Angela Maria Pinto do Couto

A Formação Inicial de Professores do Ensino Básico e a Geometria: Um estudo de dois casos

TESE DE DOUTORAMENTO EM EDUCAÇÃO

Departamento de Ciências da Educação e do Património

Trabalho realizado sob a orientação da

Professora Doutora Maria Isabel Piteira do Vale

UNIVERSIDADE PORTUCALENSE

Maio, 2015

À memória do meu pai, por tudo o que me transmitiu, pelo seu amor incondicional e exemplo de vida que me tem orientado em todos estes anos. Foi por ti pai que consegui. Agradeço-te eternamente…

Agradecimentos

A passagem pela docência das cadeiras de Análise Matemática I e Análise Matemática II, entre 1980 e 1986, na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, aliada ao feedback dos seus alunos na FEUP, fez com que tomasse consciência de que tinha uma especial apetência para o ensino.

Em 1986 concorre à Escola Superior de Educação do Porto, onde até hoje se dedica a ensinar e a aprender a ensinar matemática.

No Curso de Mestrado que concluiu em 1995 na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, onde sob a orientação da Professora Doutora Teresa Mendes defende a tese intitulada "A adequação do *Software Through Pictures* na construção de Programas Educativos", toma consciência do potencial da tecnologia como auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Ao longo da sua docência na ESE/IPP relembra os preciosos momentos de discussão e reflexão com todas as suas colegas e seus alunos que muito contribuíram para aquilo que hoje é como professora.

À minha colega e amiga Cláudia Maia-Lima por ter permitido a implementação das tarefas desta investigação. Sem ti a recolha de dados não teria sido possível. Obrigada pela tua disponibilidade.

À minha orientadora e amiga Isabel Vale, sempre sábia e muito pertinente nos seus preciosos comentários e sugestões, agradeço toda a sabedoria e disponibilidade. Obrigada por me teres ensinado a crescer no meu trabalho.

Ao meu marido e filhas peço desculpa por todas as minhas muitas ausências.

RESUMO

Nas últimas décadas a educação tem sofrido mudanças que ainda hoje se estão a tentar perceber. Alguns professores não se encontram preparados para as necessidades de uma sociedade em permanente transformação. Os resultados dos sistemas de avaliação nacionais e internacionais mostram um fraco desempenho dos nossos estudantes particularmente em relação à Geometria. São inúmeras as variáveis que intervêm nestes resultados mas a prática docente é decisiva. Nesta conjuntura a formação inicial e a formação contínua de professores assumem uma importância fundamental.

A Geometria tem sido considerada como o conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática (NCTM, 2008). Como área favorável ao desenvolvimento do pensamento geométrico, a Geometria é um excelente recurso para representar e dar significado ao mundo que nos envolve (e.g., Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Battista, 2007; van Hiele, 1999; Veloso, 2008). E o seu ensino deve proporcionar a experimentação e a descoberta favorecendo o desenvolvimento de uma outra forma de raciocínio – o raciocínio geométrico.

Este estudo, realizado no âmbito da unidade curricular (UC) de Geometria do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma Escola Superior de Educação, teve como objetivo principal a identificação do conhecimento e do raciocínio geométrico dos futuros professores, num contexto natural de sala de aula, através da realização de testes de diagnóstico e da aplicação de um conjunto diversificado de nove tarefas desafiantes, bem como das suas atitudes em relação à Geometria. Enunciaram-se três questões orientadoras, a saber: (Q_1) Como se pode caracterizar o conhecimento geométrico dos estudantes, identificando as principais dificuldades ao longo dos testes e das tarefas?; (Q_2) Como se pode caracterizar, de acordo com os níveis de van Hiele, o raciocínio geométrico dos estudantes ao longo dos testes e das tarefas?; e (Q_3) Que atitudes manifestam os estudantes em relação às tarefas que realizaram e à UC de Geometria?

A investigação seguiu uma abordagem de natureza qualitativa de caráter descritivo e interpretativo. A recolha de dados, realizada numa turma do 2º ano, debruçou-se apenas sobre as quatro alunas que constituíam os dois grupos-caso. Os dados foram recolhidos em ambiente natural, durante as aulas da UC de Geometria que ocorreram no 2º semestre, recorrendo à observação da realização das tarefas propostas, às filmagens e gravações

efetuadas, aos documentos produzidos pelos alunos (testes e tarefas) e às várias entrevistas realizadas aos grupos-caso.

Antes da UC de Geometria os resultados deste estudo evidenciaram um baixo nível no conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos exigidos no programa de matemática do ensino básico (ME, 2007). Estas fragilidades relevam a pouca importância que tem sido dada à Geometria no ensino básico e secundário parecendo querer evidenciar que o conhecimento anterior estaria mais memorizado do que compreendido. Após a UC de Geometria houve um nítido progresso no conhecimento e compreensão dos conceitos geométricos, na linguagem matemática utilizada e uma diminuição nos erros cometidos mostrando que os conceitos geométricos evoluem com a instrução. No raciocínio geométrico há a destacar que num dos grupos-caso a evolução foi de mais de um grau no respetivo nível de van Hiele. Este resultado é bem mais otimista pois a investigação mostra que após programas intensivos de Geometria esse progresso é de apenas um grau na aquisição dos níveis de van Hiele.

As tarefas utilizadas neste estudo, para além de privilegiarem a componente visual, foram selecionadas de modo a poderem ser implementadas por estes alunos na sua futura atividade docente. O desempenho e a atitude dos grupos indicaram que tarefas que incluam o desafio, a componente visual e a aplicabilidade futura são determinantes para o envolvimento dos grupos e potenciam o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Este estudo corroborou que a motivação do estudante para se envolver no processo de ensino e aprendizagem é crucial. A vontade de querer aprender, a pretensão de abraçar a carreira docente, a consciência das dificuldades e a vontade em as superar foram fatores que pesaram na predisposição afetiva positiva para a Geometria.

Esta investigação permitiu recolher informação relevante para que se desenvolva uma reflexão aprofundada sobre a UC de Geometria e seu conteúdo, facilitando a sua reformulação e melhoria em aspetos relacionados com os temas a tratar e como os abordar.

Palavras-chave: formação inicial, conhecimento geométrico, níveis de van Hiele, tarefa, atitude.

ABSTRACT

In recent decades education has undergone changes that today we are still trying to understand. Some teachers are not prepared for the needs of a society in constant transformation. The results of national and international evaluation systems show a poor performance of our students, particularly in relation to Geometry. There are countless variables involved in these results but the teaching practice is decisive. At this juncture the pre-service and in-service teachers' development are of fundamental importance.

Geometry has been regarded as the mathematics curriculum content where students learn to reason and understand the axiomatic structure of mathematics (NCTM, 2008). As a favourable area for the development of geometric thinking, Geometry is an excellent resource to represent and give meaning to the world around us (e.g. Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Battista, 2007; van Hiele, 1999; Veloso, 2008). And its teaching should provide experimentation and discovery favouring the development of another form of reasoning - the geometric reasoning.

This study, carried out as part of the Geometry course of the bachelor's degree course in Basic Education of a School of Education, aimed at identifying the knowledge and geometric reasoning of future teachers, in a natural context of classroom, through diagnostic tests and the application of a diverse set of nine challenging tasks, as well as their attitudes towards Geometry. Three guiding questions were asked, namely: (Q_1) How can one characterize the geometrical knowledge of students, identifying the main difficulties during the tests and tasks?; (Q_2) How can one characterize, according to Van Hiele's levels, the geometric reasoning of students during the tests and tasks?; and (Q_3) Which attitudes do the students manifest in relation to the tasks carried out and the Geometry course?

The research followed a qualitative approach with a descriptive and interpretative character. The data collection, held in a 2nd year class, focused only on four students who made up the two-case groups. The data were collected in natural environment, during the classes of the Geometry course that occurred in the 2nd semester, resorting to the observation of all tasks proposed, the filming and recordings, the documents produced by the students (tests and assignments) and the various interviews to the case groups.

Before the Geometry course the results of this study showed a low level of knowledge and understanding of mathematical concepts and knowledge required in the elementary school mathematics programme (ME, 2007). These weaknesses reveal the low priority that has been

given to Geometry in primary and secondary education seeming to show that prior knowledge had been more memorized than understood. After the Geometry course, there was a clear improvement in knowledge and understanding of geometrical concepts, in mathematical language used and a decrease in mistakes showing that the geometrical concepts evolve through education. Regarding the geometric reasoning, it should be highlighted that in one case group the evolution was more than one grade within van Hiele's scale. This result is more optimistic because research shows that after intensive geometry programmes this progress is only one grade in van Hiele's acquisition levels.

The tasks used in this study, besides privileging the visual component, were selected so that they could be implemented by these students in their future teaching activity. The performance and the attitude of the groups indicated that tasks including challenge, a visual component and the future applicability are crucial to the involvement of groups and boost the development of geometric reasoning. This study corroborated that the student's motivation to engage in the process of teaching and learning is crucial. The will to learn, the wish to embrace the teaching profession, the consciousness of the difficulties and the will to overcome them were factors that weighed on the positive emotional predisposition to Geometry.

This research allowed to collect relevant information in order to develop an in-depth reflection on the Geometry course and its contents, making easier its redesign and improvement in aspects related to the topics to be addressed and the way to address them.

*Keyword*s: pre-service teacher education, geometric knowledge, van Hiele's levels, task, attitude.

SUMÁRIO

SIGLAS E ACRÓNIMOS

AGD – Ambiente de Geometria Dinâmica

APM – Associação de Professores de Matemática

DEB – Departamento de Educação Básica

DGIDC – Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

ESEPP – Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto

ICMI – International Commission on Mathematical Instruction

LEB – Licenciatura em Educação Básica

MACS – Matemática Aplicada às Ciências Sociais

ME – Ministério da Educação

MEC – Ministério da Educação e Ciência

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

NMAP - National Mathematics Advisory Panel

NRC – National Research Council

OECD – Organisation for Economic Cooperation and Development

PME - Psychology of Mathematics Education

PISA – Programme for International Student Assessment

PL – Práticas-Laboratoriais

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

SPM – Sociedade Portuguesa de Matemática

TP – Teórico-Práticas

TIMSS – Trends in International Mathematics and Science Study

UC – Unidade curricular

UNESCO - United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO I

APRESENTAÇÃO DO ESTUDO

Este capítulo começa por apresentar os motivos que orientam e contextualizam este estudo e a sua pertinência. Depois refere o problema que se pretende estudar assim como as suas questões orientadoras. No fim é feita uma súmula sobre a estrutura organizativa deste trabalho.

Orientação e Pertinência do Estudo

Socialmente é assumido que a formação em matemática dos professores do ensino básico tem uma importância determinante na qualidade da formação matemática dos nossos jovens. Reconhecendo que há um conjunto de outros fatores – nomeadamente relativos ao currículo, às condições materiais das escolas e a outras componentes da formação dos professores – que contribuem fortemente para a formação, há algumas lacunas na formação matemática dos futuros professores tanto nas Escolas Superiores de Educação como nas Universidades (Albuquerque et al., 2006).

A constatação da ausência de conceitos básicos estruturantes, em particular no âmbito da Geometria, nos estudantes futuros professores que desde 2007/08 ingressam e continuam a ingressar na Licenciatura em Educação Básica (LEB) e a experiência de quase três décadas de várias unidades curriculares que a investigadora tem vindo a lecionar, no âmbito da matemática e da didática da matemática aos vários cursos de formação inicial de professores, formação em serviço, complementos de formação e formação contínua na Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto (ESEPP), foram as motivações para esta investigação.

O novo modelo educativo - Processo de Bolonha - e as diretrizes ao nível da União Europeia mostram que não há uma tendência clara quanto à questão da formação de professores denotando-se um desequilíbrio de influências sobre as opções a tomar na orientação para as políticas dos estados-membros. Mas a UNESCO aconselha os governos a terem um empenho especial na importância dos professores da educação básica. Isto porque se o primeiro professor que o estudante encontra tiver uma formação deficiente ou for pouco motivado, as fundações sobre as quais se irão construir as futuras aprendizagens ficarão pouco sólidas. De acordo com o processo de Bolonha o novo modelo de formação de professores acarreta um problema porque, ao fazer uma formação de base de banda larga, permite que candidatos com várias preparações tenham acesso à formação para futuros professores. Ora muitos destes candidatos provêm da área das humanidades tendo consequentemente reduzida preparação matemática e/ou sem aproveitamento nas disciplinas de matemática. Outros provêm dos maiores de vinte e três anos e ainda outros do ensino profissional. Mas, mais grave que isso, há muitos estudantes que revelam não gostar de matemática e têm a ideia de que para ensinar matemática não é necessário saber mais do que aquilo que vão ensinar. Não é por isso de estranhar as enormes dificuldades que os estudantes demonstram na aprendizagem e que inevitavelmente se irão refletir na sua futura atividade de docência.

Por outro lado o então novo programa de matemática para o ensino básico (ME, 2007) introduziu diretrizes curriculares novas dando enfase a três capacidades transversais – resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático – e à necessidade de diversificação de tarefas e representações. Daí que segundo Ponte (2012) esta mudança de currículo tenha originado uma nova perspetiva do que é um professor especialista em Portugal pelo menos na educação básica, pois exige um perfil de professor do ensino básico diferente. Pretende-se que os futuros professores do ensino básico vejam a aprendizagem da matemática como matemática que faz sentido - portanto de raciocínio - e o ensino da matemática como resolução de problemas e tomadas de decisão (Lannin & Chval, 2013). Mas esta visão conflitua com a dos futuros professores que já possuem uma experiência de nove ou doze anos de ensino e aprendizagem da matemática. Este conflito leva a reações fortes pois os futuros professores experimentam a aprendizagem da matemática como a memorização de fatos e procedimentos. Por isso os formadores de professores necessitam de estratégias e ferramentas que consigam desafiar essas suas crenças. Nos cursos de formação inicial de professores quando se introduzem as tarefas a intenção é a de desafiar a perceção de que o ensino da matemática do ensino básico é *fácil* e não requer que um professor possua uma profunda compreensão matemática (Chval, 2004). Tarefas matemáticas projetadas com cuidado e capazes de se ligarem às futuras experiências dos futuros professores cumprem um papel importante na revelação dos desafios matemáticos e didáticos que irão enfrentar nas salas de aula, ajudando-os a confrontar as suas próprias crenças e atitudes (Lannin & Chval, 2013). Assim os futuros professores começam a reconhecer a complexidade da matemática do ensino básico e esta outra visão do ensino da matemática cria novos desafios. Os futuros professores experimentam algum incómodo ao tomarem consciência do muito que há para ser aprendido - o que não deixa de ser saudável.

Muitos educadores afirmam que para se ser capaz de ensinar matemática é essencial saber não só a matemática escolar em profundidade como o seu conhecimento didático (e.g., Ball, Bass, Sleep & Thames, 2007; Ma, 2009; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Wu, 1999) e ter a competência para mobilizar estratégias que levem o estudante a aprender (Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007). Para além do conhecimento do conteúdo e do didático Shulman (1986) refere também o conhecimento curricular mas identifica o conhecimento do conteúdo como um atributo indispensável para o professor. Como conhecimento do conteúdo Shulman refere a quantidade e a organização do conhecimento em si na mente do professor. Pensar corretamente sobre o conhecimento do conteúdo exige ir para além do conhecimento dos fatos ou conceitos de um dado domínio. Para Shulman os professores devem não só ser capazes de definir para os estudantes as verdades aceites num dado domínio, como devem também ser capazes de explicar por que é que uma determinada proposição é considerada verdadeira e como é que ela se relaciona com outras proposições dentro e fora da disciplina tanto na teoria quanto na prática. Em resumo o professor necessita não só compreender que algo é assim mas por que é que é assim, por que razão é que isso pode ser afirmado e sob que circunstâncias a nossa justificação pode ser enfraquecida ou até negada. Além disso é expectável que o professor entenda porque determinado tópico é particularmente central para uma disciplina enquanto outro pode ser algo periférico. Shulman destaca a importância deste conhecimento para ajuizar posteriormente sobre questões didáticas com enfase curricular.

Pode então dizer-se que o professor do 1º e 2º ciclo tem necessidade de um conhecimento e compreensão aprofundados da matemática que vão ensinar, dado que é nos primeiros anos que os conceitos são construídos e se criam e desenvolvem hábitos de pensamento e raciocínio matemático. Só assim se podem desenvolver mais tarde raciocínios de ordem superior. Braumman (2004) sublinha que é logo desde o início que o estudante cria o gosto ou aversão pela matemática, acrescentando que “as influências sociais e, principalmente, a influência do professor são cruciais” (p. 81). Também diz ser importante que o professor do 1º ciclo do ensino básico goste de matemática e consiga transmitir esse gosto. Acrescenta ainda que se deve apostar na formação matemática destes professores mas para a aposta ter sucesso devem ter a disposição e preparação desejáveis.

Isto leva-nos a pensar se na formação inicial se têm dado os passos corretos e se o modelo em vigor para a formação de professores do 1º e 2º ciclo será o ideal.

Nas décadas de 70 e 80 o ensino da Geometria foi desvalorizado tendo praticamente desaparecido do ensino básico. No final da década de 80 com o início da reforma dos programas de matemática foram criadas algumas condições para que a Geometria voltasse a ocupar o seu lugar no currículo (Veloso, 1998). Já no final da década de 90 as orientações curriculares indicavam outro rumo defendendo a Geometria como essencial para a criança conhecer o espaço em que se move. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideravam importante promover uma aprendizagem baseada tanto na experimentação como na manipulação. Em 1999 nos Estados Unidos houve um seminário sobre o ensino da Geometria onde foi dada uma maior atenção à Geometria em particular às transformações geométricas e seus efeitos.

A partir do final do século XX, no panorama mundial da matemática e do seu ensino, verifica-se de facto um movimento de reforço no ensino da Geometria tanto a nível nacional (ME, 2007; MEC, 2013) como internacional (ICMI, 2013; NCTM, 2001, 2002, 2006, 2008, 2009, 2012; NMAP, 2008; NRC, 2010). E em Portugal, relativamente aos programas previamente em vigor desde 1990/91, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007) começa não só a valorizar o sentido espacial e a visualização como reforça as transformações geométricas, passando este PMEB a ser um novo desafio para o professor.

A necessidade de se desenvolver um estudo focado na identificação e compreensão do modo como os futuros professores se relacionam com a Geometria justifica-se fundamentalmente por três ordens de razões. A primeira razão prende-se com os escassos estudos de investigação na área da formação inicial de professores em relação ao ensino e aprendizagem da Geometria. A segunda é que na escolaridade básica o estudo da Geometria foi durante cerca de três décadas praticamente ignorado, limitando-se quase à aplicação de um formulário para o cálculo de áreas e volumes. Porém nos atuais programas de matemática do ensino básico (ME, 2007; MEC, 2013) a Geometria passou a ter uma crescente importância. Isto trouxe consequências graves tanto para alguns dos professores que se encontram no terreno, mas sem uma preparação capaz de responder às exigências dos atuais programas, como para a formação inicial onde alguns dos estudantes não conseguem superar as lacunas do seu conhecimento em Geometria. A terceira razão prende-se com as potencialidades da Geometria. Segundo o NCTM (2008) a Geometria é “mais do que um conjunto de definições; consiste na descrição de relações e no raciocínio” (p. 44) sendo desde há muito considerada "como o conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática" (p. 44). Para Veloso (1998, 2012) e para Ponte e Serrazina (2000) a Geometria deve merecer uma atenção cuidada e um trabalho consistente ao longo de todo o ensino básico. Quando inicia o seu percurso escolar o estudante já possui conceitos rudimentares sobre o espaço e formas daí que para o NCTM (2003) estes conceitos sejam uma mais-valia para a construção do conhecimento geométrico e para o raciocínio a ser desenvolvido ao longo da sua escolaridade. E o professor tem de considerar que existem muitas formas de ver e que a Geometria é um meio singular para o estudante desenvolver e descobrir diferentes tipos de raciocínio (Duval, 1998). Segundo Van de Walle (2001) a compreensão e desenvolvimento do raciocínio geométrico aumentam a capacidade de resolução de problemas. Também para Ferreira e Vale (2013) é através do raciocínio que os estudantes aprendem matemática e "dão significado às ideias matemáticas (geométricas em particular) bem como aos procedimentos que executam" (p. 82). Contudo o desenvolvimento do pensamento geométrico depende muito do professor e do seu conhecimento, o que é corroborado por Gomes (2003) ao considerar o conhecimento do conteúdo do professor determinante na aprendizagem dos estudantes e por Jones (2000b) ao defender que o sucesso com o ensino da Geometria está dependente dos conhecimentos e do modo de ensinar do professor.

As comparações internacionais entre Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) e Programme for International Student Assessment (PISA) conduziram a intervenções com o objetivo de melhorar o desempenho dos estudantes. Prova disso são os recentes resultados quer nacionais quer internacionais (PISA, 2009, 2012) que evidenciam uma evolução positiva dos nossos estudantes face à matemática. De 2009 para 2012 Portugal subiu três posições no ranking aproximando-se da média internacional. Em relação à matemática em 2003 Portugal estava abaixo da Espanha, Estados Unidos, França, Hungria, Islândia, Luxemburgo, Noruega, República Checa ou Suécia mas em 2012 Portugal alcançou-os. Tudo isto são estímulos para se continuar nesta linha de evolução.

É verdade que as mudanças educativas põem em conflito o comportamento dos professores, as crenças e estilos de ensino mas segundo Bogdan e Biklen (2013) para que sejam efetivas é necessário compreender a forma como os professores vivenciam as situações e implicá-los nessa mesma mudança pois são eles que vão viver com ela.

Enquanto a base do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem está a crescer as condições que dificultam o avanço do sucesso ainda são predominantes (Loucks-Horsley, Love, Stiles, Mundry & Hewson, 2003). No ensino básico os fracos resultados têm sido nos itens relacionados com a Geometria o que nos obriga enquanto formadores de educadores matemáticos a dar uma atenção especial ao tema Geometria.

Parece pois que a Geometria é fundamental tanto na educação matemática dos nossos jovens logo no 1º ciclo como na formação matemática dos futuros professores do ensino básico.

Problema em Estudo e Questões Orientadoras

Do exposto pretendeu-se investigar de que forma é que se pode desenvolver nos estudantes da LEB uma sólida formação matemática e didática bem como uma atitude mais positiva em relação à matemática e às suas capacidades em Geometria, para que na sua atividade docente sejam capazes de despertar nos seus alunos o gosto pela matemática e consequentemente torná-los mais aptos em matemática.

Analisando as orientações curriculares a nível nacional exigidas pelo PMEB[1] (ME, 2007) e a nível internacional pelas várias normas emanadas pelo National Council of Theacher of Mathematics (NCTM), em relação à Geometria exigida aos professores de matemática do 1º e 2º ciclos do ensino básico, decidiu-se num contexto natural de sala de aula procurar identificar e compreender como os futuros professores se relacionam com a Geometria ao nível das suas atitudes e conhecimentos. Dentro desta problemática enunciaram-se as seguintes questões orientadoras:

Q_1. Como se pode caracterizar o conhecimento geométrico dos estudantes, identificando as principais dificuldades ao longo dos testes e das tarefas?

Q_2. Como se pode caracterizar, de acordo com os níveis de van Hiele, o raciocínio geométrico dos estudantes ao longo dos testes e das tarefas?

Q_3. Que atitudes manifestam os estudantes em relação às tarefas que realizaram e à unidade curricular (UC) de Geometria?

Estas questões foram formuladas com o objetivo de se estudarem os fenómenos educativos enunciados em toda a sua complexidade e no seu ambiente natural. Por isso o

[1] Este era o programa em vigor à data da recolha e análise de dados deste estudo (ME, 2007) pelo que será este o programa a que nos vamos referir e não ao atualmente em vigor (MEC, 2013).

estudo se desenvolveu em ambiente natural de sala de aula onde os participantes do estudo foram dois grupos-caso de duas alunas cada, a turma, a respetiva professora e a investigadora que teve um papel de observadora não participante. Este estudo ocorreu numa turma do 2º ano da LEB da ESEPP na UC de Geometria durante o ano letivo de 2011/12.

De acordo com as tendências mais comuns em investigação na área da educação matemática e atendendo à natureza do problema em estudo optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, no *design* de estudo de caso, mais concretamente, um estudo de caso múltiplo (Yin, 2009). Isto é, acompanharam-se duas díades que se procurou entender como vivenciavam as aulas de Geometria e sobretudo as várias tarefas que lhes foram propostas. A recolha de dados utilizou os métodos privilegiados na investigação qualitativa designadamente: as observações, as entrevistas semiestruturadas, os documentos escritos e as gravações áudio e vídeo, efetuando-se o tratamento dos dados através da análise de conteúdo e de acordo com o modelo proposto por Huberman e Miles (1994).

Organização do Trabalho

O relatório deste estudo desenrola-se ao longo de cinco *Capítulos* para além das *Referências* e dos *Apêndices.*

O capítulo I – *Apresentação do Estudo* – inclui o problema em estudo e a forma como se organiza o trabalho como também dá a conhecer a orientação e pertinência do estudo, apresentando as razões que estiveram na sua base e das quais decorre a importância deste trabalho.

O capítulo II – *Enquadramento Teórico* – inclui respetivamente *(1) a formação de professores*, *(2) o ensino e a aprendizagem da matemática* e *(3) o ensino e aprendizagem da Geometria*, apresentando-se uma revisão da literatura que discute conceitos teóricos fundamentais e refere estudos de investigação nas áreas relativas à formação de professores e ao ensino e aprendizagem da matemática em geral e da Geometria em particular, bem como apresenta resultados de estudos empíricos realizados em Portugal.

O capítulo III – *Metodologia* – encontra-se dividido em três secções: *(1) quadro investigativo em educação, (2)* as *opções metodológicas e procedimentais, e (3) a unidade curricular de Geometria, o teste e as tarefas*. Este capítulo descreve o quadro investigativo em educação dos últimos anos, discute a orientação metodológica da investigação de natureza qualitativa e interpretativa e a opção por um *design* de estudo de caso. De acordo com estas opções enunciam-se os procedimentos metodológicos nomeadamente as técnicas de recolha e análise de dados. Para além disso caracteriza-se a unidade curricular de Geometria e descrevem-se o teste e as tarefas utilizadas neste estudo.

O capítulo IV – *Os Casos* – alberga *a turma* e os dois estudos de caso – *o grupo AB* e *o grupo MS*. Este capítulo, que tem um forte registo descritivo, começa por caracterizar a turma e descrever o seu desempenho global no teste e nas tarefas. Cada um dos grupos-caso está estruturado em quatro secções: retrato do grupo; o grupo ao longo do teste; o grupo ao longo das tarefas; e o grupo ao longo da UC de Geometria.

O capítulo V – *Conclusões e Reflexões* – é o último capítulo onde se desenvolvem os processos de análise e interpretação. Este capítulo está organizado em quatro secções: análise comparativa dos dois grupos-caso; principais conclusões; limitações do estudo; e reflexões e perspetivas para investigações futuras. Na primeira retomam-se o problema, as questões, os conceitos basilares e a metodologia do estudo; na segunda apresentam-se as conclusões do estudo; na terceira apontam-se as limitações sentidas; e por último na quarta, para além de se tecerem recomendações tanto para a investigação como para a formação de professores, elabora-se uma reflexão que não é mais do que uma tentativa de compreender o próprio processo de desenvolvimento profissional da investigadora decorrente deste trabalho.

Para facilitar a leitura e estruturar as ideias fundamentais do estudo ao longo deste relatório foram elaboradas sínteses das secções principais.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

É durante a formação inicial que o estudante toma consciência de toda a problemática que envolve o ensino e a aprendizagem da matemática e, em particular, o ensino e aprendizagem da Geometria. Por isso este capítulo encontra-se organizado em três secções: a formação inicial de professores; o ensino e aprendizagem da matemática; e o ensino e aprendizagem da Geometria.

A Formação Inicial de Professores

> *O sucesso de qualquer plano para melhorar os resultados educacionais depende do professor que o realiza e das capacidades das pessoas atraídas para o campo e sua preparação. No entanto, há muitas dúvidas sobre como os professores estão a ser preparados e como devem ser preparados.*
> *(National Research Council, 2010, p. 10).*

Hoje vivem-se tempos nos quais a educação tem vindo a sofrer alterações que ainda estamos a tentar perceber. Por um lado a sociedade está em constante transformação tecnológica e precisa de um amplo sistema educacional, o que acarreta sérios problemas que dificultam o desenvolvimento de uma educação de qualidade. Também alguns professores não estão devidamente capacitados para lidar com as necessidades de uma tal sociedade. Por outro lado os resultados dos sistemas de avaliação nacionais e internacionais dos estudantes são fracos, especialmente em relação à matemática. São inúmeras as variáveis que intervêm nestes resultados mas a prática docente é decisiva. Neste contexto a formação inicial e a formação contínua de professores assumem um papel fundamental.

Segundo Moren e Santos (2011) "torna-se necessário reconhecer o professor como sujeito em permanente formação, ou seja, repensar a formação inicial dos docentes como uma etapa fundamental – mas não conclusiva - da sua capacitação profissional" (p. 1) e "a formação contínua para professores em sala de aula deve ser assumida como um segundo passo de igual importância” (p. 1). Para estas autoras a discussão sobre a formação de professores deve ser encarada sob dois pontos de vista diferentes mas complementares. Primeiro a formação inicial dos professores deve garantir a possibilidade de estes atuarem com competência na sua área de conhecimento assim como fornecer uma primeira visão das questões educacionais inerentes à atuação de qualquer professor. O segundo, voltado para a formação em serviço ou contínua, traz o desafio de encontrar um espaço de formação que valorize o trabalho docente numa perspetiva reflexiva tendo em conta o planeamento e a prática docente. Assim Moren e Santos (2011) destacam dois desafios importantes no desenvolvimento de programas de formação mais eficazes: na formação inicial “uma formação sólida nos conteúdos disciplinares volta a figurar como um dos aspetos centrais na formação de professores, pois dificilmente esta base poderá ser desenvolvida posteriormente” (p. 2); e no que à formação contínua diz respeito devem-se “fortalecer os saberes didáticos e disciplinares dos professores em atividade” (p. 2) de modo a superar uma formação inicial muitas vezes deficiente.

Diretivas das Instituições Internacionais

Muitas das decisões fundamentais ocorrem em fóruns supranacionais e os modelos, as orientações e os programas emanam de organizações internacionais. De certa forma somos testemunhas e artífices da construção de “uma nova ordem educativa mundial” cujos atores e ações têm uma natureza transnacional que responde a imperativos e prioridades de carácter global (Laval & Weber, 2002).

As organizações internacionais como a União Europeia (UE), a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico (OCDE), a plataforma intergovernamental como o Processo de Bolonha, a United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO) ou outros fóruns, constituem hoje espaços onde se desenvolvem tendências e coordenadas que influenciam as decisões políticas de âmbito nacional e internacional de reestruturação de todo um sector de ensino e da formação profissional ou da definição dos parâmetros de avaliação, organização e funcionamento dos sistemas de ensino, como se testemunha através do desenvolvimento daqueles processos ou com os estudos do PISA. Até 2010 o Processo de Bolonha envolveu quarenta e cinco países europeus na reestruturação radical do ensino superior, segundo sistemas de graus e de transferência de créditos, harmonizados e regulados através de sistemas de garantia de qualidade e de acreditação, a fim de permitir o reconhecimento mútuo (Antunes, 2005). O estudo do PISA é organizado pela OCDE para avaliar as competências dos jovens de quinze anos nas áreas da matemática, língua materna e ciências, envolvendo neste momento mais de trinta países dos vários continentes. O que é avaliado, o modo como é avaliado e a interpretação da informação são definidos pelos técnicos da OCDE que organizam listas ordenadas com os desempenhos dos jovens dos diversos países e desenvolvem análises sobre os sistemas educativos com base nestas avaliações.

Para a OCDE a inscrição da educação em relações institucionais fortes é o caminho para que o conhecimento seja produzido, partilhado e consolidado entre os professores e com os estudantes em comunidades de aprendizagem. Nesta perspetiva a OCDE acredita que é possível educar e apoiar o desenvolvimento de estudantes, professores e trabalhadores capazes de construir sistemas de inovação de que as escolas serão uma componente (Robertson, 2005).

A Comissão das Comunidades Europeias considera a educação e a formação elementos fundamentais para uma mudança económica e social. Bruxelas, na sua comunicação IP/07/1210 de 6 de agosto de 2007, através do Comissário Europeu responsável pela Educação, Formação, Juventude e Cultura, Ján Figel, declara que "a melhoria do ensino e da aprendizagem é essencial para a competitividade a longo prazo da UE, uma vez que uma mão-de-obra altamente qualificada é uma mão-de-obra mais eficiente" (p. 1). Contudo, diz ainda Ján Figel, "como os estudos demonstram, assistimos a uma evolução inquietante na UE, tendo a maioria dos estados-membros comunicado défices nas competências dos professores e dificuldade em atualizá-las" (p. 1). Nesta mesma comunicação a Comissão Europeia propõe aos estados-membros algumas orientações genéricas para o desenvolvimento das políticas e práticas, nomeadamente: garantir que todos os professores tenham acesso aos conhecimentos, atitudes e competências didáticas necessárias para executarem eficazmente as suas funções; assegurar que o ensino, a formação de professores e o seu desenvolvimento profissional ulterior sejam coordenados, coerentes e beneficiem de recursos adequados; promover uma cultura de reflexão e de investigação entre os professores; promover o estatuto e o reconhecimento da profissão docente; e apoiar a profissionalização do ensino.

Salientando o papel das políticas educativas e a sua contribuição para um mundo melhor, o relatório da Comissão Internacional de Educação da UNESCO para o século XXI (Delors et al., 1996) identifica as várias tensões que irão constituir a problemática deste século nomeadamente tensões entre “o global e o local; o universal e o singular; a tradição e a modernidade; (…) o extraordinário desenvolvimento e disseminação dos conhecimentos e as capacidades de assimilação por parte do homem” (p. 14). Encurtando o espaço e o tempo as novas tecnologias de informação e comunicação constituem um elemento facilitador para a redução dessas tensões, uma vez que proporcionam uma aproximação entre os diferentes aspetos da atividade mundial “o que confere, sem que necessariamente deem por isso, uma dimensão planetária a certas decisões” (p. 32).

A UNESCO recomenda também aos governos “especial empenho em reafirmar a importância dos professores da educação básica” (Delors et al., 1996, p. 136). Estes mesmos autores dizem que “se o primeiro professor que a criança encontra tiver uma formação deficiente ou se revelar pouco motivado, são as próprias fundações sobre as quais se irão construir as futuras aprendizagens que ficarão pouco sólidas" (p. 136).

Ao nível da UE e a partir da informação disponível é difícil discernir as tendências claras quanto à questão da formação de professores que excedam a constatação de que aparentemente as instâncias comunitárias são hoje atravessadas por uma diversidade de direções e situações e pelo desencontro e desequilíbrio de influências entre as opções a privilegiar como orientação para as políticas dos estados-membros. Em Portugal aquelas divergências parecem ter-se manifestado de uma forma bastante expressiva, produzindo propostas de sentidos muito distintos para a formação inicial de professores.

Os modos como as diversas opções encontram acolhimento e modelam as políticas e as realidades educativas revelar-se-ão seguramente em futuros desenvolvimentos. De momento não deixa de ser claro que, quer o novo modelo educativo, Processo de Bolonha, quer a agenda globalmente estruturada para a educação, nas suas múltiplas facetas e nas aceções propostas, parecem ter encontrado no país distintas comunidades interpretativas e de interesses que veiculam e filtram as tendências e pressões globais de modos diferentes. É demasiado cedo para que seja possível ir mais além neste esforço de compreensão do processo de elaboração das políticas globais, europeias e nacionais neste campo. No entanto podem-se percorrer processos e dependências do desenvolvimento das políticas das instituições internacionais na realidade do nosso país.

Os Modelos da Formação Inicial em Portugal

Em Portugal a Lei de Bases do Sistema Educativo (LBSE) – decreto-lei nº 46/86, de 14 de outubro - foi alterada pelo decreto-lei nº 115/97, de 19 de setembro, e ainda pelo decreto-lei nº 49/2005, de 30 de agosto de 2005. O 1º artigo da LBSE (1986) já se refere à lei como "o quadro geral do sistema educativo". A LBSE constitui a principal referência para o funcionamento das escolas dos diferentes níveis de ensino e para a formação de professores.

Para o enino básico a LBSE (1986) define três ciclos: 1º, 2º e 3º ciclo. No 1º ciclo refere que o ensino é globalizante e da responsabilidade de um único professor, que pode ser coadjuvado em áreas especializadas, perfazendo um total de quatro anos; no 2º ciclo o ensino organiza-se por áreas interdisciplinares, de formação básica durante dois anos, e desenvolve-se predominantemente em regime de professor por área; para o 3º ciclo a lei segue o modelo disciplinar, ou seja, estabelece como objetivo a aquisição sistemática e diferenciada da cultura moderna em diferentes dimensões, organizando-se segundo um plano curricular unificado que se desenvolve em regime de um professor especialista por disciplina ou grupo de disciplinas. Numa perspetiva global entre os três ciclos que constituem o ensino básico, a lei refere ainda que a articulação entre ciclos é sequencial e progressiva, tendo cada ciclo a função de alargar, completar e aprofundar o ciclo anterior.

Dada a especificidade da nossa investigação o contexto subjacente ao estudo inclina-se somente sobre o 1º e 2º ciclo do ensino básico.

No que diz respeito ao ensino básico a LBSE no seu artigo 7º apresenta um conjunto de grandes objetivos que depois particulariza para cada um dos ciclos de ensino. Para o 1º ciclo os objetivos específicos fundamentais são "o desenvolvimento da linguagem oral e a iniciação e progressivo domínio da leitura e da escrita, das noções essenciais da aritmética e do cálculo, do meio físico e social, das expressões plástica, dramática, musical e motora" (art. 8º, 3-a). Trata-se de uma formulação algo redutora que discrimina diversas áreas sem indicar com a devida clareza os objetivos educacionais efetivamente pretendidos. Agora pode entender-se porque é que a docência do 1º ciclo revela particulares debilidades nomeadamente na matemática e em ciências onde o desempenho dos nossos estudantes, em avaliações de cariz internacional TIMSS e/ou PISA, se tem revelado pouco satisfatório. E também é verdade que é precisamente nesta fase, no 1º ciclo, que se forma o estudante para saber observar, questionar e despertar o interesse e motivação para os estudos. É justamente no 1º ciclo que os estudantes necessitam de um bom desempenho do professor.

Para o 2º ciclo do ensino básico a lei aponta como objetivo a habilitação dos estudantes para assimilar e interpretar crítica e criativamente a informação de forma a possibilitar a aquisição de métodos de trabalho, de conhecimentos e atitudes que permitam o prosseguimento da sua formação. Aqui a tónica está mais nas capacidades e atitudes e na aquisição de métodos e instrumentos de trabalho do que nos conhecimentos de índole disciplinar. Neste ciclo como o ensino se organiza em áreas interdisciplinares, os antigos cursos de formação inicial de professores, particularmente a variante de Matemática e Ciências da Natureza, conseguia dar uma resposta cabal à exigência destas duas áreas disciplinares. Nesta variante do curso de professores do ensino básico só podiam ingressar os estudantes que tivessem frequentado, no ensino secundário, a área de Ciências – o que por si só já era garante de que os estudantes possuíam conhecimentos matemáticos. As outras variantes não respondiam à formação ideal para um professor do 1º ciclo, pois a ausência de conceitos matemáticos básicos estruturantes era enorme e as 120 horas de matemática mostravam-se insuficientes para se suprirem essas falhas. Houve uma alteração no figurino da formação inicial para professores do 1º ciclo com a criação da licenciatura de professor do 1º ciclo do ensino básico que funcionou entre 2000 e 2007. De que se tenha conhecimento a avaliação externa classificou esta licenciatura como excelente, pelo menos na Escola Superior de Educação do Porto, mas estes resultados nunca foram tidos em conta pelas entidades que tutelam a educação no nosso país. Preferiram fazer tábua rasa de toda uma experiência acumulada ao longo dos últimos vinte anos e adotaram o Processo de Bolonha.

Em 2001 o decreto-lei nº 240 de 30 de Agosto estabelece um perfil geral de desempenho profissional dos professores para todas as disciplinas e níveis de ensino que inclui quatro dimensões (Ponte, 2012): (1) o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem; (2) a participação em atividades escolares e o relacionar-se com a comunidade; (3) o desenvolvimento profissional ao longo da vida; e (4) o tratamento de assuntos profissionais, sociais e éticos. Era este o quadro orientador fundamental quer para a organização dos cursos que conferiam habilitação profissional para a docência quer para a acreditação de tais formações. Para Ponte (2006) na nossa sociedade são muitas as críticas à formação de professores e parece existir uma grande desconfiança em relação à qualidade da formação inicial de professores, havendo alguns que consideram que tudo o que se faz neste campo só contribui para agravar os problemas da educação. Os professores universitários das áreas de especialidade afirmam que muitos dos jovens professores não saem devidamente preparados nos conteúdos que irão lecionar. Os professores da área de educação lamentam que tudo o que ensinam acaba por ser esquecido pelo conservadorismo que reina nas escolas. Os novos professores lamentam que nada do que aprendem na formação inicial lhes serviu para coisa alguma e que só na prática profissional aprenderam o que é importante (Ponte, 2006a). Os professores já em serviço também pensam frequentemente que os jovens professores não vêm devidamente preparados no que seria necessário.

O atual modelo de formação de professores, enquadrado pelo decreto-lei nº 43/2007 de 22 de fevereiro[2], veio alterar profundamente o peso das unidades curriculares de matemática. E a alteração de 2005, que regula os cursos de licenciatura, mestrado e doutoramento, no âmbito do Processo de Bolonha, configura uma mudança em termos de duração do ciclo de formação, fazendo a ligação do curso de mestrado (2º ciclo de estudos) aos cursos de licenciatura (1º ciclo de estudos) no que se refere ao tempo de duração. A preparação dos futuros professores do ensino básico passa a incluir dois níveis: (1) três anos de preparação geral (onde se inclui a preparação em matemática) numa Licenciatura em Educação Básica (LEB); e (2) um ou dois anos de preparação profissional no ensino como preparação para ensinar no 1º ciclo ou no 1º e 2º ciclo do ensino básico. Até então era a instituição de ensino superior que estabelecia o número de créditos de cada área científica. Porém esta legislação uniformizou este comportamento determinando um número mínimo de créditos para cada uma das diferentes áreas científicas. Nas habilitações para a docência este decreto estabelece que a entrada na carreira de educador, professor do ensino básico e secundário, exige mestrado. Além disso, de forma diferenciada, estabelece tipologias de formação de acordo com as áreas de docência mas institui a habilitação de uma mesma formação para o educador, para o professor do 1º ciclo e para o professor do 2º ciclo. Deste modo qualquer estudante oriundo de qualquer área do ensino secundário pode frequentar a LEB e depois candidatar-se a um dos mestrados profissionalizantes que habilitam para a docência. Contudo este novo modelo de acordo com o processo de Bolonha acarreta outro problema ao fazer uma formação de base de banda larga, permitindo que candidatos com várias preparações tenham acesso à formação como futuros professores. Muitos dos estudantes que frequentam a LEB provêm da área das humanidades, tendo consequentemente reduzida preparação matemática e/ou sem aproveitamento nas disciplinas de matemática. Outros provêm do ensino profissional e ainda outros dos maiores de vinte e três anos. Este é apontado como um dos maiores problemas

[2] A partir do ano de 2015/16 entra em vigor um novo figurino para a formação de professores enquadrado pelo decreto-lei nº 79/2014 de 14 de maio.

deste novo modelo de formação de professores. Mais grave que isso, muitos deles confessam que não gostam de matemática e têm a ideia de que para ensinar matemática não é necessário saber mais do que aquilo que vão ensinar. Não é por isso de estranhar as grandes dificuldades que muitos estudantes demonstram na sua aprendizagem e que inevitavelmente se irão repercutir na sua futura atividade profissional de docência.

O programa de matemática para o ensino básico (ME, 2007) reflete diretrizes curriculares novas, enfatizando o desenvolvimento do sentido do número, o desenvolvimento do pensamento algébrico desde o 1º ciclo, o desenvolvimento do sentido espacial e a literacia estatística. Além disso o programa dá enfase a três *capacidades transversais* - resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático – e à necessidade de diversificação de tarefas e representações e de fazer um uso adequado da tecnologia. Esta mudança de currículo criou uma nova perspetiva sobre o que é um professor especialista em Portugal (Ponte, 2012).

Para se ser um bom profissional, capaz de ensinar matemática, é essencial saber matemática com profundidade porque o professor não pode ensinar aquilo que não conhece (e.g., Ball, Bass, Sleep & Thames, 2007; Ma, 2009; Wu, 1999) e, tal como sustentam Hill, Sleep, Lewis e Ball (2007), ter capacidade de mobilizar estratégias capazes de fazer com que os estudantes a aprendam. Já Ponte e Chapman (2008) defendem que para o professor ensinar bem tem de conhecer bem o conteúdo do que ensina, os estudantes e o contexto, conhecer as técnicas de ensino mas fundamentalmente o professor ensina o que ele é.

É do senso comum que os professores de matemática do 3º ciclo têm que saber muita matemática e não precisam de saber didática. E os do 1º e 2º ciclo não precisam de saber matemática mas necessitam de didática. Ora isto não faz sentido nenhum, pois todo professor tem de saber matemática e didática uma vez que não se ensina didática sem matemática. E é nos primeiros anos que os conceitos são construídos e se desenvolvem e estabelecem hábitos de pensamento e raciocínio matemático para mais tarde se elaborarem raciocínios de ordem superior.

Em 2005 a Noruega introduz requisitos mínimos para evitar o recrutamento de estudantes provenientes do ensino secundário com notas baixas. Esses requisitos mínimos incluem uma média igual ou superior a 3.5, numa escala que vai de 1-6 e onde 6 é o grau mais alto, e terem positiva a matemática e a língua materna. De acordo com Munthe, Malmo e Rogne (2011) se esses requisitos estivessem em vigor nos anos anteriores (2001/03), as quatro instituições das quatro maiores cidades teriam de rejeitar 30-50% dos estudantes que foram admitidos. Parece-nos que esta foi uma medida muito corajosa do governo norueguês.

Braumman (2004), referindo-se à importância do gosto pela matemática e pelo seu ensino, afirma que "muito cedo o estudante cria o gosto ou aversão pela matemática. As influências sociais e, principalmente, a influência do professor são cruciais" (p. 81). Também diz que "é importante que o professor do 1º ciclo do ensino básico goste de matemática (é difícil disfarçar se o gosto não existe) e transmita esse gosto" (p. 81). Este autor defende que "há que apostar na formação matemática destes professores mas, para isso, devem ter a preparação e a inclinação desejáveis" (p. 81).

Tudo isto nos leva a refletir se se têm dado os passos certos na formação inicial de professores e se o modelo em vigor para a formação de professores do 1º e 2º ciclo será o ideal.

Orientações para a Formação de Professores

A formação de professores tem sido um campo de investigação sistemática, sobretudo a partir dos anos 90. Desde então a investigação sobre a formação inicial de professores tem sido enorme, existindo um volume muito significativo sobre o conhecimento que os futuros professores desenvolvem para ensinar (Ponte & Chapman, 2008). Segundo Oliveira e Hannula (2008) muitos desses estudos não consideram "as perspetivas dos futuros professores sobre o que estão a aprender e como, assim como não explicam o desenvolvimento de tal conhecimento levando em conta as suas experiências passadas e presentes" (p. 16). Vários formadores de professores (e.g., Ball et al., 2007; Bullough & Gittlin, 2001; Korthagen, Kessels, Koster, Lagerwerf & Wubbels, 2001; Loughran, 2006; Ma, 2009; Segall, 2002; Shulman, 1986) abordaram questões sobre o professor e a formação de professores. No entanto por diversas razões estes contributos têm falhado na resposta a alguns dos dilemas que ainda hoje persistem na formação de professores.

Para Alarcão, Freitas, Ponte, Alarcão e Tavares (1997) todo o professor é professor de *alguém* ensinando *alguma coisa* num determinado contexto e com uma determinada finalidade. Por este facto a formação de professores tem de comtemplar tanto a vertente científica como a vertente humanística, artística ou tecnológica, como se prevê na legislação portuguesa. Como educador a atividade do professor tem de assentar numa sólida formação pessoal, social e cultural, ou seja, o professor é uma figura de cultura. É pois importante que o professor possa adquirir formação noutras áreas do saber para além das da sua especialidade. Além disso a complexidade do processo de aprendizagem, que nos objetivos curriculares inclui não só conhecimentos mas também capacidades, valores e atitudes, a heterogeneidade dos públicos escolares, a variedade de funções e tarefas necessárias nas instituições educativas, de que são exemplo, a definição do projeto de escola, a realização de projetos de intervenção, o apoio a estudantes com necessidades educativas especiais, o diagnóstico de problemas, a participação na gestão escolar, etc., exigem múltiplas vertentes na formação de índole educacional. Neste leque de saberes, necessários ao exercício da profissão de um professor e educador, merece atenção especial a didática específica porque é o conhecimento de como tratar pedagogicamente o conteúdo científico da disciplina ou das áreas disciplinares - teoriza as condições entre os objetivos e conteúdos da aprendizagem e a construção do saber pelos estudantes, capacitando o professor de instrumentos essenciais para o sucesso educativo (Alarcão et al., 1997).

As educadoras matemáticas norte-americanas, Lampert e Ball (1999), fazem um diagnóstico muito negativo da formação inicial de professores. Para estas autoras a origem dos problemas da formação inicial reside nos seguintes fatores: (1) pensar que o que é preciso para ensinar é pouco mais do que o senso comum, isto é, não se mostrar a necessidade de um conhecimento profissional; (2) não atender às conceções, crenças e conhecimentos que os candidatos a professores trazem para a formação inicial; (3) separar a prática e a teoria, tanto fisicamente como conceptualmente, sendo a teoria raramente refletida na prática e a prática pouco interrogada pela teoria; (4) não se valorizar devidamente o conhecimento didático; e (5) dar pouca importância à prática profissional. Estas autoras também argumentam que se pretende que os futuros professores ensinem de acordo com as novas orientações curriculares, ou seja, de um modo vivo e desafiante, o que torna a tarefa da formação inicial ainda mais difícil. Na verdade um ensino deste tipo é cheio de incertezas. Por um lado quando se pretendem alcançar objetivos mais complexos, a evidência da aprendizagem dos estudantes é menos visível. Por outro um ensino dinâmico tem de ser orientado em função da resposta dos estudantes, o que impossibilita a previsão de um plano com tudo o que vai acontecer na aula. Há ainda que considerar que neste tipo de ensino o professor tem de atender a variadas questões que, muitas vezes, estão em conflito umas com as outras.

