição dos varredores de ruas (ou dos veículos lava-ruas) pela freguesia. Deve levar as perguntas muito bem preparadas e no final deve fazer um relatório que inclua esquemas de distribuição (grafo que represente o percurso dos varredores ou dos veículos) e conclusões.

Sugestões para perguntas: “Quantos varredores?”; “Que zonas cobrem?”; “Há limitação nos estacionamentos para permitir o trabalho dos varredores?”; “São estabelecidos percursos com antecedência?”, “Há tempos definidos para a limpeza de cada zona?”, etc.

**Avaliação:**

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

**Materiais:**

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

## 6.3.5 Plano de aula n.º 5

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar grafos Hamiltonianos.
- Indicar ciclos Hamiltonianos.
- Indicar condições necessárias para a existência de ciclos Hamiltonianos.

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 5:**

A mãe do Tiago torceu um pé, mas as compras para o jantar têm de ser feitas. A lista que a mãe do Tiago fez contempla idas às seguintes lojas: talho (T), mercearia (M), frutaria (F) e padaria (P). O Tiago também precisa de um dossier novo e de dois livros para a escola e, por isso, tem de passar no Quiosque (Q) e na livraria (L).


**Figura 112**

Desenhe um trajecto que o Tiago poderá percorrer de modo a visitar cada um desses locais e regressar novamente a casa (C):

- Sem restrições;
- Sabendo que tem que ir primeiro à livraria;
- Sabendo que só vai ao talho imediatamente antes de ir para casa.

**Exploração:**

- Começa-se por alertar os alunos que, até esta altura, a análise que tem sido realizada tem focado as arestas de um grafo, isto é, a procura de percursos sobre as arestas em função do que se pretende encontrar.
No entanto, esta análise também se pode concentrar nos vértices de um grafo, isto é, na procura de percursos que exijam a visita a determinados vértices e não a arestas, igualmente sem repetição.

- Resolve-se a actividade motivacional e, como resposta às questões do problema, os alunos podem, por exemplo, estabelecer os percursos $CMFPQLTC$, $CLTQMFPC$ e $CMFQLPTC$, respectivamente. Ao compararem os grafos obtidos em cada um dos casos, os alunos serão levados a concluir que, embora representem percursos diferentes, todos começam e acabam no mesmo vértice e passam por todos os outros uma só vez. A este tipo de percurso chama-se *circuito Hamiltoniano*.

- Dá-se a seguinte definição:
**Definição:**
Num grafo $G=(V,E)$, chama-se ciclo de Hamilton (ou Hamiltoniano) a um ciclo que passa por todos os vértices de $G$.
Um grafo diz-se Hamiltoniano se nele se pode encontrar, pelo menos, um ciclo de Hamilton.

- Refere-se, a título de curiosidade, que o primeiro e estudar estes conceitos foi o matemático irlandês, William Hamilton, sugerindo-se que os alunos efectuem uma pesquisa sobre o mesmo.

- Resolve-se o exercício 1 das actividades práticas.

- Salienta-se que, embora se conheça um processo para averiguar se um grafo conexo tem, ou não, um circuito de Euler (Teorema de Euler), não existe nenhum critério idêntico que permita dado um grafo qualquer, verificar de imediato se existe ou não um ciclo Hamiltoniano. Há, contudo, alguns tipos de grafos, com características próprias, que permitem afirmar se possuem ou não ciclos Hamiltonianos. Por exemplo: num grafo com pontes não existem ciclos Hamiltonianos; num grafo completo existem sempre ciclos Hamiltonianos.

- Refere-se, então, algumas condições que podem ser utilizadas para determinar se alguns grafos contêm circuitos de Hamilton:

**Teorema de Ore:**

Seja $G=(V,E)$ um grafo conexo e simples com ordem $n$ maior ou igual a 3. Se a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes é maior ou igual a $n$, então $G$ tem um ciclo de Hamilton.

**Teorema de Dirac:**

Se $G=(V,E)$ é um grafo conexo e simples com ordem maior ou igual a 3, tal que o grau de cada vértice é maior ou igual a metade da ordem do grafo, então $G$ é Hamiltoniano.

- Alerta-se os alunos para o facto de estes teoremas indicarem uma condição suficiente mas não necessária para que um grafo contenha um ciclo de Hamilton. Na verdade, o Teorema de Dirac não diz que, se um grafo conexo e simples com $n \geq 3$ vértices tem ciclo de Hamilton, então a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes deve ser maior ou igual a $n$. Exemplifica-se, utilizando o grafo seguinte:

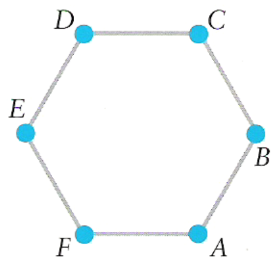



**Figura 113**

Neste grafo, $n=6$, o ciclo $ABCDEFA$ é de Hamilton e, por exemplo, $grau\,A + grau\,C = 2+2=4$ e $4$ não é maior do que $6$.

- Propõe-se que os alunos realizem os restantes exercícios das actividades práticas.

**<u>Actividades Práticas:</u>**

1. Para cada um dos grafos seguintes identifique um ciclo de Hamilton.

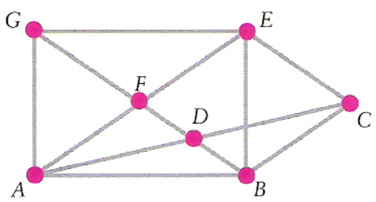



**Figura 114**

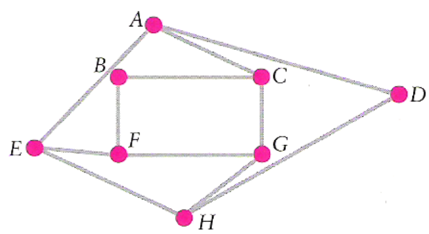



**Figura 115**

2. Considerando os grafos que se seguem, desenhe, se existir, um circuito hamiltoniano. Quando não existir, explique porquê.

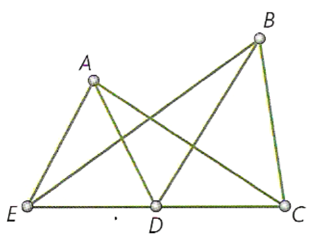



**Figura 116**

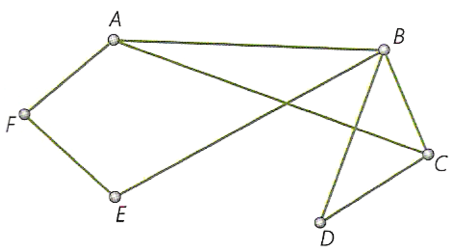



**Figura 117**

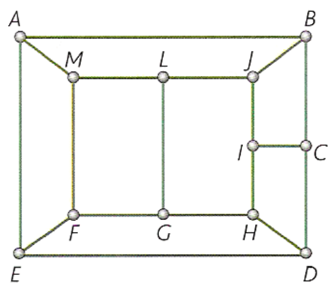



**Figura 118**

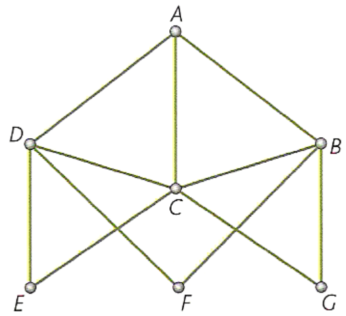



**Figura 119**

3. Um professor de História de uma escola da Guarda pretende que os seus alunos façam o circuito das aldeias históricas de Portugal. Tendo em conta o mapa seguinte, será que os alunos conseguem sair da Guarda, visitar as doze aldeias sem passar duas vezes pela mesma e regressar ao ponto de partida?


**Figura 120**

4. Na altura das férias, o Gervásio decidiu ocupar o tempo a trabalhar e assim ganhar algum dinheiro. Foi fazer distribuição de jornais e revistas na sua vila. Considere o grafo (ao lado), em que os pontos são locais de distribuição e as arestas são as vias de acesso possíveis entre cada ponto.