Na linha de pensamento de Lampert e Ball a literatura sobre a formação de professores tem vindo a produzir algumas orientações das quais Ponte, Januário, Ferreira e Cruz (2000) destacam as seguintes: (1) a formação inicial constitui a componente base da formação do professor e, como tal, precisa de ser articulada com a formação pós-inicial; (2) a formação inicial deve proporcionar um conjunto coerente de saberes estruturados de uma forma progressiva, apoiados em atividades de campo e de iniciação à prática profissional de modo a desenvolver as competências profissionais; (3) a formação inicial tem de saber partir das crenças, conceções e conhecimentos dos jovens candidatos a professores; (4) a formação inicial tem a responsabilidade de promover a imagem do professor como profissional reflexivo, empenhado em investigar sobre a sua prática profissional de modo a melhorar o seu ensino e as instituições educativas; e (5) a formação inicial deve contemplar uma diversidade de metodologias de ensino, aprendizagem e avaliação do desempenho do formando.

Ainda segundo Ponte (2012), embora não exista nenhuma investigação sistemática sobre o ensino especialista no quadro do antigo currículo da educação básica, existe um documento da Associação de Professores de Matemática [APM] (1997) que evidencia a importância da prática dos professores. Este documento diz que essa prática deve incluir elementos de *diversificação* na natureza das tarefas, nos tipos de interação em sala de aula, no uso de materiais de apoio e nas formas de avaliação. Esta tónica na diversificação sintoniza com a perspetiva geral de que, para enfrentar estudantes com diferentes origens culturais e necessidades de aprendizagem, os professores têm de introduzir muitos elementos de diferenciação no seu ensino.

A grande variedade de programas e alternativas de formação inicial de professores levam Shulman (2005) a afirmar que:

> A formação de professores não existe nos Estados Unidos da América. Existe tanta variedade entre todos os programas no que respeita a visões do que é um bom ensino, critérios de admissão, rigor na preparação nas disciplinas, o que deve ser ensinado e aprendido, natureza das experiências práticas supervisionadas e qualidade da avaliação que (...) é inescapável uma sensação de caos. (...) Comparado com qualquer outra profissão de base académica como direito, engenharia, medicina, enfermagem ou os clérigos, cujos currículos, standards e avaliações são muito mais normalizados em toda a nação, a formação de professores não é mais do que um conjunto de vias múltiplas. Não nos deve surpreender que os críticos respondam a esta aparente cacofonia de vias e concluam que não importa o modo como os professores estão preparados (p. 7).

Shulman conclui dizendo que, para a formação de professores sobreviver como uma formação profissional respeitada deve convergir rapidamente para um conjunto de unidades curriculares nucleares que a caracterizem. Na sua perspetiva, nos programas de formação inicial é preciso articular uma preparação profunda nas áreas em que os professores irão ensinar com uma preparação sistemática na prática de ensino utilizando poderosas ferramentas tecnológicas, uma prática de ensino supervisionada que não dependa das idiossincrasias das escolas cooperantes e uma enfase muito mais rigorosa na avaliação das competências de ensino.

O National Mathematics Advisory Panel [NMAP] (2008), nas suas conclusões sobre a relação do conhecimento matemático do professor e o melhoramento do desempenho dos estudantes, refere que “a preparação matemática do professor do ensino básico deve ser reforçada como meio para melhorar a eficácia dos professores em sala de aula. Isso inclui a formação do professor, o apoio no início de carreira e os programas de desenvolvimento profissional” (p. 38). Este documento evidencia que devem ser dadas amplas oportunidades aos professores para aprenderem matemática para o ensino. Isto é, os professores devem conhecer em detalhe uma perspetiva mais avançada do conteúdo matemático de que são responsáveis pelo ensino e as conexões deste conteúdo com outros conteúdos matemáticos importantes, tanto antes como para além do nível para que são designados para ensinar (NMAP, 2008).

Também a investigação educacional nacional e internacional e a experiência das últimas décadas de formação de professores em Portugal mostram que esta formação não se pode reduzir à sua dimensão académica mas tem de integrar uma componente prática e reflexiva (Alarcão, 2000; Alarcão et al., 1997). Porque só esta componente é que permite o reconhecimento dos caminhos a percorrer no contacto com o “terreno da prática profissional e faculta experiências de formação que estimulam a mobilização e a integração dos conhecimentos e problemáticas por parte dos formandos e proporcionam o desenvolvimento da sua capacidade de compreensão do real através da observação e da intervenção” (Alarcão et al., 1997, p. 8). A competência do professor não se constrói por justaposição mas por integração entre o saber académico, o saber prático e o saber transversal. Por isso é tão importante que exista um formador bem preparado junto de um formando em desenvolvimento para ser capaz de interpretar a dialética que se estabelece entre saberes e pela necessidade de análise e síntese que todo este processo implica.

O saber adquirido na formação inicial tem de ter vertentes multidisciplinares orientadas para as questões da investigação atual. Este contacto com a investigação, tanto no domínio das ciências de especialidade (por exemplo, a matemática) como no domínio das ciências da educação, é essencial na formação do jovem professor. Porque só este contacto o poderá ajudar a perceber a natureza, os métodos, as problemáticas e o valor da produção do conhecimento permitindo-lhe desenvolver uma atitude investigativa, de abertura à reflexão e ao permanente aprofundamento do seu próprio conhecimento (Alarcão et al., 1997).

Ensinar a ser professor envolve, para além dos aspetos da aprendizagem das matérias específicas, *a formação na especialidade* e, a aprendizagem dos aspetos do como ensinar e do como se inserir no espaço educativo escolar e na profissão docente, *a formação educacional* (Ponte et al., 2000). Porém, se o todo não é igual à soma das partes, também aqui, esta *síntese* nem sempre é efetuada da melhor forma porque conhecer profundamente os conteúdos científicos de uma especialidade, embora seja um requisito fundamental, não garante automaticamente o domínio de algumas categorias do conhecimento didático de um professor, como o conhecimento curricular ou o conhecimento didático (Shulman, 1987). Pode então dizer-se que o conhecimento proposicional da matéria, das teorias de aprendizagem ou do desenvolvimento curricular não são traduzíveis diretamente para a ação. Por isso equacionar o modo como se podem desenvolver estas aprendizagens é uma condição importante para se analisar o modo de concretizar a formação inicial de professores (Ponte et al., 2000).

Outros autores (e.g., D´Ambrosio, 2002; Freire, 1996; Nóvoa, 2000; Schön, 1992; Skovsmose, 2008; Zeichner, 1992) vêm contribuindo com ruturas na conceção do que é ensinar, do que é formar professores, exigindo de cada um de nós a indispensável problematização da prática pedagógica e dos cursos de formação inicial de professores. Freire (1996) considera que na formação de professores o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática. E defende que formar é muito mais do que puramente treinar o futuro professor no desempenho de destrezas. Já Zeichner (1992) sublinha que a reflexão sobre a prática não é um aglomerado de técnicas que possam ser empacotadas e ensinadas aos professores mas exige a reflexão do professor, o que se constitui numa oportunidade de ser professor. E Schön (1992) defende que o processo de formação exige reflexão na ação e sobre a ação produzida pelo futuro professor ao enfrentar situações de incertezas e de singularidades. Na perspetiva de Nóvoa (2000) não é suficiente mudar o futuro professor, é preciso mudar também os contextos em que ele intervém. Russel (2007) defende que "ninguém pode ser bom professor sem o sentimento de uma calorosa afeição pelos seus estudantes e sem o desejo genuíno de partilhar com eles aquilo que, para si próprio, é um valor" (p. 27). Também Bicudo (2010) refere que, na sua atividade, o professor tem de estar não só atento ao que ele mesmo e seus estudantes fazem mas sobretudo que procure explicitar o que vivencia e ouça os estudantes sobre as suas vivências. Segundo Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep e Ball (2008) há evidências de que um conhecimento *mais sólido* do professor traz benefícios não só para o ensino na sala de aula como para o desempenho do estudante. E Vallence (2000) no seu estudo conclui que um bom professor deverá possuir não só um profundo conhecimento das matérias que vai lecionar mas também uma vontade de inovar nas suas práticas, sempre com a preocupação de transmitir o gosto pelo que está a ensinar.

Existe um objetivo que nos parece consensual na formação de professores que é "desenvolver a capacidade reflexiva dos futuros professores de forma a contribuir para a sua formação como profissionais responsáveis, autónomos e eticamente exigentes, capazes de refletirem eficazmente sobre a sua prática pedagógica" (Oliveira & Cyrino, 2011, p. 111).

Nos meios académicos a crença numa relação simbiótica entre investigação e ensino é muito forte. Visser-Wijnveen, Driel, Rijst, Verloop e Visser (2009) afirmam que ensino e investigação são as duas principais tarefas do ensino superior. Segundo Jenkins, Breen e Lindsay (2003) se o professor incorpora a investigação no seu ensino, os estudantes apercebem-se que estão a ser envolvidos no processo e isso estimula-lhes a curiosidade intelectual, dando a impressão de que a turma está entusiasmada com o que ele está a ensinar. Se se considera que as mudanças educativas põem em conflito o comportamento dos professores, as crenças e estilos de ensino, para que sejam efetivas é necessário compreender a forma como os professores vivenciam as situações e implicá-los nessa mesma mudança, pois são eles que vão viver com ela (Bogdan & Biklen, 2013). Indo mais longe Ainscow (2000) defende que a investigação-ação gera conhecimentos sobre a realidade e pode constituir-se como um processo de construção de novas realidades sobre o ensino, pondo em causa os modos de pensar e de agir da comunidade educativa. Ao questionar os contextos de aprendizagem e as suas práticas o professor reflete sobre eles. Por isso o professor-investigador deve ser um professor reflexivo. A prática reflexiva desencadeia um processo motivador, dinâmico, inovador, responsável e responsabilizante, nos atores do processo educativo proporcionando-lhe oportunidades de desenvolvimento profissional.

Morais e Miranda (2008) elaboraram um estudo, com estudantes do ensino superior, sobre as relações entre os estilos de aprendizagem dos estudantes, os aspetos que consideram essenciais para um professor ensinar matemática e os aspetos que consideram relevantes para eles aprenderem matemática. Vamos aqui referir apenas os aspetos que os estudantes consideram relevantes para um professor ensinar matemática e que são: (1) qualidades pessoais – ser paciente, ser claro e ser coerente; (2) atitudes relativas ao ensino – gostar de matemática e ter gosto em ensinar matemática; (3) estratégias de ensino – expor os conceitos matemáticos com exemplos do dia-a-dia e adotar estilos diferentes de acordo com as características da turma; e (4) conhecimento dos estudantes pelo professor – ter em conta os conhecimentos dos estudantes e conhecer as capacidades dos estudantes para resolver problemas. Estes autores realçam o facto de os estudantes não terem dado importância ao conhecimento científico do professor, justificando-se a necessidade de o valorizar para que os estudantes o reconheçam como fundamental e útil.

Hollins (2011) evidencia muito bem a complexidade de todo o processo de formação de um bom professor, ao sublinhar que o conhecimento essencial, as capacidades e a compreensão para um ensino de qualidade incluem: (1) conhecimento sobre o crescimento e desenvolvimento humano e sobre as diferenças individuais e de grupos que, quando combinadas com conhecimentos específicos de determinados estudantes - tais como as suas experiências de fundo, o que eles sabem e como elas fazem sentido do que eles sabem e o que valorizam, como e porquê - informam o desenho de experiências de aprendizagem e as formas específicas em que a aprendizagem é mais fácil; (2) compreensão profunda do processo de aprendizagem que combina resultados das novas ciências da aprendizagem com uma clara perspetiva teórica delineada sobre a aprendizagem num quadro de práticas de sala de aula e de avaliação das aprendizagens; (3) compreensão profunda das ideias de organização de uma disciplina; domínio do raciocínio e práticas específicas; domínio dos processos de participação no discurso da comunidade disciplinar; e saber ligar conhecimento e práticas disciplinares com as experiências cotidianas dos estudantes de diversas origens experienciais e culturais; (4) compreensão da didática como um padrão claramente desenhado e inter-relacionado de experiências de aprendizagem incorporado numa determinada perspetiva teórica e guiado por uma postura filosófica claramente articulada capaz de fornecer visão e propósito para resultados de aprendizagem de longo e curto prazo; (5) compreender como identificar e desenvolver em sala de aula abordagens adequadas para avaliar o progresso dos estudantes em relação ao conhecimento específico da disciplina e da prática bem como gerir as exigências do currículo e da avaliação; e (6) capacidade para manter uma forte identidade profissional, envolver-se no seu próprio crescimento e desenvolvimento profissional, reconhecer características e qualidades de comunidades profissionais em diferentes contextos, e trabalhar em colaboração com os colegas dentro de uma comunidade profissional para melhorar os resultados de aprendizagem.

Até agora os investigadores, os profissionais da educação e os responsáveis políticos reconhecem que professores bem preparados e ensino de alta qualidade são fatores-chave na promoção da aprendizagem do estudante (Borko & Whitcomb, 2008). Os resultados da investigação acumulada que estuda o impacto dos professores no desempenho dos estudantes sugerem que o foco sobre a qualidade do professor é um empreendimento de alta alavancagem (e.g., McCaffrey, Lockwood, Koretz, Louis & Hamilton, 2004; Rivkin, Hanushek & Kain, 2005; Rockoff, 2004). A OCDE também considera a formação inicial de professores uma parte importante da equação para garantir um corpo docente de alta qualidade a longo prazo (Schleicher, 2012). Como resultado da sua investigação esta organização identifica alguns princípios, a saber: (1) *os sistemas de ensino beneficiam de perfis claros e concisos sobre o que os professores devem conhecer e serem capazes de fazer em áreas específicas*. Isto inclui tanto o conhecimento do conteúdo como o conhecimento de como o ensinar. Esses perfis podem orientar a formação inicial de professores, certificação de professores, avaliação dos professores, desenvolvimento profissional e progressão na carreira, e também avaliar em que medida estes diferentes elementos são eficazes. Os perfis podem refletir os objetivos de aprendizagem e o entendimento que o corpo docente tem do que conta como ensino realizado; (2) muitos países mudaram os seus programas de formação inicial de professores para um *modelo baseado menos na preparação académica e mais na preparação de profissionais em ambientes escolares, com um equilíbrio adequado entre teoria e prática e colaboração entre os professores como um aspeto fundamental*. Nesses programas os professores entram mais cedo em salas de aula, passam lá mais tempo e obtêm mais e melhor apoio no seu processo. Isso pode incluir tanto um curso extensivo sobre o trabalho de como ensinar – com uma forte enfase na utilização de investigação baseada no estado da arte sobre a prática - e mais de um ano a ensinar numa escola, cooperante com a universidade, durante o qual o professor deverá desenvolver práticas inovadoras e realizar investigação sobre aprendizagem e ensino, em parceria com outros professores e sob a orientação de professores talentosos. A formação universitária finlandesa é um exemplo importante para a implementação efetiva de tal abordagem; (3) *estruturas mais flexíveis na formação inicial de professores podem ser eficazes na abertura de novos rumos para a carreira docente, sem comprometer o rigor dos rumos tradicionais*. As etapas da formação inicial de professores, indução e desenvolvimento profissional, necessitam de ser interligadas para criarem um quadro de aprendizagem ao longo da vida para os professores. Em muitos países a formação de professores não fornece apenas o treino básico sobre conhecimento do conteúdo, didática relacionada com os assuntos, e conhecimento didático geral, mas também visa desenvolver as competências para uma prática reflexiva e de investigação sobre ela. A formação inicial de professores tende cada vez mais a enfatizar o desenvolvimento da capacidade dos professores em formação para diagnosticarem, com rapidez e precisão, os problemas dos estudantes e selecionarem, de um vasto repertório de soluções possíveis, aquelas que forem apropriadas ao diagnóstico. Alguns países fornecem aos professores as competências de investigação necessárias para permitir o melhoramento da sua prática de forma sistemática. Por exemplo, na Finlândia, na província de Xangai da China e em muitas partes dos Estados Unidos, os professores são treinados para serem investigadores-em-ação na sua prática com competência para trabalhar de forma a assegurar que qualquer estudante começando a ficar para trás é efetivamente ajudado; e (4) além disso alguns países passaram de um sistema onde os professores são recrutados em larga escala de faculdades especializadas na formação de professores, com padrões de entrada relativamente baixos, para um número relativamente menor de universidades especializadas na educação de professores com padrões de entrada relativamente altos na universidade (Schleicher, 2012).

Também o relatório do NMAP (2008) aponta o caminho a seguir para uma futura política educativa, investigação, desenvolvimento e financiamento tão necessário. As conclusões do Painel do NMAP e as suas recomendações sobre professores e formação de professores sublinham que - melhorar o conhecimento dos professores sobre o ensino da matemática, desenvolver medidas mais robustas sobre esse conhecimento e aumentar o apoio à investigação de alta qualidade oferecerem um ponto de partida razoável neste campo. Nesta mesma linha estão Borko e Whitcomb (2008) quando referem que "os professores vão ser o motor que impulsiona as reformas na educação matemática" (p. 570).

A ideia de se construir uma base de conhecimento para o ensino foi defendida por Shulman (1986, 1987) e adaptada para o ensino da matemática por Ball, Thames e Phelps (2008). Sierpinska (2011) sugere que esta mesma ideia pode ser aplicada ao ensino de futuros professores do ensino básico, e que a contribuição para a construção de uma base de conhecimento para educadores é o objetivo da sua investigação nos cursos de Teaching Mathematic (TM) – cursos de formação de professores para o ensino básico. É verdade que nem todos os investigadores da formação de professores concordam com esta afirmação. A própria ideia de uma *base de conhecimento para o ensino* tem sido fortemente criticada sobretudo pelos investigadores que trabalham na tradição do profissional reflexivo (Schön, 1987). Segundo Sierpinska (2011) esta tradição tem sido criticada por promover uma - abordagem da teoria-na-prática para a formação de professores. Os críticos afirmam que uma abordagem da *teoria* sobre a *teoria-na-prática* para a formação de professores refere-se a uma mera *retórica de conclusões* (Schwab, 1971, citado em Clandinin & Connelly, 1996). A descrição que Bullock (2011) faz dos programas de formação de professores é uma caricatura que distorce e esconde a complexidade do conhecimento que emerge em qualquer curso TM, dizendo:

> Os programas de formação de professores geralmente exigem que os candidatos a professores completem uma certa quantidade de cursos antes de terem uma experiência de estágio. O pressuposto subjacente a este desenho é o de que os cursos podem começar a *transmitir uma base do conhecimento para o ensino* aos candidatos a professores. A experiência de estágio é, então, uma oportunidade prática para os candidatos a professores *aplicarem o conhecimento* adquirido com tanto trabalho no curso de graduação (conhecimento do conteúdo) e cursos de estudos profissionais (conhecimento didático do conteúdo) (pp. 26-27).

Defendendo esta mesma ideia Berger e Luckmann (1966, citado em Afonso, 2005) referem-se à identidade profissional como um processo de socialização na profissão por meio do qual o indivíduo assume as funções, valores e normas do grupo profissional. Alguns investigadores sugerem outros aspetos específicos da identidade relativamente a diferentes perspetivas teóricas. Numa perspetiva cognitivista Sullivan e Mousley (2001) associam-na com a visão dos professores como decisores ativos que têm de lidar com problemas difíceis e definir as suas prioridades, e não como implementadores de rotinas padrão seguindo instruções externas. Também Bergsten e Grevholm (2004) veem os professores como solucionadores de problemas profissionais com várias dimensões de competência. Numa perspetiva sociocultural Goos (2005) defende que o desenvolvimento da identidade não é um processo puramente individual pois ocorre num contexto de interações com outros atores educacionais - estudantes, administradores e outros professores. Numa perspetiva humanista, a identidade pode ser associada à visão do professor no envolvimento num tipo especial de atividade, com uma reflexão na prática, sobre a prática e sobre a reflexão da prática, subjacentes ao processo de crescimento profissional (Schön, 1983).

Como Anders, Hoffman e Duffy (2000) sublinham "devemos comprometer as nossas energias para estudar os nossos programas, os nossos cursos, a nossa forma de ensinar e as nossas expetativas e exigências” (p. 734). Isso significa que o professor deve consentir ser ele mesmo objeto de estudo, o que implica coragem e criatividade. Duffy e Atkinson (2001) referem que continuam a usar os resultados da sua investigação para informar e melhorar o ensino a nível universitário. Continuam a desenvolver a investigação em conjunto com os futuros professores para melhorar as suas práticas e apoiar a sua aprendizagem. Estes autores encorajam outros educadores de universidades a fazerem o mesmo.

Archambault, Janosz e Chouinard (2012) efetuaram um estudo com 79 professores de matemática e seus 1364 estudantes (7º ao 10º anos) de 33 escolas secundárias do Canadá, investigando se as crenças e expetativas sobre as capacidades de sucesso dos seus estudantes a matemática tinham algum efeito no alcance de resultados em matemática e no envolvimento cognitivo a matemática. Estes autores chegam à conclusão de que as expetativas dos professores de matemática sobre as capacidades dos seus estudantes para o sucesso em matemática tinham um impacto positivo nos resultados alcançados pelos seus estudantes mas nenhum efeito sobre o seu envolvimento cognitivo na matemática. Outros estudos (e.g., Areepattamannil & Kaur, 2013) reforçam o papel crítico de que as perceções positivas dos professores sobre as capacidades matemáticas dos seus estudantes podem impulsionar nos estudantes atitudes positivas face à matemática e favorecer o seu envolvimento nas aulas de matemática.

Um outro estudo levado a cabo por Brady (2012) teve por objetivo explorar as crenças e práticas em desenvolvimento de seis professores de matemática do 1º ciclo em início de carreira e determinar os fatores que permitiam manter ou desafiar as visões do ensino da matemática que tiveram durante a sua formação inicial. Nos seus relatos os professores revelaram práticas indicativas de abordagens contemporâneas de ensino e aprendizagem em matemática. Além disso parece existir consistência entre as crenças e práticas dos professores no início de carreira e os ideais para o ensino da matemática adquiridos na sua formação inicial. Esta é uma descoberta notável uma vez que é contrária à literatura que descreve como os desafios do contexto escolar, bem como a socialização dos professores principiantes, podem ter um impacto significativo sobre suas crenças pré-existentes e suas práticas em sala de aula.

Em síntese, saber como os professores ensinam é uma condição para se introduzirem quaisquer melhoramentos nas escolas. Daí que as políticas de educação devam visar a melhoria qualitativa do conhecimento sobre o ensino e aprendizagem nas escolas juntamente com a crescente quantidade de dados sobre o desempenho dos estudantes. No livro verde sobre a formação de professores na Europa, Buchberger, Campos, Kallos e Stenpehenson (2000) defendem que, por um lado a formação de professores dever ser um “sistema aberto e dinâmico” e por outro um “processo contínuo”, o que quanto a nós resume muito bem toda a complexidade associada ao processo de formação e desenvolvimento profissional de um professor.

A Formação Matemática do Professor

A constatação de problemas reais na formação matemática dos futuros educadores de infância e professores no nosso país, tanto das Escolas Superiores de Educação como das Universidades, levou a Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação a dirigir um convite à APM e à Sociedade Portuguesa de Matemática no sentido da criação de um grupo de trabalho sobre esta problemática. Seguindo esta missão o grupo de trabalho constituído por Albuquerque et al. (2006) procurou nortear a formação matemática dos futuros professores e educadores através de cinco recomendações: (1) *a formação matemática deverá providenciar uma compreensão aprofundada da matemática que se vai ensinar*. É consensual que qualquer professor de matemática deve saber mais matemática do que aquela que vai ensinar. E o conhecimento matemático necessário a um professor de matemática tem particularidades específicas porque um conhecimento matemático implícito pode ser suficiente para uma pessoa mas não o é para quem tem de a ensinar a outros. Ou seja, um adequado conhecimento para o ensino envolve sermos capazes de falar sobre matemática, não apenas descrevendo os passos ou etapas de um determinado procedimento mas sabendo explicar o significado e as razões para esse mesmo procedimento. O conhecimento explícito matemático abrange ser capaz de explicar a outros por que é assim, saber as relações e as razões bem como relacionar processos ou ideias. Deste modo, saber matemática para ensinar é compreender matemática. E compreender matemática envolve um conhecimento aprofundado não só dos conceitos, das estruturas matemáticas e dos procedimentos, mas também da unidade matemática e dos tópicos da matemática elementar; (2) *a formação matemática deverá providenciar uma compreensão aprofundada da natureza da própria matemática*. A investigação tem provado que as conceções que os professores têm sobre a matemática é um fator que marca e influencia o seu ensino. Por isso se deve desenvolver um conhecimento das características da matemática como ciência. A matemática é uma atividade humana que se desenvolve em diferentes etapas – criação, organização, comunicação e aplicação. Na criação matemática tanto o raciocínio lógico como o intuitivo são igualmente importantes e centrais. Deste modo a criatividade e a liberdade de pensamentos deverão ser estimuladas e não condicionadas pelo medo de errar. Enquanto atividade humana a matemática tem uma cultura marcada pela sua história. Por isso, a história da matemática deve ser integrada no estudo dos diferentes temas matemáticos; (3) *a formação matemática deverá comtemplar o estudo da matemática de um ponto de vista superior e o estabelecimento claro das suas relações com a* *matemática que se vai ensinar*. A formação matemática dos futuros professores deve explicitar as relações existentes entre a matemática estudada e aquela que o futuro professor vai ensinar. Este estabelecimento de relações é uma forma de conhecimento mais elaborada e exigente e, por isso, não pode ser deixada ao futuro professor a responsabilidade de desenvolver por si só aquilo que é mais exigente. Devem ser previstos diferentes níveis de aprofundamento da matéria conforme os graus de ensino dos professores em formação. As opções a tomar devem entrar em linha de conta com os currículos escolares e com a evolução da própria matemática. Recomenda-se ainda que a matemática seja trabalhada a partir de grandes temas, de grandes ideias matemáticas que se vão trabalhando em vez de se começar pelas partes para se chegar ao todo; (4) *a formação matemática deverá desenvolver nos futuros professores a capacidade de trabalhar em matemática*. Como em qualquer outro ramo do saber, em matemática a experiência é a base da aprendizagem. Este pressuposto é válido tanto no primeiro contacto dos estudantes com a matemática como no ensino superior. É portanto imprescindível que o futuro professor desenvolva um espírito de dúvida metódica, explicite os seus pensamentos e raciocínios e seja crítico face à sua adequação a uma dada situação, procure justificações ou refutações matemáticas. Fazer matemática passa por saber não só encontrar soluções como colocar boas perguntas e saber olhar um mesmo problema de múltiplas perspetivas. Durante a formação inicial deverão ser proporcionadas aos futuros professores experiências matemáticas capazes de contribuírem para o desenvolvimento do gosto pela matemática. Acredita-se que o gosto por aquilo que se faz é um elemento forte para o sucesso uma vez que dificilmente se consegue convencer os outros daquilo que nós próprios não sentimos. A predisposição para a matemática é outro aspeto a ter em conta. É preciso autoconfiança em matemática para se desenvolver a persistência indispensável para ultrapassar dificuldades e obstáculos e prosseguir numa tarefa matemática; e (5) *a formação matemática deverá propiciar experiências matemáticas que correspondam a boas práticas de ensino*. Os contextos de trabalho de hoje não são os do passado, foram evoluindo. Um dos exemplos mais marcantes da nossa época é o desenvolvimento tecnológico. Ora esta realidade veio abrir novas dimensões e potencialidades à experiência matemática. Por isso a utilização das calculadoras e dos computadores deverão fazer parte da experiência vivida pelos futuros professores. A exploração de materiais manipuláveis deve também ser explorada porque qualquer que seja o nível de maturidade científica do estudante, a intuição e a perceção, ainda que pouco rigorosas, são muitas vezes passos iniciais incontornáveis para o sucesso de uma tarefa matemática. Além disso na sociedade atual não existe prática profissional que se possa manter num contexto individualizado de trabalho. Por isso o trabalho de equipa é uma exigência, não uma opção. O futuro professor de matemática deverá desenvolver a capacidade de trabalhar matemática com os outros. Albuquerque et al. (2006) recomendam ainda um ensino da matemática que siga um conjunto de orientações didáticas. Isto porque poder-se-á, por um lado "desenvolver uma aprendizagem da matemática mais rica e poderosa e, por outro permitir que os futuros professores experimentem e vivam de forma continuada aquilo que se pretende que depois venham a utilizar enquanto professores" (p. 23).

Na investigação em educação é consensual que os professores efetivos de matemática têm não só o conhecimento das ideias e da forma de pensamento dos estudantes como o conhecimento do conteúdo matemático (Ball & Bass, 2003; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball & Schilling, 2008). De acordo com Ma (1999) os professores devem ter uma profunda compreensão da matemática que se espera que ensinem, isto é, uma profunda compreensão da matemática elementar. Schoenfeld e Kilpatrick (2008) também se referem à importância dos professores saberem a matemática escolar em profundidade e o seu conhecimento didático de forma a assegurar a eficácia do ensino. Porém muitos professores do ensino básico não têm o entendimento conceptual da matemática (Mewborn, 2001) e, em muitos dos professores em formação como em alguns dos professores em serviço, o limitado conhecimento do conteúdo matemático e a falta de confiança em fazer matemática é particularmente preocupante (e.g., Ball, 1990; Lange & Meaney, 2011; Ryan & Williams, 2007). A investigação também revela que muitos dos estudantes da formação inicial apresentam dificuldades nalgumas capacidades matemáticas e conceitos fundamentais semelhantes às dos estudantes que vão ensinar (e.g., Ball & Bass, 2003; Ryan & Williams, 2007; Tirosh, 2000).

Uma das finalidades da formação inicial de professores é desenvolver os conhecimentos e competências práticas nos professores, não só para que venham a reproduzi-las mas sobretudo para que as suas práticas sejam mais dinâmicas, interativas e reflexivas (Vale, 2002). Esta ideia vai de encontro às ideias de Shulman (1986) quando em relação à formação de professores refere que os investigadores em educação têm como tarefa compreender os fenómenos que lhe estão inerentes, aprender como melhorar a sua implementação e descobrir maneiras de preparar e formar educadores e professores. Vários investigadores realçam a importância de proporcionar aos professores, durante a sua formação, experiências que aumentem os seus conhecimentos de matemática e sobre a matemática (e.g., Ball et al., 2007; Ma, 2009).

De acordo com Bennett e Turner-Bisset (1993) há evidências de que o conhecimento matemático insuficiente e pobre tem um impacto negativo sobre o ensino. E o que os investigadores discutem é sobre a natureza desse conhecimento. Muitos deles defendem que a matemática como conhecimento para a prática da matemática é distinta da que é necessária para se ensinar matemática. Ball (2003) sustenta que a matemática-para-ensino obriga a um conhecimento maior e mais profundo do que o que se espera dos estudantes mas que é qualitativamente diferente.

Ball et al. (2001) argumentam que o fracasso persiste em mostrar relações fortes e definitivas entre o conhecimento matemático dos professores e a sua eficácia, o que não significa que o conhecimento matemático não faz diferença no ensino. As ferramentas que os professores possuem a fim de lidar com o seu trabalho dependem em grande medida da cultura e das tradições do ambiente educacional em que estão a trabalhar (e.g., Hiebert, Morris & Glass, 2003; Andrews & Hatch, 2000). No entanto "não há consenso sobre o que os professores necessitam de saber para assegurar que a aprendizagem do estudante ocorra" (Pepin, 2009, p. 27).

O conhecimento profissional dos professores é produzido no âmbito da execução da sua experiência - a geração de ideias, conceções, imagens ou perspetivas - quando atuam como professores (Fernstermacher, 1994). Sierpinska (2011) sublinha que não há garantia de que um candidato a professor vá mesmo ter a possibilidade de ensinar matemática durante o seu estágio, uma vez que eles são educados para serem generalistas e não especialistas em matemática. Segundo a autora o que o educador pode fazer é envolver os futuros professores em reflexão antes-da-ação, em vez da reflexão na-ação defendida por Schön (1987). Existem educadores que não colocam os seus alunos em interações educativas da vida real com estudantes mas passam vídeos de sala de aula e comentam e analisam os comportamentos didáticos e matemática dos atores (Sierpinska, 2011). Mas os vídeos das interações professor-estudante em sala de aula podem ser substituídos por filmes animados ao vivo de interações em sala de aula (Chazan & Herbst, 2011).

Os formadores de professores de matemática estão confrontados com a tarefa de preparar professores iniciantes que possam "quebrar o ciclo da tradição" no ensino e na aprendizagem da matemática (Frid & Sparrow, 2007, p. 295). Isto alcança-se incentivando os futuros professores a refletirem sobre suas próprias crenças e apoiando-os na formação de novas ideais que irão transportar para as suas salas de aula (Brady, 2012). No entanto, para esta autora, a socialização de professores iniciantes pode ter um impacto significativo sobre as crenças que acabarão por informar a sua prática. A investigação tem mostrado que as experiências com estudantes em salas de aula de matemática influenciam significativamente as crenças dos futuros professores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática (e.g., Sliva & Roddick, 2001). Normalmente os candidatos a professores têm atitudes negativas e falta de confiança em relação à matemática de ensino como resultado de experiências dececionantes e desencorajantes na aprendizagem da matemática (Brown, McNamara, Hanley & Jones, 1999; Drake, Spillane & Hufferd-Ackles, 2001). Tais experiências pessoais de sala de aula também influenciam o modo como os futuros professores acabam por ensinar matemática.

Em salas de aula centradas no professor tradicional Lortie (1975) defende que a tendência dos futuros professores é a de ensinarem da mesma forma em que eles próprios foram ensinados. Em Santos, Nápoles e Veloso (2007), Nápoles afirma que “os novos licenciados manifestam uma enorme dificuldade em adequar os conhecimentos adquiridos na licenciatura com a práctica letiva. Esta circunstância leva-os frequentemente a uma colagem acrítica aos manuais com consequências desastrosas” (p. 94). Neste mesmo artigo Nápoles sublinha que lhe parece importante, para além de se rever todo o regime da formação inicial de professores e definir os perfis de formação para os diferentes ciclos, regulamentar as condições de acesso dos futuros professores.

Hammerness, Darling-Hammond e Bransford (2005) recomendam que os formadores de professores precisam de ter a certeza de que os futuros professores têm a oportunidade de praticar e refletir sobre o ensino durante os seus programas de preparação. Por reflexão matemática Schulke e Steinbring (2009) entendem-na como uma atividade cognitiva, um processo de reflexão, no sentido de uma mudança de ponto de vista ou perspetiva na base da qual os processos de reinterpretação têm lugar. Segundo estes autores, o velho conhecimento matemático comum e as formas familiares dos processos são pensados intencionalmente de novo, são analisados e novamente reinterpretados. A construção do "pensamento matemático reflexivo" corresponde, pelo caráter epistemológico do conhecimento matemático, a um padrão de estruturas relacionais. Também defendem o pressuposto de que estimular o pensamento reflexivo visa o desenvolvimento do conhecimento matemático.

O estudo que Potari e Georgiadou–Kabouridis (2009) efetuaram com uma professora primária durante quatro anos demonstra a importância do papel da formação inicial no desenvolvimento profissional do professor, o que é uma revelação otimista para os formadores de professores. Estes autores afirmam que o futuro professor atua como aprendente de matemática e como estudante no pensamento matemático através do seu próprio envolvimento e experimentação. Além disso, tem a oportunidade de construir conexões entre a teoria e a prática através da leitura e discussão de trabalhos de investigação, planeamento de aulas e reflexão sobre a sua prática. Estas abordagens são importantes na educação matemática do futuro professor e podem atuar como a principal fonte de ideias para a prática destes professores na escola. Segundo estes mesmos autores, o modelo do professor como investigador do pensamento matemático dos estudantes pode gerar no professor uma atitude que o vai apoiar ao longo da sua vida profissional.

Hill et al. (2008) efetuaram um estudo sobre o conhecimento matemático dos professores para o ensino, que inclui tanto o conhecimento matemático que é comum a pessoas que trabalham em diversas profissões como o conhecimento matemático que é especializado para o ensino. Chegaram à inescapável conclusão de que existe uma poderosa relação entre o que o professor sabe, como o sabe, e o que ele pode fazer no contexto de ensino. Tentaram encontrar outros fatores, que não o conhecimento matemático, que pudessem mediar essa relação e identificaram alguns: crença do professor sobre como a matemática deve ser aprendida e como torná-la agradável para os estudantes; crença do professor sobre materiais curriculares e como eles devem ser utilizados; e a disponibilidade de materiais curriculares para professores. No entanto essas influências não foram nada em comparação com, e de muitas formas foram moldadas por, o próprio conhecimento matemático dos professores. Caso após caso, a qualidade das modificações feitas em materiais curriculares, as metas para a aprendizagem do estudante e até mesmo as crenças sobre o que é a matemática, foram moldadas pelo conhecimento dos professores.

Segundo Lima (2005) as três condições necessárias de primeira ordem para se ser um bom professor de matemática são: (1) gostar de matemática e ter grande entusiasmo por ela; (2) saber e conhecer muito bem o que se vai ensinar. Na verdade é preciso conhecer um pouco mais do que aquilo que se vai ensinar; e (3) gostar de ensinar e interessar-se pelos estudantes. Para este autor, Decorrentes destas para este autor existem outras condições de segunda ordem: (a) esforçar-se por ser um bom comunicador: falar alto e claramente, escrever de modo ordenado e com boa caligrafia, evitar ficar todo o tempo de frente para o quadro negro e de costas para a turma; (b) ser gentil e paciente com os estudantes - não os humilhar; e (c) fazer com que todos trabalhem. "Uma aprendizagem passiva é na melhor das hipóteses efémera: *easy come, easy go*" (p. 107).

Empreender um desenvolvimento contínuo em vez de uma melhoria esporádica, trabalhar em conjunto em vez de individualmente, proporciona aos professores mais oportunidades de reflexão, aprendizagem e desenvolvimento profissional (Day, 2001). Sowder (2007) defende que professores de matemática confiantes tendem a revelar maior flexibilidade no conhecimento matemático e a comprometerem-se com o seu próprio desenvolvimento profissional.

A matemática não é utilizada simplesmente para desenvolver no indivíduo a competência para o habilitar para a docência mas também o habilita para outras áreas como finanças, contabilidade, logística, gestão, engenharia e economia (Nzekwe-Excel, 2010). A matemática é uma disciplina que tem demonstrado ter impactos significativos sobre diferentes assuntos e áreas temáticas (Smith, 2004) como a interpretação de questões, leitura de mapas, previsão do tempo, raciocínio lógico, capacidade de pensamento crítico e capacidade para resolver problemas e tomar decisões. Apesar disso ainda há uma falta de interesse pelo estudo da matemática (Fenwick-Sehl, Fioroni & Lovric, 2009).

O Conhecimento do Professor de Matemática

"O único fator que parece ter o maior poder para esclarecer a nossa compreensão sobre o papel dos professores é o fenómeno do conhecimento dos professores" (Elbaz, 1983, p. 45). Segundo Pepin (2009) o conhecimento profissional dos professores tem sido estudado a partir de diferentes perspetivas. Muitos investigadores têm prestado uma crescente atenção ao conhecimento dos professores que é o conhecimento do professor para e no ensino. No entanto é aceite que o que os professores sabem é um dos fatores que mais influencia o que acontece nas salas de aula. E é consensual que para ensinar matemática é necessário desenvolver conhecimentos matemáticos e conhecimentos sobre a matemática assim como conhecimento sobre como ensinar. Ma (2009) afirma que “um conhecimento limitado da matéria restringe a capacidade de um professor promover uma aprendizagem conceptual entre os estudantes” (p. 83). Diz ainda que nos professores “o seu conhecimento didático não pode compensar a ignorância do conceito” (p. 135). Para um conhecimento sólido dos conceitos é importante que os futuros professores contactem de forma explícita com uma forma de conhecimento capaz de gerar a tomada de consciência da variedade de ideias que poderão surgir nos seus educandos em presença de um mesmo conceito (Gomes, 2003).

Os estudos de Shulman (1986, 1993) e de Clandinin (1986), considerando algumas idéias de Dewey (1944), identificam sete áreas sobre o conhecimento profissional do professor: conhecimento profundo das matérias a lecionar, o conhecimento didático geral, conhecimento didático (também chamado de *conhecimento didático do conteúdo*), conhecimento do currículo, conhecimento dos contextos em que se ensina, conhecimento dos estudantes, das suas características e dos seus processos de aprendizagem, conhecimento dos fins e objetivos educativos, conhecimento de si mesmo e da sua atuação.

No contexto da educação matemática a investigação mostra que o conhecimento e a didática são partes indissociáveis da compreensão e Shulman (1986) sugere a distinção entre três categorias de conhecimento: "(a) conhecimento do conteúdo, (b) conhecimento didático do conteúdo, e (c) conhecimento curricular" (p. 9). E reconhece que o conhecimento do conteúdo é um atributo essencial para um professor. Como conhecimento do conteúdo Shulman refere a quantidade e a organização do conhecimento em si na mente do professor. Pensar corretamente sobre o conhecimento do conteúdo requer ir para além do conhecimento dos fatos ou conceitos de um dado domínio (Shulman, 1986). O conhecimento do conteúdo inclui o conhecimento sobre o assunto e suas estruturas de organização (e.g., Grossman, Wilson & Shulman, 1989; Shulman, 1986, 1987; Wilson, Shulman & Richert, 1987). Para Shulman os professores devem não só ser capazes de definir, para os estudantes, as verdades aceites num dado domínio, como devem também ser capazes de explicar por que é que uma determinada proposição é considerada verdadeira, e como é que ela se relaciona com outras proposições dentro e fora da disciplina, tanto na teoria quanto na prática. Resumindo, o professor precisa não só entender que algo é assim mas por que é que é assim, por que razão é que isso pode ser afirmado e sob que circunstâncias a nossa fundamentação pode ser enfraquecida ou até negada (Shulman, 1986). Além disso espera-se que o professor entenda por que um determinado tópico é particularmente central para uma disciplina enquanto outro pode ser algo periférico. Shulman defende ainda que este tipo de conhecimento é muito importante para avaliar posteriormente sobre questões didáticas com enfase curricular. Enquanto para Skemp (1978) ter fortes conhecimentos matemáticos não é garantia para se ser um professor de matemática eficaz, pois os professores que não têm esse conhecimento serão limitados na sua capacidade de ajudar os estudantes a desenvolver uma compreensão conceptual e relacional. Skemp (1978) apresenta a sua visão sobre a distinção entre dois tipos de compreensão em matemática: instrumental e relacional. A compreensão relacional é descrita como saber tanto o que fazer como e porquê, enquanto a compreensão instrumental implica "regras sem razões" (p. 9). Este autor sublinha que embora a matemática instrumental seja mais fácil de entender dentro do seu próprio contexto, com recompensas imediatas e aparentes, e muitas vezes a conseguirmos obter a resposta certa mais rapidamente e de forma confiável, a matemática relacional tem a vantagem de ser mais adaptável a novas tarefas, sendo mais fácil de lembrar e capaz de servir como um objetivo em si mesmo. Skemp argumenta que estes dois tipos de conhecimento são tão diferentes que há uma forte razão para os considerar como diferentes tipos de matemática. Opõe-se à matemática instrumental, dando a entender que o termo "matemática" deve ser usado apenas para a matemática relacional, e levanta vários problemas que podem ocorrer quando estudantes cujo objetivo é compreender instrumentalmente são ensinados por um professor que quer que eles entendam relacionalmente, ou vice-versa.

Outros investigadores em educação matemática também questionam a utilidade da dicotomia instrumental-relacional e levantam várias outras questões. Por exemplo, Hiebert e os seus colegas (Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Lefevre, 1986) sugerem que tanto o conhecimento conceptual como o processual são necessários para o conhecimento matemático. Eles definem conhecimento conceptual como o conhecimento que é rico em relações. Isto é, a aprendizagem de um novo conceito ou relação implica a adição de um nó ou ligação para a estrutura cognitiva existente, tornando assim o conjunto mais estável do que antes. Por outro lado o conhecimento processual é uma sequência de ações que podem ser aprendidas com ou sem significado. Hiebert e Carpenter (1992) sugerem que as relações entre o conhecimento conceptual e processual podem variar de nenhuma relação a uma relação tão íntima que se torne difícil distinguir entre eles.

Para Ball et al. (2001) um ensino de qualidade está diretamente relacionado com o conhecimento da matéria. Mas Ponte e Chapman (2008) sublinham que a natureza deste conhecimento é um fator crítico na relação de tudo aquilo que um professor deve dominar. O professor tem de ter diferentes tipos de conhecimento, competências, atitudes e valores. Tem de conhecer o contexto da aprendizagem, os atores, os interesses e as características dos participantes em todo o processo. E tem de saber quais as opções e condições do programa, isto é, abordagens didáticas, relação entre estudantes e professores, acesso a recursos e utilização de tecnologia de informação e comunicação (Ponte & Chapman, 2008).

Segundo Shulman (1986) o conhecimento didático de determinada matéria é o conhecimento “das formas mais úteis de representação das ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações - numa palavra, as formas de representar e formular o assunto para o tornar compreensível aos outros” (p. 9). O professor também deverá conhecer as conceções e preconceitos que os estudantes trazem para a aprendizagem. “Se esses preconceitos são equívocos, os professores precisam de ter conhecimento das estratégias com maior probabilidade de eficácia na reorganização do entendimento dos estudantes, uma vez que os estudantes não são suscetíveis de aparecer diante deles como folhas em branco” (pp. 9-10). Muito perto desta noção está o modelo proposto por Ball, Thames e Phelps (2005). O modelo descreve o conhecimento didático do conteúdo e o conhecimento do conteúdo como: *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*, isto é, conhecimento onde o professor tem de antecipar os equívocos habituais e os erros dos estudantes, interpretar o pensamento incompleto dos estudantes, e prever o que os estudantes farão com uma dada tarefa e se a vão achar interessante ou desafiadora; e *conhecimento do conteúdo e do ensino*, isto é, conhecimento onde o professor tem de sequenciar os conteúdos da instrução, de reconhecer os prós e os contras de representações difíceis, e avaliar a resposta às novas abordagens dos estudantes nos problemas matemáticos. De forma semelhante Kilpatrick, Sawfford e Findell (2001) sugerem duas categorias de conhecimento: *conhecimento dos estudantes*, ou seja, quem são, o que sabem, e como encaram a aprendizagem e a matemática, que capacidades matemáticas e disposições os estudantes trazem para as aulas, o modo de aprender, pensar e fazer matemática que os estudantes desenvolveram, as conceções e equívocos habituais e a origem provável dessas ideias; *conhecimento da prática*, isto é, saber o que deve ser ensinado e como planear, conduzir e avaliar as aulas desse conteúdo matemático, organizar a turma de modo a criar uma comunidade de estudantes, gerir o discurso na sala de aula e envolver os estudantes com atividades de aprendizagem no trabalho de matemática substantivo. A discussão sobre que conhecimento ou conhecimentos os futuros professores devem ter para ensinar matemática sugere que há limitações no conhecimento que a formação de professores tenta atingir. Ponte e Chapman (2008) sublinham a importância do conhecimento sobre o pensamento matemático dos estudantes, sobre aspetos da comunicação na sala de aula e sobre a reforma curricular orientada para a didática. E acrescentam que aprender a planear e a conduzir o ensino de acordo com as recomendações da reforma é para os futuros professores bastante desafiador, uma vez que requer um alto nível de integração do conhecimento dos objetivos, tarefas, materiais e do pensamento dos estudantes, formação e interesses, muitas vezes em ambientes sem qualquer apoio. Jaworski e Gellert (2003) sublinham que quando os futuros professores entram para a formação inicial já possuem um amplo conhecimento sobre o ensino da matemática e têm os seus pontos de vista sobre a natureza da matemática. No entanto este conhecimento é limitado visto que se baseia essencialmente na sua experiência como estudantes. Por isso é importante que os programas envolvam os futuros professores em oportunidades de aprendizagem que lhes permitam não só reconstruir o seu conhecimento inicial como compreender a didática do ensino da matemática (Ponte & Chapman, 2008). Como Jaworski e Gellert (2003) sugerem, sem o escrutínio deste conhecimento prévio, a preparação do futuro professor é ambiciosa e difícil.

Uma parte essencial da educação dos futuros professores consiste em torná-los conscientes das suas teorias pessoais e dos seus preconceitos de forma a tornar as teorias explícitas e os confrontar, os clarificar e os envolver no desafio de outrem ou em teorias alternativas (Ponte & Chapman, 2008). Por isso a reflexão é um processo fundamental para a criação da consciência deste conhecimento. No entanto alcançar uma reflexão eficaz pode ser problemático dependendo da forma como essa reflexão é concebida e concretizada (Ponte & Chapman, 2008). Muitos dos estudos realizados (e.g., Amato, 2004; Chapman, 1998; Cotti & Schiro, 2004; Gorev, Gurevich & Barabash, 2004; Ponte, Oliveira e Varandas, 2002; Presmeg, 1998; Roddick, Becker & Pence, 2000) sugerem uma tendência atual para a reflexão, o conteúdo e a didática como aspetos chave do enquadramento de experiências de aprendizagem facilitadoras do desenvolvimento do conhecimento didático do conteúdo para os futuros professores. Ponte e Chapman (2008) sublinham que o valor da integração do conteúdo e da didática, ensinando de um modo coerente com o currículo proposto, e a promoção da reflexão e participação na aprendizagem parecem ser claramente aceites. Mas já não é claro que a reflexão aborde os preconceitos dos futuros professores e seja capaz de promover o ensino nas suas próprias salas de aula.

Para uma prática profissional de sucesso os futuros professores precisam aprender sobre matemática e sobre o ensino da matemática. Mas também é verdade que para além destes o futuro professor tem de ter um conhecimento curricular (Shulman, 1986). Este autor afirma que o currículo é representado por toda a gama de programas voltados para o ensino, a variedade de materiais de instrução disponíveis em relação a esses programas e o conjunto de características que servem tanto as indicações como as contraindicações para o uso de um determinado currículo ou de materiais para o programa. Para Shulman (1986) "o currículo e os materiais a ele associados são a *matéria médica* da didática" onde o professor vai buscar as ferramentas de ensino para determinado conteúdo, corrige e avalia a sua adequação às realizações dos estudantes (p. 10). Este autor afirma que existem ainda outros domínios importantes do conhecimento, por exemplo, das diferenças individuais entre os estudantes, de métodos genéricos de organização e gestão da sala de aula, da história e filosofia da educação e das finanças e administração escolar, apenas para citar alguns.

Ponte e Chapman (2008) também defendem que o futuro professor necessita desenvolver outras competências e desenvolver-se como pessoa, assumindo os valores e as normas da profissão de educador. Isto é, para além de um sujeito e de uma perspetiva de currículo há também uma perspetiva profissional. A prática profissional do professor fornece um ponto de entrada para olharmos a sua identidade - a nível individual e coletivo - e os processos de aprendizagem do professor - visto como um movimento entre a teoria e a prática (Ponte & Chapman, 2008). De acordo com Wenger (1998) a identidade, isto é, quem-somos, inclui as experiências e o conhecimento, as perceções de nós mesmos, as perceções dos outros sobre nós e as nossas perceções dos outros. Para este autor tais perceções desenvolvem-se quando interagimos com os outros. Fazer uma reflexão sistemática, disciplinada, completa e contínua leva-nos a uma forma de investigação sobre a prática ou mesmo a investigar a prática (Mewborn, 2001) mas Jaworski e Gellert (2003) sugerem a necessidade de se criarem novas formas de ligar a prática à teoria. Os estudos que se centram na reflexão fornecem dados importantes sobre o envolvimento dos futuros professores neste processo e sobre o modo como se relacionam e como se assumem nos seus papéis profissionais (Ponte & Chapman, 2008). A visão defendida por Schön (1983, 1987) é a de que a reflexão sobre a própria prática é o elemento-chave tanto para profissionais talentosos como para a formação de professores. Porque a reflexão sobre a prática inclui: adequar os materiais e estratégias a utilizar na sala de aula; o diálogo e a atmosfera criada; os casos de sucessos ou dificuldades dos estudantes na compreensão dos conceitos; e os episódios que surpreendam o professor tanto positiva como negativamente.

Enquanto formadores de professores de matemática observam-se várias reações dos candidatos a futuros professores quando se partilha a nossa visão para o ensino e aprendizagem da matemática nas aulas de formação de professores. Segundo Lannin e Chval (2013) pretende-se que os futuros professores do ensino básico vejam a aprendizagem da matemática como matemática que faz sentido - portanto de raciocínio - e o ensino da matemática como resolução de problemas e tomadas de decisão. No entanto esta visão conflitua com a dos futuros professores que já possuem uma experiência de nove ou doze anos de ensino e aprendizagem da matemática. Compreensivelmente este conflito leva a reações fortes. Para aqueles autores os futuros professores experimentam a aprendizagem da matemática como a memorização de fatos e procedimentos. Portanto os educadores que apoiam o início da formação de futuros professores necessitam de ferramentas e estratégias para desafiarem essas crenças. A nossa visão do ensino e aprendizagem da matemática difere substancialmente da visão de início dos futuros professores do ensino básico que entram nos nossos cursos de formação inicial. Quando se introduzem as tarefas nos cursos de formação inicial de professores a intenção é, segundo Chval (2004), a de desafiar a perceção de que o ensino da matemática do ensino básico é *fácil* e não necessita que um professor possua uma profunda compreensão matemática. No entanto os futuros professores necessitam de agir como *pensadores matemáticos*, acreditando que podem lidar com situações matemáticas desafiadoras situadas em contextos que poderão ocorrer nas salas de aula do ensino básico que eles terão de enfrentar no futuro (Lannin & Chval, 2013). Segundo estas autoras as tarefas matemáticas projetadas com cuidado e capazes de se ligarem às futuras experiências dos futuros professores desempenham um papel importante na revelação dos desafios matemáticos e didáticos que irão enfrentar nas salas de aula, ajudando-os a confrontar as suas próprias crenças e atitudes. Através do exame das ideias matemáticas contidas nas tarefas, da discussão dos equívocos que os estudantes mostram nos seus trabalhos escritos e do reforço das tarefas matemáticas, a confiança dos estudantes no ensino da matemática cresce (Lannin & Chval, 2013). Deste modo os futuros professores começam a admitir a complexidade da matemática do ensino básico. Esta outra visão do ensino da matemática cria novos desafios e os futuros professores experimentam algum desconforto ao tomarem consciência do muito que há para ser aprendido - o que não deixa de ser saudável. Resumindo, os formadores de professores são desafiados não só a quebrar os preconceitos durante a formação dos futuros professores como a ajudá-los a prever situações matemáticas que irão enfrentar na sala de aula.

Peter-Koop e Wollring (2001) argumentam que na formação de professores é benéfico vermos os futuros professores como investigadores. Estes autores fizeram um estudo com futuros professores de várias universidades alemãs no qual os futuros professores do ensino primário se envolveram numa *investigação interpretativa em sala de aula*, e indicaram que com esta abordagem os futuros professores aprendem não só sobre os estudantes, como a escutá-los e também aprendem sobre si mesmo como professores. De um modo geral o que estes estudos indicam é que a investigação da sua própria prática pode constituir uma forma muito potente de construção do conhecimento. Um argumento para o esforço de se continuar a investigação que se desenvolve com a prática é oferecido por Krainer (2005) quando sublinha que "a investigação é para aumentar a nossa compreensão sobre o ensino e para fazer suposições normativas sobre o bom ensino explícito, e também para mais desenvolvimento sobre o ensino. O conhecimento é gerado dentro e fora da prática" (p. 76). Contudo, como

Ponte e Chapman (2008) sublinham, investigar requer apoio e um processo de aprendizagem alargada, isto é, tempo e recursos que muitas vezes não existem em programas de formação de professores.

A investigação realça que existem falhas no conhecimento do futuro professor de matemática que requerem uma atenção redobrada na educação de professores. Parece haver consenso de que o foco deve ser na matemática que eles vão ensinar e que o currículo deve constituir-se determinante para a natureza e qualidade desse conhecimento. Outros investigadores (Even, 2005; Even & Wallach, 2004; Wallach & Even, 2005) sugerem que o problema não está só na matemática que vão ensinar e no currículo mas também é necessário compreender o pensamento dos estudantes. Esses estudos mostram que muitas vezes há discrepâncias entre o que os estudantes dizem e fazem, e o que os professores compreendem, sugerindo que a interpretação que o professor faz sobre o entendimento dos estudantes, o conhecimento e a aprendizagem da matemática, se baseia numa vasta base de conhecimento dos entendimentos, crenças e atitudes. Consequentemente o processo de entendimento que o professor faz sobre a compreensão dos estudantes está envolto de ambiguidades e dificuldades. Por isso Even e Tirosh (2008) alertam para que os atuais programas de formação de professores aumentem "a consciência da importância de compreender as conceções matemáticas e as formas de pensamento dos estudantes, e desenvolver o conhecimento dos professores sobre as diferentes formas dos estudantes pensarem e raciocinarem matematicamente" (p. 218).

Em Portugal as alterações curriculares (ME, 2007) retratam uma nova perspetiva para o perfil de um professor especialista de matemática. Segundo Ponte (2012) esse professor terá de ser um professor capaz de: (1) selecionar e até ajustar tarefas adequadas, especialmente tarefas de exploração, envolvendo os estudantes ativamente no trabalho matemático, estimulando-os a desenvolver as suas próprias estratégias, conceitos e representações; e (2) conduzir as discussões em sala de aula de modo a criar oportunidades para a negociação de significados, o desenvolvimento do raciocínio matemático e a institucionalização de novos conhecimentos. Esta perspetiva de especialização de professores no ensino de matemática, em Portugal, deriva do novo currículo de matemática que enfatiza a importância do uso de uma variedade de tarefas no ensino da matemática, incluindo as tarefas de exploração e investigação bem como o valor dos diversos processos de comunicação, incluindo as discussões coletivas (Ponte, 2012). Enquanto para outros matemáticos como Lin (2012), em Taiwan, esta ideia é reforçada pela referência explicita à avaliação como um aspeto fundamental da experiência no ensino da matemática, referindo que: (1) antes do ensino, os professores especializados devem dominar a conceção e utilização de tarefas que suportem pensamentos matemáticos ricos; (2) durante o ensino, eles selecionam e sequenciam as soluções dos estudantes para discussão na turma, questionando criticamente e utilizando os erros e os equívocos dos estudantes para discussão; respondem adequadamente às perguntas dos estudantes e no final resumem os pontos principais da aula; e (3) após o ensino, os professores especializados devem ter a capacidade de propor trabalhos criativos para avaliar o que é e como é que os estudantes aprenderam nas aulas. Segundo Lin (2012) esta abordagem, para o desenvolvimento das competências dos professores especialistas no ensino da matemática, centra-se num programa de desenvolvimento profissional longitudinal que estimula a reflexão dos professores. Esta autora argumenta que refletindo, antes, durante e depois da aula os professores aperfeiçoam as suas competências de ensino e capacidades e melhoram gradualmente a sua experiência no ensino da matemática.

A investigação também mostra que a compreensão dos erros e equívocos dos estudantes por parte do professor aumenta a sua eficácia no ensino (Riccomini, 2005). Quando o professor está consciente dos equívocos e erros prováveis de um tópico específico em matemática, a preparação das suas aulas bem como as suas estratégias de avaliação da aula são mais nítidas e abordam os possíveis erros e equívocos dos estudantes de forma adequada (Khazanov, 2008). Para este autor só assim os estudantes adquirem de forma eficiente os conhecimentos e as capacidades previstas.

A formação inicial nem sempre é suficiente para colmatar a falta de conceitos básicos demonstrada pelos estudantes e, quando no seu exercício profissional se vêm professores que demonstram dificuldades, estes agravam as conceptualizações erradas dos seus alunos com as suas próprias conceções (Alatorre & Sáiz, 2009). Vários estudos revelam que os professores apresentam as mesmas dificuldades conceptuais em Geometria dos alunos que ensinam (Owens & Outhred, 2006). Segundo Zaslavsky (1991) este aspeto tem sido tomado em linha de conta uma vez que os professores com um conhecimento conceptual incompleto transmitem conceitos errados e incompletos aos seus alunos.

Pode então concluir-se que, para além de outras capacidades, um bom professor deve não só ter paixão pelo que ensina como ter um conhecimento matemático e didático que lhe permita identificar: o que pode ensinar, como o pode fazer, quando o deve ensinar e o que o estudante é capaz de aprender.

O National Council of Teachers of Mathematics (2008) defende que a matemática deve ser encarada não como um fator de seleção mas sim como um instrumento de desenvolvimento acessível a todos os estudantes. Mas para isso é imprescindível que haja professores preparados e competentes, um currículo matemático sólido e condições de trabalho apropriadas.

Síntese

Nestas últimas décadas a educação tem vindo a sofrer alterações que ainda estamos a tentar perceber. Alguns professores não estão preparados para as necessidades de uma sociedade tecnológica em permanente transformação. Os resultados dos sistemas de avaliação nacionais e internacionais mostram um fraco desempenho dos nossos estudantes, embora os recentes resultados internacionais do PISA (2012) mostrem uma evolução positiva no que à matemática diz respeito. Neste contexto a formação inicial e a formação contínua de professores assumem uma importância fundamental.

As instituições internacionais manifestam alguma preocupação sobre o modo como a formação de professores ocorre. A UNESCO recomenda aos governos "especial empenho em reafirmar a importância dos professores da educação básica" pois "se o primeiro professor que o estudante encontra tiver uma formação deficiente ou se revelar pouco motivado, são as próprias fundações sobre as quais se irão construir as futuras aprendizagens que ficarão pouco sólidas" (Delors et al., 1996, p. 136). A OCDE ao defender a inscrição da educação em relações institucionais fortes acredita que o conhecimento produzido deve ser partilhado e consolidado entre os professores e com os aprendizes em comunidades de aprendizagem. Esta organização internacional acredita ser possível educar e apoiar o desenvolvimento de estudantes e professores para que estes construam sistemas de inovação – as escolas (Robertson, 2005). Mas na União Europeia, e a partir da informação disponível, é difícil vermos quais as tendências relativamente à formação de professores. Hoje as instâncias comunitárias são atravessadas por diversas situações e pelo desequilíbrio de opções a privilegiar como orientação das políticas dos estados-membros. E em Portugal essas divergências produziram propostas de sentidos muito diferentes para a formação inicial de professores.

Todo o professor é professor de *alguém* ensinando *alguma coisa* numa determinada circunstância e com uma determinada finalidade (Alarcão et al.,1997). Daí que, como previsto na legislação portuguesa, a formação de professores tem de abarcar tanto a vertente científica como a vertente humanística, artística ou tecnológica. Ou seja, o professor tem de adquirir formação noutras áreas do saber para além das da sua especialidade uma vez que o educador é uma figura de cultura. Para além disso a complexidade do processo de aprendizagem, que nos objetivos curriculares inclui não só conhecimentos mas também capacidades, valores e atitudes, a diversidade dos públicos escolares, a variedade de funções e tarefas necessárias nas instituições educativas (e.g., a definição do projeto de escola, a realização de projetos de intervenção, o apoio a estudantes com necessidades educativas especiais, o diagnóstico de problemas, a participação na gestão escolar) exigem múltiplas vertentes na formação de índole educacional.

A investigação na formação de professores mostra que aprender a ensinar é um processo complexo e multidimensional que depende da capacidade de sintetizar, integrar e aplicar os conhecimentos de várias fontes na construção de uma compreensão de como facilitar a aprendizagem em contextos dinâmicos complexos, com uma multiplicidade de aspetos que exigem atenção e ação. Embora não exista nenhuma investigação sistemática sobre o ensino especialista da matemática no quadro do antigo currículo da educação básica, existe um documento da APM (1997) que põe em evidência a importância da prática dos professores. Este documento diz que essa prática deve incluir uma *diversificação* no tipo de tarefas, no tipo de interação na sala de aula, na utilização de materiais de apoio e nas formas de avaliação. Esta *diversificação* pretende cativar estudantes com várias origens culturais e necessidades de aprendizagem, e para isso, segundo Ponte (2012), os professores também devem introduzir elementos de diferenciação no seu ensino.

Os investigadores, os profissionais da educação e até os formuladores de políticas reconhecem que professores bem preparados e ensino de alta qualidade são fatores-chave na aprendizagem do estudante (Borko & Whitcomb, 2008). Para estes autores os professores é que serão o motor capaz de estimular reformas na educação matemática.

Relativamente à importância do conhecimento matemático os professores sabem que este é um dos fatores que mais influencia o que acontece nas salas de aula. E é consensual que para ensinar matemática é necessário desenvolver conhecimentos matemáticos e conhecimentos sobre a matemática, assim como conhecimento sobre como ensinar. Ma (2009) corrobora esta ideia ao afirmar que "um conhecimento limitado da matéria restringe a capacidade de um professor promover uma aprendizagem conceptual entre os estudantes" (p. 83). E sublinha que nos professores "o seu conhecimento didático não pode compensar a ignorância do conceito" (p. 135). O que vai ao encontro das ideias de Shulman (1986) quando afirma que o conhecimento e a didática são partes indissociáveis da compreensão. Segundo este autor os professores devem definir, para os estudantes, as verdades aceites num dado domínio, devem de saber explicar por que é que uma dada proposição é considerada verdadeira, e como é que ela se relaciona com outras proposições, dentro e fora da disciplina, tanto na teoria como na prática. Shulman defende ainda que o conhecimento do conteúdo é importante para ajuizar à posteriori sobre as questões didáticas com enfase curricular. Também Ball et al. (2001) defendem que um ensino de qualidade está diretamente relacionado com o conhecimento da matéria. E Ponte e Chapman (2008) sublinham que a natureza deste conhecimento é um fator determinante para tudo o que um professor deve dominar. O professor tem de ter diferentes tipos de conhecimento, competências, atitudes e valores. Tem de conhecer o contexto da aprendizagem, os atores, interesses e características dos participantes em todo o processo. E tem de saber quais as opções e condições do programa, isto é, abordagens didáticas, relação entre estudantes e professores, acesso a recursos e utilização de tecnologia de informação e comunicação.

Visto que as perceções positivas dos professores sobre as capacidades matemáticas dos seus estudantes podem impulsionar neles atitudes positivas face à matemática e favorecer o seu envolvimento nas aulas de matemática, todo o educador deve ter paixão pelo que ensina.

A formação de professores deve ser, por um lado, um sistema dinâmico e aberto e, por outro um processo contínuo e exigente, o que quanto a nós sintetiza muito bem toda a complexidade associada ao processo de formação e desenvolvimento profissional de um bom professor. Mas deve ter-se a consciência de que a formação inicial de professores nem sempre é suficiente para colmatar a falta de conceitos básicos demonstrada pelos estudantes. Isto deve ser levado em conta pelos agentes políticos que deverão para isso ouvir as organizações representativas dos professores de molde a se encetar uma alteração no figurino da formação de professores que garanta profissionais competentes, com conhecimento conceptual completo e capazes de transmitirem conceitos corretos aos estudantes.

O Ensino e a Aprendizagem da Matemática

A melhor maneira de aprender uma coisa é descobri-la por si próprio. Deixemo-los aprender a conjeturar. Deixemo-los aprender a experimentar. Não devemos desvendar imediatamente o nosso segredo todo – deixemos que os estudantes formulem hipóteses antes de darmos a solução, deixemo-los descobrir por eles próprios tanto quanto possível

(George Pólya, 1962).

Preocupações na Educação Matemática

Desde a década de 90 uma das principais preocupações da investigação e do desenvolvimento da educação é o melhoramento da literacia científica. Tanto a nível internacional como nacional, fruto dos dececionantes resultados dos estudantes nos estudos do TIMSS e PISA, existe uma consciência pública para a necessidade urgente de melhorar a alfabetização científica para um nível de suficiente. Esta consciência, que tem alarmado um público mais amplo como políticos e administradores escolares, exige que o ensino e a aprendizagem de ciências no ensino se tornem mais eficazes (Duit & Treagust, 2003). Daí que nas escolas muitos projetos de desenvolvimento de qualidade (e.g., Beeth, 2001; Prenzel & Duit, 2000) partilhem as seguintes características: (1) as escolas e os professores têm de repensar a representação da ciência no currículo; (2) ampliar o repertório de tarefas, experiências e estratégias e recursos de ensino e aprendizagem; (3) promover estratégias e recursos que aumentem o envolvimento e interesse dos estudantes; e (4) definir princípios construtivistas na prática. Para Duit e Treagust (2003) estas características exigem que o professor seja um profissional reflexivo. Segundo estes autores as características implicam que os estudantes sejam ativos, auto responsáveis, cooperativos e autorreflexivos. É por isso que os programas de desenvolvimento da qualidade devem ser baseados numa perspetiva construtivista de ensino e aprendizagem.

As atitudes e os afetos dos estudantes da formação inicial sobre a aprendizagem da matemática têm sido uma das áreas de preocupação da comunidade científica internacional. As atitudes positivas são desejáveis para os resultados de aprendizagem da maioria das disciplinas escolares. Inúmeros estudos, incluindo grandes estudos comparativos internacionais tais como as tendências em matemática e estudo da ciência (TIMSS), incluem a atitude do estudante como uma variável significativa do sucesso (e.g., House, 2006;

Schreiber, 2002; Van den Broeck, Opdenakker & Van Damme, 2005). Relativamente às atitudes dos estudantes para com a matemática, os estudos têm considerado a confiança, a ansiedade e a utilidade da matemática. Segundo Wong e Chen (2012) muitos investigadores apontam a atitude como uma construção ambígua com muitos tons de significado sobrepostos sobre os domínios afetivo e cognitivo. No entanto mesmo um exame superficial sobre as escalas de atitudes publicadas identifica itens que são utilizados para descrever emoções, crenças, ansiedade, confiança, etc. Já Tobias e Itter (2007) argumentam que, a fim de abordar o entendimento conceptual e processual, a disposição do estudante para se envolver no processo é fundamental. Dado que muitos dos candidatos a professores do ensino básico têm tido más experiências anteriores (na escolaridade básica e secundária), há uma preocupação de que no ensino superior isso irá afetar não só a sua vontade de se envolver num nível de mestria nas unidades curriculares de ensino da matemática bem como a sua visão de desempenho como professores (Tobias, Serow & Schmude, 2010).

Sullivan, Clarke e O´Shea (2010) efetuaram um estudo onde examinam como os estudantes descrevem a sua lição de matemática ideal. Descobrem que os comentários dos estudantes são similares às características que frequentemente são utilizadas pelos investigadores para delinear as características de um ensino eficaz. Em particular os estudantes gostam de explicações claras, recordam lições em que se utilizam materiais (embora não fossem materiais estruturados) que permitam conexões para as suas vidas, sentem que o trabalho de grupo é importante como forma de aprendizagem e gostam de ser desafiados. Há diversidade nos tipos de lições que os estudantes descrevem indicando que a variedade também é importante dado que estudantes diferentes solicitam abordagens diferentes.

Uma vez que as crenças dos professores se refletem na sua prática e influenciam as crenças dos estudantes (Mason, 2003), a formação inicial e em serviço devem incluir atividades que visem explicitá-las e incentivem os professores a analisar e refletir sobre suas próprias convicções sobre a disciplina e sobre as diferentes formas em que a matemática pode ser abordada em sala de aula (Franke, Fennema & Carpenter, 1997). Os professores devem "ter uma compreensão das etapas gerais por que os estudantes passam na aquisição dos conceitos e procedimentos num dado domínio, dos processos que são utilizados para resolver os vários problemas de cada fase, bem como a natureza do conhecimento que está por trás desses processos" (Carpenter & Fennema, 1991, p. 11). Para estes autores a investigação mostra que esse conhecimento pode melhorar a aprendizagem dos estudantes. E há muitas evidências de que a aprendizagem é reforçada quando os professores prestam atenção ao conhecimento e crenças que os estudantes trazem para a tarefa de aprendizagem, usam esse conhecimento como ponto de partida para a nova instrução e monitorizam as mudanças nas conceções dos estudantes de acordo com a instrução (Bransford, Brown & Cocking, 1999, citado em Battista, 2011).

Uma construção sólida do edifício matemático exige compreensão em matemática. Mas o que é que se entende por compreensão? Skemp (1978) identificou dois tipos de compreensão, a relacional e a instrumental. Este autor descreve o entendimento relacional como “saber o que fazer e porquê”(p. 2), e o processo de aprendizagem relacional da matemática como “a criação de uma estrutura conceptual" (p. 14). Por outro lado, a compreensão instrumental é descrita por Skemp simplesmente como "regras sem razões" (p. 2). Nickerson (1985) ao examinar o que é entendimento apontou alguns resultados de compreensão - por exemplo, de acordo com especialistas, ser capaz de ver as características mais profundas de um conceito, procurar informação específica de uma dada situação mais rapidamente sendo capaz de representar situações e prever situações utilizando modelos mentais. No entanto, este autor também propõe que "a compreensão no dia-a-dia é reforçada pela capacidade de se construírem pontes entre um domínio conceptual e outro" (p. 229). Como Skemp, Nickerson (1985) destaca a importância do conhecimento e do conhecimento relativo dizendo: "Quanto mais se sabe sobre um assunto, melhor o compreendemos. Quanto mais rico é o contexto conceptual em que se pode inserir um novo facto, mais pode ser dito para entender esse facto" (pp. 235-236). Hiebert e Carpenter (1992) definem especificamente compreensão matemática como envolvendo a construção do contexto conceptual afirmando que:

> A matemática é entendida se a sua representação mental fizer parte de uma rede de representações. O grau de compreensão é determinado pelo número e força das suas ligações. A ideia matemática, procedimento ou facto, é completamente entendida se estiver ligada a redes existentes com ligações fortes ou mais numerosas (p. 67).

Pode dizer-se então que a ideia da compreensão matemática ser uma estrutura ou rede de ideias matemáticas ou de representações emerge claramente da literatura.

No que à aprendizagem diz respeito, Ma (2009) entende que a aprendizagem da matemática “é como um edifício de vários andares. Os alicerces podem ser invisíveis a partir dos pisos superiores, mas são eles que os sustentam e fazem com que o conjunto de pisos forme um todo coerente” (p. 205). Enquanto formadores é difícil diagnosticarmos qual ou quais os alicerces que faltam aos estudantes. Por sua vez os estudantes temem dar a conhecer as suas debilidades científicas pensando que com mais conhecimento podem colmatar essas falhas. É como se resolvêssemos acrescentar mais um ou dois pisos a um edifício projetado para dois andares, sem se reforçar os seus alicerces, o que indubitavelmente conduziria ao seu colapso. Por isso, é fundamental que os futuros professores tenham os conceitos básicos (os alicerces) muito bem compreendidos para que possam ser capazes de compreender outros mais complexos (os pisos superiores) ou desmontar todo o edifício e reconstrui-lo de novo. Por isso, ensinar é uma arte que exige muita didática, alguma psicologia e conhecimentos científicos muito bem estruturados.

Como Wood (2002) sublinha as formas alternativas de ensino e investigação chamaram a atenção para questões importantes no ensino da matemática, como as normas da sala de aula, padrões de interação, apoio ao pensamento e o raciocínio matemático do estudante, que representam novos desafios para o professor, formador de professores e investigador. Existe um crescente número de estudos que investigam a forma de vincular a complexidade do ensino e aprendizagem da matemática à formação inicial e à formação contínua de professores. Por exemplo, Wood e Berry (2003) destacam a importância de gerar e partilhar conhecimento entre os professores sobre a complexidade no ensino de matemática. Também Vale e Fonseca (2010) sublinham que o objetivo final do ensino da matemática é desenvolver a capacidade de os estudantes para generalizarem numa ampla variedade de circunstâncias, não só com números mas também com formas no plano e no espaço. Os professores de matemática eficazes possuem uma boa compreensão da matemática que ensinam, e o conhecimento matemático dos professores continua a ser um assunto muito discutido nos debates da atualidade sobre como melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática (Ball et al., 2001). Embora seja geralmente aceite que o conhecimento dos professores abrange mais do que apenas o conhecimento do conteúdo, é esse conhecimento do assunto que tem impacto sobre os outros tipos de conhecimento identificados pelos investigadores como Shulman (1987) e como Ball e seus colegas (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008).

As conceções erróneas impedem a compreensão de conceitos matemáticos fundamentais e são aceites como grandes obstáculos à aprendizagem (e.g., DiSessa, 2006; Duit & Treagust, 2003). No entanto, parece que ensinar de forma a evitar que os estudantes criem quaisquer equívocos não é possível e ter-se-á de aceitar que irão fazer algumas generalizações que não estão corretas e muitos desses equívocos permanecerão escondidos a menos que o professor faça esforços específicos para os descobrir (Koklu & Topcu, 2012). De acordo com estes autores, os educadores de matemática devem preocupar-se com as formulações ambíguas ou incorretas de conceitos matemáticos dos estudantes, tentando substituí-las por outras de compreensão exata e flexível que suporte várias representações. Cultivar nos estudantes uma disposição para pensarem criticamente é uma parte vital de uma educação científica (Driver, Newton & Osborne, 2000). Para Siegel (1989) um pensador crítico deve ter certas atitudes, disposições, hábitos mentais e traços de caráter que, juntos, podem ser rotulados de *atitude crítica* ou *espírito crítico*. Para desenvolver este espírito crítico Ross (2007) afirma que:

> O professor precisa de se envolver na discussão: para ser provocativo, para ser a charneira que permite a dissidência, que coloca pontos de vista diferentes … ouve os outros, apresenta provas e argumentos, permite pontos de vista diferentes, pegando e elaborando pontos de semelhança e de diferença. Isto inclui colocar casos que suscitem a opinião dos estudantes … de maneira a permitir que a turma responda, refute, e os desafie (p. 125).

A melhoria da educação e a melhoria do ensino e da aprendizagem dependem do desenvolvimento profissional dos professores. A investigação que Empson e Jacobs (2008) fizeram suporta a afirmação de Boles e seus colegas de que "ensinar é ouvir e aprender é falar" (Boles, Troen & Kamii, 1997, citado em Empson & Jacobs, 2008, p. 276). Estes autores sublinham que os professores eficazes ouvem regularmente e com cuidado os estudantes e utilizam o que ouvem para decidir o que fazer a seguir e quando. Para estes autores subsiste um dilema para os formadores de professores de matemática. É que aprender a ouvir a matemática dos estudantes é um desafio para ser realizado no curto prazo mas que tem enormes benefícios a longo prazo. E ouvir responsavelmente na sala de aula é um trabalho árduo que só pode ser realizado por um professor que possua um conjunto de competências inter-relacionadas e isso leva tempo - geralmente vários anos - para se desenvolver. Como tal, para o desenvolvimento desta perícia devem competir com as pressões diárias do ensino em que os professores muitas vezes optam por manter a dinâmica lição (Kennedy, 2005) em vez de estarem atentos à forma como o estudante conduz ou expressa o seu raciocínio (Empson & Jacobs, 2008).

Nas últimas décadas numerosos estudos incidiram sobre a análise do discurso argumentativo em contextos educativos (Aleixandre, Rodríguez & Duschl, 2000). Esses estudos evidenciam a importância do discurso na aquisição do conhecimento científico (Schwarz, Neuman, Gil & Ilya, 2003) e no desenvolvimento de hábitos de *pensar ciência* (Kuhn, 1993). Os trabalhos deste autor revelam que o desenvolvimento das destrezas argumentativas não ocorre igualmente em todos os ambientes de aprendizagem, assumindo particular interesse os contextos que tenham relevância para a vida dos estudantes – como é o caso da formação de professores. Para Mason (1996) a argumentação é uma forma de discurso que precisa de ser apropriada pelos estudantes e explicitamente ensinada através de formação adequada. Porém, esta área de investigação da argumentação na educação permanece relativamente desconhecida (Erduran, 2006). A natureza da contribuição dos estudos de argumentação a outros aspetos do ensino das ciências é igualmente desconhecida. Mas, no Reino Unido, um estudo elaborado com estudantes e professores do ensino médio, que investigou as estratégias e recursos para a promoção e manutenção da argumentação na aula de ciências (Erduran, Ardac & Guzel, 2006), chegou às seguintes conclusões: (1) é possível educar os futuros professores para adaptarem o seu ensino de modo a colocar mais ênfase na construção de argumentos; e (2) a capacidade de argumentação dos estudantes aumenta com a prática. Estes autores admitem que estas conclusões são difíceis de serem colocadas em prática, afirmando que a coordenação de objetivos curriculares atuais com novas estratégias - como a argumentação - coloca exigências adicionais sobre os professores. Se o currículo salienta os resultados de conteúdo, será muito difícil para os professores abrir um espaço de discussão na sala de aula para permitir que a argumentação aconteça. Além disso sem uma mudança no que é avaliado em termos de ensino e aprendizagem é pouco provável que alguns dos resultados animadores observados nesta investigação possam ser sustentáveis a longo prazo. Contudo estes autores destacam que mesmo um treino de curto prazo na formação de professores consegue atingir os objetivos didáticos e de aprendizagem pretendidos, o que não deixa de ser um resultado encorajador.

Whitenack e Yackel (2002) sublinham a importância da argumentação em matemática dizendo que o professor deve solicitar aos seus estudantes a explicação e justificação das suas ideias nas discussões durante a aula. Para as autoras todos os estudantes beneficiam destas discussões incluindo o que as está a expor e os que nela participam. Quando o estudante está a justificar ou a explicar o seu pensamento, está a revisitar as suas ideias matemáticas. Ajudar os estudantes a explicar e justificar as suas ideias, ou seja, construir os argumentos das suas soluções, pode ser um desafio para o trabalho de um professor na sala de aula. O professor deve monitorar continuamente a discussão dando aos seus estudantes a oportunidade para desenvolverem modos de raciocinar uns com os outros. Ainda segundo estas autoras quando o estudante explica a sua resposta pode construir um argumento matemático forte ou encontrar um novo modo de olhar para o problema. Deste modo o estudante desenvolve não só uma compreensão mais forte das ideias que está a utilizar como também pode construir novos entendimentos. A relação entre o raciocínio por si só e a partilha de significados com os outros é verdadeiramente essencial (Whitenack & Yackel, 2002). Ao permitir explicar e justificar as suas ideias, os professores ajudam os estudantes a desenvolver disposições matemáticas. Ao fazê-lo o estudante vê a atividade matemática não como simples obtenção de respostas corretas, usando e descrevendo procedimentos de rotina, mas também como exploração de ideias matemáticas. Esta abordagem de ensino explora o sentido matemático dos estudantes, ajudando-os a verem-se a si mesmos e aos outros como pensadores matemáticos. Estas situações constituem verdadeiras oportunidades de aprendizagem.

Ferguson (2013) acredita que uma das áreas mais prementes para futuras investigações é a questão das discussões na turma nas aulas de matemática e dos estudantes com fraca prestação. Para esta autora as discussões com toda a turma são uma potencial e rica oportunidade de aprendizagem para todos os estudantes porque considera que as estratégias de pensamento de outros estudantes, articulam e esclarecem a sua própria estratégia. Os estudantes de fraca prestação não devem ser excluídos destes benefícios. Por isso os professores precisam de pedagogia para facilitar o acesso e a participação dos estudantes de fraca prestação nas discussões com toda a turma.

Para Stein e Kim (2009) uma aula de alta qualidade é uma aula em que o professor atende ao pensamento do estudante, usa as suas respostas para mover a turma para os objetivos da aula de matemática e, finalmente, em que os estudantes são incentivados a resolver problemas e a justificar as suas estratégias usando o raciocínio matemático. Também Stein e Haufman (2010) defendem que estas três medidas de implementação de qualidade estão significativamente correlacionadas umas com as outras. Estas autoras investigaram como a capacidade dos professores (o seu nível de educação, experiência e conhecimento) e o uso do currículo influenciam a aprendizagem. As conclusões do estudo sugerem que os decisores procurem escolher um programa de matemática que vá ajudar os professores a trabalhar com grandes ideias dentro das lições: (1) um foco num único conceito matemático ou ideia numa aula; (2) clareza na apresentação desse conceito matemático ou ideia; e (3) amplo apoio e explicação nas lições. Isso ajudará o professor a apresentar o conceito aos estudantes e habilmente facilitar o pensamento dos estudantes e a discussão sobre esse conceito em sala de aula.

Num estudo levado a cabo por Mercer e Sams (2006), com 109 estudantes e seus professores, foram estudados os contributos da aplicação do programa “Pensando juntos”.

Este programa, que envolvia a realização de várias tarefas conduzidas pelo professor, tinha o objetivo de estudar o seu impacto no desenvolvimento do raciocínio e na aprendizagem dos estudantes. O programa "Pensando juntos" foi cuidadosamente projetado para incluir atividades de grupo em pares com a orientação do professor. O sucesso da sua implementação suporta a visão de que o desenvolvimento da compreensão matemática é resultado de uma combinação entre a interação do grupo de pares e uma orientação especializada. No entanto os resultados desta investigação também indicam que se os professores proporcionarem uma introdução prática e explícita da linguagem e do raciocínio utilizados, os estudantes aprendem diferentes formas de pensamento coletivo e captam as melhores formas de pensamento individual.

O estudo de Morais e Miranda (2008), já anteriormente referido, com estudantes do ensino superior, sobre as relações entre os estilos de aprendizagem dos estudantes e os aspetos que consideram relevantes para eles aprenderem matemática, conclui que o estudante deve ter: (1) qualidades pessoais - ser metódico e prático; (2) atitudes relativas à aprendizagem - ter vontade de aprender e empenhar-se nas suas tarefas; (3) estratégias de aprendizagem - estudar frequentemente e resolver vários exercícios; e (4) conhecimento do estudante – ter noção da importância da matemática no dia-a-dia e ter certas noções básicas. Estes autores sublinham que o importante para aprender matemática é a própria atitude do estudante face à matemática e as estratégias que utiliza para a aprender.

Kikas, Peets, Palu e Afanasjev (2009) elaboraram um estudo onde exploraram o desenvolvimento de capacidades matemáticas em estudantes do ensino básico ao longo de três anos. Como esperado o desenvolvimento em matemática foi positivo do 1º para o 3º ano. Além disso os estudantes cujas capacidades matemática se desenvolviam mais rapidamente também tiveram um melhor desempenho matemático no final do 3º ano. Ao nível da sala de aula a experiência dos professores e a preferência pela utilização de métodos de ensino formalistas teve um efeito positivo no desempenho matemático dos estudantes. Por isso deve prestar-se mais atenção para o ensino de conhecimentos matemáticos e capacidades nas crianças da pré-escola. Caso contrário um grupo de estudantes pode ficar para trás desde o início. Na sala de aula os estudantes apresentaram melhor desempenho quando os professores utilizavam métodos de ensino formalistas com mais frequência. Para Siegler (2005) é quando iniciam os seus estudos em matemática que os estudantes precisam de praticar a utilização da linguagem e dos procedimentos de matemática formal. Por isso os professores do ensino básico não devem ter medo de usar métodos formalistas ao lado dos tradicionais e construtivistas. Em matemática o desenvolvimento de competências processuais e o desenvolvimento do conhecimento conceptual estão interligados (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

Um outro estudo realizado por Trigwell, Ellis e Han (2012), com estudantes do 1º ano do ensino superior, procurou investigar como as abordagens e as emoções se relacionam com os resultados das aprendizagens. As análises quantitativas realizadas sugerem que existe uma relação entre a forma como eles experimentam emocionalmente o seu curso e a abordagem que têm na aprendizagem do curso. Para estes autores os estudantes que experienciam fortemente emoções positivas, como esperança e orgulho, e menos emoções negativas, como raiva, tédio, ansiedade e vergonha, estão mais suscetíveis para a adoção de uma abordagem profunda à aprendizagem. Em contrapartida os estudantes que descrevem uma abordagem mais superficial à aprendizagem são os que relatam experiências de baixas emoções positivas e altas emoções negativas. Ainda segundo estes autores uma menor realização pessoal de um estudante está associada a uma abordagem superficial na aprendizagem e a experiências emocionais negativas. Por isso é tão importante existir a consciência do valor que a experiência de aprendizagem tem para os estudantes e a necessidade de se considerar toda uma gama de emoções e de abordagens na conceção de novos ambientes de aprendizagem.

Há por isso uma grande necessidade de se estudar os ambientes de ensino e aprendizagem de estudantes e professores e compreender esses ambientes para o sucesso no ensino e na aprendizagem da matemática.

A Educação Matemática em Portugal

O movimento internacional da Matemática Moderna marcou a década de sessenta. Os currículos de matemática foram profundamente reformulados, tendo-se eliminado matérias tradicionais e introduzido novas matérias, sobretudo introduziu-se uma nova abordagem da matemática e uma nova linguagem marcada pelo simbolismo da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. Neste movimento foi determinante a influência da perspetiva formalista da matemática - o que conta é o modo como se manuseiam os símbolos e não o seu significado. O problema aqui foi ganhar-se em rigor mas perder-se na compreensão das ideias e dos conceitos matemáticos. O formalismo foi um programa ambicioso que visava construir uma fundamentação inatacável para a matemática, objetivo que não conseguiu alcançar. E como doutrina para sustentar a didática da matemática revelou-se completamente inadequada.

Portugal participou neste movimento através de José Sebastião e Silva. Ao contrário do que acontecia em muitos outros países em que se privilegiava exclusivamente a perspetiva da matemática pura, José Sebastião e Silva empenhava-se em mostrar a importância das aplicações da matemática.

Entretanto em muitos países assiste-se a uma forte contestação a este movimento. Os estudantes mostram-se cada vez mais desmotivados com a matemática, não entendem os novos símbolos e seus resultados nos exames pioram. Dois matemáticos notáveis, Kline (1973) e Thom (1973), empreendem uma crítica demolidora ao movimento da Matemática Moderna corroborada em Portugal por St. Aubyn (1980) quando refere que:

> Acabamos por assistir a um ensino de Matemática orientado numa ótica essencialmente dedutiva, focando os aspetos lógicos, privilegiando o estudo dos mais diversos tipos de estruturas, desde as mais "pobres" às mais ricas. A Matemática aparece aos olhos dos jovens como ciência acabada, artificialmente criada, sem qualquer ligação com a realidade. A intuição, fundamental na criatividade, que teve um papel essencial na construção do edifício matemático, não é estimulada. Ora, se analisarmos as diversas etapas históricas da evolução da Matemática, reconhecemos que a intuição teve sempre um papel capital nas descobertas e, portanto, no progresso matemático e que a dedução, isto é, a construção do edifício da Matemática a partir de um número reduzido de axiomas e definições corresponde a uma fase posterior de síntese. (p. 8)

No início da década de 70 foram introduzidos em todos os níveis de ensino novos programas elaborados no espírito da Matemática Moderna mas já sem a participação de José Sebastião e Silva. Nesta generalização salientou-se o que era abstrato e formal sem se perder de vista o cálculo. As aplicações da matemática desapareceram por completo. Tudo o que remetia para o desenvolvimento da intuição, base da compreensão das ideias matemáticas, foi relegado para segundo plano. Em Portugal os programas de matemática dos anos 70 e 80 são uma curiosa mistura de matemática formalista no estilo moderno com matemática computacional que começava a dar os primeiros passos no estilo tradicional. No entanto os maus resultados dos estudantes continuavam assim como a insatisfação dos matemáticos. Esta situação levou a Sociedade Portuguesa de Matemática a realizar numerosos debates onde se pedia a revisão dos programas (SPM, 1982).

O momento mais significativo de reflexão sobre matéria curricular ocorreu em Vila Nova de Milfontes, no ano de 1988, num seminário organizado pela APM onde participaram cerca de duas dezenas de professores, matemáticos e educadores matemáticos. Os documentos preparatórios que serviram de base às discussões deste seminário foram elaborados por Eduardo Veloso, Henrique Manuel Guimarães, João Pedro da Ponte e Paulo Abrantes. Neste seminário é notória a influência das novas correntes sobre o currículo e o ensino que se tinham vindo a desenvolver internacionalmente, em especial as normas do NCTM que já existiam em versão preliminar e o livro intitulado “The Mathematical Experience” de Philip Davis e Reuben Hersh (1981, 1995). Nas conclusões deste encontro tiveram destaque duas grandes ideias: a importância dos estudantes terem uma experiência matemática genuína e as possibilidades das novas tecnologias como suporte para o desenvolvimento dessa experiência. Em consequência disso três grandes propostas foram apresentadas: (1) valorizar objetivos curriculares referentes a capacidades (resolução de problemas e raciocínio matemático) e atitudes positivas em relação à matemática; (2) dar prioridade na sala de aula a tarefas ricas e desafiantes envolvendo resolução de problemas, explorações matemáticas, raciocínio e comunicação; e (3) encarar o programa e os manuais como instrumentos de trabalho e não como prescrições a seguir cegamente.

No final dos anos 80, associada à reorganização dos planos curriculares e em consequência da reforma introduzida pela Lei de Bases do Sistema Educativo, o Ministério da Educação empreende uma reformulação geral dos programas. Os novos programas são elaborados por equipas nomeadas pelo Ministério da Educação formadas por professores ligados à Matemática Moderna. No entanto estas equipas são sensíveis às novas perspetivas procurando acomodá-las nos programas - a resolução de problemas assume um lugar de destaque no ensino básico, admite-se a utilização das novas tecnologias (quando possível e necessário) e revaloriza-se a Geometria.

Em 1991 foram introduzidos sem grandes sobressaltos os novos programas de matemática do ensino básico para o 1º, 2º e 3º ciclo. Em 1996 surgiu um novo movimento de renovação curricular com a “reflexão participada sobre os currículos” continuado pelo “projeto de gestão flexível” e culminado com a publicação, no início do ano letivo de 2001/02, do Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME, 2001). As orientações curriculares são formuladas em termos de competências e de tipos de experiências de aprendizagem a proporcionar aos estudantes. E as competências integram conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver pelos estudantes por área disciplinar e por ciclo, assumindo-se o ensino básico como um todo. Sugere-se também que o ensino surja a partir de situações do dia-a-dia em que a matemática é utilizada. Recomenda-se que sejam proporcionadas aos estudantes experiências de aprendizagem significativas, integradas em “projetos transdisciplinares e atividades interdisciplinares” (ME, 2001, p. 59), tornando possível a integração de saberes diversificados. Este documento curricular constitui a formulação de orientações gerais oficiais para o ensino da disciplina mais avançadas e mais coerentes jamais realizadas no nosso país.

Em 2007 surge o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) que substitui os anteriores em vigor desde 1990 (1º ciclo) e 1991 (2º e 3º ciclos). É a primeira vez que se elabora em Portugal um programa articulado para os nove primeiros anos de escolaridade. Este programa valoriza a necessidade de uma formulação das finalidades do ensino da matemática clara, coerente e suscetível de orientar efetivamente a prática, a saber: (1) promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados; e (2) desenvolver atitudes positivas face à matemática e a capacidade de apreciar esta ciência. Note-se que em primeiro lugar se referem os conhecimentos e capacidades de âmbito cognitivo a desenvolver pelo estudante e só depois se referem as atitudes e a capacidade de apreciação. Isto porque se entende que só faz sentido falar em atitudes positivas e apreciação da matemática, por parte do estudante, tendo por base o seu conhecimento e a sua capacidade de mobilização desse conhecimento nas mais variadas situações. Para a concretização destas finalidades são definidos nove objetivos gerais para o ensino da matemática: (1) conhecer factos e procedimentos básicos; (2) compreender a matemática; (3) lidar com diversas representações; (4) comunicar matematicamente; (5) raciocinar matematicamente; (6) resolver problemas; (7) estabelecer conexões; (8) fazer matemática de modo autónomo; e (9) apreciar a matemática. O primeiro destes objetivos diz respeito aos conhecimentos básicos e o segundo à importância da compreensão na aprendizagem da matemática. Do terceiro ao sétimo todos estes objetivos dizem respeito a capacidades transversais, tendo lugar de destaque a comunicação matemática, o raciocínio matemático e a resolução de problemas. De realçar que estas capacidades transversais são em tudo semelhantes às propostas nos Princípios e Normas do NCTM (2008). Os dois últimos objetivos dizem respeito ao modo como se espera que os estudantes se relacionem pessoalmente com a matemática e apreciem esta disciplina. Em relação aos programas anteriores no PMEB (ME, 2007) há diferenças significativas no aprofundamento e no tratamento de cada tema. Porém dado o objetivo deste estudo só nos iremos debruçar, mais adiante, apenas sobre o tema: Geometria e Medida.

Em dezembro de 2011, através do Despacho nº 17169/2011, o Ministério da Educação e Ciência determina que o documento Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais, deixe de constituir documento orientador do ensino básico em Portugal; as orientações curriculares desse documento deixam de constituir referência para os documentos oficiais do Ministério da Educação e Ciência, nomeadamente para os programas, metas de aprendizagem, provas e exames nacionais; os programas existentes e os seus auxiliares constituem documentos orientadores do ensino mas as referências que neles se encontram a conceitos do documento Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais - deixam de ser interpretados à luz do que nele é exposto; os serviços competentes do Ministério de Educação e Ciência, através da Secretaria de Estado do Ensino Básico e Secundário, irão elaborar documentos clarificadores das prioridades nos conteúdos fundamentais dos programas; esses documentos constituirão Metas Curriculares a serem apresentadas à comunidade educativa e serão objeto de discussão pública prévia à sua aprovação.

Em abril de 2012, através do Despacho nº 5306/2012 e na dependência direta do Ministro da Educação e Ciência, é criado um grupo de trabalho de reformulação das Metas Curriculares, o qual tem por missão identificar o conjunto de conhecimentos e capacidades essenciais que o estudante tem de adquirir e desenvolver, por ano de escolaridade ou ciclo, nas diferentes disciplinas dos ensinos básico e secundário. O documento resultante deste processo constituiu um referencial a seguir num primeiro ano 2012/13 a título indicativo, após o que assumiu um caráter obrigatório articulando-se com as avaliações a realizar. O primeiro ano em que foi fortemente recomendado o seguimento das metas, sem que houvesse ainda uma obrigatoriedade do seu cumprimento, permitiu não apenas uma familiarização por parte dos professores como também uma aferição e uma posterior concretização decorrente da experiência. As metas são acompanhadas de cadernos de apoio, contendo suportes teóricos aos objetivos e descritores definidos e exemplos de concretização de alguns descritores e de estratégias e métodos de ensino. Do mesmo modo os níveis de desempenho esperados serão sempre que possível objeto de especificação e incluirão o material de apoio a disponibilizar.

Em abril de 2013, a revogação plasmada no Despacho nº 5165-A/2013 faz tábua rasa de todo o trabalho e investimento feitos na elaboração, experimentação e implementação do PMEB de 2007, com resultados que foram avaliados e nunca divulgados pelo Ministério da Educação e Ciência. Neste despacho o PMEB de 2007 – que só no final do ano letivo 2012/13 foi totalmente implementado – é objeto de um conjunto de afirmações infundamentadas e em tom difamatório. O mesmo despacho faz referência a uma experimentação das Metas Curriculares que como tal nunca foi divulgada e a resultados que tampouco o foram. Na sequência destes acontecimentos e na qualidade de autores do PMEB (ME, 2007), a propósito das Metas Curriculares de matemática que antecederam o programa agora homologado (MEC, 2013), Ponte et al. (2013) manifestam a sua discordância sublinhando que:

> O programa que agora se estabelece, para entrar em vigência a partir do próximo ano letivo, é profundamente díspar do atual programa, na sua estrutura e lógica global, e contraria muitos dos seus aspetos e componentes fundamentais, nomeadamente no que se refere à perspetiva pedagógica e didática e à ênfase no ensino e aprendizagem subjacentes, comportando também discrepâncias importantes no conteúdo matemático a ensinar (p. 1).