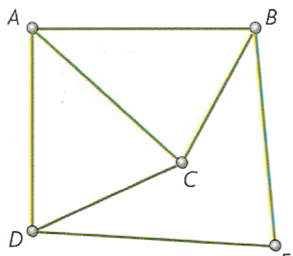



**Figura 121**

O Gervásio quer ganhar algum tempo e pretende passar pelos postos de venda uma única vez, mas tem que partir e chegar ao mesmo ponto – o armazém (A).

4.1. Será que o consegue fazer?

4.2. Entretanto, houve uma ruptura de um cano na rua que liga o armazém a C. Sendo assim, será que consegue fazer o percurso nas mesmas condições?

5. O mapa que se segue mostra-nos a rede do Metropolitano de Lisboa.

   Tendo em conta que as linhas têm dois sentidos, consegue fazer um circuito hamiltoniano que comece e termine na Gare do Oriente, sem passar duas vezes por uma mesma estação e visitando Alvalade, Campo Grande e Marquês de Pombal? E se começar na Alameda?

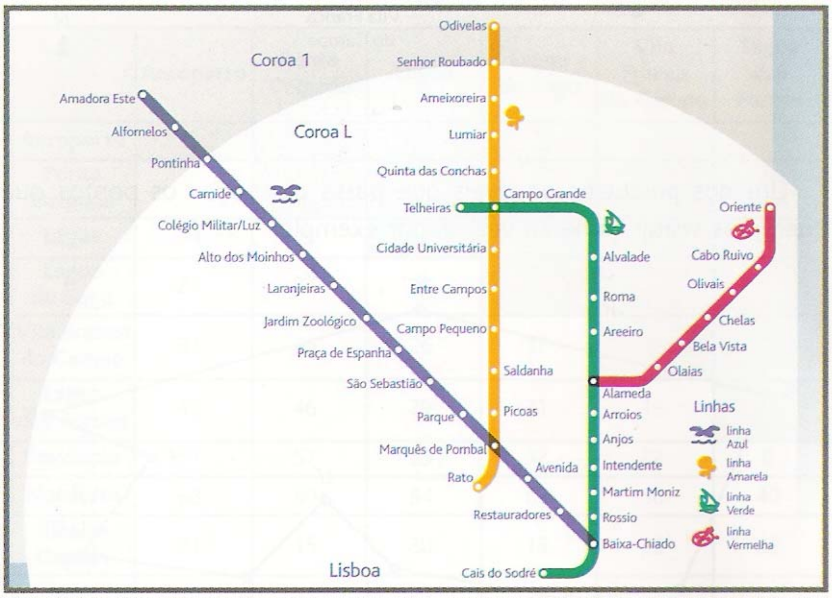



**Figura 122**

## <u>Avaliação:</u>

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

## <u>Materiais:</u>

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

## 6.3.6 Plano de aula n.º 6

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar em que casos os grafos bipartidos têm ciclos de Hamilton.
- Definir grafo ponderado.
- Identificar o melhor ciclo Hamiltoniano num dado grafo tendo em atenção o peso atribuído às arestas.
- Aplicar o algoritmo da Força-Bruta para encontrar o melhor ciclo Hamiltoniano.
- Determinar o número de ciclos Hamiltonianos em grafos completos

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 6:**

O António, que é delegado de informação médica, tem na sua agenda várias farmácias que deve visitar em diferentes cidades.

Para escolher o melhor percurso, em termos de distância, decidiu fazer um esquema (Figura 123):

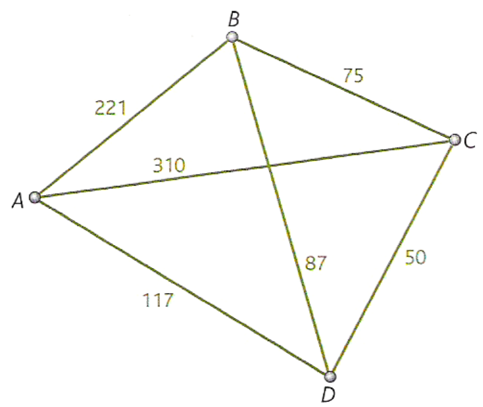



**Figura 123**

Supondo que sai da cidade $A$, qual é o percurso mais curto que lhe permite visitar todas as cidades e regressar a $A$?

**Exploração:**

- Introduz-se, através de um exemplo de um grafo bipartido, os ciclos Hamiltonianos em grafos bipartidos, começando por alertar os alunos que o grafo se designa por grafo bipartido, dando a seguinte definição:

  **Definição:**

  Um grafo $G=(V,E)$ diz-se bipartido quando o conjunto dos seus vértices $V$ puder ser dividido em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$ tais que qualquer aresta do grafo une $V_1$ a um vértice de $V_2$. Um tal grafo bipartido é usualmente representado por $G=(V_1,V_2,E)$.

  No caso em que cada vértice de $V_1$ é adjacente a todos os vértices de $V_2$ o grafo $G$ é chamado grafo bipartido completo. Sendo $m$ o número de vértices de $V_1$ e $n$ o número de vértices de $V_2$, então o grafo completo representa-se por $K_{m,n}$.

- Questiona-se os alunos se nos casos em que $m=n=3$, $m=4$ e $n=3$, $m=4$ e $n=2$, o grafo possui ciclos e caminhos de Hamilton. Através da representação de grafos nestas condições, os alunos são levados a concluir que:
  - Se $m=n$, então o grafo possui ciclos de Hamilton;
  - Se $|m-n|=1$, então o grafo possui caminhos e não possui ciclos Hamiltonianos;
  - Se $|m-n|>1$, então o garfo não posssui caminhos nem ciclos Hamiltonianos.

- Começa-se, neste momento, a explorar a actividade motivacional, referindo-se que o tipo de problema apresentado é um exemplo do conhecido Problema do Caixeiro-Viagente (PCV), dando uma noção geral deste tipo de problema. Alerta-se os alunos que os valores atribuídos a cada uma das arestas, que neste caso representam distâncias entre duas localidades, chamam-se *pesos.*

**Definição:**

Peso é um número que se atribui a cada uma das arestas de um grafo. Pode representar distâncias, custos, tempo, etc. A um grafo com pesos atribuídos chama-se *grafo ponderado*.

- Alerta-se os alunos para o facto de este tipo de problema consistir em encontrar um ciclo de Hamilton com início na cidade $A$ e com o menor peso possível, considerando todos os ciclos Hamiltonianos com inicio em $A$ e os respectivos pesos. Reforça-se a ideia de que se está na presença de um grafo completo e que, portanto, existirá ciclos Hamiltonianos.

  <u>Hipótese 1:</u>

  $A \xrightarrow[221]{} B \xrightarrow[75]{} C \xrightarrow[50]{} D \xrightarrow[117]{} A$ (total = 463 km)

  <u>Hipótese 2:</u>

  $A \xrightarrow[221]{} B \xrightarrow[87]{} D \xrightarrow[50]{} C \xrightarrow[310]{} A$ (total = 668 km)

  <u>Hipótese 3:</u>

  $A \xrightarrow[310]{} C \xrightarrow[75]{} B \xrightarrow[87]{} D \xrightarrow[117]{} A$ (total = 589 km)

  <u>Hipótese 4:</u>

  $A \xrightarrow[310]{} C \xrightarrow[50]{} D \xrightarrow[87]{} B \xrightarrow[221]{} A$ (total = 668 km)

  <u>Hipótese 5:</u>

  $A \xrightarrow[117]{} D \xrightarrow[87]{} B \xrightarrow[75]{} C \xrightarrow[310]{} A$ (total = 589 km)

  <u>Hipótese 6:</u>

  $A \xrightarrow[221]{} D \xrightarrow[50]{} C \xrightarrow[75]{} B \xrightarrow[221]{} A$ (total = 463 km)

- Conclui-se que o percurso mais curto é de 463 Km. Refere-se que se obteve percursos iguais dois a dois pelo facto de ser o mesmo percurso, mas em sentido contrário e que, no caso de se começar noutro vértice encontram-se exactamente os mesmos vértices pois, em termos de minimização do comprimento total do ciclo não é relevante o local onde se começa, mas sim a ordem das cidades a visitar.