Ainda segundo estes mesmos autores o programa agora homologado menoriza fortemente as capacidades matemáticas que o atual programa considera fundamentais desenvolver nos estudantes para uma aprendizagem com compreensão - o raciocínio matemático, a comunicação matemática e a resolução de problemas - e, igualmente, o cálculo mental e a capacidade de lidar com as conexões e representações matemáticas.

É curioso observar que os últimos dados do PISA (2012) evidenciam uma evolução positiva dos nossos estudantes face à matemática. Desde 2009 a subida de três posições no ranking aproxima Portugal da média internacional. A OCDE analisa a evolução dos conhecimentos e competências dos estudantes de quinze anos ao longo de cerca de uma década. Em 2003 no que à matemática diz respeito Portugal estava abaixo da Espanha, Estados Unidos, França, Hungria, Islândia, Luxemburgo, Noruega, República Checa ou Suécia. Em 2012 Portugal alcançou-os.

Apesar da esperança que estes resultados nos dão só o futuro nos dirá se as recentes alterações efetuadas na matemática do ensino básico trarão ou não algum benefício a um panorama já de si tão pouco animador.

Tendências no Ensino e Aprendizagem da Matemática

Nas últimas décadas muitos investigadores têm estudado as conceções e ideias matemáticas dos estudantes bem como o seu desenvolvimento. Os resultados destes estudos mostram que a aprendizagem da matemática é complexa, leva tempo e muitas vezes não é linear (e.g., Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick & Leung, 2003; English, 2002; Gutiérrez & Boero, 2006; Llinares & Krainer, 2006; Schoenfeld, Smith & Arcavi, 1993; Tirosh, 2000). Mas o problema está em saber o que é que deve ser considerado adequado para ensinar matemática com profundidade (Ponte & Chapman, 2008).

Nos Estados Unidos uma das principais causas do mau desempenho dos estudantes em matemática são os currículos (Ginsburg, Leinwand, Anstrom & Pollock, 2005). Existem problemas tanto na quantidade de tópicos a serem tratados como na forma como são tratados (Clements & Battista, 1992; Ginsburg et al., 2005). Em particular, na Geometria os livros didáticos são ineficazes não só na promoção de níveis mais elevados de pensamento geométrico (Fuys, Geddes & Tischler, 1988) como prejudicam muitas vezes o desenvolvimento deste no estudante (Jaime, Chapa & Gutiérrez, 1992, Mansfield & Happs, 1992). Nos Estados Unidos os currículos não melhoram porque a grande maioria dos esforços de desenvolvimento do currículo não seguem procedimentos sistemáticos, muito menos científicos, de investigação (Battista & Clements, 2000).

Os investigadores necessitam estudar as práticas de sala de aula para compreenderem as relações entre ensino e aprendizagem (Boaler, 2003). O professor é o fator determinante de como o currículo de matemática é interpretado e ensinado. Por isso para este autor é importante aprender com os professores o que eles fazem e como eles entendem o que fazem em sala de aula.

Llinares e Krainer (2006) referem estudos efetuados a futuros professores onde identificam equívocos em vários tópicos da matemática escolar, a saber: Geometria; aritmética e teoria dos números; lógica e prova; funções e cálculo; teoria de conjuntos; medidas e áreas; resolução de problemas e estratégias de resolução de problemas; álgebra; probabilidades; proporções e razão. Também Ponte e Chapman (2006) resumem exemplos de vários estudos, com futuros professores, que mostram que o conhecimento de matemática dos futuros professores é preocupante, tanto em termos do que eles sabem como na forma como detêm esse conhecimento. Os equívocos identificados nalguns desses estudos são: procedimentos acessórios que inibem o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda de conceitos relacionados com a estrutura multiplicativa dos números inteiros; conhecimento processual adequado mas conhecimento conceptual inadequado da divisão; influência dos primitivos modelos para a multiplicação e divisão; representações incompletas e entendimento limitado das frações; definições e imagens distorcidas de números racionais; sérias dificuldades em álgebra; falta de capacidade para se ligarem a situações do mundo real e a cálculos simbólicos; pensamento lógico inadequado; dificuldades no processamento de informação geométrica e falta de conhecimentos geométricos elementares e capacidade de pensamento analítico.

Outros estudos sugerem explicitamente aspetos do conhecimento de matemática que a formação de professores deve ter em conta. Por exemplo na sua investigação Lo (2004) sugere que os cursos de formação de professores trabalhem em contexto com tarefas ricas, incentivando os futuros professores a representar essas tarefas com fotos e diagramas a fim de transmitirem um significado para as suas resoluções. E Tirosh (2000), no seu estudo sobre que conhecimento o futuro professor tem sobre as conceções dos estudantes na divisão de frações, sugere que os programas de formação de professores devem familiarizar os futuros professores com os processos cognitivos, incluindo os errados mais utilizados pelos estudantes na divisão de frações e os efeitos da utilização de tais processos. O pressuposto subjacente a estes estudos sublinha que há que existir uma compreensão clara não só de qual o conhecimento que é significativo mas também da forma como os professores precisam de adquirir e utilizar esse conhecimento para que ele seja significativo no seu ensino. Sobre a natureza dos saberes docentes Ball et al. (2001) afirmam que "estudar o que os professores sabem é insuficiente para resolver o problema de compreender o conhecimento que é necessário para o ensino" (p. 450). E vão mais longe dizendo que o que os futuros professores não têm "é uma visão do conhecimento matemático no contexto de ensino" (p. 450).

Muitos estudos têm mostrado que o conhecimento desenvolvido pelos futuros professores sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, antes da formação de professores, tende a resistir à mudança (e.g., Lampert & Ball, 1999). Segundo Cooney e Wiegel (2003) os tipos de experiências matemáticas, que na formação de professores promovem uma abordagem aberta e orientada para o processo de ensino, devem incluir os seguintes princípios: (1) experimentar a matemática como uma disciplina pluralista; (2) estudar e refletir explicitamente sobre a matemática escolar; e (3) experimentar a matemática de forma a criar o desenvolvimento de estilos de ensino orientados para processos.

O conhecimento para ensinar é descrito por Kilpatrick et al. (2001) da seguinte forma:

> Conhecimento dos fatos matemáticos, conceitos, procedimentos, e as relações entre eles; conhecimento do modo como as ideias matemáticas podem ser representadas; e conhecimento da matemática como disciplina – em particular, como o conhecimento matemático é produzido, a natureza do discurso matemático, e as normas e os padrões de evidência que orientam o argumento e a prova (p. 371).

Sob a influência dos princípios e normas do NCTM, para o enquadramento dos cursos de matemática para professores, Cramer (2004) defende um modelo didático que inclua:

> Conteúdos de matemática inseridos em configurações problemáticas; estudantes a recolher dados, gerar hipóteses e a testar conjeturas; estudantes a trabalhar em pequenos grupos para otimizar a oportunidade para o discurso; questões colocadas de modo a ajudar os estudantes a construir conhecimento matemático; linguagem dos estudantes (oral e escrita) como forma de facilitar a transição da resolução e exploração de problemas para a abstração das matemáticas formais; conexões dentro e entre temas matemáticos devem ser enfatizadas; e uso da tecnologia integrado nas atividades diárias do curso (p. 181).

Para Ponte e Chapman (2008) este é um modelo que espelha as recomendações de reforma para a educação matemática. Estes autores defendem que se os cursos incorporassem princípios como os defendidos por Cooney e Wiegel (2003) e por Cramer (2004) mostravam uma relação positiva entre os cursos de educação matemática e a compreensão da matemática pelos futuros professores.

Em 2001 o National Research Council [NRC] elabora um estudo cujo objetivo foi não só o de sintetizar toda a investigação sobre a aprendizagem da matemática, como o de produzir recomendações para reformular o ensino, a formação de professores e os currículos, e para dar conselhos e orientação aos educadores, políticos e investigadores desde o pré-escolar até ao oitavo ano. A análise do ensino da matemática, a leitura da investigação em psicologia cognitiva e educação matemática, a experiência com estudantes e professores de matemática, e o julgamento quanto ao conhecimento matemático, compreensão e capacidades, que nos dias de hoje as pessoas precisam, levaram o NRC a adotar uma visão abrangente do sucesso sobre a aprendizagem matemática. E reconhecendo que nenhum termo capta completamente todos os aspetos da experiência, conhecimento e capacidade para a matemática, o NRC escolheu o termo *competência matemática* para captar o que significa para qualquer um aprender matemática com sucesso. Para o NRC (2001) a competência matemática tem cinco fios condutores: *compreensão conceptual* (compreensão de conceitos matemáticos e suas relações); *fluência procedimental* (capacidade para realizar procedimentos de forma flexível, com precisão, eficiência e de forma adequada); *competência estratégica* (capacidade de formular, representar e resolver problemas matemáticos); *raciocínio adaptativo* (capacidade de pensamento lógico, reflexão, explicação e justificação); e *predisposição matemática* (inclinação habitual para ver a matemática como sensível, útil e interessante, com empenho e na crença da sua própria eficácia). Realçam ainda o facto de estes cinco fios condutores serem independentes mas estarem interligados. Esta observação tem implicações na forma como os estudantes adquirem *competência matemática*, como os professores desenvolvem essa competência nos seus estudantes e como os professores são formados para alcançar esse objetivo. Neste mesmo estudo o NRC chega à conclusão que o objetivo da *competência matemática* é extremamente ambicioso. De facto até hoje nenhum país – mesmo os mais bem posicionados nos rankings internacionais - conseguiu que todos os seus estudantes tivessem uma *competência matemática*. Segundo conclusões deste relatório os EUA não alcançarão o objetivo da *competência matemática*, se continuarem a mexer com o controlo da política educacional empurrando um botão de cada vez. Em todos os níveis do sistema educacional dos EUA se exige uma formulação e implementação de políticas sustentadas que deem uma atenção redobrada à matemática escolar.

Mais recentemente as normas do NCTM (2008) referem vários princípios para a matemática escolar: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. Ir-se-á debruçar somente sobre os princípios do ensino e da aprendizagem de forma a se compreender melhor algumas das diretivas internacionais para a matemática escolar.

O princípio do ensino diz que "o ensino efectivo da matemática requer a compreensão daquilo que os estudantes sabem e precisam de aprender, bem como o sequente estímulo e apoio para que o aprendam corretamente" (p. 17). É verdade que os estudantes aprendem matemática através das experiências que os professores lhes proporcionam. "Ensinar bem matemática é uma tarefa complexa e não existem receitas fáceis" (p. 18). O professor deve saber e compreender profundamente a matemática que ensina e ser capaz de utilizar esses mesmos conhecimentos de um modo flexível no decurso das suas atividades didáticas. Os professores necessitam de compreender as diferentes representações de uma ideia, as forças e fraquezas de cada uma delas, e a forma como se relacionam umas com as outras (Wilson et al., 1987). Para o ensino da matemática o NCTM (1994) apresentava seis normas: (1) tarefas matemáticas significativas; (2) o papel do professor no discurso; (3) o papel do estudante no discurso; (4) instrumentos para aperfeiçoar o discurso; (5) ambiente de aprendizagem; e (6) análise do ensino e da aprendizagem. Um ensino efetivo exige um sério empenho do professor no desenvolvimento da compreensão dos estudantes em relação à matemática. Por isso os professores competentes sabem quando colocar questões e como planear aulas que revelem os conhecimentos prévios dos seus estudantes. Só assim os estudantes poderão construir o novo conhecimento sobre os alicerces do conhecimento que possuem. "Não existe *uma forma correcta* de ensinar" (NCTM, 2008, p. 19). Ensinar bem matemática envolve a criatividade, enriquecimento, manutenção e adaptação do ensino de modo a atingir os objetivos matemáticos, a captar e manter o interesse dos estudantes na construção ativa do seu conhecimento. "Um ensino efetivo requer um constante aperfeiçoamento" (p. 20). Para melhorar o ensino da matemática os professores terão de ter "oportunidades para reflectir sobre a prática de ensino, e aperfeiçoá-la" (p. 20). Os professores deverão ser capazes de analisar as suas ações e as dos seus estudantes e ponderar a influência que estas têm sobre a aprendizagem. A reflexão e a análise são muitas vezes atividades individuais, mas também podem ser desenvolvidas através do trabalho de grupo com um colega mais experiente ou uma comunidade de professores. Colaborar regularmente com os colegas para observar, analisar e discutir o ensino e o pensamento dos estudantes, ou fazer o *estudo da aula*, é um meio poderoso mas ainda muito negligenciado (Stigler & Hiebert, 1999).

O princípio da aprendizagem refere que "os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo activamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios" (NCTM, 2008, p. 21). Infelizmente que, desde há algumas décadas, os trabalhos de investigação realizados por psicólogos e educadores matemáticos (e.g., Hiebert & Carpenter, 1992) revelam que a aprendizagem *sem* essa compreensão tem sido um resultado muito comum no ensino da matemática. Para Bransford, Brown e Cocking (1999, citado em Battista, 2011) a compreensão de conceitos é uma componente importante da competência, assim como o conhecimento de factos e o domínio de procedimentos. Os estudantes que memorizam factos ou procedimentos sem os compreenderem têm, muitas vezes, dúvidas sobre como e quando devem utilizar o que aprenderam, e por isso essa aprendizagem é extremamente frágil. Para Schoenfeld e Arcavi (1988) a aprendizagem com compreensão, para além de fazer mais sentido, é mais facilmente memorizada e aplicada se os estudantes relacionarem de forma significativa o conhecimento novo com o conhecimento que detêm. As normas referem também que a aprendizagem com compreensão é imprescindível para tornar os estudantes capazes de resolver os novos tipos de problemas que inevitavelmente irão enfrentar no futuro (NCTM, 2008). Um dos principais objetivos dos programas de matemática escolar consiste em desenvolver a autonomia dos estudantes, e a aprendizagem com compreensão suporta este objetivo. Quando desafiados com tarefas criteriosamente selecionadas os estudantes tornam-se confiantes na sua capacidade de lidar com problemas difíceis, desejosos por chegar à resposta correta por si só, explorando ideias matemáticas e experimentando caminhos alternativos com vontade e firmeza (NCTM, 2008). Muitos estudantes reconhecem a importância de refletirem sobre o seu pensamento e aprendizagem através dos seus erros. Se existir um envolvimento ativo do estudante em tarefas e experiências concebidas para aprofundar e relacionar o seu conhecimento, a compreensão das ideias matemáticas poderá ser trabalhada ao longo da sua escolaridade

(NCTM, 2008). Segundo Lampert (1986) a aprendizagem com compreensão poderá ser aperfeiçoada e desenvolvida através do diálogo na sala de aula e da interação na turma. Isto porque à medida que os estudantes sugerem ideias e conjeturas matemáticas aprendem a avaliar o seu próprio raciocínio e o dos colegas, o que promoverá o reconhecimento de conexões entre ideias e poderá contribuir para a reorganização do conhecimento (Yackel & Hanna, 2003). Lampert (1989) e Mack (1990) sublinham que quando o professor pede aos seus estudantes que discutam as suas estratégias informais, poderá estar a ajudá-los a tomar consciência e a construir conceitos a partir do seu conhecimento informal implícito.

A compreensão da matemática e o desenvolvimento do raciocínio matemático passam pelo estabelecimento de conexões através das quais os estudantes desenvolvem a sua capacidade de pensar matematicamente e, consequentemente, de raciocinar matematicamente (ME, 2007). O NCTM (2007) realça que "quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e duradoura" (p. 71). Para Carreira (2010) estas conexões surgem como uma característica fundamental da atividade matemática, como "um elemento estruturante do fazer matemática e do pensar matematicamente" (p. 18). As conexões assumem assim um realce considerável no ensino e na aprendizagem da matemática.

Segundo Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) as conexões em matemática referem-se não só a situações em que os alunos trabalham a matemática ligada a problemas da vida real como também à relação entre temas matemáticos diferentes - as conexões com a realidade e com outras áreas do saber e as conexões dentro da matemática. É ainda importante salientar que as conexões matemáticas devem ser destacadas e valorizadas não tanto enquanto elementos do conhecimento matemático a adquirir mas essencialmente enquanto prática matemática de sala de aula (Carreira, 2010). Para que isso aconteça o NCTM (2007) sublinha ser necessário promover contextos que habilitem os alunos a: (1) reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas; (2) compreender a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e se constroem umas a partir das outras para produzir um todo coerente; e (3) reconhecer e aplicar a matemática em contextos que lhe são exteriores. Para Carreira (2010) a ênfase nas conexões matemáticas procura contrariar a visão da matemática enquanto conjunto de conceitos e capacidades desconectadas e isoladas e impedir que esta visão degenere em resultados indesejáveis como a compartimentação, o isolamento, a incompreensão e a mecanização.

É do consenso geral que o que os estudantes aprendem é produto da atividade que realizam e da reflexão que sobre ela fazem (Ponte, 2005). Mas o futuro professor precisa não só entender que determinado conceito é assim, como ainda deve compreender porque é assim, por que razão esse conceito pode ser afirmado, e sob que circunstância nossa crença na sua justificação pode ser enfraquecida e até mesmo negada (Shulman, 1986). E Ball (2008) considera que para o professor de níveis elementares o imperativo de respostas baseadas no raciocínio matemático, no ensino e na aprendizagem da matemática é um autêntico desafio. Já Kilpatrick et al. (2001) defendem que o ensino só funciona se os estudantes desenvolverem proficiência matemática e se eles se tornarem capazes de fazer e usar a matemática e dispostos a fazê-lo com confiança.

Treichler (1967, citado em Nzekwe-Excel, 2010) realizou um estudo onde mostra que os estudantes aprendem 70% do que discutem com pessoas cujas opiniões eles valorizam e que aprendem somente 10% do que leem e 20% do que ouvem. Também Abbasi e Iqbal (2009) fizeram um estudo onde demonstram que a utilização de interação por parte do professor para com os estudantes tem impactos positivos sobre a sua progressão. Um outro estudo mostra que os estudantes que aprendem matemática de modo tradicional, utilizando livros de texto, encontram dificuldades para se adaptar a situações novas, diferentes, ao contrário de seus colegas que estão mais interessados em interpretar, discutir e praticar a matemática (Boaler, 2000). Da mesma forma o estudo realizado por Tonkes, Isaac e Scharaschkin (2009) mostra que os estudantes preferem o seu envolvimento durante as aulas de matemática ao estilo tradicional de ouvir o professor e copiar notas. Nesta mesma linha de pensamento o PMEB refere que:

> Para além da realização das tarefas propriamente ditas, o ensino-aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas. Ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem (ME, 2007, pp. 8-9).

Segundo Zaslavsky (2010) uma das tarefas mais difíceis para um professor ou professor educador é ouvir a voz do estudante. Por natureza os professores são *faladores* e sentem um forte impulso para partilhar os seus conhecimentos e opiniões com outras pessoas. Muitos professores estão acostumados a falar e é difícil dizer para apenas ouvir e tentar interpretar o que é dito, sem oferecer as suas próprias opiniões ou *a resposta certa*. Assim para esta autora é importante que os professores se tornem conscientes de que ouvir é uma das ferramentas que podem usar para se informarem sobre o que os estudantes estão a fazer e a pensar.

A importância dos afetos na aprendizagem da matemática

Uma das variáveis analisadas pelos investigadores nos processos de pensamento dos estudantes tem sido a atitude (Wittrock, 1986). A importância atribuída à atitude em grande parte é justificada pela sua estreita relação com o processo de aprendizagem. No contexto educativo alguns investigadores (e.g., Beltrán, 1994) consideram a atitude como um dos fatores que antecedem a aprendizagem, pelo que se ela for positiva pode favorecer a aprendizagem, se pelo contrário for negativa pode prejudicá-la ou atuar contra ela.

Em educação as primeiras investigações sobre a atitude em relação à matemática aparecem com Dutton (1951). O autor utiliza as escalas de Thurstone para medir as atitudes dos estudantes e dos professores face à aritmética. No ponto de vista de Neale (1969) existe uma ténue crença de que "uma coisa chamada *atitude* desempenha um papel crucial na aprendizagem da matemática" (p. 631). Já para Aiken (1970) a atitude é vista como "uma predisposição aprendida ou tendência por parte de um indivíduo para responder positiva ou negativamente a algum objeto, situação, conceito ou a outra pessoa" (p. 551). O recurso aos advérbios "positiva ou negativamente" é frequente pois muita da atenção dos investigadores está focada na relação entre a atitude positiva/negativa e o alto/baixo rendimento. Este autor afirma ainda que "a avaliação das atitudes em relação à matemática seria menos preocupante se não se pensasse que as atitudes podem afetar de algum modo o desempenho” (p. 558). Para o constructo de atitude e numa perspetiva mais geral Kulm (1980) defende que é impossível “dar uma definição de atitude em relação à matemática adequada a todas as situações, e mesmo que o fosse provavelmente seria muito geral para ser útil" (p. 358). Esta afirmação denota uma importante evolução na investigação, levando a considerar a atitude como "um construto do desejo de um observador para formular uma história para explicar as observações" ao invés de "uma qualidade de um indivíduo" (Ruffell, Mason & Allen, 1998, p. 1).

No fim dos anos 80 a maioria dos estudos não fornecem explicitamente uma definição teórica de atitude e estabelecem definições operacionais implícitas nos instrumentos utilizados para medir a atitude. Em matemática a avaliação da atitude é realizada quase que exclusivamente através do uso de escalas (geralmente escalas de Likert), o que provoca o seguinte comentário crítico de Kulm (1980): "Os investigadores não devem acreditar que as escalas, com os nomes próprios que lhes são inerentes, são a única maneira possível de medir as atitudes" (p. 365). A investigação sobre a atitude concentra-se mais no desenvolvimento de instrumentos para medir a atitude (a fim de provar a correlação causal entre a atitude positiva em relação à matemática e o rendimento em matemática) em vez de clarificar o objeto da investigação.

Sublinhando a necessidade de mais investigação sobre a atitude Aiken (1970) descreve os resultados de vários estudos em que a correlação entre a atitude e o rendimento não é evidente. Mais tarde, analisando 113 estudos sobre a atitude em relação à matemática, Ma e Kishor (1997) confirmam que a correlação entre a atitude positiva e o rendimento não é estatisticamente significativa. Para explicar esta *falha* em demonstrar uma correlação causal entre a atitude positiva e o rendimento várias causas foram identificadas - umas relacionadas com a inadequação dos instrumentos que tinham sido utilizados para avaliar a atitude e o rendimento (Middleton & Spanias, 1999) e outras apontam a falta de clareza teórica sobre a própria natureza do construto *atitude* (Di Martino & Zan, 2001).

Para Hannula (2002) as emoções são o processo mais elementar que estão na base de cada expressão de avaliação, de uma forma ou de outra. Enquanto o estudante está envolvido numa atividade matemática há uma avaliação inconsciente mas contínua da situação no que respeita aos seus objetivos pessoais. Segundo o autor esta avaliação é representada por uma emoção: prosseguir em direção às metas induz a emoções positivas enquanto os obstáculos que bloqueiam o progresso podem induzir a raiva, medo, tristeza ou a outras emoções desagradáveis.

No seu livro "Afetos e resolução de problemas matemáticos" Adams e McLeod (1989, citado em Zan & Di Martino, 2014) apresentam a contribuição de diferentes estudiosos sobre a influência de fatores afetivos na resolução de problemas matemáticos. Isso dá um novo impulso à investigação sobre o afeto e, portanto, sobre a atitude em matemática com um interesse particular na caracterização dos construtos. Há a necessidade de uma sistematização teórica e uma primeira tentativa importante neste sentido é feita por McLeod (1992). Este autor sublinha que "a investigação em educação matemática necessita desenvolver um quadro mais coerente para a investigação sobre crenças, sua relação com as atitudes e emoções e sua interação com os fatores cognitivos na aprendizagem e no ensino da matemática" (p. 581). Este autor destaca a necessidade de se desenvolver novas ferramentas observacionais e a necessidade de mais investigação qualitativa.

Há estudos que fornecem uma definição do construto que pode geralmente ser classificada de acordo com uma das seguintes tipologias: (1) a definição "simples" de atitude que a descreve como grau positivo ou negativo de afeto associado a determinado assunto; e (2) a definição "multidimensional" reconhece três componentes na atitude: a afetiva, a cognitiva e a comportamental. No entanto estas definições parecem ser complexas. Em primeiro lugar surge uma lacuna entre as definições e os instrumentos utilizados para medir a atitude (Leder, 1985). Para além disso as caracterizações de atitude positiva que as definições seguem são problemáticas (Di Martino & Zan, 2001).

No caso da definição simples é muito claro que a "atitude positiva" significa “disposição emocional positiva". Mas mesmo que uma disposição emocional positiva possa estar relacionada com as escolhas, existem muitas dúvidas sobre a correlação entre a disposição emocional e o rendimento. Prova disso é o Segundo Estudo Internacional de Matemática que, de acordo com McLeod (1992), mostra que os estudantes japoneses, apesar de terem um rendimento muito alto, têm uma maior aversão à matemática do que os estudantes de outros países.

Na definição multidimensional, segundo Zan e Di Martino (2007), torna-se mais problemático caracterizar a dicotomia positivo/negativo - é diferente se o adjetivo "positivo" se refere às emoções, crenças, ou comportamento. Segundo estes autores a inclusão da dimensão comportamental na definição de atitude expõe a investigação ao risco de circularidade (utilizando o comportamento observado para inferir atitude e, depois, interpretando o comportamento dos estudantes referindo as atitudes inferidas). Para evitar um tal risco Daskalogianni e Simpson (2000) introduzem uma definição bidimensional de atitude que não inclui a componente comportamental.

À luz da alta complexidade do comportamento humano, há a afirmação gradual do paradigma interpretativo nas ciências sociais – o que leva o investigador a abandonar a tentativa de explicar o comportamento através de medidas ou regras gerais, com base num esquema de causa e efeito, e a procurar obter ferramentas interpretativas. A investigação sobre as atitudes em relação à matemática, nas duas últimas décadas, desenvolveu-se mudando de um paradigma positivista para um paradigma interpretativo (Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006). Em consonância com isso o construto teórico da "atitude em relação à matemática" não é mais uma variável preditiva para comportamentos específicos mas uma ferramenta de interpretação multidimensional e flexível, apontando para a descrição das interações entre os aspetos afetivos e cognitivos na atividade matemática. Este construto é útil no apoio que dá aos investigadores e aos professores para a interpretação dos processos de ensino e aprendizagem e para a conceção das intervenções didáticas (Zan et al, 2006).

Mais tarde as ferramentas narrativas começam a assumir uma grande importância na caracterização do construto (Zan & Di Martino, 2007), na observação das mudanças de atitude do indivíduo (Hannula, 2002), na avaliação da influência de fatores culturais e ambientais sobre a atitude (Pepin, 2011) e no estabelecimento de uma relação entre atitudes e crenças (Di Martino & Zan, 2011).

Seguindo uma abordagem interpretativa baseada na compilação de narrativas autobiográficas de estudantes, Di Martino e Zan (2010) tentam identificar como os estudantes descrevem a sua relação com a matemática. Esta investigação conduz a uma caracterização teórica do construto de atitude que tem em conta os pontos de vista dos estudantes sobre as suas próprias experiências com a matemática, ou seja, uma definição de atitude intimamente relacionada com a prática. A partir deste estudo verifica-se que quando o estudante descreve a sua própria relação com a matemática quase todos se referem a uma ou mais das seguintes três dimensões: (1) emoções; (2) visão da matemática; e (3) perceção de competência.

A investigação mostra que as atitudes negativas e a falta de confiança relativamente à matemática são fruto de experiências dececionantes e desencorajantes na sua aprendizagem (e.g, Brown et al., 1999; Even & Tirosh, 2008; Zan & Di Martino, 2014). Segundo Lannin e Chval (2013) as tarefas matemáticas que se ligam às futuras experiências ajudam os futuros professores a confrontar as suas próprias crenças e atitudes. Para estes autores estas experiências pessoais de sala de aula influenciam inevitavelmente o modo como os futuros professores acabaram por ensinar matemática.

Para ensinar matemática o professor deve habilitar e colocar para trabalhar a relação entre estudantes e ideias matemáticas, e ao fazer isso as tarefas, os problemas e as perguntas podem ser instrumentos úteis para esse fim. Porém a literatura reconhece que algumas das barreiras às reformas curriculares são os próprios professores, apontando que: (1) desconhecem práticas e ferramentas inovadoras; (2) não compreendem a matemática que ensinam; (3) são incapazes de comunicar com os estudantes de outra forma que não seja o ensino direto; e (4) resistem a novos métodos de ensino devido às crenças que possuem sobre o que os estudantes necessitam saber (Hiebert, Morris, Berk & Jansen, 2007).

Mais recentemente Potari (2012) sublinha que lidar com a complexidade do ensino e aprendizagem da matemática na prática do ensino é uma tarefa diária não só para um professor de matemática como para um formador de professores e investigador. Ultimamente o campo da educação matemática mudou-se para uma melhor compreensão desta complexidade (Krainer, 2005). Esta complexidade é abordada de formas e contextos diferentes numa série de artigos sobre a investigação na formação de professores do *Journal of Mathematics Teacher Education*. Alguns estudos são exploratórios e focam-se no modo como os professores lidam com a complexidade da sala de aula. Outros são de desenvolvimento, no sentido de criar contextos para os professores promovendo a consciência da complexidade do ensino e aprendizagem da matemática, e de apoio ao professor para lidar com isso em sala de aula. No nível exploratório a complexidade reside nas interações em sala de aula e na forma como o professor equilibra objetivos matemáticos, raciocínio e pensamento dos estudantes com gestão de sala de aula.

Hunter e Anthony (2012) elaboraram um estudo onde participam 22 professores no início de carreira que se tinham matriculado num curso de pós-graduação para professores do 1º ciclo sobre "O papel da discussão nas aulas". Este estudo ilustra como programas inovadores de formação de professores podem, através de aproximações à prática, equipar melhor os futuros professores para *fazerem* um ensino interativo da matemática. Estas conclusões suportam a afirmação de Ghousseini (2009) de que não é suficiente dizer aos futuros professores que o discurso matemático é importante ou que utilizem estratégias didáticas – os futuros professores necessitam de saber como as sancionar. Segundo Hunter e Anthony (2012) as oportunidades para planear, ensaiar e refletir nas discussões matemáticas proporcionam aos futuros professores espaço para reconstruirem as suas opiniões sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. Ensaiando e refletindo sobre as ações têm a oportunidade de romper com as estruturas tradicionais de referência e de se envolver em ações que eles nunca teriam usado habitualmente.

O ensino e a aprendizagem da matemática especialmente a orquestração das discussões matemáticas na sala de aula são um desafio-chave que o professor enfrenta em qualquer ciclo de escolaridade (Canavarro, 2011). Para um ensino desta natureza a autora afirma que é fundamental que o professor esteja preparado para contrariar algumas tendências que surgem frequentemente associadas ao ensino da matemática. Segundo esta autora é importante que o professor esteja preparado para: (1) escolher criteriosamente tarefas matemáticas com potencial para proporcionar aos estudantes aprendizagens matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos; (2) aprofundar a exploração matemática das tarefas durante a planificação, incluindo a antecipação das resoluções esperadas pelos estudantes e a previsão de possíveis caminhos para atingir o propósito matemático da aula; (3) gerir cuidadosamente o tempo para que na mesma aula se complete o trabalho em torno de uma tarefa, evitando adiar para a aula seguinte a discussão e/ou a síntese dos conhecimentos produzidos pelos estudantes na resposta à tarefa; (4) controlar as questões e comentários dos estudantes na apresentação da tarefa e durante o trabalho autónomo de modo a não lhes sugerir a estratégia a seguir, pois isso reduziria o desafio intelectual diminuindo o potencial da discussão matemática; (5) resistir a validar as resoluções dos estudantes durante o respetivo trabalho autónomo para não diminuir o interesse da sua participação na discussão; (6) evitar prolongar o tempo de trabalho autónomo dos estudantes mesmo que alguns não o tenham completado. As diferenças no grau de completude das resoluções dos estudantes favorecem a discussão coletiva e as sínteses matemáticas dos grupos; (7) recusar a estudantes que se voluntariam a possibilidade de apresentar as suas resoluções à turma, caso estas não contribuam para o desenvolvimento matemático idealizado pelo professor; (8) prever a utilização de recursos que na fase de discussão potenciem a comunicação dos estudantes - usar acetatos, fotografias digitais das resoluções, digitalizações feitas nas salas onde há *scanner* ligado a computador e projetor, ... - para que não se gaste tempo a passar as resoluções em análise para o quadro; (9) acautelar um espaço físico coletivo e visível para registar os conhecimentos sistematizados, decorrentes da discussão, e acautelar que os estudantes os registem e/ou tenham acesso a eles utilizando caso exista o quadro interativo; (10) favorecer a discussão efetiva de ideias a partir das quais possam aprender conceitos e procedimentos matemáticos bem como desenvolver a comunicação matemática; e (11) promover um ambiente estimulante na sala de aula encorajando os estudantes a uma participação ativa no desenvolvimento do seu próprio trabalho e a querer saber do dos outros, a explicar, a ouvir, a falar, a questionar e a contribuir de forma construtiva na construção do seu conhecimento matemático.

Em Taiwan, Lin e Li (2011) defenderam que os professores especialistas no ensino da matemática devem ser hábeis em: (1) criar e utilizar tarefas com exigências cognitivas de alto nível e contexto realista evocando múltiplas soluções e provocando as soluções esperadas; (2) sequenciar os problemas a serem colocados de acordo com a aprendizagem dos estudantes; (3) prever soluções antecipadamente; (4) sequenciar as múltiplas soluções para discussão na turma com base no desenvolvimento conceptual; (5) formular várias perguntas com diferentes propósitos; (6) colocar perguntas-chave quando necessário e formular perguntas de acompanhamento; (7) interpretar as resoluções dos estudantes; (8) destacar e resumir os pontos principais no final da discussão; (9) transitar de uma atividade para outra de acordo com a aprendizagem dos estudantes; e (10) criar problemas específicos para avaliar a compreensão dos estudantes como ponto de partida para a preparação da próxima aula.

A exposição a desafios matemáticos pode apoiar a flexibilidade de recursos de pensamento e compreensão matemática mais profunda, promovendo a preparação de estudantes mais bem-sucedidos (Barbeur, 2009). Por isso de acordo com Sowder (2007) é preciso dar-lhes oportunidades para construírem conhecimento sobre a matemática e sobre a didática num ambiente que encoraje correr riscos e refletir, para que sejam capazes de conduzir os seus estudantes para o sucesso na aprendizagem da matemática.

As Tarefas no Ensino da Matemática

O foco do 15º estudo da *International Commission on Mathematical Instruction* [ICMI] (2006) foi na educação e formação de professores de matemática em todo o mundo e um dos seus objetivos era oferecer uma visão geral das diferentes práticas e programas de formação de professores de matemática em diferentes países (Ball & Even, 2008; Bergsten, Favilli & Grevholm, 2008; Clarke, Grevholm & Millman, 2008). Já o foco do 22º estudo ICMI (2013) foi na construção de tarefas para a educação matemática, fazendo um resumo do estado da arte da investigação mais relevante nesse campo e indo além desse resumo para desenvolver novas ideias e novas áreas de conhecimento e estudo sobre a construção de tarefas. Isto porque as tarefas geram atividade que oferece oportunidades de encontrar não só conceitos matemáticos, ideias, estratégias mas também de utilizar e desenvolver o pensamento matemático e os modos de orquestração das discussões. Para o ICMI (2013) também é importante abordar a questão da sequência de tarefas e a forma como ligam os aspetos do conhecimento conceptual. Nalgumas sequências as tarefas anteriores podem ser componentes técnicos a serem utilizados e combinados mais tarde; noutras as tarefas anteriores podem fornecer imagens ou experiências que irão permitir a realização de tarefas à *posteriori* com compreensão situacional. As comunidades envolvidas na construção e na conceção de tarefas são diversificadas mas devem envolver matemáticos profissionais, formadores de professores, professores, investigadores, alunos, autores, editores e produtores, ou combinações destes, e indivíduos que atuam em vários desses papéis.

Relativamente à organização da formação de professores de matemática têm sido propostos diferentes modelos mas todos eles com ênfase na introdução de um modelo baseado na prática (Matos, Powell & Sztajn, 2009) ou no desenvolvimento de tarefas produtivas para a formação de professores de matemática (Zaslavsky, 2007). A qualidade do ensino depende dos professores selecionarem tarefas cognitivamente exigentes e se essas tarefas se desdobram em sala de aula de forma a permitir que os estudantes reflitam sobre as tarefas e aprendam através dessas mesmas tarefas (Kilpatrick et al., 2001). É também importante selecionar tarefas que permitam a aplicação de diferentes estratégias e promovam uma perspetiva dinâmica entre as possíveis abordagens de modo a que os estudantes consigam compreender e estabelecer paralelismos entre estratégias visuais e numéricas (e. g., Barbosa, 2013; Rivera, 2007).

Durante muito tempo confundiu-se o conceito de tarefa com o de atividade. Nos últimos anos estes termos eram empregues indistintamente e foram Christiansen e Walther (1986) que tiveram a preocupação em fazer essa clarificação. Estes e outros autores (e.g., Mason & Johnston-Wilder, 2006) expressam a tarefa como sendo o que os estudantes são convidados a fazer. E por atividade entendem os motivos matemáticos subsequentes que emergem da interação entre estudante, professor, recursos e meio ambiente em torno da tarefa. Pode então dizer-se que estes dois conceitos não são equivalentes pois a tarefa é uma proposta que vai permitir que o estudante entre em atividade.

Na tradicional aula de matemática o professor começa por explicar os novos conceitos de um modo expositivo, dialogando frequentemente com os estudantes. Aplicando a matéria dada, exemplifica um ou dois casos e dá exercícios para os estudantes resolverem. Depois esses exercícios são corrigidos pelo professor ou por um estudante escolhido para ir ao quadro. No entendimento de Ponte e Serrazina (2009) este padrão de aula pode ser alterado com fortes benefícios para a aprendizagem da matemática. Segundo os autores "os estudantes podem ser parte muito mais ativa do processo de construção do conhecimento, desde que lhes sejam propostas tarefas desafiantes que se situem ao seu alcance" (p. 3). Ou seja, em vez de começar por apresentar a *matéria nova* o professor pode começar por apresentar uma tarefa assegurando que os estudantes a interpretam corretamente. Deste modo a tarefa envolve os estudantes, a pares ou em pequenos grupos, num ambiente de discussão e argumentação. No fim deverá ser feita uma síntese, em conjunto pelo professor e estudantes, das principais ideias aprendidas na aula. A vantagem de todo este processo é a de que em vez de se começar pela *exposição* das novas ideias estas surjam na conclusão do trabalho como um processo de síntese (Ponte & Serrazina, 2009). Para estes autores "em vez de se proporem exercícios para os alunos praticarem processos já conhecidos propõem-se tarefas em que eles têm de definir estratégias e argumentar soluções" (p. 3). O desenvolvimento da comunicação matemática surge tanto no trabalho de grupo como nos momentos coletivos onde o professor intervém.

Em Portugal o PMEB (ME, 2007) evidencia duas ideias: (1) a importância das tarefas matemáticas que constituem o ponto de partida para a atividade dos estudantes; e (2) os processos de comunicação que ocorrem em sala de aula. O programa sugere que o professor utilize uma variedade de tarefas, incluindo exercícios, problemas, explorações e investigações. Os exercícios e os problemas são utilizados há muito tempo nas escolas e foram enfatizados desde 1991. O que aqui é novidade são as explorações (tarefas abertas bastante acessíveis para a maioria dos estudantes) e as investigações (tarefas abertas mas mais exigentes) (Ponte, 2009). Relativamente à comunicação valoriza-se o desenvolvimento da capacidade de comunicação oral e escrita dos estudantes e os momentos de discussão coletiva. Estes momentos criam oportunidades para a argumentação matemática - os professores pedem aos estudantes para apresentar e explicar as suas soluções para as tarefas, dando a oportunidade para os outros estudantes aceitarem ou discordarem, apresentando as suas próprias reivindicações e justificativas. Na sala de aula e segundo Ponte (2012) isto obriga a uma organização com novas diretrizes: (1) apresentação da tarefa pelo professor e interpretação e apropriação coletiva da tarefa por parte dos estudantes; (2) trabalho autónomo dos estudantes sobre as tarefas, geralmente em pares ou em pequenos grupos, com o professor a monitorizar o trabalho e a fornecer algum apoio de uma forma cuidadosa, isto é, sem resolver a tarefa para os estudantes; (3) discussão coletiva onde alguns estudantes apresentam o seu trabalho e toda a turma o discute; e (4) síntese final, resumindo os principais pontos da aula que pode ser feita preferencialmente com a participação dos estudantes. Pode então dizer-se que esta nova abordagem possui três palavras-chave: *tarefa*, *discussão coletiva* e *ensino exploratório* (Ponte, 2012).

As teorias da aprendizagem veem a atividade cognitiva como simplesmente não ocorrendo num contexto social mas como sendo constituída na e pela interação social (Mesiti & Clarke, 2010). Para os autores a atividade que surge como consequência de um estudante concluir uma tarefa é por si só um elemento constituinte do processo de aprendizagem e os artefactos, tanto conceptuais como físicos, empregues na conclusão da tarefa são simultaneamente andaimes para a cognição, repositórios de cognição distribuída e produtos cognitivos. Deste modo a seleção da tarefa pelo professor representa o início de um processo de instrução que inclui a execução da tarefa e a interpretação das consequências dessa promulgação (Mesiti & Clarke, 2010).

Do ponto de vista da teoria construtivista os estudantes parecem aprender matemática de uma forma mais eficiente quando recorrem a materiais manipuláveis. A investigação mostra que o uso de materiais concretos pode ser útil para o desenvolvimento de representações geométricas quando utilizados *sabiamente* (Clements, 2004). Por isso vários educadores e entidades educativas recomendam a sua utilização (e.g., ME, 2007; MEC, 2013; NCTM, 2008; Pastells, 2004; Vale, 2003; Weiss, 2006). Alguns investigadores (e.g., Hierbert & Wearne, 1993) analisaram também a relação entre as tarefas propostas pelos professores e os conhecimentos matemáticos adquiridos tendo-se verificado que o tipo de tarefa apresentada aos estudantes influencia a aprendizagem da matemática. O modo como os estudantes entendem a tarefa, processam a informação e as relações mentais que constroem, são condicionadas pelas atividades propostas que influenciam e estruturam a capacidade de pensamento e raciocínio e consequentemente a aprendizagem da matemática (e.g., Vale, 2012). Por isso não existem dúvidas de que o que os estudantes aprendem depende largamente das tarefas que resolvem.

Uma tarefa não é necessariamente boa ou má. Porém uma potencial boa tarefa pode tornar-se numa tarefa muito pobre. A tarefa é normalmente apresentada pelo professor mas pode também ser da iniciativa do estudante ou até mesmo resultar de uma negociação entre ambos. No entanto se tivermos um mau professor e uma boa tarefa ou uma má tarefa e um bom professor, estaremos na maioria dos casos perante uma situação que não proporcionará o envolvimento do estudante numa atividade matemática rica e produtiva. Por isso segundo Gomes (2010) os professores que utilizam tarefas precisam de ter um conhecimento profundo tanto da matemática que ela contém como da profundidade do conhecimento que pode ser alcançado com ela. Esta autora considera fundamental o conhecimento didático da tarefa que permitará torná-la proveitosa. Nesta mesma linha Smith e Stein (2011) defendem a integração das cinco práticas e os registos como andaimes necessários para se desenvolver um bom percurso didático – há uma melhor compreensão da complexidade das interações matemáticas. Para estas autoras a aproximação das práticas adotadas nos ensaios e a análise reflexiva dos registros de vídeo e das gravações levaram os futuros professores a assumir uma postura de investigação, através da qual entenderam a importância do discurso matemático produzido como uma ferramenta para aprofundar os *entendimentos matemáticos* dos estudantes. Tem de existir um interface entre o teórico e o prático, entre o real e o que se quer alcançar, entre o estudante e a tarefa, num processo recursivo de refinamento até à conceção de uma boa tarefa matemática (Liljedahl, Chernoff & Zaskis, 2007). Qualquer investigação sobre a função das tarefas na aprendizagem da matemática deve ter em conta a intenção, a ação e a interpretação (tanto pelo professor como pelos estudantes) e devem-se visualizar quaisquer trajetórias hipotéticas de aprendizagem como sujeitas a um ajustamento contínuo e incremental no decurso do desempenho das tarefas em sala de aula (Simon & Tzur, 2004).

De acordo com Sierpinska (2004) uma das responsabilidades maiores da educação matemática reporta-se à análise e conceção de tarefas matemáticas. Segundo o NCTM (1994) uma tarefa matemática válida deve ter as seguintes características: (1) apelar à inteligência do estudante; (2) desenvolver a compreensão e aptidão matemática do estudante; (3) estimular o estudante a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas; (4) apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático; (5) promover a comunicação sobre matemática; (6) mostrar a matemática como uma atividade humana permanente; (7) ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos estudantes; e (8) promover o desenvolvimento da predisposição de todos os estudantes para fazer matemática. Por isso, mais do que descobrir uma ou outra tarefa motivante para suavizar uma sequência de aulas mais áridas, o professor tem de considerar todo um conjunto de tarefas a propor na unidade incluindo naturalmente a sua variedade (em termos de nível de desafio, complexidade e contexto matemático), representações, materiais a utilizar e tempo de realização. As tarefas variam ainda na forma como são apresentadas aos estudantes como estes as trabalham e como servem de base à discussão e promoção de novo conhecimento. Para Ponte e Serrazina (2009) é muito importante que “as tarefas sejam interrelacionadas entre si, apresentadas em sequências coerentes (cadeias de tarefas) de modo a proporcionar um percurso de trabalho favorável à aprendizagem do aluno” (p. 3).

Para reforçar o raciocínio e a capacidade para a resolução de problemas dos estudantes de matemática, as normas internacionais dizem que a partir da educação pré-escolar o professor deverá criar ambientes de sala de aula matematicamente seguros, isto é, ambientes nos quais os estudantes se sintam livres para fazerem conjeturas, explorar diferentes formas de pensamento e partilharem as suas ideias com toda a turma (NCTM, 2003, 2004a). Os professores possuem diferentes estilos e estratégias de apoio aos estudantes na aprendizagem mas os professores competentes reconhecem que as decisões que tomam influenciam a predisposição dos estudantes para a matemática e podem criar contextos de aprendizagem bastante ricos. “Ensinar bem matemática envolve a criação, o enriquecimento, a manutenção e a adaptação do ensino de modo a atingir os objetivos matemáticos, a captar e a manter o interesse dos alunos e a envolve-los na construção activa do conhecimento matemático”

(NCTM, 2008, p. 19). O NCTM defende ainda que o professor deve facilitar o discurso na sala de aula e colocar questões para aprofundar a compreensão da matemática através dos métodos de raciocínio e das estratégias de solução dos problemas que os estudantes utilizam (2003, 2004). De acordo com as diretivas de documentos nacionais (ME, 2007; MEC, 2013) e internacionais (NCTM, 2000, 2006, 2008) as tarefas a propor devem contribuir para que o estudante desenvolva uma visão abrangente da atividade matemática, compreenda os processos matemáticos e desenvolva o seu raciocínio matemático.

As tarefas e o desafio

Segundo as normas do NCTM (2008) num ensino efetivo devem ser utilizadas tarefas matemáticas significativas para introduzir conceitos importantes e para envolver e desafiar intelectualmente os estudantes. Uma seleção apropriada de tarefas poderá despertar a curiosidade e envolver o estudante na matemática. Por isso é importante que o professor seja ainda capaz de avaliar o pensamento dos estudantes, de forma a poder ajustar as tarefas matemáticas com base nessa avaliação. Independentemente do contexto as tarefas deverão provocar interrogações e ter um nível de desafio que convide à especulação para que se torne desafiante para o estudante. Tais tarefas poderão ter mais do que uma abordagem o que permitirá torná-las acessíveis a um maior número de estudantes fazendo uso de diversos tipos de conhecimentos e experiências anteriores (NCTM, 2008). No entanto tarefas significativas por si só não são garantia para um ensino eficaz.

Tanto o PMEB (ME, 2007) como os Princípios e Normas para a matemática escolar (NCTM, 2008) consideram uma *boa* tarefa matemática aquela que lida com ideias matemáticas fundamentais. As tarefas disponibilizadas aos estudantes devem ser o ponto de partida da aprendizagem. Vários investigadores defendem a proposta de tarefas que permitam diferentes abordagens, exijam representações múltiplas e suscitem dos estudantes a interpretação, o estabelecimento de conjeturas, a justificação e a generalização, isto é, constituam um desafio intelectual para os estudantes (Silver & Stein, 1996).

Discussões que se concentram em tarefas matemáticas cognitivamente desafiadoras, ou seja, aquelas que promovem o pensamento, o raciocínio e a resolução de problemas constituem um mecanismo primário capaz de promover a compreensão de conceitos matemáticos (Hatano & Inagaki, 1991). Tais discussões devem dar ao estudante a oportunidade para partilhar ideias e esclarecer entendimentos, desenvolver argumentos convincentes sobre porque e como as coisas funcionam, desenvolver uma linguagem para expressar ideias matemáticas e aprender a ver as coisas de outras perspetivas (NCTM, 2008). Embora as discussões sobre tarefas de alto nível proporcionem oportunidades importantes para os estudantes aprenderem o que é a matemática e como se faz matemática, elas também apresentam desafios para o professor que deve determinar a forma de orquestrar uma discussão construída a partir de um conjunto diversificado de respostas. Um dos desafios do professor é o de desenvolver o pensamento do estudante garantindo que as ideias matemáticas da lição permanecem proeminentes. Mas uma tarefa pode ser desafiante para um estudante e não o ser para outro. Sullivan et al. (2011) caracterizam as tarefas desafiantes como aquelas que exigem que os estudantes: (1) planeiem a sua abordagem, especialmente a sequenciação das diferentes etapas; (2) processem múltiplas peças de informação, na expectativa de que façam conexões entre as peças e vejam os conceitos de novos modos; (3) envolvam ideias matemáticas importantes; (4) escolham as suas próprias estratégias, metas e nível de acesso à tarefa; (5) passem o tempo na tarefa; (6) expliquem as suas estratégias e justifiquem o seu pensamento para o professor e colegas; e (7) ampliem os seus conhecimentos capacitando-os com novas formas de pensamento.

Para se promover um ensino mais conceptual, exploratório e de discussão matemática, segundo Peressin e Knuth (2000) os professores devem: (1) colocar tarefas matematicamente ricas; (2) promover a discussão dos estudantes sobre as tarefas e suas (re)soluções; e (3) refletir sobre as tarefas e as discussões, maximizando a atividade matemática e a consequente compreensão dos estudantes. Na mesma linha Vale (2012) defende que as discussões oferecem importantes oportunidades para os estudantes e constituem desafios para o professor, devendo este determinar a forma de orquestrar a discussão construída a partir de um conjunto de respostas. De acordo com esta autora o professor tem de decidir que aspetos da tarefa destacar, como organizar o trabalho dos estudantes, que perguntas colocar de modo a constituir um desafio para os estudantes com diferentes níveis de experiência e como os apoiar sem eliminar o desafio contido na tarefa. Contudo tarefas matematicamente desafiantes não são apenas as consideradas difíceis ou que envolvem um alto nível de matematização (e.g., Holton *et al.,* 2009). As tarefas mais desafiantes requerem, para além de elaborados conceitos matemáticos, um olhar capaz de mobilizar conhecimentos prévios e alguma persistência.

Mas afinal o que é ser desafiante? Para Barbeau (2009) um bom desafio é aquele para o qual o sujeito possui a base matemática necessária ou capacidade lógica mas necessita de as utilizar de um modo inovador. E muitas vezes esse desafio envolve explicação, questionamento e conjetura, múltiplas abordagens, mas pode envolver a avaliação de soluções para a eficácia e elegância da sua resolução bem como a construção e avaliação de exemplos. Porém o que pode ser um verdadeiro quebra-cabeça para alguns pode ser um exercício banal ou uma questão de recordar o que se memorizou para outros com mais experiência. Por isso o que constitui uma tarefa desafiante para uns pode não o ser para outros. Muitos investigadores (e.g., Holton et al., 2009; Stillman et al., 2009) sublinham que tarefas matemáticas desafiadoras não são apenas tarefas difíceis ou com um maior nível de matematização mas a maior parte do desafio pode ser fornecido pelo professor. As tarefas desafiadoras devem fornecer múltiplas soluções, aumentando o fluxo de ideias matemáticas nos estudantes, a flexibilidade de pensamento e a originalidade nas suas respostas (Vale & Pimentel, 2011). No entanto uma tarefa pode ser matematicamente boa ou rica mas não desafiadora – o desafio tem a ver com o afeto, o arbítrio e o prazer em fazê-la. A tarefa tem não só de levar o estudante a construir novas ideias matemáticas, para além do seu conhecimento anterior, como tem de ser capaz de o envolver afetivamente. Na nossa perspetiva só assim ela poderá constituir um desafio.

Sullivan, Clarke e Clarke (2013) no âmbito de um projeto elaboram num estudo sobre o modo como os professores implementam uma série de tipos de tarefas. Estes autores relatam que muitos dos professores envolvidos no projeto pareciam relutantes em colocar tarefas desafiantes aos seus estudantes. Stein e Lane (1996) também sublinham que os professores têm a tendência de reduzir a exigência cognitiva das tarefas. Para Tzur (2008) os dois momentos-chave em que os professores modificam as tarefas são na *fase de planeamento* – quando antecipam o que os estudantes não podem alcançar sem uma considerável assistência - e na *fase das respostas dos estudantes* - se estas não forem as previstas.

O artigo de Cheeseman, Clarke, Roche e Wilson (2013) relata a observação de cinco professores na execução de uma missão que era nova para eles. Os professores tinham de identificar os aspetos da tarefa que entendiam ser um desafio para os estudantes. As respostas dos professores foram analisadas à luz do que Sullivan et al. (2011) consideravam como tarefas desafiadoras. Os resultados mostram que os professores identificaram como desafios envolvidos o raciocínio matemático, a interpretação da matemática complexa e a descoberta pelos estudantes dos seus próprios caminhos de (re)solução. A análise detalhada das reflexões dos professores revela uma compreensão sofisticada de fatores que criam desafio em tarefas matemáticas e as formas pelas quais os estudantes podem ser encorajados a persistir. Embora os resultados deste estudo sejam baseados nas observações de um pequeno número de professores, cinco, eles indicam que os professores são capazes de alterar as características de uma tarefa (mesmo que seja desconhecida) para a tornarem numa tarefa desafiante, bastando para tal observar um professor hábil na utilização dessa tarefa numa aula. Pode-se então afirmar que uma tarefa não vale por si só, depende fundamentalmente do papel do professor.

As tarefas e o papel do professor

As práticas profissionais dos professores de matemática são um dos fatores que mais influenciam a qualidade do ensino e da aprendizagem dos estudantes (Bispo, Ramalho & Henriques, 2008), sendo as práticas letivas as que se relacionam de forma mais direta com a aprendizagem dos estudantes (Ponte & Serrazina, 2004). Por isso a investigação ligada ao insucesso da matemática tem dado uma atenção especial ao estudo das práticas letivas destes professores.

Em Portugal o novo currículo de matemática para o ensino básico (Ponte et al., 2007) indica que os professores devem utilizar uma variedade de tarefas na sala de aula dando ênfase particularmente às tarefas exploratórias. Este facto promoveu um importante movimento de estudo em torno de tais tarefas e de como utilizá-las em sala de aula. Mas a aula de matemática, para além do professor, depende essencialmente de tarefas matematicamente ricas, de natureza exploratória e investigativa capazes de gerarem boas interações de aprendizagem (Vale, 2012). Em 1986 já Christiansen e Walther defendiam que uma das funções principais do professor é a de selecionar tarefas que motivem os estudantes de modo a que estes se envolvam na atividade matemática que elas proporcionam.

O papel-chave das tarefas no ensino da matemática tem sido reconhecido pelos educadores matemáticos (e.g., Canavarro, 2011; Gomes, 2010; Skovsmose, 2001; Smith, Hughes, Engle & Stein, 2009; Vale 2012). É verdade que este tipo de trabalho em sala de aula é bastante exigente para o professor. A seleção de tarefas engloba um alto nível de compreensão da matemática envolvida bem como um conhecimento profundo das capacidades e interesses dos estudantes. Os professores devem saber como introduzir essas tarefas, negociando os significados que são fundamentais para o trabalho a realizar mas sem darem muitas pistas que poderão influenciar os estudantes para a sua resolução. Além disso os professores são chamados a apoiar o trabalho autónomo dos estudantes mantendo a exigência cognitiva da atividade (Stein & Smith, 1998) e a serem capazes de conduzir discussões produtivas durante as quais as ideias matemáticas são apresentadas, confrontadas e esclarecidas (NCTM, 2000). Nessas discussões os professores devem oferecer a oportunidade de todos os estudantes intervirem, estimulando momentos de controvérsia e argumentação bem como momentos de sistematização e formalização das ideias matemáticas.

Smith et al. (2009) defendem o modelo das cinco práticas como forma de aumentar a probabilidade dos desafios solicitados por uma tarefa de alto nível poderem ser mantidos durante o ensino e as ideias-chave matemáticas do que se pretende que seja aprendido serem realmente enfatizadas. Este modelo indica quais as práticas que o professor deve ter em atenção tanto no planeamento como durante a execução de uma tarefa, a saber: (1) antecipar as respostas dos estudantes à tarefa proposta, isto é, o professor deve resolver o problema de todas as maneiras possíveis; (2) monitorizar o trabalho dos estudantes durante o seu envolvimento com a tarefa, ou seja, o professor deve prestar atenção ao pensamento e à estratégia de resolução. Monitorizar envolve mais do que observar e ouvir o estudante. O professor deve fazer perguntas que ajudem os estudantes a esclarecer seu pensamento. O professor deve também assegurar que todos os membros do grupo estão envolvidos na atividade. De acordo com Lampert (2001) prestar atenção ao que o estudante faz e como o faz permite ao professor tomar a decisão do que deve escolher para o passo seguinte; (3) selecionar os estudantes para a apresentação das suas resoluções. A seleção dos estudantes terá de ser orientada pelo objetivo matemático daquela aula e o professor deverá avaliar qual a contribuição de cada apresentação para o cumprimento desse objetivo. Além disso todos os estudantes deverão ter a oportunidade de partilhar os seus pensamentos; (4) sequenciar as respostas dos estudantes determinando a ordem específica da sua apresentação. Ao selecionar os estudantes, que vão apresentar o seu trabalho para a turma, o professor pode tomar decisões sobre a sua sequência. Ao fazer estas escolhas intencionais sobre a ordem em que o trabalho dos estudantes é partilhado, o professor pode maximizar as hipóteses para que os seus objetivos matemáticos para a discussão sejam alcançados. Por exemplo o professor pode querer ter um estudante a apresentar a estratégia usada pela maioria antes de uma outra que apenas alguns estudantes utilizaram. Isso irá validar o trabalho que os estudantes fizeram e permite um início de discussão acessível a um maior número de estudantes. Mas o professor pode querer ter estratégias contrastantes escolhendo a apresentação de um logo após o outro de forma a tornar mais fácil para a turma compará-los. É visível que o sequenciamento antecipado das respostas é a chave para a lição. Respostas inesperadas podem então ser encaixadas na sequência previamente preparada e o professor pode tomar decisões finais sobre o que vai ser apresentado; e (5) relacionar as diferentes respostas dos estudantes e liga-las às principais ideias matemáticas. Nesta fase o professor ajuda os estudantes a desenhar conexões entre as suas soluções e as de outros estudantes bem como a realçar as ideias-chave matemáticas contidas na tarefa. Pode também ajudar os estudantes a fazer julgamentos sobre as consequências das diferentes abordagens para o conjunto de problemas que podem ser resolvidos. Discussões eficazes ajudam os estudantes a avaliar não só a precisão da solução de tais problemas como a perceber os tipos de padrões matemáticos que podem ser mais percetíveis. Em vez de se ter discussões matemáticas em apresentações separadas sobre os diferentes modos de resolver um problema particular, o objetivo é fazer com que as apresentações dos estudantes dependam umas das outras para se desenvolverem poderosas ideias matemáticas.

Estas práticas podem ajudar os professores a utilizar as respostas dos estudantes para fazer avançar a compreensão matemática da turma como um todo. Permitem aos professores ter controlo sobre o que é provável que aconteça numa discussão. Proporcionam mais tempo aos professores para tomarem decisões sobre o processo de ensino e aprendizagem. E isto só é possível porque grande parte da tomada de decisão foi deslocada para a fase de planeamento da aula (Smith et al., 2009). As autoras veem estas cinco práticas como um modelo focado para planear uma discussão com sucesso, tendo por base o pensamento do estudante, permitindo ao professor alcançar os objetivos traçados para a sua aula. Este modelo pretende ajudar os professores a manter um *olho* no horizonte matemático (Ball, 1993), "nunca perdendo de vista o que eles estão a tentar realizar matematicamente" (Smith et al., 2009, p. 555). Na implementação da tarefa tem de existir um equilíbrio entre o trabalho autónomo do estudante e a intervenção do professor (O´Shea & Peled, 2009). Estas autoras sublinham que esse equilíbrio depende não só das características da tarefa como mais ainda do professor, das suas crenças e da sua abordagem de ensino.

Pode então considerar-se as tarefas como pretextos de interação entre professor e estudantes, funcionando assim como motores que promovem a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Síntese

Desde os anos 90 que existem preocupações dos investigadores no desenvolvimento da educação. E foram os fracos resultados dos estudantes nos estudos internacionais do TIMSS e PISA que criaram a consciência pública da necessidade urgente de elevar, para um nível de suficiente, a literacia da matemática. Mas isso só será possível se o ensino e a aprendizagem de matemática no ensino se tornarem mais eficazes.

Os estudos comparativos internacionais e muitos outros estudos de investigação (e.g., House, 2006; Van den Broeck et al., 2005) também incluem a atitude do estudante como uma das variáveis para o sucesso. É verdade que o entendimento conceptual e processual só ocorrerá se o estudante estiver disposto a envolver-se no processo com mestria (Tobias et al., 2010). Da sua escolaridade básica os futuros professores trazem fortes crenças relacionadas com o ensino e a aprendizagem da matemática para as suas aulas de matemática da formação inicial de professores (Lannin & Chval, 2013). Por isso a formação inicial tem de incluir atividades que visem a análise e a reflexão sobre as suas próprias convicções na disciplina e sobre os diferentes modos de como a matemática pode ser abordada em sala de aula. Isto porque as conceções erradas, para além de impedirem a compreensão de conceitos matemáticos fundamentais, constituem grandes obstáculos à aprendizagem (DiSessa, 2006). E ensinar de modo a evitar que os estudantes criem quaisquer equívocos não é possível. Daí que os educadores de matemática se devam preocupar com as formulações incorretas ou ambíguas de conceitos matemáticos dos estudantes, substituindo-as por outras de compreensão exata e flexível que suportem diferentes representações (Koklu & Topcu, 2012). De acordo com Driver et al. (2000) é uma parte vital, de qualquer educação científica, o desenvolvimento nos estudantes de uma disposição para pensarem criticamente.

A aula de matemática ideal é descrita pelos estudantes de forma idêntica às características que costumam ser apontadas pelos investigadores para delinear as particularidades de um ensino eficaz (Sullivan et al., 2010). Os estudantes gostam de explicações claras, recordam aulas em que se utilizam materiais, sentem que o trabalho de grupo é importante como forma de aprendizagem, gostam de diferentes tipos de abordagem nas aulas e também gostam de ser desafiados.

De acordo com Ferguson (2013) a questão das discussões na turma durante as aulas de matemática e os estudantes com fraca prestação serão duas das áreas mais prementes para futuras investigações. Para esta autora as discussões na turma são uma potencial e rica oportunidade de aprendizagem para todos os estudantes porque as estratégias de pensamento de uns esclarecem, muitas vezes, as estratégias de pensamento de outros. Os estudantes de fraca prestação não devem ser excluídos destes benefícios. O professor precisa de ter pedagogia para incluir os estudantes de fraca prestação na participação das discussões com toda a turma. Daí a necessidade de se estudar os ambientes de ensino e aprendizagem de modo a que possam proporcionar o sucesso na aprendizagem da matemática.

Em Portugal o currículo da matemática sofreu alterações desde a década de 70. Mas em 2007 surge o PMEB onde é visível a preocupação com os conhecimentos básicos dos estudantes, com a importância da compreensão na aprendizagem da matemática e onde se indica que os professores devem utilizar uma diversidade de tarefas em sala de aula em particular tarefas de exploração. Entretanto o atual governo faz tábua rasa de todo o trabalho e investimento feitos na elaboração, experimentação e implementação do PMEB (ME, 2007) e em 2013 define novas Metas Curriculares para todo o ensino. Na opinião de Ponte et al. (2013) estas metas menorizam fortemente as capacidades matemáticas, o raciocínio matemático, a comunicação, a resolução de problemas, o cálculo mental e a capacidade de lidar com conexões e representações matemáticas. Só o futuro dirá se esta mudança vai trazer algum benefício para a proficiência matemática dos nossos estudantes.

Para Dewey (1933) as atitudes em relação ao ensino e à aprendizagem refletem a disposição do estudante perante uma atividade de pensamento. E a investigação mostra que as atitudes negativas e a falta de confiança em relação à matemática são consequência de experiências negativas na sua aprendizagem. Lannin e Chval (2013) acrescentam que as tarefas matemáticas ligadas às futuras experiências apoiam o futuro professor no confronto das suas próprias crenças e atitudes.

Muitos investigadores estudaram as conceções e ideias matemáticas dos estudantes e o seu desenvolvimento. E os resultados desses estudos evidenciam que a aprendizagem da matemática é complexa muitas vezes não é linear e leva tempo (e.g., Gutiérrez & Boero, 2006; Llinares & Krainer, 2006). O problema está em saber o que é que deve ser considerado adequado para ensinar matemática com profundidade (Ponte & Chapman, 2008). Para estes autores o professor determina o modo como o currículo da matemática é interpretado e ensinado e as tarefas assumem um papel determinante na sala de aula. Para Ponte (2005) o que os estudantes aprendem é produto da atividade que realizam e da reflexão que sobre ela fazem. Daí a importância do professor estar habilitado a colocar questões capazes de provocar a relação entre estudantes e ideias matemáticas (Hiebert et al., 2007). Segundo Canavarro (2011) a orquestração das discussões matemáticas constituem um desafio para o professor de qualquer ciclo de escolaridade. A autora defende que o professor deve estar preparado para escolher tarefas matemáticas com potencial de aprendizagens matemáticas sofisticadas; aprofundar a exploração matemática das tarefas, antecipando resoluções e prevendo caminhos para atingir o objetivo da aula; gerir o tempo de trabalho da tarefa; controlar as questões e comentários dos estudantes; resistir a validar as resoluções dos estudantes; recusar a apresentação de resoluções que não contribuam para o desenvolvimento matemático idealizado pelo professor; prever a utilização de recursos que na fase de discussão potenciem a comunicação dos estudantes; acautelar um espaço físico coletivo e visível para registar os conhecimentos sistematizados; desenvolver a comunicação matemática; e promover um ambiente estimulante na sala de aula encorajando os estudantes a uma participação ativa no desenvolvimento do seu próprio trabalho e a querer saber do dos outros, a explicar, a ouvir, a falar, a questionar e a contribuir de forma construtiva na construção do seu conhecimento matemático.

Para um professor utilizar uma tarefa tem de ter um conhecimento profundo tanto da matemática que ela contém como da profundidade do conhecimento que pode ser alcançado com ela (Gomes, 2010). Também se considera fundamental o conhecimento didático da tarefa que permita torná-la proveitosa. Há investigadores (e.g., Holton et al., 2009; Stillman et al., 2009) que argumentam que tarefas matemáticas desafiantes não são tarefas difíceis ou com um maior nível de matematização e a maior parte do desafio pode ser fornecido pelo professor. As tarefas desafiantes devem fornecer múltiplas soluções, aumentando as ideias matemáticas dos estudantes, a sua flexibilidade de pensamento e a originalidade nas respostas (Vale & Pimentel, 2011). Contudo uma tarefa pode ser matematicamente boa ou rica e não desafiadora, porque o desafio está ligado ao afeto, ao prazer na sua (re)solução. No nosso ponto de vista uma tarefa só será desafiante se for capaz de levar o estudante a construir novas ideias matemáticas, envolvendo-o afetivamente na atividade da sua (re)solução.

Vários educadores matemáticos têm reconhecido o papel-chave das tarefas no ensino da matemática (e.g., Canavarro, 2011; Smith et al., 2009; Vale, 2012). No entanto a eficácia de uma tarefa está também dependente do tipo de trabalho em sala de aula que como vimos é bastante exigente para o professor. Na implementação da tarefa é fundamental haver um equilíbrio entre a intervenção do professor e o trabalho autónomo do estudante (O´Shea & Peled, 2009). Esse equilíbrio depende não só das características da própria tarefa como mais ainda do professor, da sua abordagem de ensino e das suas crenças.

O Ensino e Aprendizagem da Geometria

Se a matemática é uma disciplina lógico-racional, a educação matemática dirige-se também a estudantes funcionalmente sensíveis ao pensamento visual, à intuição, à estética e à criatividade

(Teresa Vergani, 1993).

A disciplina de Matemática tem sofrido mudanças consideráveis fruto dos interesses culturais e materiais de cada época. E uma das áreas que mais tem sido afetada é sem dúvida a Geometria. Consequência disso são as alterações do seu peso e importância no currículo de Matemática que tem oscilado entre momentos em que assume o papel principal e outros em que é completamente negligenciada. E esta neglicência é comprovada por Veloso (2008) quando exclama: “Como é possível andar durante 9 anos a olhar para cilindros e cones sem nunca imaginarmos cortá-los por um plano e ver o que dá?!!” (p. 19). Não é por isso de estranhar as dificuldades com que se depara hoje em dia o ensino e consequentemente a aprendizagem da Geometria.

A Importância da Geometria

A grande influência no desenvolvimento da Geometria como ciência foi sem dúvida a civilização grega com o tratado de Euclides que a tornou num modelo para a sistematização racional dos vários campos do conhecimento. Por isso durante séculos a Geometria foi considerada uma das disciplinas mais relevantes para a formação cultural dos estudantes.

Nas palavras de Atiyah (2003), ilustre matemático do século XX, não há qualquer admiração no facto da Geometria ter sido o primeiro ramo da matemática a surgir e a chegar à maturidade, ou seja:

> Não foi acidente, penso eu, que a Geometria nas mãos dos gregos fosse o primeiro ramo da Matemática a chegar à maturidade. A razão fundamental é que a Geometria é a menos abstrata da Matemática: isto significa que tem aplicação direta para a vida do dia-a-dia e que pode ser entendida com menos esforço intelectual. Por contraste, a Álgebra é a essência da abstração, envolvendo um dicionário de simbolismo que tem de ser trabalhado com grande esforço. Mesmo a Aritmética, baseada no processo de contagem, depende do seu próprio dicionário, tal como o sistema decimal, e demora bastante tempo a desenvolver (p. 24).

Obviamente que este autor reconhece que a Geometria em níveis sofisticados envolve abstração.

Também as várias experiências realizadas por Davis e Hersh (1995) confirmam que a matemática utiliza os talentos dos dois hemisférios e não se restringe às capacidades linguística e analítica do hemisfério esquerdo. Chegam a afirmar que:

> É razoável pensar que uma cultura matemática que despreza explicitamente os aspetos espaciais, visuais cinestésicos e não-verbais do pensamento, não utiliza totalmente as capacidades do cérebro. Não dar importância aos elementos analógicos da matemática representa o fecho de um canal da consciência e experiência matemática (pp. 296-297).

Enquanto educadores a nossa tarefa é a de potenciar e desenvolver todos os talentos e capacidades especiais que o nosso cérebro contém, em vez de suprimirmos alguns pela educação ou por meros preconceitos profissionais. Na matemática o ideal seria que as duas metades do cérebro cooperassem, se completassem e se desenvolvessem uma à outra em vez de interferirem e estarem em conflito (Davis & Hersh, 1995).

Para o grande pedagogo e matemático Freudenthal (1973) "a Geometria é a compreensão do espaço… esse espaço no qual a criança vive, respira e se movimenta. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, a explorar, a conquistar de modo a conseguir viver, respirar e movimentar-se melhor" (p. 403). Nesta mesma linha e em relação à Geometria no currículo da matemática Alsina (1999) defende que:

> A Geometria no ensino da matemática deve ser a Geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma Geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar; induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; aberta à interdisciplinaridade com as ciências e as artes; paradigma da modelização matemática; predicadora de aplicações assombrosas e relações interessantes (…) esta é a Geometria com a qual nos gostaríamos de educar todos (p. 65).

Os atos de medir e contar são as operações cuja realização existe na vida de todos os dias com maior frequência (Caraça, 1989). Medir é comparar duas grandezas da mesma espécie, isto é, dois comprimentos, dois pesos, dois volumes. Para um professor de 1º e 2º ciclo é importante saber utilizar e tirar partido de situações do dia-a-dia e de materiais manipuláveis, dinamizadores de uma efetiva aprendizagem para os estudantes. É necessário despertar-lhes o gosto pela matemática. Para este autor as crianças são ávidas por descobertas e gostam de pequenos desafios que podem ser bastante motivadores e despertar o seu interesse pela matemática.

Ao sintetizarem as ideias de Lacroix (1765-1843) sobre o professor, Garnica, Gomes e Andrade (2012) afirmam que a ideia do professor como motivador, coordenador e mobilizador vincula-se à do estudante como participante ativo visto que os cálculos algébricos e aritméticos, assim como as construções em Geometria, não podem ser propriamente ensinadas mas devem ser aprendidas. Para os que se lançam à elaboração de um tratado de Geometria, Lacroix (1838, citado em Garnica et al., 2012) dá uma sugestão resumida a um conjunto de oito regras: (1) não tentar definir coisas tão conhecidas por si sós que não haja termos mais claros para as explicar; (2) não deixar sem definição nenhum dos termos um pouco obscuros ou duvidosos; (3) empregar nas definições somente termos perfeitamente conhecidos ou já explicados; (4) não omitir nenhum dos princípios necessários, por mais claros e evidentes que possam ser, sem antes se assegurar de que a sua ausência não afetará a compreensão do todo; (5) requerer em axiomas somente coisas perfeitamente evidentes por elas mesmas; (6) não tentar demonstrar coisas que são tão evidentes por si sós que não se tenha nada de mais claro para prová-las; (7) provar todas as proposições ainda obscuras empregando somente axiomas evidentes por si sós ou proposições já demonstradas ou aceites; e (8) jamais cair no equívoco dos termos deixando de substituir mentalmente as definições que os restringem e explicam.

Sobre o ensino da Geometria Lacroix tece várias considerações das quais decorrem indicações sobre a necessidade de se intercalar a sequência dos teoremas com problemas que lhes dariam sentido bem como o do exercício do traçado que, na Geometria, é similar ao do cálculo na aritmética, da exemplificação paralela à efetivação e dos diferentes modos de raciocinar. Este matemático considera-se incapaz de apresentar uma resposta absoluta à questão da precedência da álgebra sobre a Geometria nos programas escolares. No entanto a tendência de Lacroix vai para o ensino da Geometria:

> A Geometria é, talvez de todas as partes da Matemática, aquela que se deve aprender primeiro. Ela me parece muito adequada para atrair as crianças, desde que seja apresentada principalmente com relação às suas aplicações tanto teóricas quanto práticas. [...] Penso que, em todos os casos, não há nenhuma razão para colocar a Geometria entre a Aritmética e a Álgebra porque é desnecessário separar essas duas partes que, na verdade, formam uma única, a saber: a ciência do cálculo das grandezas ou a Aritmética universal (1838, citado em Garnica et al., 2012, p. 1257).

A Geometria, considerada como uma ferramenta para compreender, descrever e interagir com o espaço onde vivemos, é considerada por muitos como a parte da matemática mais concreta, intuitiva e relacionada com a realidade. Uns procuram uma abordagem indutiva da Geometria apoiada em parte pelo desenvolvimento de *software* dinâmico. Outros referem a geometria diferencial e a topologia em vários campos. E outros pensam a Geometria como um corpo de ideias que trata com estruturas geométricas discretas. Shell (1998) refere que existem muitos fios que tecem o currículo designado por Geometria. Por Geometria pode apontar-se tanto matemáticas aplicadas como teóricas e utilizar tanto a intuição como a axiomática. Segundo Costa (2000) esta versatilidade, que tanto fascina os matemáticos, desorienta tanto os estudantes na aprendizagem da Geometria como os professores na tentativa de a ensinar. Isto acontece porque os tais fios se interlaçam. Para esta autora só quando todos esses fios estão desenvolvidos é que os estudantes edificam um esquema consistente denominado *Geometria*; quando um dos fios falta a estrutura torna-se instável. Estes fios incluem o raciocínio dedutivo, a medição e a capacidade de visualização, mas não se limitam a eles.

O papel da Geometria no desenvolvimento das ideias matemáticas é muito importante. Segundo Mesquita (1998) a representação de objetos geométricos e as relações entre esses objetos e suas representações constituem importantes problemas de Geometria. O NCTM (1999) também defende que o conteúdo da Geometria é apropriado quer para o desenvolvimento do raciocínio matemático de nível inferior (o reconhecimento de formas) como para o pensamento de ordem superior (a descoberta das propriedades de formas), a construção de modelos geométricos e a resolução de problemas matemáticos.

Nos Estados Unidos o National Council of Supervisors of Mathematics [NCSM] (1990) evidenciou doze áreas essenciais de competências matemáticas que os estudantes iriam necessitar para, no século XXI, desempenharem funções com eficiência sendo uma delas a Geometria. Este organismo declarou que os estudantes devem: compreender os conceitos geométricos necessários ao trabalho no espaço tridimensional; ter conhecimento das propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos; ter conhecimento dos conceitos de: paralelismo, perpendicularidade, semelhança, congruência e simetria; devem verbalizar e visualizar como os objetos se movem no mundo, utilizando rotações, translações e simetrias. O NCSM acrescentou ainda que todos estes conceitos devem ser trabalhados e explorados de forma a envolverem medições e resolução de problemas.

O PMEB (ME, 2007) prevê também a "oportunidade de reflectir sobre o papel das definições em Matemática" (p. 62) dando como exemplo o estudo dos quadriláteros. Segundo Fujita (2008) e De Villiers (1994) a classificação hierárquica dos quadriláteros, pela sua riqueza em termos de interconexões entre as várias figuras geométricas, promove o desenvolvimento do pensamento geométrico. Muitos investigadores mencionam a dificuldade dos estudantes na compreensão das relações de hierarquia dos quadriláteros e Fugita e Jones (2007) atribuem esta dificuldade à dedução lógica que estas classificações exigem. E estas dificuldades não são exclusivas dos estudantes de níveis elementares mas também dos de ciclos posteriores, ensino secundário (Senk, 1989) e até mesmo ensino superior.

Para o NCTM (2008) a Geometria é "mais do que um conjunto de definições; consiste na descrição de relações e no raciocínio" (p. 44) pelo que é considerada "desde há muito, como o conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática" (p. 44), sendo por isso crucial na educação matemática dos nossos jovens. Segundo Matos e Serrazina (1996) a aprendizagem da Geometria deve desenvolver nos estudantes determinadas capacidades, a saber: *capacidade de visualização* que é o modo como o estudante perceciona o mundo que o rodeia, tendo capacidade para interpretar as transformações dos objetos; *capacidade de verbalização* que é o modo como o estudante troca ideias, desenvolve argumentos e negoceia significados. É conseguida através do confronto de ideias na turma sobre o trabalho elaborado individualmente ou por grupos; *capacidade de construir ou manipular* objetos geométricos. O desenho geométrico com régua e compasso ou no computador e a construção material de objetos são matematizações do real que possibilitam ao estudante a interação e a compreensão de ideias geométricas; *capacidade de organização lógica do pensamento matemático* que diz respeito ao modo como o estudante estrutura o pensamento geométrico, desde a visualização de figuras que são reconhecidas pelo seu aspeto até um nível superior onde compreendem os vários sistemas axiomáticos para a Geometria; e *capacidade de aplicar os conhecimentos geométricos* noutras situações. Esta última capacidade deve ser desenvolvida através da realização de atividades geométricas.

De acordo com Veloso (2007) no 1º e 2º ciclo "o aluno vai construindo naturalmente os conceitos, sem uma apresentação formal de definições por parte do professor. Os novos termos, e serão muitos, aparecerão naturalmente durante as múltiplas explorações de materiais manipuláveis de diversos tipos…." (p. 20). A aprendizagem de conceitos geométricos sempre foi um aspeto da matemática em que muitos estudantes sentem dificuldades e a sua aprendizagem é por vezes realizada com lacunas ou erros (Fuys et al., 1988). Muitos estudos confirmam que o nível de conhecimentos, procedimentos, comunicação, raciocínio e pensamento geométrico em que cada um dos estudantes se encontra pode ser diferente (e.g., Gray & Tall, 2002; Gutiérrez, 1996; Pandiscio & Orton, 1998; Senk, 1989; Tall, 2004; van Hiele, 1986). Para ensinar Geometria aos estudantes, para que a sua aprendizagem seja significativa, requer uma compreensão de como os estudantes constroem os seus conhecimentos sobre os diferentes temas geométricos (Battista, 1999).

No documento de discussão "Perspectives on the teaching of Geometry for the 21th century", que esteve na base do estudo do ICMI, Mammana e Villani (1998) afirmam que é difícil listar todos os aspetos que a Geometria engloba. No entanto apresentam alguns que consideram particularmente relevantes e pertinentes tendo em consideração as suas implicações didáticas: (1) Geometria como uma ciência do espaço; (2) Geometria como um método para representações visuais de conceitos e processos de outras áreas da matemática ou de outras ciências; (3) Geometria como um ponto de encontro entre a matemática como uma teoria e a matemática como uma fonte de modelos; (4) Geometria como um modo de pensamento e de compreensão e a um nível mais elevado como uma teoria formal; (5) Geometria como um exemplo paradigmático para o ensino do raciocínio dedutivo; e (6) Geometria como uma ferramenta nas aplicações tanto tradicionais como inovadoras.

Veloso (1999) considerando que os dois pilares em que assenta a aprendizagem da matemática são a experiência matemática e a reflexão sobre essa experiência, apresenta as seguintes orientações gerais para uma possível abordagem da Geometria: (1) a intuição e a dedução devem estar presentes ao longo de toda a escolaridade. Não se deve considerar que o papel da intuição esteja reservado *para os primeiros anos* e o da dedução para os últimos... . Comportando a experiência matemática uma componente experimental e tendo, além disso, a ciência matemática - o raciocínio dedutivo como característica fundamental - estas duas componentes deve fazer parte da atividade dos estudantes em todos os níveis de ensino. A componente experimental deve apoiar-se na utilização de *software* e recorrer intensamente a outros materiais, como os manipuláveis, e isto não apenas nos tais *primeiros anos*. Em particular, o desenvolvimento da capacidade de visualização não pode fazer-se de outro modo e deve estar permanente ao longo de toda a escolaridade; (2) a experiência matemática dos estudantes, no que diz respeito à Geometria, deve tomar como pontos de partida: os grandes temas da Geometria – como a visualização, a representação, a simetria, a forma e a dimensão; as conexões da Geometria no interior da matemática – nomeadamente com os números, a álgebra e a análise; as relações da Geometria com a realidade exterior à matemática – Geometria e arte, Geometria e natureza, Geometria e arquitetura, aplicações modernas da Geometria como a robótica e a Geometria do *design* gráfico; (3) o importante papel tradicionalmente reservado ao ensino da Geometria, de ajudar à compreensão do carácter axiomático das teorias matemáticas, deve ser prosseguido mas em novos moldes. Atividades de organização local devem ser propostas aos estudantes ao longo da escolaridade, naturalmente em consonância com a sua maturidade matemática. Além disso os estudantes devem ter oportunidade de realizar algumas atividades em geometrias não euclidianas e refletir sobre essa experiência, dada a sua importância na filosofia da matemática e do ponto de vista da cultura científica; (4) a nova abordagem da Geometria deve integrar de modo permanente a história da Geometria no seu ensino. Não para entreter os estudantes a copiar das enciclopédias anedotas sobre dois ou três geómetras ou as suas vidas romanceadas mas para ajudar à compreensão do papel da Geometria, ao longo de milénios, na construção da sociedade atual; de como conceitos importantes levam muito tempo a ser construídos e do caráter convencional e evolutivo, embora essencial, das definições em matemática; do carácter universal da matemática mas ao mesmo tempo das contribuições que diferentes povos e civilizações deram à sua construção; e (5) a utilização de programas de computador dedicados ao ensino da Geometria e da *internet* é muito importante no ensino atual da Geometria e será essencial no contexto da nova abordagem que se propõe.

Malkevitch (1991) afirmou não ter dúvidas de que, em termos factuais históricos, a Geometria tem sido útil na resolução de uma variedade de problemas da vida do dia-a-dia. Mas o que ele considera surpreendente é que o pensamento geométrico tenha sido o suporte do aparecimento de novas tecnologias - as telecomunicações, a robótica, as técnicas de imagem médica, a manipulação e o processamento da imagem (em publicidade, marketing, fotografia, cinema, etc.).

Ng (2011) realizou um estudo onde investigou o conhecimento matemático dos professores da Indonésia para o ensino da Geometria e que fatores contribuíam para esse conhecimento. As implicações deste estudo indicam a exigência de uma escolaridade mínima, um diploma universitário de pelo menos 4 anos e a exigência dos professores ensinarem nos vários níveis de ensino ao longo das suas carreiras profissionais. Muitos outros estudos indicam que o desenvolvimento da proficiência matemática dos estudantes está relacionado com o conhecimento matemático dos professores (e.g., Ball, Hill & Bass, 2005). Porque segundo as autoras há uma crença muito forte de que o conhecimento matemático dos professores tem um impacto na conquista do conhecimento dos estudantes. Deste modo melhorar o conhecimento matemático dos professores pode aumentar nos estudantes a conquista da Geometria. Ng (2011) afirmou ainda que são necessários mais estudos sobre os fatores que podem contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático necessário para um ensino eficaz, para informar os formuladores de políticas, os programas de preparação de professores e os formadores e prestadores desta atividade profissional.

Percursos da Geometria

Em qualquer parte do mundo quando comparamos o programa de Álgebra e do Número ele é semelhante ao nosso mas em relação à Geometria isso não acontece. Uma vez que a Geometria tem várias abordagens essa uniformidade é praticamente inexistente. Porém, com as diretivas do NCTM, a partir de 2000 começa a haver alguma tendência para uma uniformidade.

O ensino da Geometria foi relegado para um plano secundário embora nestes últimos anos tenha ganho importância tanto a nível nacional (ME, 2007; MEC, 2013) como internacional (ICMI, 2013; NCTM, 2001, 2002, 2006, 2008, 2009, 2012; NMAP, 2008; NRC, 2010).

Nas décadas de 70 e 80 assistiu-se à deterioração do ensino da Geometria e a uma consequente desvalorização da visualização na atividade matemática dos estudantes (Abrantes et al., 1999; Veloso, 1998). Segundo estes autores os aspetos da Geometria como observação, experimentação e construção praticamente desapareceram do ensino básico. Isso pode ser comprovado pela declaração que Keith Austin fez, na Universidade de Sheffield em 1994, no Encontro sobre o Ensino da Matemática na Licenciatura onde resumiu a situação vivida no reino Unido, dizendo:

> A posição da geometria euclidiana clássica no currículo escolar sofreu um sério revés nos anos 60 e quase desapareceu completamente em 1980. Desde então tem havido apelos para a reintrodução, no currículo, desta e de outras geometrias como componente significativa do primeiro ano da licenciatura. Entre as razões apontadas para esses apelos contam-se considerações de ordem estética, a ideia de que a Geometria é, em si mesma, boa matemática e o facto da linguagem e do raciocínio geométrico serem tão predominantes na matemática moderna. Há também uma necessidade crescente dos estudantes da licenciatura valorizarem a interação entre intuição e rigor. A Geometria é vista como uma área especialmente fértil para esse efeito. (Keith Austin, 1994, citado em Hampson, 2003, p. 103).

Com o movimento da Matemática Moderna a nível nacional e internacional as consequências no ensino da Geometria variaram conforme os países. Antes deste movimento o currículo da Geometria dos liceus em Portugal tinha duas componentes principais: as construções geométricas e o estudo da geometria euclidiana - exatamente como Euclides a deixou - no plano e no espaço (Veloso, 1998). Para este autor o processo de ensino da geometria euclidiana baseado na demonstração de centenas de axiomas e teoremas provocava nos estudantes uma aversão enorme pela Geometria.

No final da década de 80 com o início da reforma dos programas de matemática foram criadas algumas condições para que a Geometria voltasse a ocupar o seu lugar no currículo (Veloso, 1998). Já no final da década de 90, como sublinham Abrantes et al. (1999), as orientações curriculares indicavam outro rumo referindo que "a Geometria é essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação" (p. 67). Estes autores defendem o desenvolvimento das capacidades de visualização espacial, de verbalização e da intuição e a sua utilização como recurso na resolução de problemas.

Em 1990 num seminário realizado nos Estados Unidos sobre o ensino da Geometria foi recomendada uma maior atenção aos conceitos centrais da Geometria particularmente às transformações geométricas e seus efeitos:

> É essencial retomar a intenção de dar às transformações geométricas o seu papel importante no ensino da Geometria, num tratamento que (...) desenvolva as intuições que os alunos já possuem e prossiga numa via lenta de formalização ao longo de toda a escolaridade (Veloso, 1998, p. 14).

Para este autor o sentido espacial e, em particular, a visualização são aspetos fundamentais em Geometria e devem merecer uma atenção cuidada e um trabalho consistente ao longo do ensino básico. O sentido espacial pode ser caracterizado como um conhecimento intuitivo do meio envolvente e dos objetos que nele existem (NCTM, 1991). No desenvolvimento do sentido espacial e no estudo de figuras bi e tridimensionais Ponte e Serrazina (2000) referem que a utilização de planificações de sólidos geométricos e a sua construção são uma das melhores estratégias. Isto porque ao efetuar sucessivas dobragens, o estudante reconhece que uma figura bidimensional vai originar uma dada forma tridimensional desenvolvendo o seu raciocínio geométrico.

De facto no panorama mundial da matemática e do seu ensino, verifica-se a existência de um movimento de regresso ao ensino da Geometria. Também em Portugal se constata um interesse crescente pela Geometria. Em termos de publicações sobre a Geometria e seu ensino destaca-se “Geometria – temas actuais” de Veloso (1998) que pode ser considerada uma obra de referência no panorama português. Em termos de encontros temáticos sobre o ensino da Geometria em Portugal pode referir-se o encontro “Ensino de Geometria no virar do milénio” da iniciativa do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Desse encontro, e produto das diferentes contribuições, Veloso e Ponte (1999) identificam os seguintes pontos de convergência: (1) a experimentação e a dedução foram consideradas igualmente importantes, desempenhando um papel complementar. Foi reconhecido que o desenvolvimento da intuição devia ser uma preocupação constante do professor desde o ensino básico até ao superior e que a dedução com caráter formal deveria começar a surgir desde relativamente cedo, embora os estudos de cunho estritamente axiomáticos devessem ficar para o fim do ensino secundário; e (2) as conexões da Geometria com outras áreas da matemática e com outras áreas exteriores à matemática deveriam ser valorizadas dando também importância às aplicações.

Para o desenvolvimento do raciocínio sobre as relações geométricas os Princípios e Normas para a Matemática Escolar emanados pelo NCTM sugerem que o estudante deverá: na educação pré-escolar - identificar e nomear formas geométricas bidimensionais bem como os seus atributos (lados retos ou curvos, número de lados retos, comprimento dos lados e o tipo de cantos com ou sem ângulos retos) (NCTM, 2003); no 1º ano - identificar os atributos das formas geométricas bidimensionais (número de lados retos, número de ângulos retos, comprimento dos lados); identificar linhas de simetria dessas formas; nomear triângulos, quadrados, quadriláteros, pentágonos e hexágonos (NCTM, 2004a); no 2º ano - nomear e descrever os atributos de formas geométricas tridimensionais; identificar semelhanças e diferenças entre formas (NCTM, 2004b); no 3º e 4º ano – analisar características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos sobre as relações geométricas; aplicar transformações (translações, rotações e reflexões) e utilizar a simetria para analisar situações matemáticas; utilizar a modelação geométrica, o raciocínio espacial e a visualização para resolver problemas (NCTM, 2004c, 2005); do 6 ao 8º ano – descrever com precisão, classificar e compreender as relações entre formas geométricas bi e tridimensionais definindo as suas propriedades; compreender as relações entre ângulos, comprimento de lados, perímetros, áreas e volumes de objetos semelhantes; criar e utilizar argumentos indutivos e dedutivos sobre ideias geométricas e suas conexões. Utilizar coordenadas geométricas e outros sistemas de representação para representar e examinar as propriedades das formas geométricas. Utilizar os sistemas de representação para descrever eixo(s) e simetria(s) de reflexão, translação e rotação, e explorar a compreensão das transformações, semelhanças e congruência. Desenhar objetos geométricos através de propriedades específicas como o comprimento do lado ou a medida dos ângulos. Utilizar a modelação geométrica, o raciocínio espacial e a visualização para resolver problemas dentro e fora da matemática como na arte, na ciência e no dia-a-dia (NCTM, 2002).

Em relação aos programas anteriormente em vigor desde 1990/91, o PMEB (ME, 2007) valoriza o sentido espacial e a visualização e reforça as transformações geométricas. Para além disso a Medida assume maior visibilidade no 1º ciclo. Este programa dá ênfase particular à visualização e à compreensão das propriedades de figuras geométricas entendendo o quanto são importantes para o desenvolvimento do sentido espacial do estudante. Introduz o estudo das transformações geométricas logo a partir dos primeiros anos sendo progressivamente alargado e aprofundado nos anos mais avançados. A introdução do estudo das figuras no 1º ciclo apresenta uma caracterização de sentido espacial tendo por base a visualização e a compreensão das relações espaciais, onde as noções de orientação e movimento desempenham um papel importante na perceção dessas relações. No 2º ciclo os estudantes relacionam as propriedades geométricas das figuras e no 3º ciclo surgem os primeiros contactos com situações de raciocínio hipotético-dedutivo. A utilização de materiais manipuláveis desenvolve um papel importante na aprendizagem da Geometria e Medida permitindo estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos. Apesar disso é necessário ter em conta que o uso de materiais por si só não garante a aprendizagem, tornando-se imprescindíveis tanto o registo do trabalho efetuado como a reflexão sobre ele (ME, 2007).

O novo Programa e as Metas Curriculares (MEC, 2013) no que à Geometria diz respeito referem que: no 1º ciclo são apresentadas as noções básicas da Geometria, começando-se pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares como pontos, colinearidade de pontos, direções, retas, semirretas e segmentos de reta, paralelismo e perpendicularidade, a partir dos quais se constroem objetos mais complexos como polígonos, circunferências, sólidos ou ângulos. Por outro lado a igualdade de distâncias entre pares de pontos, obtida primitivamente por deslocamentos de objetos rígidos com dois pontos neles fixados, preside aos princípios genéricos que assistem às operações de medição de comprimentos conduzindo ao conceito de fração e posteriormente à medição de outras grandezas. A igualdade de ângulos é apresentada inicialmente por deslocamentos rígidos de três pontos levando à noção de igualdade de amplitude, associando-se a este princípio um importante critério geométrico prático de congruência de ângulos, baseado em igualdade entre segmentos de reta que servirá de fundamento ao estudo da medida de amplitude de ângulos nos ciclos posteriores; para o 2º ciclo são introduzidos alguns conceitos e propriedades – tão elementares quanto fundamentais – envolvendo paralelismo e ângulos com aplicações simples aos polígonos. Em particular é fornecida uma definição geométrica de soma de ângulos por justaposição, análoga à justaposição de segmentos de reta abordada no 1º ciclo. Porque esta é uma etapa necessária ao estudo sério e rigoroso da Geometria nos ciclos de ensino posteriores, os estudantes deverão saber relacionar as diferentes propriedades estudadas com aquelas que já conhecem e que são pertinentes em cada situação. Deverão também realizar diversas tarefas que envolvam a utilização de instrumentos de desenho e de medida (régua, esquadro, compasso e transferidor, programas de geometria dinâmica) para adquirir destreza na execução de construções rigorosas e reconhecer alguns dos resultados matemáticos por detrás dos diferentes procedimentos. Neste ciclo o tópico da Medida é dedicado a áreas de figuras planas, a volumes de sólidos e a amplitudes de ângulos. À imagem do conceito de medida de comprimento que decorre na abordagem proposta para o 1º ciclo da justaposição retilínea de segmentos de reta, as medidas de amplitude de ângulo alicerçam-se na noção de soma geométrica de ângulos (MEC, 2013).

Para o ensino da Geometria do pré-escolar ao 12º ano o NCTM (2008) propõe um conjunto de normas que devem habilitar o estudante para: (1) analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca das relações geométricas; (2) especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação; (3) aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas; e (4) usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

O NMAP (2008) no seu relatório final - Fundamentos para o Sucesso – em relação à Geometria e Medida refere que embora a exposição precoce a formas geométricas básicas, nomes e outros conceitos possa ser útil no desenvolvimento das capacidades e conhecimentos geométricos formais do estudante, isso não é suficiente. Muitas vezes é necessário recorrer à utilização de materiais manipuláveis ou de ambientes de geometria dinâmica (Jones, 2000a). Para interiorizarem representações abstratas os estudantes devem eventualmente fazer a transição do concreto para as representações visuais. Os passos cruciais de tais transições não são claramente compreendidos no presente, por isso, no futuro, precisam de ser um foco na investigação sobre aprendizagem e currículo da Geometria. Sobre este aspeto Jones e Mooney (2003) consideram que a representação dos objetos tridimensionais potencia não só o desenvolvimento da intuição geométrica e capacidades de visualização como também potencia o conhecimento e compreensão de propriedades geométricas e teoremas. É preciso não esquecer que um único tipo de representação dificilmente representa integralmente um objeto tridimensional (Pittalis & Christou, 2010) e que as dificuldades em Geometria surgem muitas vezes porque os estudantes raciocinam sobre essas representações, quando deveriam estar a fazê-lo sobre objetos geométricos teóricos (Laborde, 1993, citado em Battista, 2007). Daí que Ho e Eastman (2006) considerem as mudanças entre representações bi e tridimensionais muito importantes para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

O NMAP (2008) recomenda que "os professores devem reconhecer que, desde a infância e durante o ensino básico, as capacidades de visualização espacial necessárias à aprendizagem de Geometria já começaram a desenvolver-se" (p. 29). Em contraste com as afirmações da teoria de Piaget o NMAP sublinha ainda que "os estudantes parecem possuir, pelo menos, um entendimento implícito dos aspetos básicos dos conceitos euclidianos. No entanto a instrução formal é necessária para assegurar que o estudante é capaz de construir esse conhecimento para aprender Geometria" (p. 29).

Neste confronto de diretivas nacionais e internacionais evidencia-se desde os primeiros anos uma preocupação no ensino da Geometria considerada um meio privilegiado para desenvolver diferentes tipos de raciocínio, em particular, as capacidades de visualização espacial e de raciocínio geométrico.

Tanto as novas metas curriculares como o programa de matemática para o ensino básico, homologados pelo Ministério da Educação e Ciência a 17 de junho de 2013, são bastante exigentes particularmente no que à Geometria diz respeito. Daí que alguns dos professores em funções não vão ser capazes de assegurar a sua aprendizagem. Terá por isso de existir uma oferta de formação articulada que supra as dificuldades dos professores que se encontram no terreno.