- Refere-se que o procedimento usado pode ser representado por um algoritmo que é denominado por "*Algoritmo da Força-Bruta*".

  **Algoritmo da Força-Bruta:**

  - Gerar todos os ciclos Hamiltonianos possíveis (a partir de um determinado vértice).
  - Adicionar os pesos das arestas utilizadas em cada ciclo.
  - Escolher o ciclo para o qual a soma dos pesos das arestas percorridas é menor.

- Refere-se que é possível determinar o número de ciclos Hamiltonianos num garfo completo com $n$ vértices - $K_n$. Para tal, começa-se por escolher um vértice e a partir daí existem $n-1$ hipóteses para os segundo vértice, $n-2$ hipóteses para o terceiro vértice e assim sucessivamente, até se ter apenas um vértice para escolher.

  Então tem-se $(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times2\times1$ possibilidades. Este produto pode ser representado por $(n-1)!$, onde o ponto de exclamação lê-se *factorial* e é uma notação abreviada do produto de todos os números naturais desde um até esse número.

- Salienta-se que, embora existam $(n-1)!$ formas diferentes de escolher os $n$ vértices de modo a formarmos um ciclo Hamiltoniano, apenas metade correspondem a ciclos diferentes, donde se tem que, num grafo completo $K_n$ existem $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos Hamiltonianos.

- Apresenta-se uma tabela como exemplo, onde se pretende mostrar como é que o número de ciclos Hamiltonianos aumenta à medida que o número de vértices de um grafo aumenta.

| N.º de vértices | N.º de ciclos Hamiltonianos |
|---|---|
| 3 | $\frac{(3-1)!}{2}=\frac{2}{2}=1$ |
| 4 | $\frac{(4-1)!}{2}=\frac{6}{2}=3$ |
| 7 | $\frac{(7-1)!}{2}=360$ |
| 9 | $\frac{(9-1)!}{2}=20160$ |

- Questiona-se os alunos se consideram que este método pode ser considerado um bom método, pretendendo-se que reparem que é um processo bastante trabalhoso uma vez que é necessário considerar todos os ciclos Hamiltonianos que existem num grafo, não sendo praticável para problemas que envolvam grafos de dimensão superior a 5.

- Resolve-se os exercícios das actividades práticas.

**<u>Actividades Práticas:</u>**

1. A D. Eduarda, costureira, tem de visitar três das suas clientes para fazer umas provas. No grafo seguinte, os vértices representam a casa da D. Eduarda (E), e das suas clientes (A, B e C), e às arestas estão associadas distâncias (em metros) entre cada uma delas.

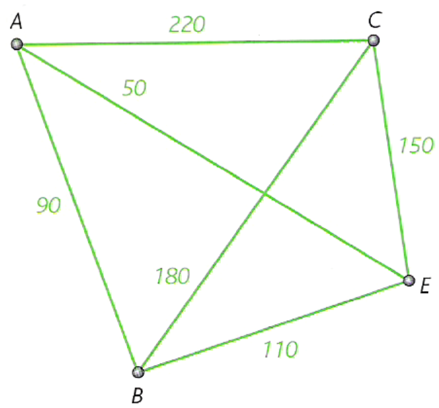



**Figura 124**

Qual é o percurso mais curto que a D. Eduarda pode fazer saindo de sua casa?

2. A Fátima é proprietária de uma engomadoria (F) e é o seu irmão Pedro quem recolhe e faz as entregas de roupa nas casas dos clientes. À segunda-feira, o Pedro faz a recolha na casa de três clientes G, H e I. os tempos, em minutos, entre cada casa estão representadas no grafo seguinte. Determine o percurso que demora menos tempo, saindo da engomadoria e regressando.

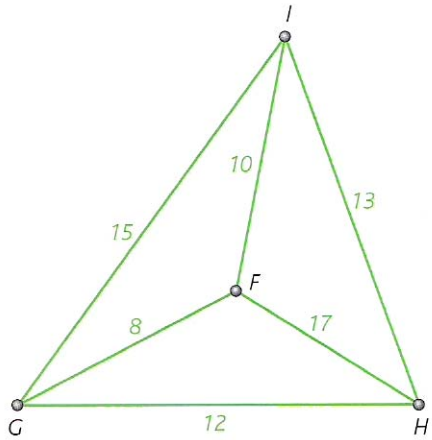



**Figura 125**

## Avaliação:

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

## Materiais:

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

## 6.3.7 Plano de aula n.º 7

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Definir algoritmo do vizinho mais próximo.
- Aplicar o algoritmo do vizinho mais próximo a problemas do tipo PCV.
- Definir o algoritmo do peso das arestas.
- Aplicar o algoritmo do peso das arestas a problemas do tipo PCV.
- Encontrar uma solução próxima da solução óptima (ou a óptima) na resolução de peroblemas.

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 7:**

Um vendedor de material informático tem de visitar empresas em diversos locais do país.

No grafo seguinte estão indicadas as cidades a visitar, bem como as distâncias entre elas (em km):

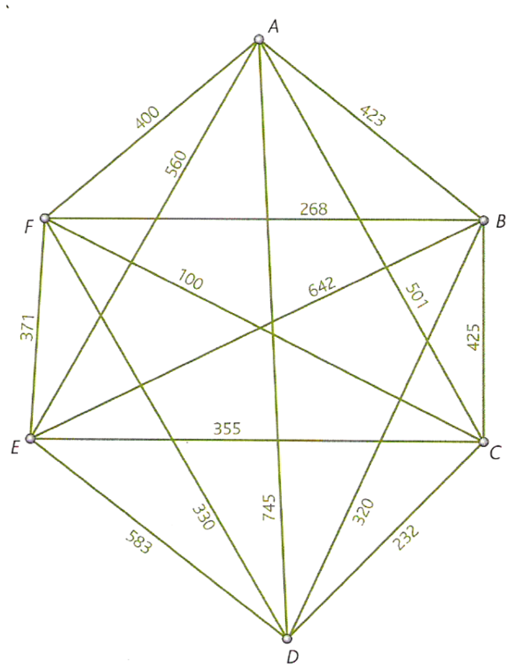



**Figura 126**

**Exploração:**

- Inicia-se a resolução da actividade motivacional referindo-se que, tal como visto anteriormente, não é recomendável procurar uma solução óptima pelo algoritmo de Força-Bruta para problemas que envolvam grafos de dimensão superior a 5.

  Por isso, foram criados algoritmos que permitem resolver o problema rapidamente, sem recursos a computadores e cujo resultado sem garantia de ser a solução óptima ou o caminho mais curto, será uma solução próxima da solução óptima.

  **Algoritmo do vizinho mais próximo:**

  - Escolher um vértice para ponto de partida.
  - A partir deste vértice escolher uma aresta com o menor peso possível que esteja ligada a um dos vértices adjacentes ainda não visitados (se houver mais do que uma hipótese escolher aleatoriamente).
  - Continuar a construir o ciclo, partindo de cada vértice para um vértice não visitado segundo a aresta com menor peso.
  - Do último vértice não visitado, regressar ao ponto de partida.