O Desenvolvimento das Ideias em Geometria

Vivemos num mundo tridimensional onde a Geometria está presente nos diversos campos da vida humana, seja nos elementos da natureza, nas construções ou nos objetos que utilizamos. E o que é a Geometria? Com o propósito de responder a esta pergunta, Atiyah (2003) afirma:

> Se a Geometria não é o estudo do espaço físico mas o estudo de qualquer espécie de espaço abstrato isso não fará coincidir a Geometria com toda a matemática? Se eu posso sempre pensar em n variáveis reais como representando um ponto num espaço n-dimensional o que é que distingue a Geometria da Álgebra e da Análise? […] De uma forma mais abrangente tento sugerir que a Geometria é a parte da matemática na qual o pensamento visual é o dominante enquanto a Álgebra é a parte onde o pensamento sequencial é o dominante. Esta dicotomia é talvez melhor comunicada pelas palavras '*insight*' versus 'rigor' e ambas jogam um papel fundamental nos problemas matemáticos reais (pp. 28-29).

Nesta perspetiva Atiyah apresenta exemplos de diversas geometrias correspondentes a espaços abstratos que modelam situações realistas para poder afirmar que a Geometria é uma parte da matemática em que o pensamento visual é preponderante e apresenta-o em contraposição ao pensamento lógico e sequencial mais próprio da álgebra defendido por outros seus contemporâneos. Acrescenta ainda que:

> … intuição espacial ou perceção espacial é uma ferramenta extremamente poderosa e é por isso que a Geometria é realmente uma parte poderosa da matemática - não só para aquilo que é obviamente geométrico mas até mesmo para o que não o é. Tentamos colocá-las em forma geométrica porque isso nos permite usar a nossa intuição. A intuição é a nossa ferramenta mais poderosa. (Atiyah, 2001, p. 50)

Quando os estudantes iniciam a sua aprendizagem escolar já possuem conceitos rudimentares sobre a forma e o espaço. E estes conceitos são uma importante base tanto para a construção do conhecimento geométrico como para o raciocínio geométrico a ser desenvolvido ao longo da sua escolaridade (NCTM, 2003).

Clements e Sarama (2007) consideram que a visualização espacial é a capacidade de gerar e manipular imagens que envolvem a compreensão e a capacidade de imaginar objetos em movimento no espaço bi e tridimensional. Para tal é necessário que o estudante seja capaz de criar e manipular imagens mentais. De acordo com a teoria de Piaget (1973, citado em Clements & Battista, 1992) os estudantes só serão capazes de criar imagens dinâmicas depois de terem tido um conjunto de experiências visuais que lhes permitam confiar plenamente no seu pensamento percetual. Segundo Clements e Battista (1992) as atividades de visualização e orientação espacial que combinam simultaneamente lápis e papel, trabalho no computador e movimento psicológico podem facilitar a aprendizagem da matemática. De acordo com Vale (2012) a relevância atribuída à visualização na aprendizagem da matemática fundamenta-se pelo facto de não se limitar à mera ilustração mas também ao ser reconhecida como uma componente do raciocínio.

A Geometria é como uma rede de pensamentos e conceitos interligados e de sistemas de representação utilizados para conceptualizar e perceber ambientes espaciais físicos e imaginados (Battista, 2007). Apesar de não ser uma tarefa fácil o NCTM (2008) sugere a integração de abordagens visuais nas experiências matemáticas proporcionadas aos estudantes e Duval (1998) acrescenta que o professor deve ter em consideração que há muitas formas de ver. Este autor defende que a Geometria, mais do que outras áreas da matemática, é um meio privilegiado para descobrir e desenvolver diferentes tipos de raciocínio, em particular, capacidades de representação visual e de raciocínio geométrico.

Para Battista (1990) os estudantes que não têm apetência para a visualização podem desenvolver estratégias analíticas como forma de compensar essa falta de capacidade de visualização. Outros com grande capacidade de visualização podem imaginar mentalmente movimentos de sólidos tão bem que, para muitos dos problemas, eles simplesmente não têm necessidade de examinar os componentes desses sólidos (Battista, 2007). Também Gutiérrez, Jaime e Fortuny (1991) têm procurado ilustrar como a visualização e os conceitos geométricos podem desenvolver-se lado-a-lado, uma ideia também defendida por Clements e Battista (2001). No entanto Battista (2007) reclama ser necessária mais investigação que descreva claramente como os conceitos geométricos interagem com a visualização durante o seu desenvolvimento.

Na perspetiva de Duval (1998) a Geometria envolve três tipos de processos cognitivos, cada um deles com funções epistemológicas específicas: (1) *os processos de visualização* tendo em consideração a representação espacial para a ilustração e demonstração, para a exploração heurística de uma situação complexa, para uma vista de olhos sinótica ou para uma verificação subjetiva; (2) *os processos de construção* a partir de ferramentas: construção e configuração podem funcionar como um modelo em que as ações representativas e os resultados observados estão relacionados com os objetos matemáticos que estão representados; e (3) *o raciocínio em relação aos processos discursivos* para alargamento dos processos de conhecimento, para demonstração e para explanação. Para este autor estes processos podem ser realizados separadamente. Assim a visualização não depende da construção, isto é, podemos aceder a figuras sem precisarmos de saber a forma como foram construídas. E mesmo se a construção precede a visualização, os processos de construção dependem apenas das conexões entre as propriedades matemáticas e os constrangimentos técnicos das ferramentas. Por último se a visualização é uma ajuda intuitiva que é necessária para encontrar uma demonstração, o raciocínio depende exclusivamente do *corpus* das proposições (definições, axiomas, teoremas) que estão disponíveis. E nalguns casos a visualização pode iludir ou ser impossível. Para Duval (2006) estas três espécies de processos cognitivos estão intimamente ligados e são o entendimento que é necessário para uma mestria em Geometria.

No ensino da matemática o grande objetivo é o de desenvolver a capacidade de raciocínio dos estudantes. O PMEB (ME, 2007) destaca que não é através da memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros que os estudantes desenvolvem a capacidade de raciocinar matematicamente. Pelo contrário isso faz com que os estudantes visualizem a matemática como sendo um conjunto de regras mais ou menos desconexas e não como uma disciplina lógica e coerente (ME, 2007). As atuais Metas Curriculares (MEC, 2013) consideram o raciocínio hipotético-dedutivo como o raciocínio matemático por excelência apesar do raciocínio indutivo desempenhar um papel fundamental na formulação de conjeturas. Definem ainda que os estudantes, para além de deverem ser capazes de estabelecer conjeturas, deverão ter a consciência que o raciocínio indutivo não é conveniente para justificar propriedades uma vez que pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras. Resumindo, as atuais metas curriculares para o ensino básico apontam para uma crescente mestria na utilização do raciocínio hipotético-dedutivo.

Russel (1999) sublinha que na aprendizagem da matemática o raciocínio é "o que utilizamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos" (p. 1) e acrescenta que é "a ferramenta para compreender a abstração" (p. 1). Oliveira (2008) define raciocínio matemático como "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). Para Ferreira e Vale (2013) é através do raciocínio que os estudantes aprendem matemática e "dão significado às ideias matemáticas (geométricas em particular) bem como aos procedimentos que executam" (p. 82). De acordo com Pimentel e Vale (2012) é habitual considerarem-se dois tipos fundamentais de raciocínio: indutivo e dedutivo. O indutivo parte do particular para o geral, da observação de dados sobre os quais se formulam hipóteses exploratórias e, com base noutros casos, se generaliza para um conjunto mais amplo. O dedutivo nasce da necessidade de se verificar a autenticidade dessa generalização baseando-se em argumentos lógicos do tipo *modus ponens*. Outros autores, como por exemplo Radford (2008), identificam outro tipo de raciocínio: o raciocínio abdutivo - uma fase criativa de produção de hipóteses a explorar, tornando-se assim óbvio como as ideias aparecem na nossa mente. A abdução é pois o processo de introdução de novas ideias, a formulação de explicações ou conjeturas das quais alguma pode ser testada no processo de indução; a indução corresponde ao passo seguinte, o teste da conjetura em mais dados. O processo de generalização acontece quando há aceitação de uma forma geral obtida por um processo cíclico de abdução e indução. No fim deste ciclo surge a dedução que envolve explicação, argumentação e prova. Também Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram que o raciocínio matemático é "um processo dinâmico de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (p. 10).

As ideias principais destes três tipos de raciocínio podem ser sintetizadas do seguinte modo: a abdução cria, a indução verifica e a dedução explica (Yu, 2006).

Segundo Mata-Pereira e Ponte (2013) os processos de raciocínio incluem não só a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas como a realização de justificações. Nesta mesma linha para Pinheiro e Carreira (2013), e como processo de pensamento, o raciocínio matemático surge a partir da experiência do estudante para "explicar, justificar e argumentar" (p. 152) para si e para os outros "conjeturas, ideias matemáticas e ideias que ele próprio apresenta bem como para escolher certos caminhos ou percursos durante a resolução de problemas" (p. 152). Um quadro conceptual para a análise do raciocínio encontra-se na Figura 1.

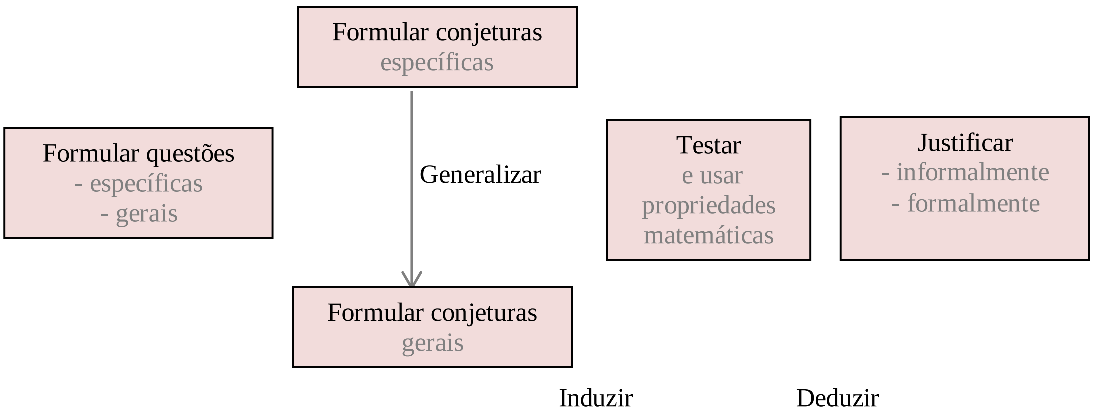


Figura 1. Quadro Conceptual para a Análise do Raciocínio (adaptado de Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012)

O papel de argumentar, justificar ou provar é parte integrante da atividade do educador matemático uma vez que é usual caracterizar a matemática pela grande importância atribuída à argumentação e à prova. É verdade que na resolução de diferentes tipos de atividade matemática os raciocínios de tipo argumentativo estão presentes, embora por vezes possam permanecer ocultos. Para Boavida et al. (2008) a explicitação destes raciocínios constitui uma mais-valia não só porque o aluno toma consciência da sua existência e necessidade mas sobretudo porque esta atividade lhe permite apropriar-se das regras internas ao funcionamento da própria matemática. São estas regras que legitimam ou invalidam descobertas e conclusões em matemática. Para as autoras comunicar, dialogar, discutir, harmonizar vozes e estabelecer o equilíbrio entre os diferentes contributos, orquestrando as discussões, ajuda muitas vezes os estudantes a organizar e estruturar o seu pensamento e isso é também uma outra forma de ensinar a raciocinar matematicamente.

Embora o processo de raciocínio e de prova seja uma componente integral da matemática (Hanna, 2000) não tem sido integrado com sucesso nas experiências da matemática escolar dos alunos (Marioti, 2006; Stylianides & Ball, 2008). Segundo Otten, Gilbertson, Males e Clark (2014) nos Estados Unidos, Canadá, Taiwan e Alemanha a atenção dada ao raciocínio e à prova é variável e diminuta. Referem que este isolamento contraria as recomendações internacionais (NCTM, 2000, 2009) para o raciocínio e prova que deveriam estar presentes em toda a matemática escolar. E grande parte da literatura existente sobre capacidades e conceções dos estudantes em relação ao raciocínio e à prova está de acordo com Otten et al. (2014) constatando-se que, embora existam exercícios que pedem aos alunos para provar ou justificar afirmações matemáticas, a escassez de exercícios que exigem formas de raciocínio dedutivo leva a que estes estudantes, mesmo depois do seu curso de Geometria de nível secundário, possam apresentar dificuldade e continuem com formas empíricas de raciocínio. Segundo Flegas e Charalampos (2013) o fato da prova matemática ser difícil e desafiadora para os estudantes constitui a principal fonte de reflexão e preocupação no que diz respeito a saber se é possível ensinar a prova matemática em todos os níveis de escolaridade. Para as autoras igualmente desafiador é a procura e seleção das abordagens e métodos de ensino considerados como os mais adequados e eficazes para sustentarem esta prática educativa específica. Mas ainda segundo estas autoras embora a investigação sobre o papel educativo do raciocínio e da prova destaque as dificuldades dos alunos do ensino básico e secundário na demonstração de capacidades de raciocínio dedutivo, a maioria dos investigadores concordam que os processos de raciocínio e de prova são de grande valor didático e de aprendizagem em todos os níveis de ensino. Por esta razão os investigadores defendem, e as autoras concordam, que raciocínio e prova devem ser elementos integrantes de qualquer currículo de matemática contemporânea.

Para Brown, Jones, Taylor e Hirst (2004) dar aos estudantes a oportunidade de discutir a matemática com os seus colegas ou professor, em vez de se envolverem apenas em *perguntas e respostas* de interações curtas, ajuda a esclarecer o seu pensamento e a melhorar a sua compreensão. A discussão também os ajuda a organizar os seus pensamentos e a apresentar um argumento ou linha de raciocínio convincentes. Estes autores defendem que a comunicação é particularmente importante para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

Numa entrevista elaborada por Weber (2012) efetuada a nove matemáticos entrevistando-os sobre porquê, como e para que é que exigiam as justificações (demonstrações ou provas) aos seus alunos. O autor chega à conclusão de que há uma grande coerência entre os objetivos dos matemáticos e dos educadores matemáticos quanto ao que pretendem com a apresentação de justificações aos estudantes. Em geral referem a apresentação de justificações (provas) com fins explicativos. Os educadores matemáticos (e.g., Hanna, 1990; Hersh, 1993) argumentam que na sala de aula é mais útil utilizar a justificação (prova) como ferramenta para explicar do que para convencer. A maioria também afirma utilizar a justificação (prova) como forma de ilustrar o raciocínio ou provar técnicas, algo que os educadores matemáticos (e.g., Hanna & Barbreau, 2008; Weber, 2010) têm argumentado ser também importante.

Bansilal e Naidoo (2012) sublinham que, mesmo no ensino secundário, há a ideia de que os estudantes não entendem as transformações geométricas pela dificuldade que têm na manipulação das regras algébricas, mas na verdade mesmo quem as manipula corretamente também não consegue em termos visuais perceber o que está a executar. Daí estes autores afirmarem que a predisposição para a manipulação algébrica na Geometria provoca nos estudantes uma resistência ao uso da visualização na matemática. Também Timmer e Verhoef (2012) afirmam que "apesar da Geometria, através da álgebra, constituir uma técnica maravilhosa para provar de uma forma convincente e rápida, uma variedade de teoremas na Geometria euclidiana raramente produz muitas perceções visuais" (p. 217). Isto é, em vez de desenvolverem uma visão global dos conceitos geométricos através da própria Geometria, os estudantes estão a operar com a mesma mas em domínios isolados. Para os autores a manipulação de fórmulas faz perder a essência da Geometria e dá origem a que os conceitos com que estão a trabalhar por detrás dessas fórmulas não sejam entendidos. O mesmo sublinha Veloso (2012) indicando a pouca importância dada ao estudo da Geometria e o caráter demasiado formal com recurso a procedimentos algébricos como causas da visualização não se constituir um recurso para o estudante.

Segundo Panaoura (2013) as experiências recentes de sucesso ou fracasso em resolver tarefas geométricas afetam o desenvolvimento de autoeficácia da crença, do autoconceito de crença e das crenças sobre o uso de figuras, diagramas e representações em Geometria. As inter-relações das crenças dos estudantes com o seu desempenho matemático na Geometria confirmam que os alunos com menor desempenho têm, ao mesmo tempo, auto-crenças negativas sobre o uso de representações porque não são capazes de as utilizar de forma fluente e flexível como uma ferramenta para superar os obstáculos cognitivos na compreensão de um conceito geométrico. Por isso Van de Walle (2001) argumenta que a compreensão e o desenvolvimento do raciocínio geométrico desenvolvem a capacidade de resolução de problemas e Schäfer (2004) sublinha que o domínio da capacidade de resolução de problemas ajuda a desenvolver o raciocínio geométrico. Para este autor a Geometria é utilizada diariamente por muitas pessoas, por exemplo, cientistas e profissionais, como arquitetos, artistas e outros, por isso a importância do raciocínio geométrico deve ser reconhecida pelos professores (Clements, 2003; Clements & Battista, 1992). Contudo a aquisição destas ideias depende grandemente do professor e do seu conhecimento, o que vai de encontro ao referido por Gomes (2003) quando afirma que o conhecimento do conteúdo do professor é determinante na aprendizagem dos estudantes e por Jones (2000b) ao defender que o sucesso com o ensino da Geometria depende dos conhecimentos e do modo de ensinar do professor.

Pode então argumentar-se que uma das principais razões para se estudar Geometria é a oportunidade de dotar o estudante de uma nova forma de pensamento matemático – raciocínio geométrico – desenvolvendo a sua capacidade de resolução dos problemas que nos cercam.

As capacidades visuais

A década de 80 foi um período propício para um renovado interesse no papel do pensamento visual no ensino e aprendizagem da matemática e a investigação qualitativa era um veículo adequado para investigar - o que de outro modo seria inacessível - os processos de pensamento associados ao uso de imagens mentais e as formas de expressão na aprendizagem matemática. A importância do processamento visual e das manifestações externas deste conhecimento matemático foi cada vez mais reconhecida. Afinal a matemática é um assunto que lida com diagramas, tabelas, arranjos espaciais de significantes como símbolos e outras inscrições. A capacidade de descrever, usar e visualizar os efeitos da composição e decomposição de formas geométricas é um importante campo conceptual e um conjunto de competências para o domínio da Geometria (Clements, Wilson & Sarama, 2004). Razão pela qual estes autores elaboraram um estudo que comprova a teoria da progressão do desenvolvimento, afirmando que os estudantes se movem através de vários níveis distintos de pensamento e de competência no domínio da composição e decomposição de figuras geométricas. Para estes autores essas competências incluem a capacidade do estudante para fazer figuras ou desenhos com formas (passando da tentativa e erro para a utilização de atributos), criar e manter uma forma como uma unidade e combinar essa forma com outra forma para criar uma nova forma que é conceptualizada como uma entidade independente. De acordo com a investigação de Piaget e Inhelder (1971) estes processos operam primeiro nas formas físicas e posteriormente nas construções mentais.

Segundo o PMEB (ME, 2007) os conhecimentos adquiridos intuitivamente pelos estudantes, para além de deverem ser valorizados, devem servir como base para o desenvolvimento da capacidade espacial que por sua vez compreende a visualização e a compreensão das relações espaciais, isto é:

> A visualização engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia e envolve observação, manipulação e transformação de objetos e as suas representações e a interpretação de relações entre os objetos e entre estes e as suas representações. O sentido espacial envolve ainda as noções de orientação e movimento, desempenhando um papel importante na perceção das relações espaciais (ME, 2007, p. 20).

Enquanto professores de matemática temos a obrigação de contribuir para melhorar essa capacidade espacial (Patkin & Dayan, 2013). Hershkowitz (1998) afirma que existem alguns professores de matemática que possuem a suposição ingénua de que os seres humanos nascem com capacidades de pensamento visual que são utilizadas quando necessário e que as escolas não precisam de as desenvolver. Segundo Dreyfus (1990) a visualização desempenha um papel importante no raciocínio do estudante. Mas o raciocínio visual tem um *status* baixo uma vez que se supõe ser uma fase inicial do processo de raciocínio.

Segundo Fujita e Jones (2002) uma das principais características da Geometria é a sua natureza dupla. A Geometria é tanto um domínio teórico como a parte mais concreta da matemática ligada à realidade. Esta dupla natureza tem duas consequências para o ensino e aprendizagem de Geometria. Para estes autores enquanto hipoteticamente esta natureza dual da Geometria deve ajudar os professores a fazer a ligação entre a teoria matemática e a experiência vivida pelos estudantes, na prática para muitos estudantes a natureza dual é experimentada como uma lacuna que consideram muito difícil de colmatar. Assim a investigação continua a centrar-se nas dificuldades que os alunos têm no desenvolvimento de uma compreensão da teoria geométrica e na transição para uma prova formal em Geometria (Fujita & Jones, 2002). Estes autores definem *olho geométrico* como o poder de ver as propriedades geométricas a partir de uma figura. Acrescentam que esta ideia é uma ferramenta poderosa para a construção de uma intuição geométrica eficaz. Consideram o *olho geométrico* essencial para resolver problemas geométricos com sucesso por isso deve ser treinado por tarefas práticas em toda a Geometria.

Para Lindquist e Shulte (1987) a perceção da congruência consiste na "capacidade de reconhecer que um objeto possui propriedades invariantes, tais como, o tamanho e a forma apesar da possível variabilidade quando é observado de um ponto de vista distinto" (p. 128). Segundo estes autores os estudantes que possuam esta competência conseguem reconhecer um cubo visto através de um ângulo oblíquo mesmo que o olho reconheça uma imagem distinta. Os que não possuem esta competência têm dificuldade, por exemplo, em reconhecer ângulos retos noutras posições que não sejam a posição *standard* (um lado na horizontal e o outro na vertical) ou identificam o triângulo retângulo somente quando o ângulo reto possui um dos lados na vertical e o outro na horizontal ou ainda identificam um quadrado somente quando um dos lados é horizontal (Clements & Battista, 1992). Estas preconceções erradas são as imagens conceptuais que os estudantes possuem dos objetos geométricos e que estão relacionadas com a intuição geométrica dos mesmos (Fischbein, 1987, citado em Clements & Battista, 1992). De acordo com Frostig e Home (1964, citados em Lindquist & Shulte, 1987) o desenvolvimento desta competência "depende, em parte, das aprendizagens e experiências provenientes de atividades de natureza geométrica" (p. 128) que lhes são facultadas.

De acordo com Battista (2007) é importante desenvolver no estudante a capacidade de "ver", analisar e refletir sobre os objetos espaciais e suas imagens, isto é, desenvolver a sua capacidade de visualização espacial. Para Vale e Barbosa (2009) "ver" é uma componente importante da generalização e deve ser explorada desde muito cedo nos jovens estudantes. Sobre o papel da representação visual e sua importância Arcavi (2003) define "a visualização como a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, diagramas, nas nossas mentes … com o objetivo de representar e comunicar informação, pensar e desenvolver ideias até então desconhecidas e entendimentos avançados" (p. 217). Para além da visualização a atividade geométrica envolve outros dois processos cognitivos importantes: a construção e o raciocínio (Duval, 1998). Para o autor este raciocínio consolida-se através das relações que se vão estabelecendo quando se procuram objetos geométricos em determinadas condições.

O termo *pensamento visual* aparece normalmente definido a par do termo *visualização* (Del Grande, 1990; Hershkowitz, Parzysz & Dormolen, 1996; Mariotti, 1995; Senechal, 1991). Del Grande (1990) destaca sete aspetos na visualização: coordenação visual-motora, memória visual, perceção figura-fundo, constância percetual, perceção da posição no espaço, perceção de relações espaciais e discriminação visual. Para este autor a capacidade de visualização espacial engloba a forma como os estudantes percecionam o mundo que os rodeia e a capacidade de interpretar, modificar e antecipar as transformações dos objetos. Para Senechal (1991) *visualização* significa *perceção espacial* (reconstrução mental da representação de objetos tridimensionais) e *pensamento visual* é um termo mais lato (é o que se faz quando se reconhece e se manipula automaticamente símbolos de qualquer espécie). Zimmerman e Cunningham (1991) definem a visualização como o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e na compreensão matemática. Já Mariotti (1995) infere a distinção entre *visualização* - que trás à mente imagens de coisas visíveis - e *pensamento visual* - o pensar sobre coisas abstratas que inicialmente podem não ser espaciais mas que podem ser representadas na mente de forma espacial.

Devido ao potencial que têm para melhorar a compreensão do ensino e aprendizagem da matemática, a capacidade visual e os níveis de van Hiele são duas áreas de grande importância para os educadores de matemática. E para Usiskin (1982), Crowley (1987), Del Grande (1987) e Battista (1999) isso é especialmente verdadeiro na disciplina de Geometria. Desde a década de sessenta que vários educadores matemáticos têm vindo a estudar os níveis de van Hiele (e.g., Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Fuys et al., 1988; Gutiérrez & Jaime, 1998; Gutiérrez et al., 1991; Hoffer, 1983; Saads & Davis, 1997) e a capacidade visual (e.g., Battista, 1990, 1999, 2007; Battista & Clements, 1996, 2002; Battista, Wheatley & Talsma, 1989; Bishop, 1989; Del Grande, 1990; Eisenberg & Dreyfus, 1986; English, 1997; Hershkowitz, 1998; Ho & Eastman, 2006; Kaufman, 2007; Kurtulus & Uygan, 2010; Owens, 1999; Pesci, 1995; Presmeg, 2006). As limitações e as dificuldades em torno da visualização e até mesmo a relutância de visualizar também têm sido amplamente discutidas (e.g., Arcavi, 2003; Eisenberg, 1994; Stylianou & Silver, 2004). As técnicas visuais que dependem "nem sempre de rotinas processualmente *seguras*" (Arcavi, 2003, p. 235) são consideradas cognitivamente mais exigente do que as técnicas analíticas. Ho e Eastman (2006) e mais tarde Hsieh & Ho (2013) investigaram as capacidades matemáticas espaciais de rapazes e raparigas e não encontraram diferenças significativas entre os participantes dos sexos masculino e feminino em termos de capacidade de visualização espacial.

De acordo com Hou e Pai (2009) a “aquisição de conhecimento seria mais eficiente em velocidade e precisão se uma abordagem visual (por exemplo, ilustração ou simulação animada) pudesse ser utilizada para exibir o conteúdo de conhecimento” (p. 25). Estes autores afirmam que o conhecimento baseado em texto e no mecanismo de partilha de conhecimento através da educação tradicional, normalmente tem as desvantagens de insuficiência e falta de expressão concreta do conteúdo de conhecimento. Portanto se o conhecimento é apresentado por meio de um mecanismo de visualização, os conteúdos espaciais do conhecimento são ilustrados. Ainda sublinham que devido às experiências dos seres humanos, o mecanismo de representação visualizada é mais direto e eficiente na representação e absorção do conhecimento.

O NCTM (2000) afirma que "um aspeto da visualização espacial envolve a movimentação entre formas de duas-e-três dimensões e suas representações” (p. 43). Assim a capacidade de visualização espacial é uma forma importante para entender a Geometria e a matemática. O estudo de objetos bi e tridimensionais é preponderante para o estudo da matemática em áreas como Geometria, trigonometria, cálculo e álgebra (Turgut & Yilmaz, 2012). Para estes autores à luz da literatura existente a investigação sobre a capacidade espacial dos futuros professores de matemática do 1º ciclo e sobre as diferenças de género e sucesso académico são dois temas muito importantes a tratar. O primeiro deles é o de determinar o seu nível de capacidade espacial porque eles vão em breve começar a ensinar matemática e neste processo de ensino vão também recorrer a atividades espaciais. O segundo é o de investigar as diferenças de género e o sucesso académico. Aqueles autores acreditam que os seus resultados serão importantes para os universitários educadores de matemática. Além disso estudos recentes sugerem que a capacidade espacial não está apenas relacionada com a matemática mas também com a física e a química (Alkan & Erdem, 2011).

Vários investigadores (e.g., Battista, 2007; Yilmaz, 2009) apontam para a importância da capacidade espacial no processo de ensino e aprendizagem da matemática. E provam que a capacidade espacial está positivamente correlacionada com o sucesso a matemática. Battista (2007) afirma ainda que “o raciocínio espacial proporciona não só o *input* para o raciocínio geométrico formal como as ferramentas cognitivas críticas para uma análise geométrica formal" (p. 844).

Por esse facto trabalhos recentes recomendam considerar a capacidade espacial na utilização de algumas atividades de construção e de desenhos isométricos no ensino da matemática. Estas recomendações são tanto para estudantes do ensino primário como do secundário. Para Turgut e Yilmaz (2012) o desenvolvimento da capacidade espacial nos adultos é ainda um problema em aberto. Os resultados obtidos no seu estudo levam estes autores a afirmar que o curso de Geometria deve ser atualizado em termos de capacidade espacial, devendo incluir-se no plano de estudos, por exemplo, atividades no GeoGebra (Nagy-Kondor, 2010). Aqueles autores verificaram que a capacidade de orientação espacial e de visualização espacial estão positivamente correlacionados.

A literatura refere que a utilização de um suporte visual na apresentação de problemas e de tarefas pode conduzir à aplicação de diferentes abordagens para chegar à sua resolução quer de natureza visual quer não visual (e.g., Barbosa, 2010; Swafford & Langrall, 2000). O desenvolvimento da capacidade de visualização espacial através da manipulação e construção de representações mentais de objetos constitui um aspeto essencial do raciocínio geométrico (Battista, 2007). Porém este mesmo domínio é frequentemente minimizado ou até ignorado na educação dos primeiros anos (Sarama & Clements, 2009) sendo mesmo um tópico em que os estudantes revelam ainda muitas dificuldades (Battista, 2007).

A investigação de cariz psicológico tem vindo a propor a existência de múltiplas inteligências assim como tem mostrado que a capacidade de visualização espacial varia consoante o sexo, a idade, algumas variáveis sociodemográficas ou o ano de escolaridade. A relevância dada pelo nosso "ensino aos aspetos numéricos ou algébricos, privilegiando apenas um dos tipos de inteligência, remete alguns alunos, eventualmente possuidores de maiores capacidades no domínio visual-espacial, para situações de insucesso escolar e impede outros, com menores capacidades nesta área, de se desenvolverem harmoniosamente" (Ponte, Matos & Abrantes, 1998, p. 178). Outros investigadores (Halpern, 2005; Sorby, Wysocki & Baartmans, 2002, citados em Patkin & Dayan, 2013) afirmam que a capacidade de visualização espacial é essencial em todas as áreas da vida e influencia grandemente o sucesso dos estudantes em Geometria e muitas outras disciplinas. Esta "inteligência espacial" seria segundo Fujita e Jones (2002) o *olho geométrico*. As pessoas com sentido espacial apreciam formas geométricas na arquitetura, na natureza e na arte e são capazes de usar ideias geométricas para descrever e analisar o mundo (Ponte & Sousa, 2010).

Unal, Jakubowski e Corey (2009) elaboraram um estudo onde investigaram quatro futuros professores de matemática do básico e secundário com o objetivo de caracterizar o pensamento geométrico em relação aos seus níveis de capacidade de visualização e a sua evolução. Estes autores chegaram à conclusão de que os estudantes que possuem uma baixa capacidade de visualização mostram uma mudança mínima. Enquanto os identificados com uma capacidade de visualização média mostram a maior das mudanças nos níveis de van Hiele depois da instrução a que foram submetidos. O estudante com alta capacidade de visualização mostra alguma evolução depois da instrução. Esta investigação concluiu que as atividades de ensino que proporcionam o desenvolvimento da capacidade de visualização devem ser incluídas nos programas de formação inicial para que os futuros professores tenham uma boa base matemática para ensinarem Geometria.

Os resultados de um estudo efetuado por Patkin e Dayan (2013) comprovam que a capacidade de visualização espacial pode ser melhorada com o uso de unidades de intervenção de práticas de ensino que deem enfase a atividades no espaço tridimensional. Estes autores recomendam o fomento da visualização como um dos super-objetivos do currículo da matemática em todos os anos escolares, isto porque é uma competência que é importante para todos nós na vida cotidiana. Ela afeta a nossa capacidade de navegar de um lugar para outro, identificar um objeto que se move na nossa direção, estimar quantidades, entender desenhos e gráficos e compor vários itens.

Hershkowitz e Vinner (1984) relatam um estudo que teve por objetivo comparar o conhecimento elementar dos estudantes com o dos futuros professores do ensino básico. Descobriram que os futuros professores não tinham conhecimento geométrico básico e capacidade de raciocínio analítico. Mais tarde Hershkowitz (1987) investiga a evolução que os conceitos geométricos básicos têm com a idade e com a escolaridade. Foca-se não só nos estudantes do 5º, 6º, 7º e 8º anos como nos seus professores e futuros professores. As tarefas empregues nos questionários foram retiradas do programa de Geometria do 1º ciclo. Na análise dos erros Hershkowitz identificou um padrão de evolução esperado: os erros diminuem com a idade e com a escolaridade. Uma análise mais profunda revelou que alguns destes erros têm o mesmo padrão global de incidência de um nível de qualidade para o outro, bem como para os estudantes, professores em serviço e futuros professores. Por exemplo quando se pedia para identificar triângulos retângulos tanto os professores em serviço como os futuros professores tiveram dificuldade na identificação desses triângulos cujos lados não estão na posição vertical-horizontal. Esta dificuldade diminui com a idade e experiência mas o padrão de erros permanece bastante estável. Um padrão um pouco surpreendente inclui erros que aumentam com a idade e escolaridade. Exemplo disso foi quando os participantes foram convidados a desenhar a altura em relação aos lados de vários triângulos dados incluindo triângulos isósceles, escalenos, obtusângulos e triângulos retângulos. Ao contrário do que seria de esperar o número de indivíduos que fizeram o erro de tirar todas as alturas dentro do triângulo aumentou com a idade e escolaridade. Even e Tirosh (2008) argumentam que investigações recentes sobre a aprendizagem da matemática veem os erros dos estudantes como falhas que interferem com a aprendizagem e como equívocos que necessitam ser substituídos pelo conhecimento correto.

Jacobson e Lehrer (2000) defendem que os professores devem não só estar a par da investigação que atualmente é feita sobre o raciocínio dos estudantes como devem partilhar os resultados da sua utilização para orientar as decisões da própria instrução. Estes autores efetuaram um estudo onde concluíram que "nas duas turmas em que os professores estavam mais bem informados sobre o pensamento dos estudantes sobre o espaço e a Geometria, não só os estudantes aprenderam mais do que os seus homólogos mas essa diferença na aprendizagem foi mantida ao longo do tempo" (p. 86). Segundo estes autores os professores em serviço com mais experiência na implementação da teoria na sua prática podem suscitar mudanças na educação matemática através da instrução planeada em colaboração com colegas e especialistas de ações de desenvolvimento profissional.

Nesta mesma linha outros investigadores (e.g., Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou & Panaoura, 2009; Lannin, et al. 2011; Panaoura & Gagatsis, 2010) destacam a importância de investigar como é que os estudantes constroem a sua compreensão geométrica e como a compreensão desse pensamento geométrico pode ajudar os professores a melhorarem a sua instrução. O raciocínio tem um papel crucial em toda a matemática e na Geometria em particular sendo impossível dissociá-lo da aprendizagem, uma vez que é a partir desta capacidade que os estudantes vão adquirindo conhecimento. Trata-se de um processo evolutivo que segundo Lannin et al. (2011) implica conjeturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e ponderar argumentos. O importante é que o estudante seja capaz de acrescentar conhecimento aos conceitos básicos, aprofundando a sua compreensão para outros conceitos mais elaborados. Porque se há uma falha, se há um ciclo interrompido, o professor tem de identificar o que falhou ou seja tem de saber exatamente o que é que o estudante necessita para progredir. Na teoria de van Hiele esta ideia surge como uma referência para o ensino da Geometria.

A Teoria de van Hiele

A tentativa de desenvolvimento de uma teoria abrangente que descreva como os estudantes aprendem domínios ou conceitos matemáticos específicos é bastante rara no campo da educação matemática (Even & Tirosh, 2008). No entanto para estes autores a teoria de van Hiele é a mais notável e abrangente jamais formulada em matéria de aprendizagem da Geometria.

Sendo tema desta investigação os conceitos geométricos era inevitável falar de Dina e Pierre van Hiele. Na procura de um método didático que levasse de um pensamento visual a um pensamento abstrato este casal holandês desenvolveu, na década de 50 sob a orientação de Freudenthal, estudos de forma a elaborar uma teoria sobre o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Há três décadas que o modelo de van Hiele tem vindo a ser utilizado para caracterizar o pensamento geométrico dos indivíduos. É pois importante compreendermos o processo construtivo, global e gradual da teoria de van Hiele para o ensino e aprendizagem da Geometria. O casal van Hiele investigou o ensino da Geometria com estudantes de 12 e 13 anos enfatizando a manipulação de figuras. Esta teoria pressupõe a existência de cinco níveis sequenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Segundo Matos e Serrazina (1996) os van Hiele descrevem um modelo de aprendizagem que é fundamentado na valorização da aprendizagem da Geometria. Referem ainda que o processo é construtivo já que pressupõe que não existe transmissão de conhecimentos e que será o estudante a construir os seus conceitos. É global uma vez que figuras e propriedades não são abstrações isoladas, interrelacionam-se e admitem a existência de diversos níveis que conduzem a outros significados. É gradual porque considera que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são obtidos gradualmente. Esta teoria tenta explicar porque é que muitos estudantes têm dificuldade na Geometria e o que poderia ser feito para minimizar essas mesmas dificuldades. Segundo Jaime e Gutiérrez (1995):

> De acordo com o modelo de van Hiele, uma característica importante do raciocínio matemático é que o crescimento em idade não implica necessariamente o crescimento no nível de raciocínio de um estudante. A instrução desempenha um papel central na progressão do estudante ao longo dos níveis (p. 592).

Para avaliar o nível de desenvolvimento do pensamento do estudante o professor necessita de um instrumento que lhe permita avaliar se o estudante progrediu e em que medida o fez. Um instrumento que responde a esse objetivo é o proposto por van Hiele o qual estabelece cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Cada um destes níveis descreve a forma como os estudantes compreendem os conceitos geométricos. As diferenças na numeração destes cinco níveis, 0-4 e 1-5, afluem na literatura. Embora os números possam ser diferentes a descrição do que se é capaz de fazer em cada um dos cinco níveis continua a mesma. E neste estudo utilizar-se-á a numeração de 1 a 5 para os níveis de van Hiele.

Os van Hiele argumentam que quando os estudantes aprendem Geometria, progridem de um nível discreto de pensamento geométrico para outro. Sublinham que este processo é descontínuo e os níveis são sequenciais e hierárquicos. São sequenciais porque segundo Van Hiele (1986) para que os estudantes sejam capazes de raciocinar a um nível superior, devem-lhes ser dadas experiências de aprendizagem adequadas e eficazes no nível mais baixo.

A partir do momento em que a teoria de van Hiele foi proposta a investigação tem tentado responder a algumas questões relacionadas com a teoria (Clements & Battista, 1992). Uns encontram evidências de que os níveis de raciocínio existem e são hierárquicos. Outros provam a suposição de van Hiele de que os níveis são discretos. E outros investigadores identificam um nível mais básico de raciocínio manifestado pelos estudantes supondo que existe um nível ainda menor do que aqueles que os van Hiele descrevem (Senk, 1989).

Estudos internacionais realizados desde a década de 60 mostram que "os professores de matemática norte-americanos não são capazes de envolver os seus estudantes no ensino de uma Geometria apropriada" (Unal et al., 2009, p. 998). Para estes autores os professores cujos conhecimento geométrico e/ou capacidade visual são limitadas não são capazes de fazer os ajustes necessários ao currículo para atender às necessidades dos estudantes com diferentes necessidades de aprendizagem. Isto porque têm uma compreensão limitada da relação entre níveis de van Hiele e uma reduzida capacidade de visualização.

Na investigação as áreas de interesse com a avaliação dos estudantes tem sido a forma como os níveis de van Hiele podem prever e medir o sucesso na Geometria e promover uma eficaz aprendizagem da Geometria (Pusey, 2003). Na avaliação dos professores a investigação tem vindo a identificar onde é que eles estão em termos de níveis e também tem sinalizado os seus prováveis equívocos.

O modelo de van Hiele pode ajudar os professores educadores a compreender o que é problemático para os estudantes e Fuys (1985) observa que para os van Hiele:

> Os níveis podem ser usados para explicar por que os estudantes têm dificuldades em Geometria. Eles acreditavam que a Geometria do ensino médio envolve pensar num nível relativamente alto e que muitos estudantes não tiveram experiências suficientes para pensar em níveis de pré-requisitos mais baixos (p. 448).

Muitas vezes os estudantes atribuem a dificuldade em Geometria ao muito tempo que passam na memorização de teoremas e de provas escritas (Senk, 1989). Há certamente mais Geometria para além das provas e teoremas, no entanto a responsabilidade de mudar tais atitudes nos estudantes encontra-se no professor em sala de aula. E seguindo a recomendação de Fuys (1985) um bom começo será o de dar aos estudantes experiências dos níveis mais baixos antes de se lhes pedir para fazerem provas formais.

O modo como os diferentes níveis se aplicam ao desenvolvimento do pensamento geométrico é descrito por Clements e Battista (1992) da seguinte forma: nível 1 - reconhecimento ou visualização - o estudante reconhece visualmente uma figura geométrica pela sua aparência global. Na identificação de figuras os estudantes utilizam frequentemente protótipos visuais, dizendo que uma determinada figura é um retângulo por exemplo porque "parece que é uma porta". O estudante tem condições para aprender o vocabulário geométrico. As propriedades da figura não são explicitamente identificadas ou percebidas. Por exemplo podem distinguir uma figura da outra, sem serem capazes de citar uma única propriedade de qualquer figura, ou podem julgar que duas figuras são congruentes porque têm a mesma aparência. Não há um porquê. Quando o estudante diz "esta figura é um quadrado" para o estudante significa "esta figura tem a forma do que eu aprendi a chamar de quadrado"; nível 2 - análise - o estudante reconhece e pode caracterizar formas pelas suas propriedades. Por exemplo o estudante pode pensar num quadrado como uma figura que tem quatro lados iguais, por isso o termo "quadrado" refere-se a um conjunto de propriedades que ele aprendeu a chamar de “quadrado”. O estudante vê as figuras como coleções de propriedades e não só como imagens visuais. Experimentalmente descobre que algumas combinações de propriedades sinalizam uma classe de figuras e outras não. Neste nível o estudante não vê as relações entre as classes de figuras. Por exemplo um estudante pode afirmar que a figura não é um retângulo porque é um quadrado; nível 3 - ordenação ou dedução informal – o estudante pode classificar figuras hierarquicamente ordenando as suas propriedades e dar argumentos informais para justificar as suas classificações. Por exemplo um quadrado é identificado como um losango pois pode ser pensado como um "losango com algumas propriedades extras". Pode também formar definições abstratas, distinguir entre conjuntos de condições necessárias e suficientes para um conceito e até mesmo fornecer argumentos lógicos no domínio geométrico. Como o estudante descobre propriedades de várias formas ele sente a necessidade de organizar essas propriedades. Uma propriedade pode sinalizar outras propriedades de modo que as definições podem ser vistas não apenas como descrições mas como um modo de organização lógica das propriedades. Torna-se claro por exemplo por que é que um quadrado é um retângulo. No entanto o estudante ainda não compreende que a dedução lógica é o método para estabelecer as verdades geométricas; nível 4 - dedução formal - o estudante começa a desenvolver sequências mais longas de declarações e começa a entender o significado da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas. O estudante pode produzir uma sequência de declarações que justifiquem logicamente uma conclusão como consequência dos "dados". Raciocina num contexto de um sistema matemático completo; nível 5 - rigor - neste nível o estudante compreende os aspetos formais da dedução bem como a criação e comparação de sistemas matemáticos. O estudante pode analisar e comparar conjuntos de axiomas. É neste nível que as geometrias não-euclidianas são compreendidas.

Fuys et al. (1988) desenvolveram algumas características destes níveis. No nível 1 a impressão visual e a aparência exercem uma grande influência, deste modo um quadrado não pode ser também um retângulo. O desenho de figuras é baseado em impressões holísticas e não nas partes que o compõem. No nível 2 as figuras podem ser identificadas pelas suas propriedades e as generalizações são possíveis. Por exemplo todos os quadriláteros têm quatro lados e a soma de todos os ângulos internos de um triângulo é igual a 180^0. No nível 3 podem ocorrer deduções simples embora o significado intrínseco de dedução não seja compreendido. Uma figura pode ser definida através de um número mínimo de propriedades. E o raciocínio pode ser utilizado para demonstrar que um quadrado é também um retângulo. No nível 4 os significados de dedução, axioma, condição necessária e condição suficiente podem ser compreendidos. A prova é aceite como a autoridade final e as inter-relações entre redes de teoremas podem ser estabelecidas. No nível 5 o estudante pode trabalhar de forma abstrata, comparar sistemas, examinar a consistência e independência de axiomas e generalizar um princípio ou teorema para encontrar o contexto mais amplo.

Muitos investigadores defendem que para os estudantes terem uma verdadeira compreensão da Geometria não é viável saltar um nível. Segundo Clements e Battista (1992) os professores podem ser muitas vezes culpados de redução de nível quando os seus estudantes têm de recorrer à memorização em vez de funcionarem no nível apropriado mais elevado. Fuys et al. (1988) descrevem esse episódio com estudantes quando afirmam que "alguns tentaram recordar (em vez de pensar) o que o professor lhes tinha dito ... assim, quando a Geometria lhes foi ensinada, parecia ser principalmente a um nível de recordação ou conhecimento"(p. 155).

Na sua teoria os van Hiele também sugerem cinco fases de instrução que ajudam os estudantes a progredir através dos níveis, a saber: (1) informação – o professor envolve os estudantes em conversas sobre o tema a ser estudado, avalia as suas respostas e dá-lhes alguma consciência sobre o assunto que estão a estudar de modo a preparar o terreno para um estudo mais aprofundado (Hoffer & Hoffer, 1992); (2) orientação guiada - os estudantes exploram ativamente o tema de estudo através da realização de tarefas simples, concebidas para provocar respostas específicas de modo a que se familiarizem com os objetos a partir dos quais as ideias geométricas são abstraídas (Clements & Battista, 1992; Crowley, 1987); (3) explicitação - os estudantes aprendem a expressar as suas opiniões sobre as estruturas observadas durante as discussões em sala de aula (van Hiele, 1986). O professor conduz a discussão sobre os objetos de estudo usando as próprias palavras dos estudantes, até que um consenso seja alcançado para que se tornem explicitamente conscientes dos objetos em estudo. Em seguida o professor introduz o vocabulário relevante (Clements & Battista, 1992); (4) orientação livre - os estudantes são desafiados com tarefas mais complexas que podem ser concluídas de diferentes modos (Crowley, 1987). O professor deve incentivar os estudantes a elaborar as suas estratégias e a introduzir relevantes processos de resolução de problemas conforme necessário (Clements & Battista, 1992); e (5) integração – os estudantes resumem o que aprenderam sobre os objetos de estudo com o objetivo de formar uma visão geral do tópico (van Hiele, 1986). Após a conclusão desta fase os estudantes devem ter atingido um novo nível de compreensão para o tema estudado e estarão prontos para repetir as cinco fases de aprendizagem no nível seguinte (Crowley, 1987). Segundo Clements e Battista (1992) os conceitos geométricos que são implicitamente compreendidos num nível tornam-se explicitamente entendidos no nível seguinte.

Fuys et al. (1988) resumem as características mais importantes do sistema de níveis de van Hiele da seguinte forma: (1) os níveis são sequenciais; (2) cada nível tem sua própria linguagem, símbolos e rede de relações; (3) o que está implícito num nível torna-se explícito no seguinte; (4) a matéria ensinada aos estudantes, acima do seu nível, está sujeita à redução do nível; (5) a progressão de um nível para o seguinte está mais dependente da experiência de ensino do que da idade ou maturidade; e (6) passam-se por várias “fases” no prosseguimento de um nível para o seguinte. Em comparação com outras teorias de aprendizagem a importância da teoria de van Hiele está na sua dependência em relação ao papel do ensino.

Por isso o modo como se determina o nível de raciocínio em que o estudante se encontra desempenha um papel importante na investigação relacionada com o modelo de van Hiele.

Muitos investigadores determinam o nível van Hiele de cada estudante através de critérios de avaliação com base no número de respostas certas para um teste escrito (Gutiérrez & Jaime, 1987; Mayberry, 1983; Usiskin, 1982) ou no nível de pensamento mostrado pelo estudante em cada atividade durante uma entrevista (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988). Em muitos dos casos os estudantes mostram um nível dominante de pensamento ao responder a perguntas abertas, um grande número deles refletem claramente nas suas respostas a presença de outros níveis e há ainda outros cujas respostas mostram dois níveis predominantes consecutivos de raciocínio simultaneamente (Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988), mostrando que esses estudantes se encontram na transição entre dois níveis (Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988). Mais tarde, Gutiérrez et al. (1991) afirmam existirem cinco graus de aquisição de um nível de pensamento, conforme Figura 2, representando-os num segmento graduado de 0 a 100, onde descrevem formas distintas de raciocínio durante a aquisição de um nível e dividem ainda este processo contínuo em cinco periodos caracterizados por modos qualitativos diferentes no nível de raciocínio do estudante. Os autores acrescentam que para cada um dos níveis de van Hiele estes períodos indicam diferenças relevantes no grau de aquisição desse nível.

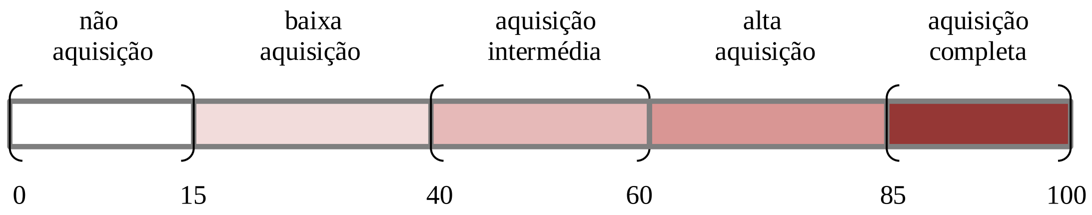


Figura 2. Graus de Aquisição de um nível de van Hiele (adap. de Gutiérrez et al., 1991)

Para Gutiérrez et al. (1991) se o estudante não tem consciência da existência ou mesmo da necessidade de métodos específicos de pensamento num determinado nível então ele tem um grau de não aquisição nesse nível de raciocínio. Quando o estudante começa a ficar familiarizado com o método de pensamento de determinado nível e sua importância é aí que o começa a utilizar. Porém dada a sua pouca experiência o estudante começa a fazer tentativas para trabalhar nesse nível com pouco ou nenhum sucesso na resolução das questões, sendo forçado a voltar a um nível inferior de raciocínio. Se isso acontece o estudante tem um baixo grau de aquisição nesse nível.

À medida que a experiência do estudante cresce ele entra num grau intermédio de aquisição desse novo nível. Utilizam já com mais frequência e algum sucesso métodos próprios desse nível. Gutiérrez et al. (1991) referem que a falta de domínio desses métodos faz com que o estudante procure métodos de nível mais baixo quando enfrentam dificuldades especiais nas suas atividades embora depois tentem voltar para o nível superior. Isto explica as respostas confusas relatadas por outros investigadores (e.g., Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988) que são típicas deste grau de aquisição onde o raciocínio do estudante salta frequentemente entre esses dois níveis.

Através da experiência o estudante vai fortalecendo o seu raciocínio nesse nível podendo cometer ainda alguns erros ou mesmo voltar para um nível mais baixo. O estudante já atinge um alto grau de aquisição do nível mas ainda não se pode considerar a sua aquisição completa. Só atinge a completa aquisição de um nível quando tem o absoluto domínio da forma de pensar desse nível e o utiliza sem dificuldade (Gutiérrez et al., 1991).

Para Gutiérrez et al. (1991) é mais importante observar o tipo de raciocínio dos estudantes do que a sua capacidade para resolver certos problemas corretamente e num dado tempo definido. Porque uma resposta parcialmente correta também pode proporcionar informações, os autores fazem uma avaliação de cada resposta que leva em conta o nível que refletiu o pensamento bem como a precisão matemática e completude. Ou seja: (a) cada resposta é classificada de acordo com o nível de van Hiele que ela reflete seguindo os descritores dos níveis; e (b) a cada resposta é atribuído um dado número de tipos de resposta de acordo com a sua correção matemática e tomando em linha de conta a forma como a solução para a atividade foi alcançada.

Partindo do ponto de vista do nível de van Hiele que uma resposta reflete Gutiérrez et al. (1991) tipificaram as respostas da seguinte forma: tipo 0 – sem resposta ou resposta que não pode ser codificada; tipo 1 – resposta que indica que o aluno não atingiu um determinado nível mas que não dá informação sobre qualquer nível inferior; tipo 2 – resposta errada e insuficientemente trabalhada que dá alguma indicação de um determinado nível de raciocínio; resposta que contém explicações incorretas e reduzidas de raciocínios ou resultados; tipo 3 – resposta correta mas insuficiente trabalhada que dá alguma indicação de um determinado nível de raciocínio; resposta que contém muito poucas explicações de raciocínio incipiente ou resultado muito incompleto; tipo 4 – resposta correta ou incorreta que refletem claramente traços característicos de dois níveis consecutivos de van Hiele e que contém processos de raciocínio claros e justificações suficientes; tipo 5 – resposta incorreta que reflete claramente um nível de raciocínio; resposta que apresenta um processo de raciocínio que é completo mas incorreto ou resposta que apresenta um processo de raciocínio correto que não conduze à solução do problema; tipo 6 – resposta correta que reflete claramente um determinado nível de raciocínio mas que está incompleta ou insuficientemente justificada; e tipo 7 – resposta correta, completa e suficientemente justificada que reflete claramente um determinado nível de raciocínio. Esta tipificação de respostas é passível segundo Gutiérrez et al. (1991) de uma correspondência quer qualitativa quer quantitativa no grau de aquisição de cada um dos níveis de van Hiele (ver Tabela 1).

Tabela 1. Pesos dos diferentes tipos de respostas (Gutiérrez, et al., 1991, p. 241)

Tipos	0	1	2	3	4	5	6	7
Pesos	0	0	20	25	50	75	80	100

Embora os valores específicos atribuídos aos limites (ver Figura 2) possam ser subjetivos neste estudo ir-se-á adotar essas interpretações quantitativas e qualitativas do processo de aquisição de um nível e identificar os vários tipos de resposta em cada nível atribuindo os pesos de acordo com a Tabela 1.

Só se pode imaginar a diferença que faz para os professores educadores o desconhecimento da existência destas teorias. Jaime e Gutiérrez (1995) garantem que:

> O modelo do raciocínio matemático de van Hiele tornou-se um descritor comprovado da evolução do raciocínio dos estudantes em Geometria e é um quadro válido para um projeto de sequências para o ensino da Geometria escolar como é reconhecido pelo Currículo e Normas de Avaliação para a Matemática Escolar do NCTM (1989) e pelos livros da *Addenda Series* dedicados à Geometria (p. 592).

Esta declaração indica a importância de se estudarem tais modelos em cursos de formação de professores de matemática e em ações de formação para professores educadores de matemática.

Segundo Pusey (2003) a investigação sobre o modelo de van Hiele tem tido repercussões essencialmente em quatro áreas: (1) forma apropriada para avaliar o nível de raciocínio geométrico do estudante e o resultado dessas avaliações; (2) determinação do nível de raciocínio dos professores em formação e em serviço; (3) intervenções de instrução utilizadas com os estudantes tendo por base o modelo de van Hiele; e (4) intervenções tanto com professores em formação como em serviço para promover a consciencialização da teoria e melhorar o conhecimento do conteúdo da Geometria.

Senk (1989) diz que "como um preditor, o modelo de van Hiele afirma que duas pessoas que raciocinem em diferentes níveis podem não se entender ... um estudante que tenha atingido apenas o nível n não vai entender o pensamento de nível n+1 ou superior "(p. 310). A consciência desta lacuna de comunicação permite que o professor se prepare para conseguir que o estudante ultrapasse esta potencial barreira na aprendizagem da Geometria. Um professor só controla os problemas dos seus estudantes quando armado de conhecimento apropriado (Pusey, 2003). Também Swafford e Jones (1997) acreditam que "quanto mais o professor sabe sobre um assunto e sobre a forma como os estudantes aprendem, mais eficaz será no fomento da compreensão matemática" (p. 467). Uma das implicações é que no ensino o modelo de van Hiele oferece estratégias que ajudam os estudantes a desenvolver e a melhorar os seus níveis de raciocínio.

De acordo com a interpretação que Clements et al. (2004) fazem da teoria de van Hiele a capacidade do estudante combinar formas desenvolve-se a partir de combinações por tentativa e erro de formas inteiras e de uma capacidade cada vez maior de combinar formas com base nos seus atributos (tais como comprimento dos lados e, mais tarde, propriedades, como tamanho dos ângulos). Pode-se concluir então que a capacidade de descrever, usar e visualizar os efeitos da composição e decomposição de formas geométricas é um aspeto importante do pensamento geométrico.

Van Hiele (1986) afirma que se os estudantes não conseguem chegar ao nível descritivo (nível 2 - análise) da Geometria talvez seja porque não tiveram oportunidade de experimentar problemas geométricos antes. Considera ainda que o ensino da Geometria se deve centrar nos três primeiros níveis. Acredita-se que a instrução é o melhor caminho para uma progressão através dos níveis de van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 1995; Koehler & Grouws, 1992) e o ensino de qualidade é uma das maneiras mais eficazes para melhorar a compreensão dos estudantes em Geometria (Usiskin, 1982). Para lá da identificação dos níveis de raciocínio dos estudantes a investigação também mostra interesse em identificar o nível de raciocínio dos professores. Em particular alguns dos futuros professores são identificados como tendo o raciocínio abaixo do nível da dedução formal (nível 4). Além disso os professores apresentam alguns dos mesmos equívocos que tinham sido observados nos estudantes. No entanto o objetivo de se avaliar os níveis de raciocínio é a identificação das deficiências para que a instrução possa colmatar essas lacunas e sirva as necessidades dos estudantes (e professores) fortalecendo áreas problemáticas da Geometria.

Num outro estudo, utilizando os níveis de van Hiele como referencial teórico, Braconne e Dionne (1987) investigam estudantes do ensino secundário e seus professores na compreensão da prova e da demonstração em Geometria e que tipo de relação pode existir entre o entendimento de uma demonstração e os níveis de van Hiele. Os resultados indicam que a prova e demonstração não são sinónimos tanto para os professores como para os estudantes. As provas pertenciam a diferentes modos de compreensão e a demonstração referia-se sempre ao formal. Além disso não houve nenhuma relação óbvia entre o entendimento de uma demonstração e os níveis de van Hiele.

Na Turquia Koç et al. (2013) realizaram um estudo que teve o objetivo de compreender em que nível de van Hiele os estudantes turcos dos seis aos oito anos identificavam um sólido geométrico e quando é que adquiriam esse nível de raciocínio. Os resultados mostraram que em mais de 25% dos estudantes não foi possível determinar o nível de van Hiele em que se encontravam; 39% estavam no nível 1 e os outros 36% encontravam-se no nível 2. Estes dados revelam que 64% dos estudantes não poderiam alcançar o segundo nível de van Hiele. Assim o estudo confirma que a compreensão e o raciocínio geométrico destes estudantes é baixo (e.g., Duval, 1998; Gutiérrez et al., 1991). Para Battista (2001) este resultado pode ser atribuído ao facto de as estratégias de ensino terem sido baseadas na memorização.

Segundo Schoenfeld (1986) embora a teoria de van Hiele não dê uma visão determinista de uma progressão fixa é uma descrição empírica de estágios relativamente estáveis e dá orientação sobre a estruturação das experiências dos estudantes.

Desde 1950 que esta teoria tem sido o tema de muitos projetos de investigação em todo o mundo. Grande parte dessa investigação (Usiskin, 1982; Senk, 1989; Burger & Shaughnessy, 1986; De Villiers & Njisane, 1987) confirma que a teoria de van Hiele pode ser utilizada na descrição do pensamento geométrico do estudante embora tenham sido levantadas questões sobre certos aspetos da teoria.

Para Malloy (2002) um dos pontos fortes do uso da estrutura van Hiele é "que a progressão dos estudantes de um nível para o outro depende mais do ensino do que da idade do estudante" (p. 143). Os professores do 1º ciclo são aconselhados a empregar as cinco fases de ensino van Hiele no ensino da Geometria para melhorar o desenvolvimento dos conceitos geométricos (Fuys et al., 1988). As cinco fases de aprendizagem aparecem dentro de cada nível como orientadoras da movimentação de um nível para o outro (Clements & Battista, 1992). Os pontos fortes na utilização da teoria van Hiele são que as atividades informais nos níveis 1 e 2 fornecem conhecimento conceptual adequado para as atividades formais do nível seguinte.

A investigação também mostra a existência de fraquezas na teoria. Por exemplo, Dindyal (2007) afirma que uma das limitações da teoria van Hiele é que ela parece carecer de generalidade e portanto cada estratégia das fases de ensino pode ter que ser revista para se atingir o conhecimento de um conteúdo diferente. Senk (1989) realça que van Hiele não reconheceu a existência do nível 0 (pré-reconhecimento). Mas van Hiele (1986) afirma que todos os estudantes iniciam a Geometria no nível 1 (reconhecimento) e têm a capacidade de identificar características geométricas comuns. Outros investigadores como Gutiérrez et al. (1991) sugerem que os estudantes podem desenvolver simultaneamente dois níveis de van Hiele consecutivos no seu raciocínio. Estes autores descobriram que dependendo da complexidade do problema os estudantes utilizam vários níveis de raciocínio. No entanto afirmam que isso não deve ser interpretado como uma rejeição da estrutura hierárquica da teoria van Hiele mas sim que a teoria deve ser adaptada à complexidade dos processos do nosso raciocínio.

De acordo com Crowley (1987) a experiência que o estudante tem no 1º ciclo do ensino básico parece ser fundamental para o sucesso na escolarização mais tarde. Muitos estudos mostram o argumento apoiado por Crowley (1987) de que os estudantes que estão apenas no nível 1 ou 2 de van Hiele, quando se deparam com a Geometria no ensino secundário, têm uma hipótese muito pobre de sucesso. Aqueles estudantes que já começam a Geometria do secundário no nível 3 de van Hiele têm pelo menos 50% de hipótese de ter sucesso (Senk, 1989). A investigação levada a cabo por Senk (1989) defende a ideia de que um curso de Geometria orientado para futuros professores requer pensar pelo menos no nível 3 na hierarquia van Hiele.

Os estudos de Usiskin (1982) e de Senk (1989) mostram que os estudantes que não atingiram o nível 3 de van Hiele na compreensão da Geometria (ordenação) antes de tirar um curso de Geometria do ensino secundário têm um nível de compreensão muito baixo para garantir o sucesso. Portanto a expectativa da conclusão com êxito de um curso de Geometria formal ao nível do ensino secundário só pode ser realizado se o estudante tiver atingido o nível de simples dedução (nível 3) no entendimento da Geometria antes da conclusão do ensino secundário. Se o raciocínio do estudante é apenas de nível 2 em seguida o professor é incapaz de fornecer os andaimes necessários para o avanço no seu nível de compreensão. É razoável supor que para os estudantes estarem preparados para o sucesso na Geometria do ensino secundário devem atingir o nível de compreensão identificado como dedução simples (Usiskin, 1982), abstração (Burger & Shaughnessy, 1986) ou dedução informal (Crowley, 1987) de modo a que possam maturar o nível de compreensão identificado como dedução (Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987).

Burger e Shaughnessy (1986) investigaram o modelo de van Hiele procurando saber se os níveis eram razoáveis para uma classificação do pensamento dos estudantes em Geometria e se existiam indicadores específicos do raciocínio dos estudantes que podiam ser alinhadas com cada um dos níveis. Os resultados dessa investigação apoiaram a noção de que os níveis eram razoáveis na atribuição de níveis de pensamento dos estudantes e também foram capazes de atribuir determinados comportamentos para cada nível.

Num estudo feito por De Villiers (1997) verificou-se que em geral o currículo foi apresentado a um nível mais elevado do que a compreensão conceptual dos estudantes. Os dados confirmaram que no final do 5º ano apenas 10-15% dos estudantes atingiram o nível 2. A principal razão deste facto foi a pouca atenção dada à Geometria durante o 1º ciclo. Para este autor nenhuma quantidade de esforço e bons métodos de ensino na escola secundária será bem-sucedida se não existir uma grande revisão do currículo de Geometria no ensino básico. Para De Villiers este currículo deve ter em atenção as linhas do modelo de van Hiele.

Muitos estudos examinam os aspetos cognitivos da aprendizagem de Geometria. Por exemplo Chinnapan (1998) examinou a natureza do conhecimento matemático prévio que facilita a construção da apresentação de problemas úteis em Geometria. Dindyal (2007) centrou-se na necessidade de um quadro abrangente para o pensamento dos estudantes na Geometria escolar. Ele estava interessado no modo como os estudantes pensavam em Geometria dada a sua importância no currículo da matemática escolar. O seu estudo levantava questões sobre o pensamento geométrico e a necessidade de conceptualizar o pensamento geométrico dentro de um quadro mais amplo. Embora o estudo de Dindyal (2007) não se tenha centrado nos níveis de pensamento geométrico ele sugere que a progressão do estudante de um nível para o outro depende da qualidade da experiência a que o estudante é exposto.

Fujita e Jones (2006) fizeram um estudo sobre que conhecimento os professores estagiários do 1º ciclo tinham sobre figuras geométricas básicas com especial incidência nos paralelogramos e como utilizavam esse conhecimento para resolver problemas geométricos. De estudos anteriores (e.g., Jones, Mooney & Harries, 2002) há alguma evidência do fraco conhecimento em Geometria dos professores estagiários do 1º ciclo. A classificação hierárquica dos quadriláteros é considerada como de nível 3 de van Hiele e por isso é uma tarefa difícil para muitos estudantes. Os resultados deste estudo revelam que os professores estagiários ainda estão no nível 2 (ou inferior) e por conseguinte não fazem uso do raciocínio geométrico. Por outro lado segundo os autores, para serem autorizados a iniciar o seu curso de formação, os formandos deveriam de ter uma formação matemática a um nível que indicasse que eram capazes de classificar quadriláteros de acordo com as suas definições ou seja no nível 3 do modelo de van Hiele. Os resultados do estudo indicam que apenas uma minoria destes professores têm um conhecimento profundo dos paralelogramos e de como utilizar as propriedades dos paralelogramos para resolver problemas relevantes.

Para Guven e Baki (2010) as investigações envolvendo os níveis de van Hiele têm-se centrado nos níveis mais baixos. O nível 5 não tem sido abordado em estudos de investigação por dois motivos. O primeiro deve-se ao fato de que muito poucos dos participantes dos estudos realizados durante os últimos vinte anos terem demonstrado quaisquer características de pensamento no nível 5. Outra das razões para a investigação sobre o nível 5 ter sido negligenciada reside na dificuldade em avaliar este nível através do uso de itens de escolha múltipla. Usiskin (1982) já afirmava que o nível 5 ou não existia ou não era testável. Esta conclusão juntamente com a falta de participantes avançados nos estudos que estavam a ser realizados parece ter fechado a porta em matéria de investigação a este nível.

Os van Hiele rotularam os níveis de 0 a 4. Contudo e como já referido neste estudo vai adotar-se para os níveis a numeração de 1 a 5. Os níveis partindo do mais básico são: nível 1 – reconhecimento/visualização, nível 2 – análise, nível 3 – dedução informal, nível 4 - dedução formal e nível 5 – rigor (Clements & Battista, 1992).

Estudos Empíricos em Portugal

Apresentam-se de seguida alguns estudos empíricos, académicos, realizados em Portugal a partir de 2000 no campo da Geometria ligada ao 1º e 2º ciclo tanto no âmbito do seu ensino e aprendizagem como no âmbito da formação de professores. Porém dada a relevância dos dados obtidos com alguns dos estudos anteriores a 2000 vamos de seguida apresentar três desses estudos.

Matos (1984) elabora um estudo com futuros professores do 1º ciclo e educadores de infância. O seu objetivo é perceber como estes estudantes se distribuem pelos níveis de van Hiele bem como estudar a relação entre estes níveis, os anos frequentados e o conhecimento matemático prévio. Quanto aos futuros professores o estudo conclui que mais de metade se encontra no nível 2 ou abaixo dele. A maioria dos estudantes tem das figuras geométricas uma conceção visual sendo capaz de distinguir algumas propriedades. No entanto muito poucos são capazes de relacionar logicamente propriedades geométricas. O estudo conclui também que o conhecimento geométrico progride ao longo do curso mas este progresso só é significativo para os estudantes que não frequentaram matemática no ensino secundário. Quanto aos educadores de infância a esmagadora maioria encontra-se no nível 1 possuindo uma conceção essencialmente visual das figuras geométricas. Como resultado deste estudo Matos recomenda que no mínimo os futuros professores deveriam estar no nível 2 sendo o nível 3 visto como necessário para uma boa gestão curricular. Por outras palavras o nível 2 seria suficiente para ensinar de forma *mecanizada* os conteúdos geométricos do currículo de então (1984) enquanto o nível 3 seria necessário para um ensino responsável desses mesmos conteúdos.

Belchior (1994) fez um trabalho que teve como objetivo era analisar os níveis de conhecimento geométrico de futuros professores de matemática, identificar e descrever as suas atitudes face à Geometria e ao seu ensino. Participaram dezoito estudantes do 4º ano da licenciatura em Ensino da Matemática de uma universidade pública. Nos níveis de van Hiele o pensamento geométrico foi de dez estudantes no nível 2, seis no nível 3 e dois estudantes no nível 4. Quanto às atitudes parecem indicar uma certa predisposição para encarar a Geometria de forma dinâmica desenvolvendo atividades que possibilitem aos estudantes verbalizar os seus raciocínios, discutir e confrontar processos e resultados. Porém, sentem alguma insegurança quando confrontados com a resolução de problemas geométricos.

Gordo (1994) estuda a relação entre o desenvolvimento da visualização espacial e a construção de conceitos matemáticos em estudantes do 1º ciclo. A aplicação de um conjunto de atividades leva a concluir que através de uma intervenção adequada é possível promover uma evolução positiva de várias capacidades espaciais. Os estudantes aprendem a ver melhor as figuras e passam a dar mais atenção ao pormenor. Nem sempre os estudantes que usualmente lideram a aula são os que têm mais facilidade, por vezes são os mais fracos os primeiros a descobrir uma solução. Neste trabalho detetou-se que os estudantes da turma envolvida na experiência apresentam resultados significativamente mais elevados nos testes de conhecimentos de matemática do que estudantes não envolvidos, o que revela a existência de efeitos de transferência das aprendizagens nas capacidades visuais para outras capacidades matemáticas. Portanto o trabalho de Gordo revela a importância de se valorizar desde muito cedo o desenvolvimento de competências no domínio da visualização espacial como forma de melhorar o desempenho matemático.

Os trabalhos que se debruçam sobre as aprendizagens da Geometria parecem indicar uma conceção puramente visual das figuras geométricas, contendo uma explicitação pontual de algumas das suas propriedades. Segundo Ponte et al. (1998) este panorama repete-se tanto em estudos mais antigos como atuais, e tanto em estudantes do 1º ciclo como em futuros professores. A aprendizagem da Geometria no 2º ciclo e secundário quase não tem sido objeto de investigação.

Dos vários estudos realizados a partir de 2000 vamo-nos debruçar especialmente em dois trabalhos de doutoramento que incidiram sobre a formação de professores e o seu conhecimento matemático.

Um deles é o de Gomes (2003) que realiza um estudo sobre o conhecimento matemático dos futuros professores do 1º ciclo. O objetivo principal deste estudo que adotou uma metodologia qualitativa foi a identificação de obstáculos na construção de conceitos geométricos elementares e tentar perceber as possíveis causas dessas dificuldades. Estiveram envolvidos neste estudo cento e quarenta e um estudantes da licenciatura em Ensino Básico do 1º Ciclo e setenta e cinco professores do curso de Complementos de Formação. O estudo permitiu identificar os seguintes obstáculos: de natureza cognitiva ficando patente o deficiente conhecimento matemático dos futuros professores, o que atesta a não elementaridade das relações subjacentes a qualquer conceito matemático incluindo os conceitos estudados ou seja conceitos geométricos ditos elementares; de natureza didática que mostram a necessidade de se prestar uma atenção redobrada à formação científica destes futuros professores; de natureza epistemológica salientando-se a falta de maturidade dos conhecimentos demonstrada pelos participantes; e de natureza metacognitiva ligados ao desconhecimento efetivo das verdadeiras dificuldades presentes nos chamados conceitos elementares. Os resultados deste trabalho apontam para a necessidade de se repensar na formação matemática dos futuros professores do 1º ciclo e aponta para a necessidade e importância de os envolver em experiências específicas que explorem as interações entre as definições e os objetos (conceitos) definidos e vice-versa; das análises matemáticas das definições de diferentes conceitos que incluam a decomposição nos seus elementos básicos; da utilização rigorosa da linguagem matemática durante a formação destes professores; de se proceder à revisão, consolidação e aprofundamento dos conhecimentos elementares de um ponto de vista avançado. Para uma formação sólida dos conhecimentos matemáticos na formação de (futuros) professores Gomes (2003) acredita que o núcleo dos programas de formação deva ser o conteúdo matemático.

O outro estudo é o efetuado por Fonseca (2004) que pretendeu investigar como é que, na formação inicial de professores, em disciplinas da componente específica, se pode contribuir para que os futuros professores de matemática da escolaridade básica desenvolvam competências relativamente à demonstração que lhes permitam responder às necessidades de educação e de formação dos estudantes. Numa turma do curso de formação de Professores do Ensino Básico da variante de Matemática e Ciências da Natureza, com vinte e seis futuros professores, utilizando uma metodologia de investigação qualitativa realizou um estudo de caso da turma. A análise dos dados permite dizer que na sua maioria a turma apresentou argumentos gerais, rigorosos e convincentes mas não completos e não resistentes. Em relação aos níveis de sofisticação dos argumentos construídos a turma globalmente situa-se nos níveis de quase demonstração e de início de uma demonstração. As dificuldades foram potenciadas pela falta de hábito na resolução deste tipo de tarefas, pela sua dificuldade e pelo facto dos participantes revelarem possuir conhecimentos matemáticos pouco consolidados. A análise dos dados permite dizer que a formação inicial de professores pode ter um papel importante para desenvolver competências dos futuros professores no domínio da demonstração. Este estudo permitiu obter várias conclusões mas considera-se a existência de dois aspetos essenciais que se interligam entre si: o ambiente de formação e as suas relações com as competências dos participantes e aspetos da formação que os jovens professores consideram ter integrado na sua prática profissional. Com base na experiência realizada e nos resultados obtidos Fonseca (2004) afirma que o ambiente de formação de disciplinas da especialidade da formação inicial de professores de matemática pode contribuir para que os jovens professores integrem na sua prática profissional: a resolução de problemas; as justificações e a explicação do pensamento dos estudantes; e o questionamento dos estudantes, mesmo quando as respostas são corretas, de modo a desenvolver a capacidade de refletir e avaliar os estudantes. Também refere que na formação de professores importa continuar a focar a atenção dos formadores das disciplinas da especialidade nas contribuições que podem ser dadas pela didática da matemática e, no sentido de se potenciar esta contribuição, considera necessário estender a formação para o âmbito da formação contínua.

Continuando a procurar mais investigação ligada à Geometria encontraram-se alguns estudos académicos na área da matemática mas muito poucos referentes à formação de professores e ao ensino e aprendizagem da Geometria.

Barbosa (2002) faz um estudo que tem como principal objetivo interpretar e descrever o processo de apropriação dos significados geométricos por uma turma do 9º ano do ensino básico contextualizado por um ambiente geométrico dinâmico e por uma abordagem sociolinguística à teoria de van Hiele usando o computador. A opção metodológica utilizada foi uma abordagem de tipo qualitativo. Esta autora conclui que a utilização do computador contribui para uma aprendizagem da Geometria mais fácil e intuitiva.

Ceia (2002) realiza um estudo com estudantes do 3º ano do ensino básico onde durante o desempenho de uma tarefa se pretendia avaliar o seu conhecimento acerca das figuras planas, em particular, o quadrado e o retângulo. Neste estudo aborda uma possível explicitação de eventuais sub-categorias no interior do nível de análise do modelo de van Hiele, baseada na taxonomia SOLO, e refere a necessidade de o foco da análise se deslocar das capacidades dos estudantes para as suas produções ou respostas. Este autor concluiu o seu estudo afirmando que parece existir alguma evidência que aponta para que a taxonomia SOLO possa contribuir para uma definição mais precisa dos níveis de van Hiele.

Carneiro (2005) realiza um estudo com uma turma do 5º ano do ensino básico, constituída por dezanove estudantes, com propósito de compreender qual o contributo de um programa para computador (SuperLOGO) na aprendizagem da Geometria do 5º ano de escolaridade, nomeadamente na construção de polígonos e sólidos geométricos, também sendo objeto de estudo as atitudes e reações manifestadas pelos estudantes durante a utilização do referido programa, na aula de matemática. A investigação em causa assume um carácter qualitativo caracterizando-se de forma descritiva e interpretativa, realizando-se um estudo de caso de três estudantes que foram escolhidos criteriosamente. O estudo concluiu que o ensino e aprendizagem da matemática pode beneficiar com a utilização da linguagem LOGO no desempenho da mesma e na criação de um ambiente de trabalho propício à sua aprendizagem.

Costa (2005) faz um estudo onde elabora, explora e refina um modelo teórico para o pensamento visual-espacial para a partir dele compreender o seu desenvolvimento, identificando modos de pensamento visual-espacial e processos associados. Utilizando uma metodologia qualitativa de *design* estudo de caso investiga quarenta estudantes de duas turmas do 4º ano de escolaridade. As conclusões do estudo integram a construção dum modelo teórico para a compreensão do pensamento visual-espacial onde foram identificados quatro modos de pensamento: modo resultante da perceção, modo resultante da manipulação mental de imagens, modo resultante da construção mental de relações entre imagens e modo resultante da exteriorização do pensamento. Estabelece-se uma relação entre os níveis de van Hiele manifestados pelos estudantes e aqueles modos de pensamento visual-espacial. Costa (2005) afirma ainda que é importante o professor identificar o modo de pensamento visual espacial que o estudante usa e julgar se é o adequado ou não à tarefa proposta; se o estudante está a imitar ações ou a usar o seu próprio pensamento; e que dificuldades sente o estudante na execução da tarefa. Esta autora realça a importância da existência de experiências precoces em pensamento visual-espacial bem como a influência da dimensão sociocultural nos modos de pensamento.

Ribeiro (2005) elabora um estudo com o objetivo de averiguar em que medida a frequência, por futuros professores do 1º ciclo do ensino básico, de uma disciplina com uma vertente predominante de formação vocacionada para a resolução de problemas/situações problemáticas significativas em Geometria, utilizando a ferramenta informática Cabri-Géomètre, contribuía para uma evolução das representações essencialmente acerca da matemática e do seu processo de ensino e de aprendizagem, em especial da Geometria e do uso do computador para uma abordagem mais adequada, significativa e criativa da Geometria por parte desses futuros professores e, em última instância, para a construção de uma nova cultura matemática. A investigação desenvolvida sugere que: a emergência de representações mais favoráveis acerca da Geometria pode ter reflexo nas representações acerca da matemática; as relações entre representações e práticas podem ser influenciadas pela envolvente cultural; e a formação e utilização sistemática de um ambiente de geometria dinâmica pode contribuir, por um lado para que a matemática seja considerada uma área menos hostil e mais humanizada e, por outro lado para o reconhecimento de formas mais úteis de utilização do computador em contexto de sala de aula.

Bravo (2006) realiza um estudo com uma turma do 4º ano do ensino básico que tem como ponto de partida o problema de saber qual é o impacto que a utilização de um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) tem no ensino e aprendizagem da Geometria ao nível do ano 4º ano de escolaridade. A análise qualitativa dos dados permite constatar que os estudantes consideram o cálculo como a atividade mais representativa da matemática e a Geometria como uma atividade secundária. No entanto manifestam uma atitude positiva e de empenho na resolução das tarefas propostas tendo considerado globalmente as tarefas como divertidas. Da análise dos dados ressalta a praticabilidade e a utilidade do recurso a um AGD como ferramenta para resolver problemas e como veículo potenciador das aprendizagens, mesmo com estudantes de pouca idade.

Teixeira (2008) elabora um estudo que tem por objetivo compreender como se desenvolve o pensamento geométrico dos estudantes no 1º ano do ensino básico de forma a promover tarefas facilitadoras da sua evolução. Utilizando uma metodologia qualitativa constata que os conhecimentos informais destes estudantes influenciam o desenvolvimento do seu pensamento geométrico e que nem todos se encontram no mesmo nível de desenvolvimento. E conclui que com a aprendizagem das figuras geométricas os estudantes podem relacionar os seus conhecimentos informais com os novos conhecimentos, estabelecendo uma relação entre eles, desenvolvendo o seu pensamento geométrico. No final desta investigação os estudantes tinham um desempenho correspondente ao esperado para nível 1 - visualização - tendo aparentemente havido transição de nível num dos casos e nos outros um desenvolvimento dos seus conhecimentos dentro deste nível.

Neto (2009) foca-se no estudo de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria euclidiana, numa turma de 10º ano do ensino secundário, no sentido de promover níveis estruturados do pensamento matemático. O principal objetivo desta investigação é analisar ambientes de aprendizagem em que os estudantes sejam solicitados a resolver problemas de prova em contextos diversificados e, de uma forma mais geral, promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático. A necessidade de compreender a complexidade envolvida no processo de argumentação matemática conduziu a uma metodologia qualitativa. Os resultados do estudo sugerem a existência de conceções erradas sobre conceitos matemáticos que podem provocar *conflitos cognitivos* nos estudantes. O estudo permite inferir que uma abordagem geométrica diversificada, através de vários modelos de geometria plana, promoveu nas alunas-caso um entendimento diferente dos processos de materialização/idealização, representação/significação, particularização/generalização, análise/síntese e personalização/institucionalização.

Almeida (2010) elabora um estudo onde averigua o conhecimento e as representações de professores do 1º ciclo do ensino básico sobre conteúdos de Geometria, as suas causas e a sua influência na abordagem deste tema na sala de aula. Trata-se de uma investigação qualitativa interpretativa, concretizada numa primeira fase por componentes quantitativas e numa segunda fase por dois estudos de caso. Os professores-caso investigados indicam conhecer as orientações curriculares para o ensino de Geometria, a importância dos materiais didáticos nos processos de aprendizagem e da atividade desenvolvida pelo estudante. Porém a sua formação tende a influenciar o conhecimento que têm sobre conteúdos de Geometria e a forma como os abordam na sala de aula. A experiência adquirida no seu percurso profissional colmatou algumas lacunas principalmente em relação às representações que usam para tornar compreensíveis os conteúdos que abordam aos seus estudantes.

Tempera (2010) faz um estudo cujo objetivo é o de caracterizar o conhecimento em Geometria dos estudantes no início do curso da licenciatura em Educação Básica, após um ano do curso e no último ano do curso; compreender que conhecimentos em Geometria os estudantes possuem à entrada do ensino superior; e compreender o que as unidades curriculares da licenciatura acrescentam ao conhecimento em Geometria dos estudantes. O estudo consiste na criação, implementação e análise de resultados de um teste centrado nos conceitos essenciais para o ensino da Geometria na educação básica. É adotada uma abordagem metodológica mista que permitiu recolher um número elevado de dados e interpretar os resultados obtidos, enquadrando-os na realidade e contexto em que se inserem. Os resultados do estudo revelam que os estudantes possuem conhecimentos errados em diversas áreas da Geometria e é possível constatar que o seu conhecimento é limitado em algumas áreas da Geometria elementar, podendo corresponder a conceções adquiridas na sua escolaridade. Através dos resultados obtidos nesta investigação observa-se que o tipo de conhecimentos em Geometria destes estudantes não é linear, isto é, há diferenças nos níveis e tipos de conhecimento em diversas áreas da Geometria e a formação inicial parece não estar a conseguir dar resposta às suas dificuldades. Em particular a frequência de uma unidade curricular de Geometria no curso parece não corresponder aos resultados esperados.

Pinto (2011) realiza um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes do 6º ano do ensino básico tendo por base um ambiente de ensino que respeite as fases de aprendizagem de van Hiele. Utiliza uma metodologia qualitativa de *design* estudo de caso. Através da análise do desempenho dos estudantes em diferentes tarefas e da forma como estes foram evoluindo conclui que o ambiente de ensino permitiu que os estudantes evoluíssem do nível 1 para o nível 2 de van Hiele.

Silva (2011) faz um estudo onde tem por objetivo investigar sobre a utilização da linguagem de programação LOGO enquanto meio para aprender Geometria no 2º ano do 1º ciclo do ensino básico. Nesta investigação opta por uma metodologia de natureza qualitativa. Em termos de resultados salienta-se a aquisição e o aprofundamento de algumas capacidades geométricas dos estudantes, o desenvolvimento da sua autonomia e a promoção de atitudes/reações mais favoráveis relativamente à aprendizagem da Geometria, para o que terá contribuído na opinião dos estudantes a metodologia de trabalho em pares com a linguagem de programação LOGO.

Azevedo (2013) elabora um estudo cujo objetivo da investigação é compreender como é que se desenvolve a atividade matemática dos alunos do 2º ano no decorrer de atividades de investigação na área da Geometria. O estudo enquadra-se no paradigma interpretativo seguindo uma abordagem qualitativa pelo que não se pretende generalizar os resultados mas antes descrever e interpretar todo o processo tendo em conta o contexto pessoal e social onde se insere. As conclusões desta investigação basearam-se na análise das estratégias dos alunos e no processo decorrente da atividade matemática tendo em conta a teria de van Hiele e taxonomia SOLO de Biggs e Collins. Os alunos investigaram triângulos e quadriláteros e foram capazes não só de discriminar as características destas figuras como também de reconhecê-las visualmente e agrupá-las de acordo com uma classificação geométrica criada por si. No caso dos triângulos a classificação centrou-se na igualdade e diferenças entre o comprimento dos lados, em relação aos quadriláteros os alunos optaram por agrupá-los tendo em conta os ângulos internos a partir da amplitude do ângulo reto. A autora defende que as aulas investigativas implicam que o professor esteja mais atento e disponível para perceber as descobertas dos alunos e neste sentido dar continuidade ao caminho que tomaram caso este se enquadre no trabalho desenvolvido.

Ideias retiradas dos trabalhos empíricos em Geometria

Dos trabalhos de natureza académicos que foram revistos só encontramos três que focam a Geometria na formação inicial de professores e que tiveram as seguintes conclusões. Gomes (2003) aponta não só para a necessidade de se repensar a formação matemática dos futuros professores do 1º ciclo como também para a necessidade e para a importância de envolver os futuros professores em experiências específicas que explorem as interações entre as definições e os objetos (conceitos) definidos e vice-versa; a utilização rigorosa da linguagem matemática durante a formação destes professores e proceder à revisão, consolidação e aprofundamento dos conhecimentos elementares de um ponto de vista avançado. Para uma formação sólida dos conhecimentos matemáticos na formação de professores Gomes (2003) defende que o núcleo dos programas de formação deve ser o conteúdo matemático. Já Fonseca (2004) com base na experiência realizada e nos resultados obtidos afirma que o ambiente de formação de disciplinas da especialidade da formação inicial de professores de matemática pode contribuir para que os jovens professores integrem na sua prática profissional: a resolução de problemas; as justificações e a explicação do pensamento dos estudantes; e o questionamento dos estudantes, mesmo quando as respostas são corretas, de modo a desenvolver a capacidade de refletir e avaliar os estudantes. Na formação de professores Fonseca (2004) refere que importa continuar a focar a atenção dos formadores das disciplinas da especialidade nas contribuições que podem ser dadas pela didática da matemática e, no sentido de se potenciar esta contribuição, considera necessário estender a formação para o âmbito da formação contínua. Para Tempera (2010) os resultados do estudo revelam que os futuros professores possuem conhecimentos errados em diversas áreas da Geometria e é possível constatar que o seu conhecimento é limitado em algumas áreas da geometria elementar, podendo corresponder a conceções adquiridas na sua anterior escolaridade. Este autor afirma ainda que a frequência de uma unidade curricular de Geometria no curso da LEB parece não corresponder aos resultados esperados.

Os estudos efetuados realçam que uma abordagem mais favorável da Geometria pode ter reflexo nas representações acerca da matemática; a envolvente cultural pode influenciar as relações entre representações e práticas; e a utilização de ambientes de geometria dinâmica podem contribuir, não só para que a matemática seja considerada uma área menos hostil e mais humanizada mas também para o reconhecimento de formas mais úteis de utilização do computador em contexto de sala de aula. Outros trabalhos sugerem a importância de o professor ser capaz de identificar o nível do pensamento visual que o estudante utiliza para poder avaliar se é ou não adequado à tarefa proposta; se o estudante está a imitar ações ou a usar o seu próprio pensamento; e que dificuldades sente o estudante na execução da tarefa. E também se refere que as aulas investigativas exigem um professor mais atento e disponível para perceber as descobertas dos alunos e capaz de dar continuidade ao caminho que tomaram.

Embora os professores indiquem conhecer as orientações curriculares para o ensino de Geometria e a importância dos materiais didáticos nos processos de aprendizagem e da atividade desenvolvida pelo estudante, os resultados dos estudos sugerem a existência de conceções erradas sobre conceitos matemáticos que podem provocar conflitos cognitivos nos estudantes e atestam que a formação inicial de professores tende a influenciar o conhecimento que têm sobre conteúdos de Geometria e sobre a forma como os abordam na sala de aula. Outros resultados revelam que os estudantes (futuros professores) possuem conhecimentos errados em diversas áreas da Geometria e têm um conhecimento limitado em algumas áreas da Geometria elementar. A investigação realizada prova também que o tipo de conhecimentos em Geometria destes estudantes não é linear, isto é, há diferenças nos níveis e tipos de conhecimento em diversas áreas da Geometria e a formação inicial parece não estar a conseguir dar resposta às suas dificuldades.

Síntese

Como ferramenta que se utiliza para interagir com o espaço que nos rodeia a Geometria é a parte da matemática mais concreta e intuitiva. Viu-se a pouca importância que tem sido dada ao estudo da Geometria. Consequências disso a maioria dos professores que se encontram no terreno tiveram no seu percurso académico pouca ou quase nenhuma Geometria. E a que tinham limitava-se à memorização de fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Para além disso a Geometria encontra-se no fim dos livros não existindo muitas vezes sequer tempo para a sua abordagem.

As crenças dos alunos influenciam o seu desempenho matemático e na Geometria há estudos que provam que os alunos com menor desempenho são os que têm auto-crenças negativas sobre a utilização de representações, uma vez que não são capazes de as usar de forma fluente e flexível para ultrapassar os obstáculos cognitivos na compreensão de um conceito geométrico. Para além disso a crise na Geometria deve-se ao facto de grande parte da aprendizagem dos conceitos geométricos ter sido feita através de memorização por um lado, e, por outro a falta de estímulo para experimentar e manipular, desenhar e construir figuras geométricas e criar e utilizar argumentos matemáticos indutivos e dedutivos sobre ideias geométricas e suas conexões. É verdade que o estudante não aprende Geometria passivamente sentado a ouvir o professor falar, aprende quando interage com atividades geométricas. Quando o estudante não é estimulado para o desenvolvimento da sua capacidade de visualização espacial, provoca-se o fecho de um canal – o fecho do desenvolvimento de uma outra forma de raciocínio. De facto existe um movimento de regresso ao ensino da Geometria no panorama mundial da matemática porque a comunidade científica reconhece que a perceção do espaço é uma ferramenta poderosa e um meio privilegiado para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

O raciocínio é crucial em toda a matemática e na Geometria em particular, sendo impossível dissociá-lo da aprendizagem uma vez que é a partir desta capacidade que os estudantes vão adquirindo conhecimento. Investigações recentes destacam a importância do estudo de como é que os estudantes constroem a sua compreensão geométrica e de como a compreensão desse pensamento geométrico pode ajudar os professores a melhorarem a sua instrução. Para além disso a importância que tem sido dada pelo nosso ensino aos aspetos numéricos ou algébricos, privilegiando apenas um dos tipos de inteligência, remete alguns alunos eventualmente possuidores de maiores capacidades no domínio visual-espacial para situações de insucesso escolar. Segundo Duval (1998) a atividade geométrica envolve dois processos cognitivos importantes: a construção e o raciocínio, e este consolida-se através das relações que se vão estabelecendo quando se procuram objetos geométricos em determinadas condições. Já Fujita e Jones (2002) definem olho geométrico como o poder de ver as propriedades geométricas a partir de uma figura, acreditando que esta ideia é uma ferramenta poderosa para a construção de uma intuição geométrica. Segundo o PMEB (ME, 2007) o grande objetivo do ensino da matemática é o de desenvolver a capacidade de raciocínio dos estudantes. Para Russel (1999) o raciocínio é a ferramenta para se compreender a abstração. E é através do raciocínio que de acordo com Ferreira e Vale (2013) os estudantes dão significado quer às ideias matemáticas quer aos procedimentos que executam. É usual identificar-se três tipos fundamentais de raciocínio: abdutivo, indutivo e dedutivo. A abdução é o processo de introdução de novas ideias, através de explicações ou conjeturas das quais algumas podem ser testadas no processo de indução; a indução consiste no teste da conjetura em mais dados. A generalização surge da aceitação da forma geral obtida por um processo cíclico de abdução e indução; e a dedução envolve explicação, argumentação e prova. Os processos de raciocínio matemático incluem a formulação de questões, a formulação e o teste de conjeturas e a realização de justificações (Mata-Pereira & Ponte, 2013). Como processo do pensamento segundo Pinheiro e Carreira (2013) o raciocínio matemático é o suporte necessário para o estudante conseguir explicar, argumentar e justificar para si e para os outros conjeturas, ideias matemáticas e ideias que ele próprio apresenta.

É usual caracterizar a matemática pela grande importância atribuída à argumentação e à prova, pois o papel de argumentar, justificar ou provar é parte integrante da atividade do educador matemático. Na resolução de diferentes tipos de atividade matemática os raciocínios de tipo argumentativo estão presentes embora por vezes possam permanecer ocultos. Daí que para Boavida et al. (2008) a explicitação destes raciocínios constitua uma mais-valia, não só porque o aluno toma consciência da sua existência e necessidade mas porque isso lhe permite apropriar-se das regras internas ao funcionamento da própria matemática. Estas regras legitimam ou invalidam conclusões e descobertas em matemática e isso é também uma outra forma de ensinar a raciocinar matematicamente.

Nalguns países a atenção dada ao raciocínio e à prova é variável e diminuta (Otten et al., 2014). O que segundo os autores contraria as recomendações internacionais (NCTM, 2000, 2009) para o raciocínio e prova que deveriam estar presentes em toda a matemática escolar. Também para Flegas e Charalampos (2013) apesar da investigação sobre o papel educativo do raciocínio e da prova destacar as dificuldades dos alunos quer no ensino básico quer no secundário na demonstração de capacidades de raciocínio dedutivo, a maioria dos investigadores concordam que os processos de raciocínio e de prova são de grande valor didático e de aprendizagem em todos os níveis de ensino.

Como o tema desta investigação são os conceitos geométricos era incontornável falar-se na teoria de van Hiele. Esta teoria oferece estratégias que ajudam os estudantes a desenvolver e a melhorar os seus níveis de raciocínio geométrico. A teoria pressupõe a existência de cinco níveis sequenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. É um modelo de aprendizagem fundamentado na valorização da aprendizagem da Geometria. Este modelo leva o estudante a construir os seus conceitos – é construtivo. Uma vez que figuras e propriedades não são abstrações isoladas interrelacionando-se e admitindo a existência de cinco níveis – é global. E considera que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica vão evoluindo – é gradual. A teoria tenta explicar porque os estudantes apresentam dificuldades na Geometria e o que pode ser feito para as minimizar.

Cada nível descreve a forma como o estudante compreende os conceitos geométricos. Existindo interpretações diferentes sobre o modo como cada um dos níveis se aplica ao desenvolvimento do pensamento geométrico, neste estudo opta-se pelo descrito por Clements e Battista (1992). No nível 1 o estudante reconhece visualmente uma figura geométrica pela sua aparência global mas as propriedades da figura não são explicitamente identificadas ou percebidas; no nível 2 o estudante para além de reconhecer pode caracterizar formas geométricas pelas suas propriedades. Aqui o estudante ainda não vê as relações entre classes de figuras; no nível 3 o estudante pode classificar figuras, ordenar as suas propriedades e dar argumentos informais para justificar as suas classificações; no nível 4 o estudante desenvolve sequências mais longas de declarações e começa a entender o significado de dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas. Consegue raciocinar num contexto de um sistema matemático completo; e no nível 5 o estudante compreende não só os aspetos formais da dedução como consegue criar e comparar sistemas matemáticos.

A investigação mostra que a instrução desempenha um papel fulcral na progressão através dos níveis e também refere que, para os estudantes terem uma verdadeira compreensão da Geometria, não é viável saltar um nível. A progressão de um nível para o seguinte está mais dependente da experiência de ensino do que da idade ou maturidade do estudante. Por isso de acordo com Gutiérrez et al. (1991) no nível de raciocínio do estudante, a determinação do grau de aquisição de determinado nível pode ser dividida em cinco períodos qualitativa e quantitativamente diferentes (ver Figura 2). Para cada um dos níveis ainda segundo os autores estes períodos indicam diferenças relevantes no grau de aquisição desse nível. Os professores também podem ser os culpados de redução de nível se os estudantes tiverem de recorrer à memorização em vez de funcionarem no nível apropriado mais elevado, visto que os conceitos geométricos compreendidos implicitamente num nível são explicitamente entendidos no nível seguinte (Clements & Battista, 1992).

A investigação também refere a existência de professores com os mesmos equívocos que tinham sido observados nos estudantes. No entanto o objetivo de se avaliar os níveis de raciocínio é a identificação das deficiências de modo que a formação inicial possa colmatar essas lacunas, servindo as necessidades dos estudantes (e professores) e fortalecendo a Geometria.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA DO ESTUDO

Neste capítulo faz-se um enquadramento teórico da metodologia qualitativa e uma breve descrição dos principais paradigmas que nas últimas décadas mais têm sido utilizados na investigação em educação. Depois descrevem-se as opções metodológicas e os procedimentos realizados durante o estudo incluindo os participantes. Seguidamente referem-se os métodos e os instrumentos de recolha dos dados utilizados assim como o decorrer da análise dos mesmos no estudo que ocorreu durante vários meses numa instituição de formação de professores do ensino básico do Ensino Superior Politécnico.

O Quadro Investigativo em Educação

A perceção é forte e a visão fraca. Na estratégia é importante ver coisas distantes como se estivessem próximas e ter uma visão distanciada das coisas próximas.
Miyamoto Musashi (1584-1645)

Segundo Ponte (2003) "investigar não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com que nos deparamos" (p. 26). E uma investigação pode tomar diferentes formas consoante o modo como se olha para o que se quer perceber. Enquanto para Eisenhart (1988):

> Conduzir a investigação é um ato de interpretação em dois níveis: as experiências dos participantes devem ser explicadas e interpretadas em termos das regras da sua cultura e relações sociais, e as experiências do investigador devem ser explicadas e interpretadas em termos do mesmo tipo de regras da comunidade intelectual em que ele ou ela trabalha (pp.103-104).

Para Berger e Luckmann (1966, citado em Afonso, 2005) uma vez que o conhecimento sobre o contexto social é em si mesmo um fenómeno subjetivo uma investigação pressupõe elementos subjetivos quer ela seja construída com informação qualitativa ou quantitativa.

Os Diferentes Paradigmas

Ao longo dos anos muitas mudanças ocorreram no estado dos paradigmas e escolha dos métodos de modo que vários paradigmas estão a começar a cruzar-se (Guba & Lincoln, 2005). Não há um consenso quanto aos diferentes paradigmas que se podem adotar numa investigação mas Mertens (2010) identifica quatro grandes paradigmas: o pós-positivista, o construtivista, o pragmático e o transformador. Sendo um recém-chegado à comunidade científica o paradigma transformador começa a ser frequentemente reconhecido (e.g., Creswell, 2009; Mertens, 2009) mas os mais referidos nos textos sobre métodos de investigação são os paradigmas pós-positivista e construtivista. Já o pragmático surge como um quadro filosófico subjacente para alguns dos defensores de métodos de investigação mistos (e.g., Morgan, 2007; Teddlie & Tashakkori, 2003).