- Começa-se a aplicar o algoritmo do vizinho mais próximo à actividade motivacional observando-se o seguinte percurso:

  $A \xrightarrow[400]{} F \xrightarrow[100]{} C \xrightarrow[232]{} D \xrightarrow[320]{} B \xrightarrow[642]{} E \xrightarrow[560]{} A$ (total=2254 km)

- Aplica-se o algoritmo, começando o percurso em cada uma das outras cidades:

  $B \xrightarrow[268]{} F \xrightarrow[100]{} C \xrightarrow[232]{} D \xrightarrow[583]{} E \xrightarrow[560]{} A \xrightarrow[423]{} B$ (total=2166 km)

  $C \xrightarrow[100]{} F \xrightarrow[268]{} B \xrightarrow[232]{} D \xrightarrow[583]{} E \xrightarrow[560]{} A \xrightarrow[501]{} C$ (total=2332 km)

  $D \xrightarrow[232]{} C \xrightarrow[100]{} F \xrightarrow[268]{} B \xrightarrow[423]{} A \xrightarrow[560]{} E \xrightarrow[583]{} D$ (total=2166 km)

  $E \xrightarrow[355]{} C \xrightarrow[100]{} F \xrightarrow[268]{} B \xrightarrow[320]{} D \xrightarrow[745]{} A \xrightarrow[560]{} E$ (total=2348 km)

  $F \xrightarrow[100]{} C \xrightarrow[232]{} D \xrightarrow[320]{} B \xrightarrow[423]{} A \xrightarrow[560]{} E \xrightarrow[371]{} F$ (total=2006 km)

- Conclui-se que o melhor percurso é o que corresponde a 2006 km, alertando-se que apesar de se ter escolhido a melhor opção em cada etapa não significa que seja a melhor opção para o problema. O grafo que representa esse percurso é:

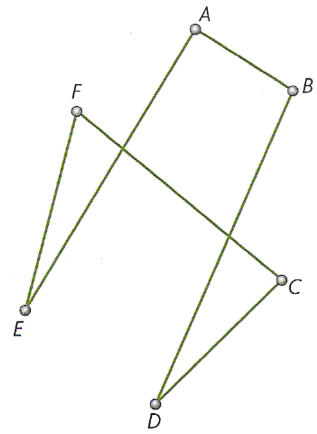



**Figura 127**

- Dá-se o segundo algoritmo a usar:

  **Algoritmo do peso das arestas:**

  - Ordenam-se as arestas pelos seus pesos.
  - Escolhe-se sucessivamente a aresta a que corresponde o menor peso, tendo em conta as seguintes restrições:
    - não permitir que se formem ciclos que não incluam todos os vértices;
    - nunca se pode escolher três arestas que coincidam num mesmo vértice.
  - Ordena-se a solução conforme o vértice de partida escolhido.

- Resolve-se a actividade motivacional aplicando este algoritmo. Começa-se por ordenar as arestas do grafo por ordem crescente de distâncias entre os diferentes vértices:

$F \xrightarrow[100]{} C; C \xrightarrow[232]{} D; B \xrightarrow[268]{} F; B \xrightarrow[320]{} D; D \xrightarrow[330]{} F; C \xrightarrow[355]{} E$

$E \xrightarrow[371]{} F; A \xrightarrow[400]{} F; A \xrightarrow[423]{} B; B \xrightarrow[425]{} C; A \xrightarrow[501]{} C; A \xrightarrow[560]{} E$

$D \xrightarrow[583]{} E; B \xrightarrow[642]{} E; A \xrightarrow[745]{} D.$

De seguida, começa-se por escolher a aresta $F \xrightarrow[100]{} C$, pois é a que tem peso mais baixo e, em seguida, junta-se as arestas $C \xrightarrow[232]{} D$ e $B \xrightarrow[268]{} F$ por esta ordem. A aresta a seguir com menor peso é a $B \xrightarrow[320]{} D$ mas se for usada fecha-se o ciclo, o que não pode acontecer, pois ainda há vértices por visitar (Figura 128)

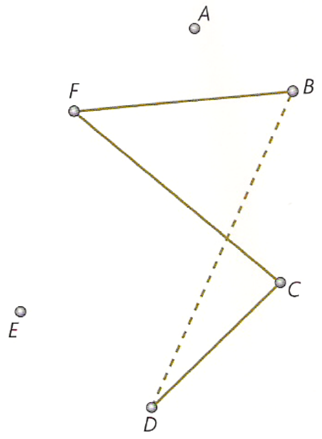



**Figura 128**

Assim, elimina-se a aresta $B \xrightarrow[320]{} D$ e, pela mesma razão, também não se usa a aresta $D \xrightarrow[330]{} F$.

A aresta seguinte é a $C \xrightarrow[355]{} E$, mas se for usada tem-se três arestas a concorrer no vértice $C$, o que é incompatível com a existência de um ciclo hamiltoniano (Figura 129).

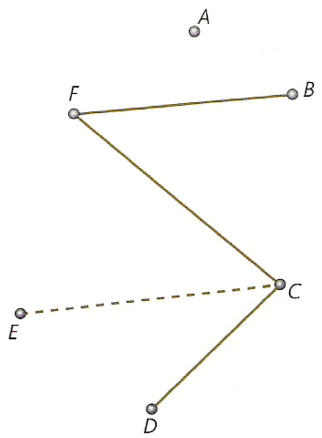



**Figura 129**

Por esta razão elimina-se as arestas $E \xrightarrow[371]{} F$ e $A \xrightarrow[400]{} F$.

A aresta a seguir é a $A \xrightarrow[423]{} B$, que se pode usar, pois não cria ciclos nem é a terceira aresta a sair do mesmo vértice. Depois elimina-se as arestas $B \xrightarrow[425]{} C$ (cria um ciclo) e $A \xrightarrow[501]{} C$ (ficam a coincidir três arestas em $C$, para além de criar um ciclo). Nesta altura o grafo tem o seguinte aspecto (Figura 130):

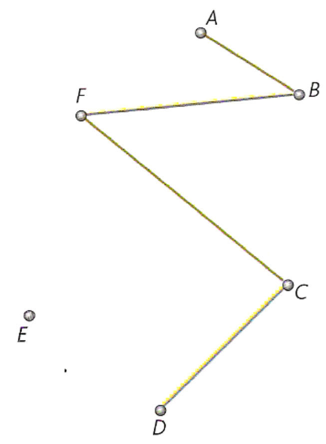



**Figura 130**

As arestas seguintes são $A \xrightarrow[560]{} E$ e $D \xrightarrow[583]{} E$, por esta ordem, as quais se pode usar, pois, apesar da aresta $D \xrightarrow[583]{} E$ fechar o ciclo, já não existem mais vértices para visitar. É também por isso que se eliminam as duas últimas arestas $B \xrightarrow[642]{} E$ e $A \xrightarrow[745]{} D$.

Obtém-se o grafo final (Figura 131):

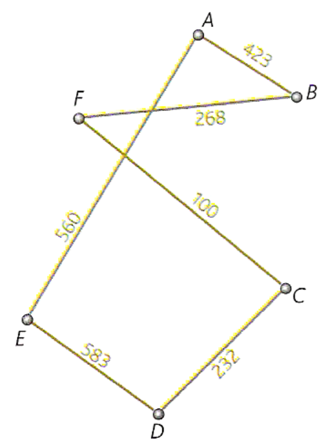



**Figura 131**

E a seguinte distância total:

$$100 + 232 + 268 + 423 + 560 + 583 = 2166\,Km$$

- Deve-se referir que estes algoritmos dão de rápida aplicação, embora nem sempre permitem obter a solução óptima. Neste problema, o algoritmo do vizinho mais próximo dá uma solução melhor do que o algoritmo do peso das arestas, no entanto, noutros casos acontece o contrário. Isto significa que não se pode concluir que um é melhor do que o outro.

- Resolvem-se os exercícios das actividades práticas.

**Actividades Práticas:**

1. O Eng. José Alexandre é representante de uma marca de chapas de aço, tendo regularmente necessidade de visitar cinco cidades cujas distâncias estão representadas no quadro seguinte:

| Km | Aveiro | Braga | Coimbra | Porto | Viseu |
|---|---|---|---|---|---|
| Aveiro | | 122 | 58 | 68 | 95 |
| Braga | 122 | | 170 | 53 | 186 |
| Coimbra | 58 | 170 | | 117 | 96 |
| Porto | 68 | 53 | 117 | | 144 |
| Viseu | 95 | 186 | 96 | 133 | |

Sabendo que parte de Aveiro, tem de visitar todas as cidades e regressar a Aveiro, qual a menor distância que poderá percorrer?

Resolva o problema usando:

1.1. O algoritmo do vizinho mais próximo;

1.2. O algoritmo do peso das arestas.

2. O Eng. José Dias foi incumbido de representar a sua empresa na zona sul de Portugal. No grafo seguinte estão representadas as distâncias entre as cidades capitais de distrito.

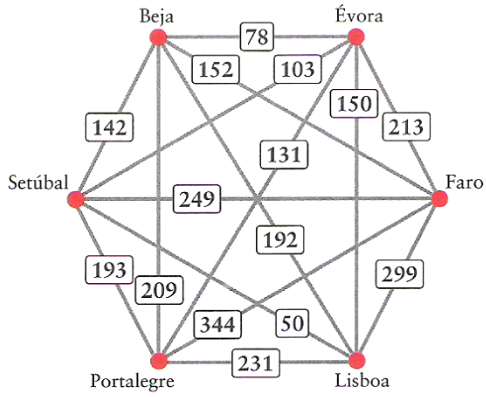



**Figura 132**

2.1. Sabendo que vai alugar um carro em Lisboa, onde terá de o devolver, e que esse carro consome seis litros de gasóleo aos 100km, e que um litro de gasóleo custa 0,80€, determine qual o custo que ele prevê gastar. Utilize o algoritmo que achar mais apropriado.

2.2. O Eng. José Dias costuma almoçar durante as viagens entre duas cidades, tendo já restaurantes conhecidos e habituais entre as mesmas. No grafo seguinte estão representados os custos em euros de cada uma dessas refeições. Pretendendo gastar o menos possível, irá manter o trajecto anterior? Justifique convenientemente a resposta.

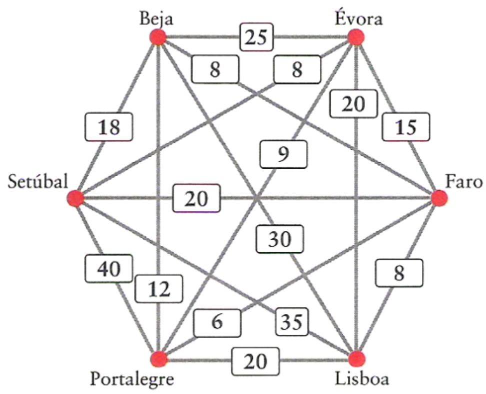



**Figura 133**

3. O desenho ao lado representa a planta do estaleiro de uma grande empresa onde estão assinalados os locais para instalar depósitos de combustível. Os depósitos deverão ser ligados uns aos outros em ciclo para a distribuição centralizada dos combustíveis. Sabe-se que cada quadrado da grelha tem 100 metros de lado e que as tubagens deverão ser colocadas verticalmente ou horizontalmente, conforme a grelha.

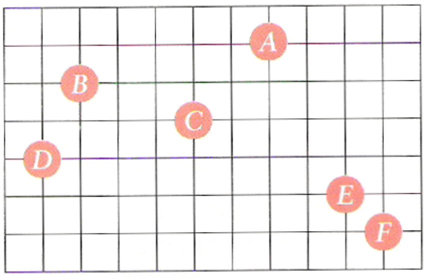



**Figura 134**

3.1. Complete a seguinte tabela das distâncias entre cada depósito.

| metros | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | |
| B | | | 500 | | | |
| C | | | | | | |
| D | | | | | | |
| E | | | | | | 200 |
| F | 900 | | | | | |

3.2. Usando o método do peso das arestas, determine a maneira mais económica de ligar todos os depósitos, sabendo que os fornecimentos são feitos a partir do depósito. Note-se que o sistema de bombagem exige que se feche o ciclo e o último depósito seja ligado a A.

3.3. Depois de determinada a solução, calcule o custo sabendo que:

- Um tubo de 100 m custa 500 euros;
- Um tubo de 200 m custa 950 euros;
- Um tubo de 500 m custa 2300 euros;
- Os tubos não podem ser cortados;
- Cada curva e cada união para ligar os tubos custam 100 euros.

**Avaliação:**

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

**Materiais:**

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

### 6.3.8 Plano de aula n.º 8

**Objectivos:**

O aluno deve ser capaz de:

- Definir árvore.
- Definir árvore geradora mínima.
- Definir e aplicar o algoritmo de KrusKal na determinação a árvore geradora mínima de um grafo.

**Formato de ensino:**

Discussão e exploração no grupo turma.

**Actividade motivacional 8:**

Cinco amigos, em casas diferentes, pretendem ligar os seus computadores em rede. Para isto ser possível não é necessário que cada computador esteja ligado aos quatro restantes simultaneamente, o que é preciso é que haja uma ligação que permita a comunicação entre quaisquer dois computadores. Assim, o que pretendemos saber é qual é o menor número de ligações a fazer, e entre que computadores, de modo a que sejam abrangidas todas as máquinas.

**Exploração:**

- Introduz-se a definição de árvore referindo-se que o método das árvores é também uma forma de organizar o raciocínio no sentido de encontrar circuitos de Hamilton.

  **Definição:**

  Uma árvore é um grafo conexo e sem circuitos.

- Usando a actividade motivacional 6, apresentada anteriormente, em que se pretendia sair da cidade A e determinar o percurso mais curto visitando todas as cidades e regressando a A, aplica-se este método de forma se torne mais explícito.

Assim:

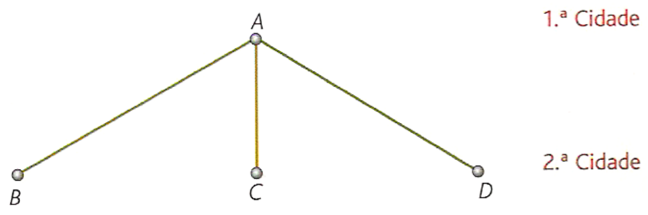



**Figura 135**

Chegados à segunda cidade, existem duas escolhas para se prosseguir para uma terceira cidade:

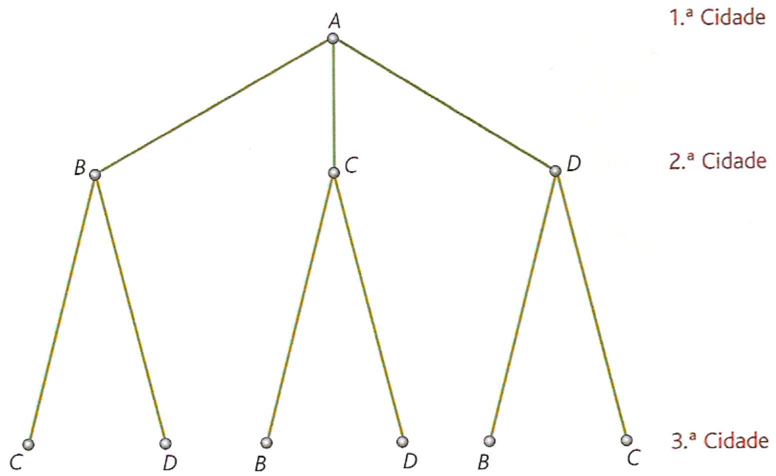



**Figura 136**

A partir de qualquer uma das possíveis terceiras cidades, só existe uma escolha, pois já só há uma cidade que falta visitar antes de regressar á cidade A. Assim, tem-se uma árvore com todos os percursos possíveis e as respectivas distâncias.

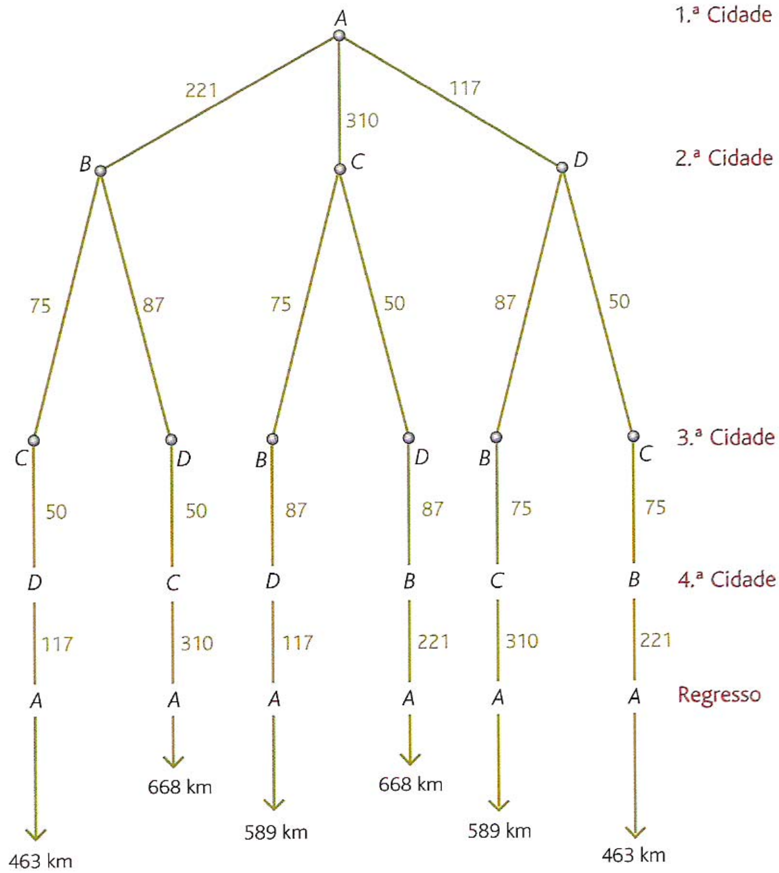



Figura 137

- Começa-se, neste momento, a explorar a actividade motivacional, considerando o grafo seguinte, em que os vértices correspondem às casas e as arestas todas as ligações possíveis.

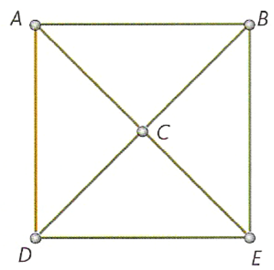



Figura 138

Os alunos poderão apresentar vários grafos que representem soluções do problema, entre os quais, os representados seguidamente:

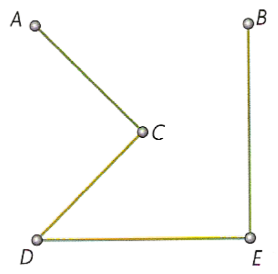



**Figura 139**

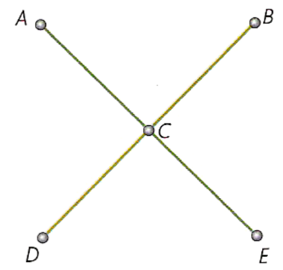



**Figura 140**

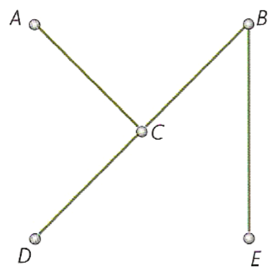



**Figura 141**

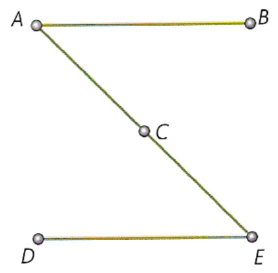



**Figura 142**

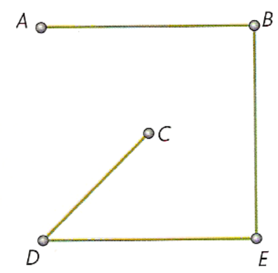



**Figura 143**

- Refere-se que, aos grafos que abrangem todos os vértices do grafo inicial mas utiliza apenas algumas arestas, chama-se *árvore abrangente* e dá-se a definição:

  **Definição:**

  Uma árvore abrangente (ou geradora) é uma árvore que contém todos os vértices de um dado grafo.

  Salienta-se que, uma vez que em qualquer uma das árvores abrangentes apresentadas está implícito um circuito de Hamilton, este método também pode ser usado para resolver problemas do tipo PCV.

- Resolve-se os exercícios 1 e 2 das actividades práticas.

- Refere-se que o problema apresentado em relação à ligação dos computadores em rede pode também pôr-se relativamente a outras situações: canalizações de água ou gás, cabos de fibra óptica para telecomunicações (telefone, televisão por cabo, etc.), gasodutos que atravessam vários países, … Em qualquer uma destas situações, o objectivo principal é, não só servir da melhor forma, mas também minimizar os custos (sejam mão-de-obra, tempo ou distância). A principal diferença entre este tipo de problema e o PCV é que no último dos casos não temos de regressar ao ponto de partida: só temos de encontrar um percurso que visite todos os vértices sem criar circuitos. Neste caso está-se à procura de uma árvore especial, a árvore abrangente mínima.

**Definição:**

Uma árvore abrangente mínima é uma árvore em que a soma dos pesos das arestas é mínima.

- Alerta-se para o facto de, ao contrário do que acontecia nos ciclos hamiltonianos onde os algoritmos usados podiam não conduzir à melhor solução, para encontrar a árvore abrangente mínima existe um algoritmo que garante que o resultado obtido é sempre solução óptima. Este algoritmo foi apresentado pela primeira vez por Joseph Kruskal para solucionar um problema de matemática pura, proposto por um matemático checoslovaco.

  **Algoritmo de Kruskal:**

  - As arestas do grafo vão-se unindo por ordem crescente dos pesos, desde que não se formem circuitos e se garanta que no final todos os vértices estão na árvore.

- Apresenta-se um exemplo concreto da aplicação deste algoritmo, indicando todos os passos da resolução:

  "Uma fábrica pretende instalar canalizações de gás natural para fornecer cinco edifícios que fazem parte do complexo fabril. O grafo seguinte fornece indicações sobre as distâncias (em dezenas de metros) entre os edifícios:

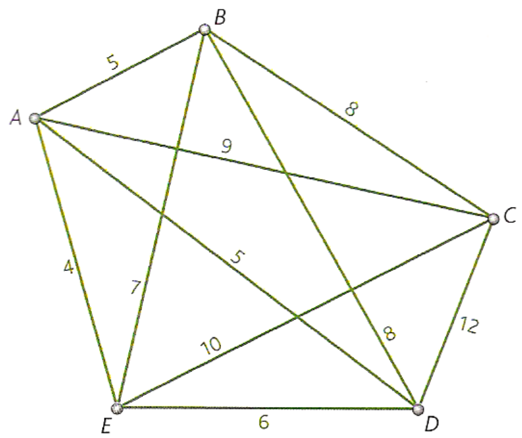



**Figura 144**

Qual é a melhor solução para a instalação, isto é, qual é a alternativa que utiliza menos canalização?”

Começa-se por colocar as arestas por ordem crescente:

$A \xrightarrow[4]{} E; A \xrightarrow[5]{} B; A \xrightarrow[5]{} D; D \xrightarrow[6]{} \mathrm{E}; B \xrightarrow[7]{} E; B \xrightarrow[8]{} D; B \xrightarrow[8]{} C;$

$A \xrightarrow[9]{} C; C \xrightarrow[10]{} E; C \xrightarrow[12]{} D.$

Ligam-se as arestas por ordem crescente, usando as arestas

$A \xrightarrow[4]{} E; A \xrightarrow[5]{} B; A \xrightarrow[5]{} D$ e rejeitando $D \xrightarrow[6]{} \mathrm{E}; B \xrightarrow[7]{} E; B \xrightarrow[8]{} D$

porque formam circuitos (Figura 145):

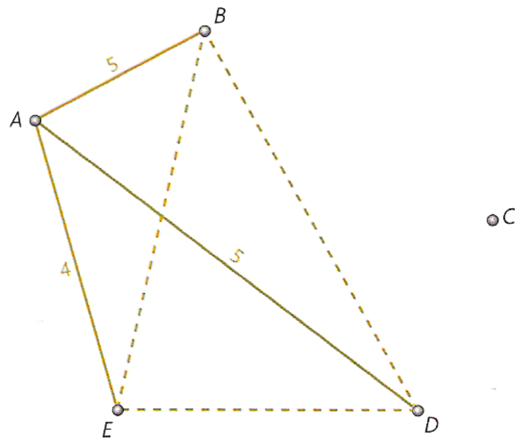



**Figura 145**

A aresta que se usa a seguir é $B \xrightarrow[8]{} C$; e, como já se tem todos os vértices em conexão, eliminam-se todas as arestas restantes. A árvore abrangente mínima tem a forma da Figura 146, com um comprimento mínimo de $4+5+5+8=22$, 22 dezenas de metros, ou seja, 220 metros.

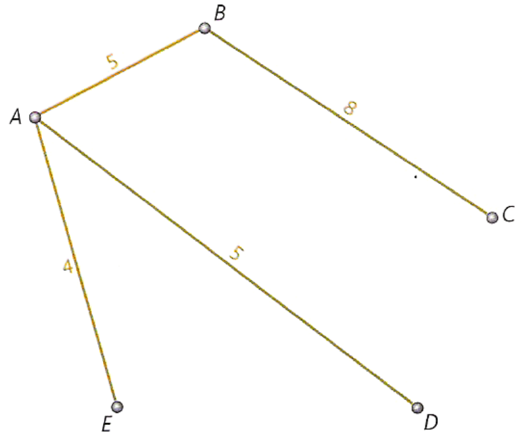



**Figura 146**

- Refere-se que, por vezes, ao aplicar o algoritmo de Kruskal existe a necessidade de unir arestas de peso igual, sendo a ordem pela qual são usadas aleatória, podendo-se finalizar com árvores abrangentes diferentes, mas sendo sempre mínimas e com os mesmos custos totais.

- Resolve-se os exercícios 3 a 5 das actividades práticas.

**Actividades Práticas:**

1. Quais dos seguintes grafos são árvores?

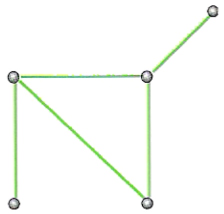


**Figura 147**

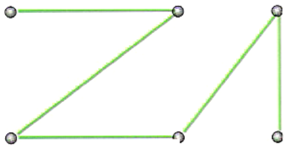


**Figura 148**

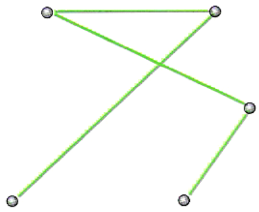


**Figura 149**

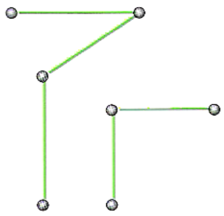


**Figura 150**

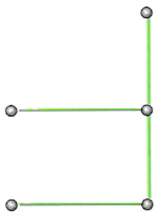


**Figura 151**

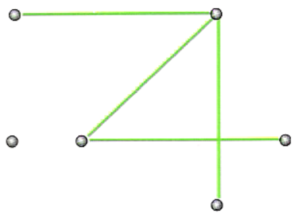


**Figura 152**

2. Encontre uma árvore geradora para cada um dos grafos seguintes.

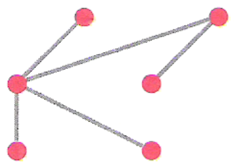


**Figura 153**

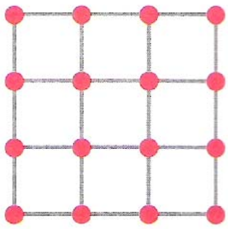


**Figura 154**

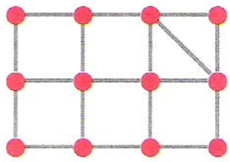


**Figura 155**

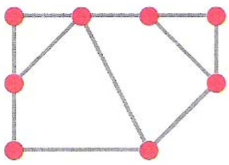


**Figura 156**

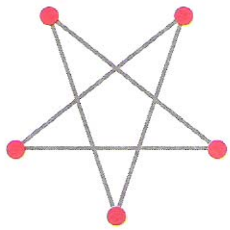


**Figura 157**

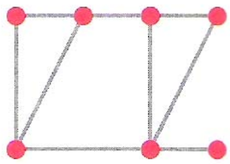


**Figura 158**

3. Um camião deve recolher resíduos tóxicos de sete instalações e ao fazê-lo deve percorrer a menor distância possível. A empresa responsável distribuiu ao condutor um esquema, com as instalações a visitar e as distâncias entre elas (em km), o qual está representado a seguir sob a forma de um grafo:

Determine o percurso mínimo e desenhe a árvore abrangente correspondente.

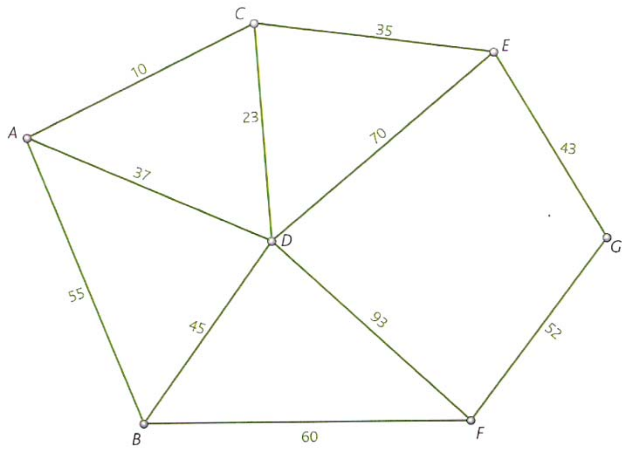



**Figura 159**

4. Use o algoritmo de Krukal para encontrar a árvore geradora mínima da seguinte tabela:

| Km | Lisboa | Madrid | Roma | Viena | Paris | Oslo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lisboa | | 650 | 2686 | 3222 | 1973 | 4011 |
| Madrid | 650 | | 2093 | 2572 | 1323 | 3361 |
| Roma | 2686 | 2093 | | 1256 | 1471 | 2559 |
| Viena | 3222 | 2572 | 1256 | | 1309 | 2005 |
| Paris | 1973 | 1323 | 1471 | 1309 | | 1814 |
| Oslo | 4011 | 3361 | 2559 | 2005 | 1814 | |

5. Pretende-se ligar por cabo de fibra óptica as cidades A, B, C, D, E, F e G, representadas no grafo seguinte.

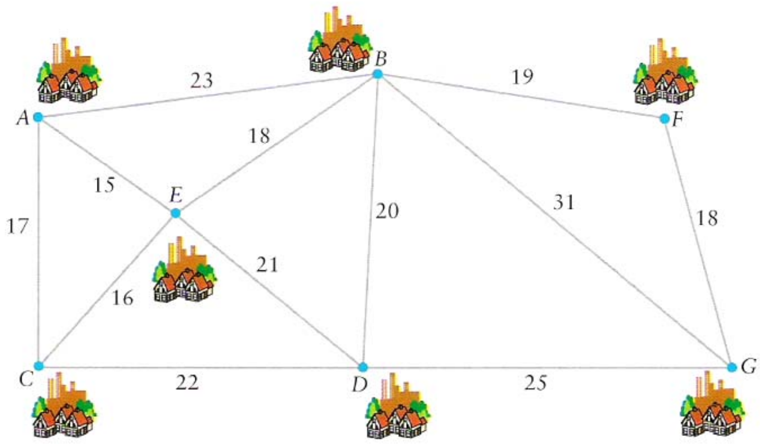



**Figura 160**

Dado o custo do material, pretende-se encontrar a árvore abrangente mínima.

Aplique o algoritmo de Krukal para resolver o problema.

## Avaliação:

O professor avalia a postura, comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

## Materiais:

Giz branco, apagador, quadro, manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da Asa e da Areal Editores

# Conclusão

Com o decorrer dos tempos, tem-se verificado que os países mais desenvolvidos têm vindo a sofrer a transformação duma sociedade industrial para uma sociedade de informação/comunicação. O ritmo desta mudança tem sido de tal forma acentuado que actualmente é possível constatar que a produção, armazenamento, transmissão e difusão de informação (oral, escrita, gráfica, numérica) é muito superior que a que qualquer ser humano pode apreender. Este movimento de informação impõe o recurso a tecnologia da mais avançada e provoca profundas mudanças no nosso dia-a-dia.

Os objectivos que a Escola quer alcançar devem ser o reflexo das necessidades da sociedade onde os alunos se encontram inseridos. Relativamente à Matemática há que reflectir quais os aspectos que temos necessidade de transmitir aos alunos bem como os conceitos e processos que estes devem dominar. Assim, o sistema escolar deve propiciar um ensino que possibilite ao aluno:

- decidir que informação é relevante para o estudo e compreensão de um determinado problema e qual a melhor forma de apresentar essa informação;

- dar a resposta mais adequada, apesar da multiplicidade de situações novas que irão encontrar durante a sua vida e a que têm de dar resposta imediata.

O grande desafio do nosso sistema escolar é conseguir que os alunos aprendam a pensar, a resolver problemas, a enfrentar novas situações, a aceder à informação e a tratá-la de forma adequada.

Já em 1991 o *National Council of Teachers of Mathematics* propunha que se incluíssem tópicos de Matemática Discreta nos currículos [12]. Na Norma 12, para os níveis de escolaridade do 9.º ao 12.º ano, podíamos encontrar referências tais como:

- (…) *em contextos geométricos e algébricos, os alunos devem ter numerosas oportunidades para investigar situações problemáticas deste tipo, e também de situações que envolvam três redes de comunicação, diagramas de circuitos, torneios desportivos, esquemas de produção e relações matemáticas…que podem ser modeladas e analisadas a partir de grafos. Grafos particulares, chamados árvores, são* *usados frequentemente na resolução de problemas de probabilidades e na representação da prioridade das operações nas expressões algébrica…;*

- (…) *O pensamento recursivo aplica-se também em muitos contextos geométricos. Por exemplo, para determinar o número máximo de regiões que são designadas no plano por n rectas, não paralelas duas a duas e que se intersectam em pontos diferentes…*

Nos currículos portugueses, a Teoria do Grafos é apenas abordada na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, destinada ao Curso Científico-Humanístico de Línguas e Humanidades e ao Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

Segundo o ministério da Educação, "*esta disciplina pretende desempenhar um papel incontornável para os estudantes dos cursos referidos, contribuindo para uma abordagem tão completa quanto possível de situações reais*…"[15]. Para além disso, através desta disciplina pretende-se que os alunos adquiram *"experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras actividades"*[15] assim como contribuir para a Educação para a cidadania.

De facto, pelo que pude constatar, a abordagem feita pelos manuais ao tema "Modelos de Grafos" sustenta-se sobretudo em problemas da vida real, o que realmente me parece contribuir para um maior interesse por parte dos alunos.

Este tema é apenas abordado nesta altura pois até ao final do 3.º ciclo estudam-se conceitos base gerais que são necessários posteriormente no Ensino Secundário em cursos como o Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias. No entanto, impõe-se a questão "Será que o tema Modelos de Grafos também não poderia fazer parte do currículo referente ao 3.º ciclo?".

Embora considere que o tema seja bastante interessante, parece-me que os alunos nessa fase ainda não se encontram a um nível cognitivo que lhes permita entender e sobretudo visualizar determinadas noções necessárias à compreensão da Teoria dos Grafos.

Segundo Piaget, entre os 12 e os 16 anos, os adolescentes começam a desprender-se do real, sem precisar de se apoiar em factos, ou seja, começam a pensar e a entender o abstracto e a deduzir mentalmente sobre várias hipóteses que se colocam.

Assim, parece-me correcto que os Modelos de Grafos sejam abordados nesta altura pois todos os alunos já devem ser capazes de entender e encontrar soluções para os problemas apresentados.

Por outro lado, considerando a forma como este tema tem aplicabilidade na vida real, e sendo dois dos objectivos gerais dos programas de ensino a preparação para a vida activa e aprender a aprender, acredito que a introdução da Teoria dos Grafos nos programas dos outros Cursos teria vantagens atendendo:

- às suas aplicações em diferentes áreas do saber;

- ao seu potencial para desenvolver aspectos como a visualização de situações e a esquematização de raciocínios;

- a que é um extraordinário meio de comunicação;

-a que desenvolve capacidades lógicas e de precisão bem como destrezas manuais.

A importância crescente de problemas relacionados, por exemplo, com questões de trânsito ou de negócios, que implicam tomadas de decisões leva-me a considerar que os grafos deveriam ser um dos tópicos integrados nos programas de Matemática. Estes constituem uma boa ferramenta para conceptualizar situações, entender esquemas e transferi-los para novas situações para além de exigirem poucas destrezas numéricas e de cálculo. Pelo facto de ser um tema de Matemática Discreta, os alunos não necessitam de muitos conhecimentos nem técnicas matemáticas específicas, o que pode levar a que um maior número de alunos discutam e trabalhem conceitos numéricos e operações básicas sem grandes dificuldades.

Um aspecto que no meu ponto de vista falha é relativo aos Objectivos Específicos, bem como às Indicações Metodológicas, dados pelo Ministério da Educação sobre o tema, que me parecem pouco cuidados e que mereciam um maior desenvolvimento. Este aspecto está bem patente na forma como os manuais apresentam o tema pois, embora de uma forma geral o abordem segundo uma mesma sequência, existem grandes discrepâncias ao nível dos conteúdos abordados e, sobretudo, da terminologia e notação utilizada. Note-se, por exemplo, que o manual da Porto Editora aborda muitos mais assuntos que os manuais das restantes editoras [5] [10] [11] [13] [16]. Como os objectivos apresentados pelo Ministério da Educação são muito gerais, o professor tem que subentender o que deverá leccionar ou não (acontecendo o mesmo com as editoras).

Apesar de considerar que os programas não têm de prever o seu modo de implementação, dado que o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais inclui temas que não são presentemente leccionados no ensino básico e secundário, parece-me importante que a discussão do programa fosse acompanhada da sua implementação. Além disso, parece-me igualmente fundamental que se equacione a formação e acompanhamento dos professores com vista ao sucesso da implementação dos novos programas.

Assim, ao planificar os planos de aula apresentados neste trabalho, houve não só o cuidado de escolher problemas que me pareceram mais aliciantes como também que estes abarcassem uma variedade apreciável de assuntos presentes nos diversos manuais. As actividades seleccionadas pretendiam fazer com que os alunos tivessem a oportunidade de expressar as suas ideias e que as pudessem desenvolver ao resolver os problemas.

A sequência das tarefas propostas foi feita segundo uma lógica pessoal do momento da realização deste trabalho, constituindo uma mera sugestão que cada professor poderá alterar.

O importante é que se compreenda que o professor tem um papel fundamental na planificação das suas aulas, devendo ponderar quais os objectivos a atingir, o nível etário e o desenvolvimento matemático dos alunos.

# Referências Bibliográficas


[1] Bollobás, “Graph Theory - An Introductory Course”, Springer, 1979.

[2] Cardoso, Szymanski & Rostami, “Matemática Discreta - Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos”, Escolar Editora, 2008.

[3] Chartrand, “Introductory Graph Theory“,Nova Iorque: Dover Publications Inc. ,1977.

[4] Chartrand & Oellermann, “Applied and Algorithmic Graph Theory“, McGraw-Hill Internacional Editions, 1993.

[5] Cruchinho & Simões, “Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11.º/12.º Ano”, Areal Editores, 2005.

[6] Departamento de Educação Básico “Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais”, Lisboa: Ministério da Educação, 2001

[7] Diestel, “Graph Theory”, Springer, 1997.

[8] Lipschutz & Lipson, “Matemática Discreta”, Colecção Schaum, Bookman, 2008

[9] Longo & Branco, “Caderno de exercícios de Matemática Aplicada às Ciências Sociais”, Texto Editores, 2005.

[10] Longo & Branco, “Matemática Aplicada às Ciências Sociais”, Texto Editores, 2005.

[11] Maciel, “Matemática Aplicada às Ciências Sociais”, Edições ASA, 2005.

[12] National Council of Teachers of Mathematics, “Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar”, Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

[13] Neves, Azevedo & Faria, “Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11.º ou 12.º”, Porto Editora, 2006.

[14] Neves, Azevedo & Faria, “Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11.º ou 12.º - Caderno de Actividades”, Porto Editora, 2006.

[15] Silva, Martins & Loura, “Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais”, Lisboa: Ministério da Educação, 2001

[16] Temporão, Cardadeiro & Peles, “Matemática Aplicada às Ciências Sociais”, Plátano Editora, 2005.

[17] Temporão, Cardadeiro & Peles, “Livro de exercícios de Matemática Aplicada às Ciências Sociais”, Plátano Editora, 2005.

[18] Wilson, “Introduction to Graph Theory”, AddisonWesley, 1996

[19] Wilson & Watkins, “Graphs – An Introduction Approach”, Wiley, 1990

[20] West, “Introduction to graph theory”, Prentice Hall, 1996