O pós-positivismo é o sucessor do positivismo que tem norteado a investigação educacional e psicológica. O positivismo pressupõe que o mundo social pode ser estudado da mesma maneira que o natural. Segundo Guba e Lincoln (2005) os positivistas afirmam que existe uma realidade e que é trabalho do investigador descobrir essa realidade. Os pós-positivistas concordam que uma realidade existe mas argumentam que ela pode ser conhecida apenas de modo imperfeito por causa das limitações humanas dos investigadores (Maxwell, 2004, citado em Mertens, 2010). Já Mertens (2010) sublinha que os investigadores podem descobrir a "realidade" dentro de um certo grau de probabilidade visto que não podem provar uma teoria mas podem fazer um caso mais forte, eliminando explicações alternativas. E embora se possam utilizar os métodos qualitativos dentro deste paradigma os métodos quantitativos tendem a ser predominantes na investigação pós-positivista.

Os pressupostos básicos que norteiam o paradigma construtivista segundo Schwandt (2000) são os de que o conhecimento é construído socialmente por pessoas ativas no processo de investigação e que os investigadores devem tentar compreender o mundo complexo da experiência vivida do ponto de vista daqueles que o vivem. Neste paradigma a realidade é socialmente construída. Além disso várias construções mentais podem ser apreendidas, algumas das quais podem estar em conflito umas com as outras, e as perceções da realidade podem mudar ao longo do processo de estudo. Mas os investigadores construtivistas vão mais longe ao rejeitar a noção de que existe uma realidade objetiva que pode ser conhecida, adotando a postura de que o objetivo do investigador é compreender o significado das múltiplas construções sociais e do conhecimento (Mertens, 2010). O construtivista opta por um modo mais pessoal e interativo para a recolha de dados. Para Lincoln e Guba (2000) o pressuposto é o de que dados, interpretações e resultados estão enraizados em contextos e pessoas, para além dos investigadores, e não são invenções da sua imaginação. Os dados podem ser confirmados nas suas fontes e a lógica utilizada nas interpretações pode ser explicitada na descrição. De acordo com Lincoln e Guba (2000) as entrevistas, as observações e a análise de documentos são predominantes no paradigma construtivista, utilizados de acordo com a hipótese sobre a construção social da realidade em que a investigação pode ser realizada apenas pela interação entre investigador e investigados. A implicação metodológica de existirem múltiplas realidades é a de que as questões de partida não podem ser definitivamente estabelecidas antes do estudo começar mas podem evoluir e mudar com a progressão do estudo. Para além disso o investigador construtivista deve fornecer informações sobre o perfil dos participantes e o contexto onde decorre o estudo.

O entendimento do pragmatismo como uma escola filosófica mudou ao longo dos séculos. Numa abordagem pragmática há um "mundo real" único e todos os indivíduos têm suas próprias interpretações originais do mundo. Em vez de tratarem a incomensurabilidade como uma barreira do tudo-ou-nada entre a compreensão mútua, os pragmatistas tratam as questões da intersubjetividade como um elemento fundamental da vida social. Isso contrasta fortemente com a ênfase de outros paradigmas sobre a natureza da realidade e da possibilidade da verdade objetiva. Em vez disso uma das características que definem o pragmatismo é uma ênfase no “que diferença faz” para acreditar numa coisa ou noutra ou a agir de uma forma e não de outra (Morgan, 2007). Os métodos qualitativos e/ou quantitativos são ambos compatíveis com o paradigma pragmático. Segundo Patton (2002) o método deve ser decidido pelo objetivo da investigação.

O paradigma transformador surgiu parcialmente pela insatisfação com os paradigmas de investigação dominantes e suas práticas e pelas limitações na investigação associadas com esses paradigmas, que foram articuladas por feministas, povos indígenas, pessoas com deficiência, transsexuais e outras que sofreram discriminação e opressão, assim como outros defensores da justiça social. O paradigma transformador aborda diretamente a política na investigação confrontando a opressão social em qualquer nível em que ela ocorra (Reason, 1994). Os investigadores transformadores posicionam-se lado a lado com os menos poderosos num esforço conjunto para conseguirem a transformação social. O ponto de partida para os investigadores transformadores é o território que abrange os direitos humanos e a justiça social. Assim como no paradigma construtivista várias versões do que é percebido como real são também reconhecidas no paradigma transformador. Na investigação transformadora é essencial o envolvimento dos participantes no planeamento, na condução, na análise, na interpretação e na utilização dessa investigação.

De acordo com Mertens (2010) as linhas entre paradigmas estão a tornar-se mais turvas quando se examina a terceira edição do manual de investigação qualitativa de Lincoln e Denzin (2005) em que são explicitamente solicitados capítulos que ligam investigação qualitativa com justiça social e de ação política progressista. Esta autora afirma também que o campo da investigação ainda não atingiu o ponto de integração completa dos vários paradigmas.

Atualmente aceita-se a complementaridade dos paradigmas uma vez que parece ser o modo mais apropriado para se estudarem os problemas de investigação que cada vez mais são de natureza complexa, dinâmica e de difícil solução. Ou seja os fenómenos educativos requerem uma variedade de métodos e técnicas de investigação, competindo ao investigador decidir e adotar os mais apropriados ao problema da investigação em causa.

A Investigação em Educação Matemática

Mialaret (2007) acentua as particularidades das situações educativas, nomeadamente a sua estrutura assimétrica, a sua historicidade mas também a sua irrepetibilidade e imprevisibilidade. É por isso que interessa não só ter em consideração as condições de existência das situações educativas mas também a sua complexidade uma vez que toda a situação educativa é atravessada por um sistema de valores e por uma heterogeneidade de interações e de sujeitos.

Em relação ao que tem sucedido em educação matemática Lesh (2002) afirma que "o problema central da educação matemática tornou-se a distância entre a teoria – um corpo de conhecimento em educação matemática que está nas mãos dos investigadores – e a prática – o ensino atual levado a cabo pelos professores" (p. 555). Este mesmo autor considera que no final do século passado a maioria das investigações em educação matemática desenvolveram-se com o intuito de se enfatizar a prática. Por isso os professores passaram a ter um papel fulcral na investigação porque, para além de identificarem os problemas, passaram a interpretar os resultados obtidos tomando consciência de que os alunos são seres "dinâmicos, vivos, interativos, autorregulados, continuamente adaptáveis e com competências que, em geral, não podem ser reduzidas a simples verificações de regras condição-ação" (Lesh, 2002, p. 30).

No entanto English não partilha o mesmo ponto de vista de Lesh. English (2002) considera que não se tem feito investigação significativa em educação matemática pois não se tem dado resposta às questões fundamentais. English defende que a educação matemática necessita de uma rápida intervenção de mudança. Para tal refere que existem alguns aspetos capazes de promover essa mudança: os resultados das provas nacionais e internacionais; o progresso tecnológico; a influência de fatores sociais, económicos, culturais e políticos; a globalização da educação e a investigação matemática. English (2002) considera ainda que os investigadores em educação matemática devem: (1) antecipar os problemas e o conhecimento necessário antes que se tornem impeditivos do progresso; (2) traduzir os futuros problemas em objetivos de investigação; (3) traduzir as implicações da investigação e do desenvolvimento da teoria em formas que possam ser úteis aos práticos e aos decisores políticos; e (4) promover o aparecimento de comunidades de investigação que foquem prioridades negligenciadas ou oportunidades estratégicas.

Nestas últimas décadas a investigação em educação matemática tem privilegiado a investigação qualitativa em que o estudo de caso tem sido a modalidade mais utilizada para investigar questões de aprendizagem dos alunos e também de questões relacionadas com o conhecimento e práticas profissionais dos professores, assim como com o estudo de programas de formação inicial e contínua de professores e outros projetos. Shulman (1987) afirma que a investigação qualitativa na área da formação de professores que tem recorrido ao estudo de caso, quer seja em salas de aula ou em laboratórios especiais com simulações, vídeos e anotações, pode constituir um meio para desenvolver a compreensão estratégica aumentando as capacidades para avaliação profissional e tomada de decisão.

A escolha do método de investigação deve ser feita em função da natureza do problema em estudo e, enquanto lógica de um conjunto de procedimentos científicos utilizados, na sua descrição devem ser compreensíveis não só o produto resultante da investigação como o processo que conduziu à sua obtenção (Tuckman, 1994).

A Investigação Qualitativa

Muitos dos estudos sobre a formação inicial de professores tendem a privilegiar projetos de pequena escala e técnicas qualitativas. E isso é compreensível uma vez que as variáveis e os assuntos abordados estão intimamente relacionados com significados pessoais, práticas institucionais e tradições que não se prestam a processos quantitativos. Por isso os métodos de investigação que têm predominado em estudos relacionados com a educação são de natureza qualitativa. A investigação qualitativa utiliza uma abordagem naturalista que procura compreender os fenómenos em contexto de configurações específicas, como por exemplo "configuração do mundo real [onde] o investigador não tenta manipular o fenómeno de interesse” (Patton, 2002, p. 39).

Para Morse (1994) a investigação qualitativa passa por seis estádios. O *estádio de reflexão* que se refere ao período em que o investigador tenta identificar o tema a estudar. O *estádio de planeamento* que inclui a seleção do local e da estratégia de investigação, a preparação do investigador, produção e refinamento das questões de investigação. A estratégia utilizada na investigação é decidida pelas questões e propósito do estudo, pela natureza das questões e pelas capacidades do investigador e dos meios que este tem ao seu alcance. A investigação qualitativa só é boa se o investigador o for pois é através da sua sabedoria e paciência que ele irá obter toda a informação durante a recolha de dados. Nessa medida o investigador deve ser ordenado nos seus documentos e notas e estar bem preparado relativamente ao tema escolhido de modo a reconhecer e recolher as pistas mais ténues que surjam nas observações (ou entrevistas) e segui-las. A investigação qualitativa não é estruturada logo os seus resultados são incertos e imprevisíveis. Huberman e Miles (1994) alegam que se existir um conjunto grande de questões (mais de doze), é complicado ver as ligações mais importantes através dos dados e integrar os resultados. Para tornear o problema da proliferação de questões da investigação utilizam-se questões gerais cada uma com sub-questões para clarificar e especificar. A formulação de questões é um processo iterativo onde se vão aperfeiçoando as várias versões até se chegar ao produto final. Na escolha dos informantes há que se ter em atenção que um bom informante é aquele que tem a experiência e os conhecimentos de que a investigação necessita. No primeiro período de recolha de dados, o *estádio de entrada*, o investigador não deve focalizar as suas observações. É um período de confusão e o investigador deve preocupar-se sim em saber quem é quem e verificar se ajuda executar um plano (ou esquema) com a caracterização do local. O *estádio de produção e* *recolha de dados* envolve a análise dos dados que começa um pouco depois do início da recolha e continua durante e depois. Na investigação qualitativa o investigador recolhe dados a partir de múltiplas fontes. E há vários métodos para assegurar o rigor do trabalho qualitativo estando os mesmos ligados a questões de fiabilidade e validade. No *estádio de afastamento* o investigador deve destinar um tempo para refletir sobre o trabalho desenvolvido. E por último, no *estádio de escrita*, o investigador deve utilizar citações para mostrar a sua interpretação dos dados para além de utilizar um texto descritivo.

Segundo Bogdan e Biklen (2013) uma investigação qualitativa possui cinco características: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural sendo o investigador o instrumento principal. Os investigadores qualitativos assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, deslocando-se sempre que possível ao local de estudo; (2) é uma investigação essencialmente descritiva. Ao recolher dados descritivos os investigadores qualitativos abordam o mundo de forma minuciosa. Entendem que nada é trivial e que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo; (3) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; (4) os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Os dados ou provas não são recolhidos com o objetivo de infirmar ou confirmar hipóteses previamente construídas, pelo contrário, as abstrações são construídas à medida que os dados ou provas recolhidas se vão agrupando; e (5) o significado é de importância vital neste tipo de abordagem. Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitem tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador.

E para Gall, Gall e Borg (2005) o que caracteriza a investigação de índole qualitativa é:

> Uma recolha e análise sistemáticas de dados no sentido de desenvolver descrições, previsões, intervenções e explicações generalizáveis e válidas, relacionadas com vários aspetos da educação. É esta confiança numa cuidadosa recolha e análise de dados que mais fortemente distingue o conhecimento investigativo do conhecimento pessoal (p. 3).

Nas metodologias qualitativas os intervenientes da investigação não são reduzidos a variáveis isoladas são vistos como parte de um todo no seu contexto (Merriam, 1988). Por isso quando se reduzem os indivíduos a dados estatísticos, existem determinados comportamentos que são ignorados e que poderão ser determinantes no estudo em causa.

A investigação qualitativa tem não só virtudes como problemas mas, contrariamente à investigação quantitativa que procura a relação causa-efeito e a medição de variáveis isoladas que influenciam essa relação, os paradigmas naturalistas e construtivistas têm sido reconhecidos como essenciais na investigação em ciências sociais e em particular na educação pois procuram sobretudo a compreensão dos fenómenos em estudo (e.g., Bogdan & Biklen, 2013; Guba & Lincoln, 2005; Huberman & Miles, 1994; Stake, 2009).

As diferenças mais significativas entre a investigação quantitativa e qualitativa segundo Bryman (1988, citado em Mertens, 2010) são as seguintes: (1) na investigação quantitativa a relação entre o investigador e o investigado é distante e externa sendo próxima e interna na investigação qualitativa; (2) na investigação quantitativa a relação entre conceitos, teoria e investigação é de confirmação. Na investigação qualitativa é uma relação emergente; (3) a investigação quantitativa utiliza uma estratégia estruturada sendo não estruturada na investigação qualitativa; (4) a investigação quantitativa considera a realidade social como sendo algo estático e externo ao sujeito. A investigação qualitativa considera que a realidade social possui um caráter processual e é socialmente construída pelo sujeito; e (5) a natureza dos dados da investigação quantitativa é fiável. Na investigação qualitativa a natureza dos dados é profunda.

Os investigadores qualitativos devem pensar caracteristicamente, propositadamente e conceptualmente sobre a amostragem enquanto os investigadores quantitativos muitas vezes pensam de forma aleatória, estatisticamente e em termos de seleções de contexto despojado de caso (Huberman & Miles, 1994).

As palavras-chave associadas à metodologia qualitativa incluem: exploração, complexidade, descoberta, contextualização e lógica indutiva. Ao utilizar uma abordagem indutiva o investigador pode tentar dar sentido a uma situação sem impor expectativas pré-existentes sobre os fenómenos em estudo. Deste modo o investigador começa com observações específicas e permite que as categorias de análise surjam a partir dos dados com os avanços do estudo (Mertens, 2010).

A Recolha e Análise de Dados Qualitativos

Os dados recolhidos em estudos qualitativos são na sua grande maioria em forma de palavras e imagens e tendem a ser analisados de forma indutiva. Este tipo de dados baseia-se em observações, entrevistas e documentos que são os três métodos privilegiados de recolha de dados (Merriam, 1988). À medida que os dados vão sendo recolhidos e se vão agrupando as abstrações são construídas, não se recolhendo os dados com o objetivo de confirmar nem infirmar hipóteses previamente construídas.

Após o regresso de cada observação ou entrevista o investigador relata o que ocorreu por escrito, descrevendo pessoas, lugares, objetos, atividades, acontecimentos ocorridos, registando reflexões, estratégias e ideias, fazendo emergir os padrões que vão surgindo - são as suas notas de campo (Bogdan & Biklen, 2013). As notas de campo estão contaminadas pelas conceções e conhecimentos do investigador que seleciona *o que* registar e *como* o fazer. Mas como na maioria das vezes o investigador é o único instrumento para a recolha dos dados, há quem afirme que esta é uma vulnerabilidade da abordagem qualitativa – a exagerada confiança no investigador como instrumento. Há também quem considere esta característica um ponto forte da investigação qualitativa porque em nenhuma outra forma de investigação os investigadores são tão meticulosamente estudados e considerados como parte do projeto. Com as suas reflexões o investigador procura cuidar das suas decisões e controlar as suas observações (Bogdan & Biklen, 2013). Estes autores sublinham que os investigadores não necessitam de demonstrar as ideias para as poderem afirmar, o que têm é de ser plausíveis em função do que observam.

Nos estudos em que se faz observação as notas de campo são imprescindíveis mas o investigador pode também utilizar textos produzidos pelos participantes, que podem revestir a forma de respostas a questões abertas, tarefas, questionários ou até mesmo reflexões dos participantes.

Com base nos dados recolhidos ocorrem indutivamente hipóteses, teorias, abstrações, conceitos (Merriam, 1988). A análise dos dados é um processo de procura e de organização sistemática dos materiais que se vão recolhendo com o propósito de ampliar o entendimento sobre os referidos materiais e de mostrar a outros o que se encontrou (e.g., Bogdan & Biklen, 2013; Huberman & Miles, 1994; Mertens, 2010). Para Bernard (1988) a análise dos dados "torna as coisas complicadas compreensíveis, reduzindo-as às suas partes componentes" (p. 317). Diversos investigadores qualitativos afirmam que as categorias de análise, os padrões, decorrem dos dados, emergem das notas de campo, dos documentos e das entrevistas, não sendo impostas à partida. Para Janesick (1998) o investigador tem de agilizar um sistema de codificação e categorização dos dados tendo de descobrir o modo mais adequado de "contar a história", constituindo-se um meio eficaz de o fazer o "manter-se perto dos dados" (p. 47).

Os dados recolhidos são em geral em grande quantidade por isso Wolcott (2002) escreve no seu manual que a tarefa mais importante na investigação qualitativa não é acumular todos os dados possíveis mas sim deitar fora a maior parte dos dados acumulados. Também defende que o enigma é descobrir a essência das coisas e depois revelar essa essência inserida num contexto compreensível sem no entanto ficar atolado ao tentar incluir tudo o que possa eventualmente ser descrito.

A análise de dados de estudos qualitativos é um processo contínuo. Ela não ocorre apenas no final do estudo como é típico na maioria dos estudos quantitativos. Nos estudos qualitativos os resultados são gerados e sistematicamente construídos como peças sucessivas de dados que são reunidos (Bogdan & Binklen, 2013; Patton, 2002).

Hesse-Biber e Leavy (2011) fornecem uma descrição passo-a-passo de estratégias de análise de dados para dados qualitativos, apesar de reconhecerem que a realização de tal tarefa configura uma condição paradoxal em que a análise de dados qualitativos, em essência, desafia uma abordagem passo-a-passo: 1º passo – *preparar os dados para análise*: este passo pressupõe que o investigador reveja e reflita sobre os dados que recolhe. Como isso é feito depende em certa medida do tipo de dados recolhidos e do método de recolha e de registo de dados. Estes autores argumentam que o processo de transcrição deve ser realizado pelo investigador porque isso faz parte do processo de análise de dados gerado pela interação com os dados de uma forma intensa e íntima; 2º e 3º passos – *fase de exploração de dados e fase de redução de dados:* estas duas fases são sinergéticas, isto é, enquanto o investigador explora os dados pensa na forma de os reduzir a um tamanho administrável e comunicável. Explorar significa ler e pensar e fazer anotações sobre os seus pensamentos. A redução de dados ocorre quando se selecionam partes dos dados para codificação, ou seja, atribuem-se um rótulo a trechos de dados que conceitualmente se podem "pendurar juntos".

Segundo Patton (2002) numa investigação o envolvimento e imersão do investigador está sujeito a mudanças e, portanto, um investigador qualitativo deve estar presente nessas mudanças para registar o acontecimento antes e depois das alterações ocorrerem. Porém tanto os investigadores qualitativos como quantitativos precisam testar e demonstrar que os seus estudos são credíveis. E enquanto na investigação quantitativa a credibilidade depende do instrumento de medição, na investigação qualitativa "o investigador é o instrumento" (Patton, 2002, p. 14). Portanto quando os investigadores quantitativos falam de validade e fiabilidade da investigação estão geralmente a referir-se a uma investigação que é credível, enquanto a credibilidade de uma investigação qualitativa depende da habilidade e esforço do investigador (Golafshani, 2003). Este autor sublinha que apesar da fiabilidade e validade serem tratados separadamente em estudos quantitativos esses termos não são vistos separadamente na investigação qualitativa.

Todavia o conceito de validade não é um conceito único e fixo ou universal. É “sim uma construção contingente, inescusavelmente fundamentada nos processos e intenções de metodologias de investigação e projetos específicos” (Winter, 2000, p. 1). Segundo Johnson (1997) se a validade ou fiabilidade pode ser maximizada ou testada então um “resultado mais credível e defensável” (p. 283) pode conduzir à generalização. Para garantir a credibilidade na investigação qualitativa a análise é crucial e Seale (1999) afirma que a credibilidade de um relatório de investigação está no cerne de questões convencionalmente discutidas como validade e fiabilidade. Já Stenbacka (2001) argumenta que desde que a fiabilidade diga respeito às medidas então não tem relevância na investigação qualitativa. Ela acrescenta que a questão da fiabilidade é uma questão irrelevante na aferição da qualidade da investigação qualitativa. Lincoln e Guba (2000) afirmam que como não pode existir validade sem fiabilidade a demonstração da validade é suficiente para estabelecer a fiabilidade. Além disso Patton (2002), no que diz respeito à capacidade e habilidade do investigador em qualquer investigação qualitativa, garante que a fiabilidade é uma consequência da validade de um estudo. Vale (2004) defende que uma boa apresentação dos dados é o melhor caminho para validar a análise qualitativa. E McMillan e Schumacher (2006) argumentam que a validade de um estudo se mede pelo grau de coerência entre as explicações dos fenómenos e as realidades do mundo.

Contudo uma questão permanece em aberto - como podemos então testar ou maximizar a validade de um estudo qualitativo? Não há um consenso em relação a esta questão. Creswell e Miller (2000) definem triangulação como sendo "um procedimento de validade, onde os investigadores procuram a convergência entre as múltiplas e diferentes fontes de informação para formar temas ou categorias num estudo" (p. 126). Já Patton (2001) argumenta que a "triangulação reforça um estudo combinando métodos. Isso pode significar o uso de diversos tipos de métodos ou dados, incluindo o uso de ambas as abordagens quantitativa e qualitativa" (p. 247). Mas Barbour (1998) afirma que enquanto a mistura de paradigmas é possível na investigação qualitativa a mistura de métodos dentro de um paradigma é problemática, uma vez que cada método tem o seu próprio pressuposto em "termos de referenciais teóricos a trazer para a nossa investigação" (p. 353). Também diz que, mesmo que a triangulação seja usada no paradigma quantitativo para confirmação e generalização de uma investigação, não considera a noção de triangulação no paradigma qualitativo afirmando a necessidade de definir triangulação na perspetiva de uma investigação qualitativa em cada paradigma (Barbour, 1998). Por exemplo no uso de triangulação de diversas fontes de dados, numa investigação quantitativa qualquer exceção pode levar a uma negação de confirmação da hipótese, enquanto numa investigação qualitativa as exceções são utilizadas para modificar as teorias e são frutíferas.

Para Golafshani (2003) a combinação vários métodos tais como, observação, entrevistas e gravações leva à construção de realidades mais válidas, fiáveis e diversificadas. Para melhorar a análise e compreensão da investigação este autor defende que a triangulação é um passo dado pelos investigadores de forma a envolverem vários investigadores na interpretação dos dados em tempo ou local diferente. Sublinha ainda que na investigação qualitativa, fiabilidade, validade e triangulação são conceitos que necessitam de ser redefinidos a fim de refletirem as múltiplas maneiras de estabelecer a verdade.

O Estudo de Caso

Vários são os autores (e.g., Lee & Yarger, 1996; Lincoln & Guba, 2000; Gravemeijer, 1994; Shulman, 1986) que para uma investigação em ambiente natural em educação recomendam como metodologia de investigação o estudo de caso, considerando-o a melhor escolha. E também defendem que se um investigador pretende estudar o que um aluno pensa, deverá participar e observar as atividades que o aluno desenvolve no seu ambiente natural: a sala de aula. Para Lee e Yarger (1996) o estudo de caso parece ser o mais importante modo de investigar na formação de professores.

Segundo Merriam (1988) um estudo de caso consiste na descrição analítica, global e holística de um fenómeno bem definido. Para esta autora trata-se de uma investigação com um forte cunho interpretativo e descritivo cujo objetivo é o de se descobrir o que há de característico, único e essencial no sujeito em estudo e não o de estabelecer relações causa-efeito ou quantificar certas variáveis de uma população. Stake (2005) afirma que um estudo de caso é uma descrição narrativa de um objeto social como por exemplo, uma pessoa, uma instituição, um programa ou outro sistema limitado. Já Ponte (2006b) considera-o como sendo uma investigação particularista porque se debruça propositadamente sobre uma situação específica que se supõe ser especial, onde se vai procurar descobrir o que é importante e o que a caracteriza, para que se possa contribuir para a compreensão global de um fenómeno de interesse em educação.

McDuffie e Scruggs (2008) descrevem estudo de caso como uma abordagem que envolve a exploração em profundidade de um caso único ou de um exemplo do fenómeno em estudo. Um caso pode ser baseado em qualquer número de unidades de análise: um indivíduo, um grupo de indivíduos, uma sala de aula, uma escola ou até mesmo um evento. Já Stake (2005) reconhece um pouco a situação problemática que surge na tentativa de definir um estudo de caso como uma forma única de investigar. Para resolver o problema ele usa o critério de que a investigação através de estudo de caso não é definida por uma metodologia específica mas pelo objeto de estudo. Stake (2005) escreve ainda que "quanto mais o objeto de estudo é específico, único e limitado" (p. 463) maior é a razão para o chamar um estudo de caso.

O processo de fazer comparações com outros casos é muitas vezes deixado para o leitor do estudo de caso que lê o relatório com o conhecimento pré-existente de casos semelhantes e diferentes. Stake (2005) adverte os leitores para não perderem o que é único sobre determinado caso num esforço para encontrar semelhanças com outros casos. Alguns veem o método de estudo de caso como levando a generalizações científicas mas Stake enfatiza a importância do interesse intrínseco em cada caso.

Yin (2009) sublinha que a investigação inclui tanto os estudos de caso simples como múltiplos. E apesar de algumas áreas de investigação (e.g., ciência política e antropologia) terem distinguido estas duas abordagens elas são na realidade duas variantes do *design* de estudo de caso. Para este autor o mesmo estudo pode abranger mais do que um simples caso e quando isso ocorre o estudo utiliza um estudo de caso múltiplo (Yin, 2009). Este *design* que tem sido fortemente utilizado nos últimos anos apresenta vantagens e desvantagens comparativamente ao estudo de caso simples. Por um lado há a desvantagem de exigir amplos recursos e mais tempo. Por outro a evidência de múltiplos casos é muitas vezes considerada mais atraente e o estudo global é portanto considerado como sendo mais robusto (Herriot & Firestone, 1983, citado em Yin, 2009).

Numa investigação Yin (2009) identifica os seguintes passos na prossecução do *design* de estudo de caso: (1) *desenvolver as questões de investigação.* Yin sugere que "como" e "porquê" são questões especialmente apropriadas para o estudo de caso; (2) *identificar as proposições (se existirem) para o estudo*. Proposições são declarações semelhantes às hipóteses que sustentam a razão por que achamos que se pode observar um comportamento específico ou um relacionamento. Nem todos os estudos de caso permitem a declaração de proposições, especialmente se forem exploratórios. Contudo Yin (2009) defende que o investigador deve ser capaz de indicar o objetivo do estudo e os critérios pelos quais uma explicação será julgada válida; (3) *especificar a unidade de análise.* Os investigadores necessitam de basear o projeto num único ou em múltiplos casos e de estabelecer as fronteiras tão claramente quanto possível em termos de quem está incluído, a área geográfica e a data para início e fim do caso. Uma vez identificado o processo, a unidade de análise pode então ser descrita no contexto do caso; (4) *estabelecer a lógica que liga os dados às proposições*. Yin (2009) sugere que os investigadores tentem descrever a forma como os dados serão usados para iluminar as proposições. Yin recomenda a utilização de um tipo de estratégia de série-temporal e de correspondência-padrão desenvolvida por Campbell (1975) em que os padrões de dados estão relacionados com as proposições teóricas; e (5) *os critérios para a interpretação dos resultados devem ser explicados*. Os testes estatísticos não são normalmente adequados para utilização como um critério de decisão de estudo de caso. Yin (2009) sugere que os investigadores utilizem o discernimento para identificar "padrões diferentes [que] são suficientemente contrastantes" (p. 17) e para comparar propostas contraditórias.

Num estudo de caso o desenvolvimento da teoria é uma parte essencial da fase de projeto. Yin (2009) define teoria como uma compreensão do que está a ser estudado. A revisão da literatura é uma excelente fonte para a identificação das teorias apropriadas ao desenvolvimento do estudo de caso.

Opções Metodológicas e Procedimentais

As Opções Metodológicas

Na origem deste estudo estão as muitas dificuldades apresentadas pelos estudantes que ingressam na Licenciatura em Educação Básica desde 2007/08. Deteta-se que muitos deles não possuem os conceitos básicos fundamentais de Geometria e têm uma dificuldade acrescida na capacidade de visualização espacial. Por isso se decidiu conduzir esta investigação para a identificação e caracterização do conhecimento e pensamento geométrico destes estudantes que poderão vir a ser futuros professores de matemática do ensino básico.

Porque a natureza do objeto em estudo é que deve condicionar a escolha do método de investigação (Tuckman, 1994), para se selecionar a metodologia de investigação para o problema que se quer investigar tornou-se necessário analisar as características do problema em estudo e o tipo de questões a que se pretendia dar resposta.

Relembra-se que o principal objetivo deste estudo é identificar e caracterizar o conhecimento e pensamento geométrico dos estudantes (futuros professores do ensino básico) num contexto de sala de aula, não se tendo a ambição de testar hipóteses preestabelecidas nem de generalizar resultados mas sim de compreender o fenómeno em estudo. Pretende-se aprofundar e descrever detalhadamente o conhecimento de um processo inserido num dado contexto educativo dando ênfase essencialmente à compreensão do comportamento e do desempenho a partir da perspetiva dos participantes na investigação. Nesta problemática definiram-se as seguintes questões orientadoras:

Q_1. Como se pode caracterizar o conhecimento geométrico dos estudantes, identificando as principais dificuldades ao longo dos testes e das tarefas?

Q_2. Como se pode caracterizar, de acordo com os níveis de van Hiele, o raciocínio geométrico dos estudantes ao longo dos testes e das tarefas?

Q_3. Que atitudes manifestam os estudantes em relação às tarefas que realizaram e à unidade curricular de Geometria?

As questões que orientam este estudo foram formuladas com o objetivo de estudar os fenómenos educativos enunciados em toda a sua complexidade e no seu contexto natural. Atendendo à natureza do problema em estudo optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa no *design* de estudo de caso, mais precisamente um estudo de caso múltiplo (Yin, 2009). Recorreu-se ao acompanhamento de dois grupos-caso de duas alunas cada, isto é, duas díades que se procurou entender como vivenciaram as aulas de Geometria e sobretudo as tarefas que lhes foram propostas.

Os Participantes no Estudo

Os participantes do estudo englobam a professora da UC de Geometria, professora Catarina, a turma e os dois grupos-caso de duas alunas cada, grupo AB e grupo MS, e a investigadora.

A *professora Catarina* possui duas licenciaturas, um mestrado e está a desenvolver o seu doutoramento em Educação. É licenciada em Matemática – ramo Educacional, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e tem a licenciatura de Professores do

Ensino Básico – variante de Matemática e Ciências da Natureza da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto. Também possui um mestrado em Matemática – Formação Contínua de Professores, da Universidade do Minho e leciona no ensino superior, na ESEPP desde 2007. É uma professora extrovertida e de diálogo fácil com os seus alunos. Está também a desenvolver uma investigação no âmbito das isometrias e quando lhe foi lançado o repto para colaborar neste estudo mostrou-se logo disponível e ficou muito contente. Como a turma onde ia decorrer a investigação era conhecida da professora Catarina, que lhes tinha lecionado a UC de Conhecimento e Cultura Matemática, a investigadora decidiu recolher a sua opinião sobre a seleção das duas díades de alunas a serem investigadas. Ambas concordaram que os grupos AB e MS seriam a melhor escolha.

De entre as quatro turmas de prática laboratorial onde o estudo podia ocorrer, optou-se pela escolha de uma *turma* que se destacava não só pelo seu espírito colaborativo de turma unida mas também por ser uma turma muito participativa, interessada e dialogante.

A seleção dos casos, duas díades, que constituem os dois grupos-caso teve por base os seguintes critérios: (1) diferente aproveitamento escolar às unidades curriculares de matemática que antecederam a Geometria no sentido de se esperar alguma diversidade de percursos ao nível dos processos cognitivos; (2) gosto por resolver tarefas; (3) bom informador. Este foi um aspeto muito importante face aos propósitos da investigação pelo facto da análise se basear no que é *visível* no processo e o discurso oral ser um meio para tornar *visível* os processos de raciocínio; (4) hábitos de trabalho em grupo. Pareceu importante formar os pares de forma a preservar a afinidade de trabalho que já existia entre as alunas em anteriores unidades curriculares de matemática; e (5) disponibilidade e vontade para participar no estudo.

Deste modo partiu-se para a análise do desempenho nas anteriores UC de matemática, designadamente Cultura e Conhecimento Matemático (1º ano/1º sem.), Linguagem, Lógica e Comunicação (1º ano/2º sem.) e Números e Estruturas (2º ano/1º sem.). Nestas UC a média aritmética de um dos grupos foi de 16 valores e a do outro de 11 valores porque se pretendia que houvesse algum nível de diferenciação entre eles para que fosse mais rico quanto possível o nível de informação que esta diferença pudesse proporcionar. Não foi intenção deste estudo comparar o desempenho dos dois grupos mas estudá-los em profundidade de acordo com as questões orientadoras da investigação.

O *grupo AB* é constituído por duas alunas que trabalham sempre em grupo. Uma das alunas provém da área das humanidades e a outra da área das ciências. Ambas as alunas ambicionam virem a ser professoras do 1º e 2º ciclo. A classificação média obtida pelo grupo às anteriores unidades curriculares de matemática foi de 16 valores.

O *grupo MS* é também constituído por duas alunas que também têm por hábito trabalhar juntas. Ambas provêm da área das ciências e manifestam o desejo de virem a ser educadoras de infância ou professoras do 1º ciclo. Nas unidades curriculares de matemática anteriores a classificação média obtida por este grupo foi de 11 valores.

A *investigadora* possui uma licenciatura em Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e um mestrado em Sistemas e Tecnologias da Informação na Educação da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Desde janeiro de 1981 é professora do ensino superior, tendo lecionado na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto as disciplinas de Análise Matemática I e Análise Matemática II durante cinco anos letivos. Foi aí que descobriu o quanto era gratificante ensinar. Por isso ao fim de seis anos de acumulação da profissão de engenheira civil com a docência decidiu investir unicamente numa carreira dedicada ao ensino. Desde 1986 é professora da área de matemática na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto onde tem lecionado disciplinas na área da informática, estatística, matemática e didática da matemática, no âmbito da formação inicial, formação em serviço e formação contínua de professores. Ressalva-se o período de 2001 a 2007 onde exerceu várias funções científicas e diretivas: vice-presidente do Conselho Científico, vice-presidente do Conselho Diretivo (dispensa parcial de serviço letivo) e presidente em exercício do Conselho Diretivo (dispensa total de serviço letivo) da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto. Nos últimos três anos tem trabalhado no seu programa de doutoramento em simultâneo com uma atividade letiva a tempo inteiro. A permanente quebra de ritmo entre o trabalho desta investigação e o trabalho de docência que inclui, para além de doze horas letivas semanais (com atendimento e avaliação dos cerca de trezentos alunos por ano letivo), a coordenação da Unidade Técnico-Científica da Matemática e a Comissão de curso da Licenciatura em Educação Básica (avaliado pela A3E´s em 2012 e 2013) foram os problemas mais difíceis de gerir no decurso de todo o trabalho desta investigação. Iniciou este estudo com a convicção de que a matemática que os alunos trazem do ensino básico e secundário em relação à Geometria tem muitas lacunas ao nível dos conceitos básicos elementares e estruturantes para estes futuros professores do ensino básico. Atualmente também é verdade que nestes ciclos tanto o PMEB (ME, 2007) como o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) são mais exigentes no que à Geometria diz respeito. Daí o seu interesse neste estudo. O envolvimento da investigadora com a formação inicial de professores tem mais de vinte e cinco anos. E ao longo destes anos tem tido a oportunidade de participar com outros professores, formadores e investigadores em vários encontros de índole científica e didática, nacionais e internacionais onde se têm debatido questões relacionadas com o ensino da matemática e a formação de professores.

Contornos do Estudo

Nesta investigação a metodologia assumiu um carácter claramente qualitativo, de natureza descritiva e interpretativa, no *design* de estudo de caso. O estudo desenvolveu-se em contexto natural, no ano letivo de 2011/12 na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, numa turma do 2º ano da licenciatura em Educação Básica na UC de Geometria no 2º semestre, onde os participantes foram os dois grupos-caso, a turma onde estavam inseridos, a respetiva professora e a investigadora. Pardal e Lopes (2011) defendem que a atuação do investigador tem de ser controlada uma vez que ele é portador de uma cultura, podendo influenciar não só o conteúdo da investigação mas também o controlo das variáveis em estudo. Gay (s. d.) também defende que numa observação não participante o observador deve estar do lado de fora olhando e não intencionalmente interagindo com ou afetando o objeto da observação. Por isso se decidiu que neste estudo a investigadora teria um papel de observadora não participante. A investigadora conhecia bem a turma uma vez que já tinha sido sua professora em duas UC anteriores, o que garantiu naturalidade e normalidade na sua presença onde a investigadora não foi elemento perturbador. Dos vinte e oito alunos que a turma inicialmente tinha cinco deles desistiram logo após a realização do primeiro teste de avaliação da UC de Geometria pelo que se considerou a turma constituída apenas por vinte e três alunos. A turma era essencialmente feminina - tinha dois rapazes e vinte e uma raparigas. A média das idades era de 20 anos.

Para se caracterizar a turma onde ia ocorrer o estudo, no início do 2º semestre do ano letivo de 2011/12 mais concretamente no mês de Março de 2012, foi previamente passado um teste (Apêndice B) para se diagnosticar o seu conhecimento básico em Geometria. Este teste foi preparado tendo em atenção documentos de natureza internacional. O teste foi elaborado com questões retiradas tanto de exames nacionais e provas de aferição do 1º, 2º e 3º ciclos, como internacionais, TIMSS, PISA e teste de van Hiele. Também é verdade que no ensino básico os fracos resultados têm sido nos itens relacionados com a Geometria. Estes resultados vão ao encontro das motivações iniciais para este estudo. E foram estes os fatores que nos conduziram enquanto formadores de educadores matemáticos para este tema que carece de uma atenção especial – a Geometria.

O desenvolvimento de um conjunto de dezoito tarefas propostas para esta investigação foi uma construção gradual onde se pretendia avaliar os conhecimentos geométricos dos alunos e determinar os níveis de desenvolvimento do seu raciocínio em Geometria. Decidiu-se utilizar um conjunto diversificado de tarefas por um lado de acordo com os diferentes níveis de van Hiele e por outro que abrangessem os diferentes temas matemáticos tratados na UC de Geometria, com o objetivo de enriquecer e alargar o contexto onde se pretendia analisar os conhecimentos matemáticos elementares e caracterizar o pensamento dos futuros professores de matemática do ensino básico através da sua postura em relação à UC de Geometria.

Para se aferir o grau de evolução da turma e principalmente dos grupos-caso decidiu-se pela repetição do teste no final da UC de Geometria.

Neste estudo longitudinal, que decorreu ao longo de cinco meses, o objeto da investigação no contexto da turma foram os dois grupos-caso dessa turma, cada um deles constituído por duas alunas. Os participantes escolhidos aceitaram voluntariamente, com muito agrado e responsabilidade, participar neste estudo durante um semestre letivo.

Foi dada uma relevância particular ao papel da investigadora como principal fonte de recolha de dados. Existem autores (e.g., Merriam, 1988; Yin, 2009) que num estudo de caso comparam o papel do investigador ao de um detetive. Não só por não se limitar a recolher dados de um modo sistemático como também a analisar *peças de um puzzle* para formar uma imagem global que não conhece, procurando informações e evidências para que os dados tenham sentido.

Os dados recolhidos foram maioritariamente de natureza qualitativa tendo sido considerados alguns dados de natureza quantitativa na análise dos resultados do teste aplicado no início e no fim da UC de Geometria.

Na Figura 3 pode observar-se o cronograma das várias etapas de desenvolvimento do presente trabalho de investigação:

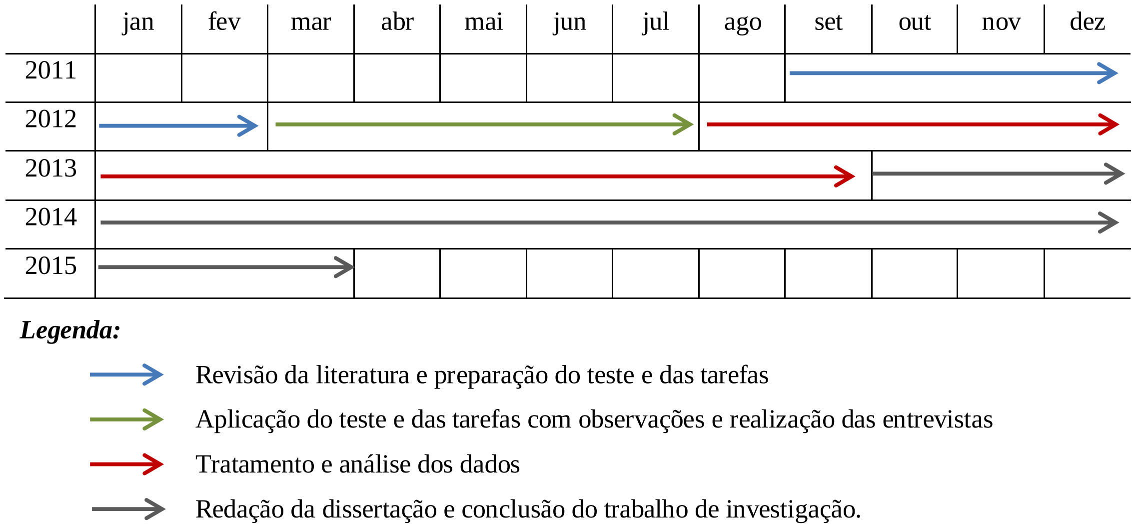


Figura 3. Cronograma do Trabalho Desenvolvido neste Estudo

A Recolha de Dados

Atendendo a que as opções tomadas foram para um estudo de natureza qualitativa no *design* estudo de caso, os métodos e instrumentos que se irão utilizar são os usados neste tipo de investigação: as observações, as entrevistas, os documentos escritos de diferente natureza e, em particular, as produções dos dois grupos-caso complementadas pelos registos áudio e vídeo.

Observações. As observações são uma das técnicas mais recomendadas neste tipo de estudo. Utilizam-se com a finalidade de descobrir interações complexas em contextos sociais e em ambiente natural. Permitem ao investigador observar o comportamento humano, em particular o que os participantes dizem e fazem num contexto natural. Através da observação o investigador acede às perspetivas dos participantes, entende as reações observadas e o que as motivou dando-lhes significado naquele momento. Não existiu qualquer guião porque as observações foram naturalistas. Durante e após cada observação a investigadora tomava as suas notas de campo – socorrendo-se de um bloco onde registava tudo o que lhe parecia ser capaz de enriquecer a investigação. Para Bogdan e Biklen (2013) depois de cada observação o investigador deve relatar por escrito o que ocorre descrevendo as pessoas, os objetos, os lugares, os acontecimentos, as atividades desenvolvidas e as conversas ocorridas, registando as ideias, as estratégias, as reflexões, os palpites bem como os padrões que vão emergindo.

Observou-se a turma nas aulas de prática-laboratorial onde as tarefas foram aplicadas e ao longo das aulas teórico-práticas para melhor compreender o contexto natural do estudo. Os dois grupos-caso, o objeto do estudo, eram atentamente observados durante a execução das tarefas propostas na investigação. O grau de envolvimento da investigadora assumiu um papel passivo sem qualquer interação com os participantes, uma vez que não se pretendia influenciar o decorrer do estudo. De acordo com Patton (2002) o investigador não deve manipular o fenómeno em estudo.

Entrevistas. As entrevistas são uma das técnicas de recolha de dados mais eficazes na obtenção de informação acerca dos fenómenos em estudo. Permitem ao investigador perceber os significados que os intervenientes no estudo atribuem à experiência tais como, afetos, opiniões e processos cognitivos. Mertens (2010) sublinha que as entrevistas se utilizam como forma de complementar as observações possibilitando que o investigador aprofunde o seu conhecimento ou tenha até acesso a outro tipo de informações que não foram observadas. O tipo de entrevista, influenciado pelo controlo que o investigador quer ter sobre as respostas dos intervenientes, varia quanto ao grau de estruturação (Lincoln & Denzin, 2005). Todas as entrevistas foram semiestruturadas dando aos grupos-caso a possibilidade de expressar os tópicos questionados do seu ponto de vista, moldando o conteúdo do questionamento (Bogdan & Biklen, 2013). Embora existisse um guião com os tópicos do que se pretendia abordar houve uma grande abertura na ordem pela qual as questões foram formuladas e uma liberdade para o aparecimento de novas questões ao longo da entrevista. Porém a existência de um conjunto de questões pré-determinadas facilitou a sistematização e posteriormente a análise dos dados (Cohen & Manion, 1994).

Neste estudo realizaram-se seis entrevistas respetivamente E1, E2, E3, E4, E5 e E6 (ver Apêndice D) a cada um dos dois grupos-caso. Quatro sobre as tarefas (E1, E2, E3 e E4), uma sobre o teste (E5) e outra sobre a UC de Geometria (E6). Este trabalho efetuado no âmbito da UC de Geometria focou-se sobretudo em três aspetos: nas tarefas, no teste e na UC de Geometria.

A primeira entrevista (E1) acontece ao fim de seis tarefas realizadas, a segunda (E2) ao fim de outras seis e a terceira (E3) após as restantes seis tarefas realizadas. As questões constantes do guião utilizado nestas entrevistas realizadas com cada grupo estavam orientadas para se compreender as dificuldades e identificar as perceções de cada um dos grupos-caso sobre as tarefas. Uma vez que só nove das dezoito tarefas implementadas foram objeto de estudo decidiu-se substituir as três entrevistas (E1, E2 e E3), que incluíam tarefas não analisadas neste estudo, por uma grande entrevista (E4) que olhasse de forma global para as nove tarefas objeto desta investigação. No entanto a informação contida nas três primeiras entrevistas relativa às tarefas investigadas foi recolhida e tratada, excluindo-se somente a que dizia respeito às outras nove tarefas excluídas deste estudo.

No final da UC de Geometria, antes da repetição do teste, aconteceu a entrevista (E5) onde se recolheu a opinião de cada um dos grupos-caso sobre o teste de modo a compreender as dificuldades que sentiram na sua realização.

A última entrevista (E6) teve por objetivo recolher as expetativas, as perceções, as opiniões e as dificuldades de cada um dos grupos-caso sobre a Geometria e em particular sobre a unidade curricular de Geometria.

Todas as entrevistas foram gravadas em áudio tendo-se procedido mais tarde à sua transcrição para não se perder nenhum dado que pudesse ser relevante para a análise de dados.

Documentos escritos. A relevância da recolha de documentos prévios ou elaborados no decorrer do estudo é reconhecida por vários autores. Ao contrário das observações e entrevistas o recurso a documentos escritos é considerado por Yin (2009) como um método não intrusivo, considerado fundamental para a confirmação ou não de evidências recolhidas por outros métodos. Neste estudo foram recolhidos e analisados documentos de natureza diversa: uns produzidos pelos alunos e outros elaborados pela investigadora.

Como já referido os documentos escritos que tiveram relevância neste estudo foram os testes e um conjunto de nove tarefas para além das notas de campo da investigadora.

Na primeira aula da UC de Geometria aplicou-se o teste aos dois grupos-caso e a toda a turma. Este teste (Apêndice B) teve por objetivo recolher informação sobre os conhecimentos elementares dos estudantes em Geometria. Este documento, que serviu para caracterizar os grupos-caso e a turma relativamente aos níveis de van Hiele e conhecimentos geométricos, será descrito em pormenor mais à frente neste mesmo capítulo.

Depois da realização do teste inicial estabeleceram-se os diferentes momentos de prossecução das tarefas. As tarefas (Apêndice C) foram construídas e desenvolvidas ao longo de toda a UC de Geometria. De um conjunto de dezoito tarefas implementadas apenas nove foram objeto de análise porque as restantes nove não traziam dados relevantes à investigação. A descrição das tarefas bem como a expetativa de resolução de cada uma delas encontra-se descrita mais à frente neste capítulo. Como já referido foram observações não participantes. Optou-se por uma observação livre sem guião para permitir registar tudo o que fosse relevante para o estudo. Após a exploração de cada uma das tarefas procedeu-se à recolha das folhas de resolução dos dois grupos-caso. Estes foram documentos essenciais para a identificação de alguns processos cognitivos dos participantes, a avaliação do nível de van Hiele, a análise do tipo de estratégias utilizadas, a deteção de algumas dificuldades e perceber que tipo de raciocínio era utilizado na sua (re)solução.

Não se tinha previsto a repetição do teste dado inicialmente mas perante os fracos resultados do teste inicial decidiu-se pela repetição do teste no final da UC de Geometria, permitindo aferir o grau de evolução dos dois grupos-caso e da turma.

Destacam-se também os registos escritos que a investigadora elaborou ao longo do estudo nomeadamente relatórios de observação de aulas e notas de carácter pessoal. Nos relatórios das aulas observadas procurou elaborar uma descrição do contexto focando reações dos alunos, questões colocadas, atitudes, dificuldades detetadas, tempo gasto na resolução das tarefas, interações no grupo, comentários e outros episódios considerados relevantes. Para além destes registos a investigadora elaborou notas pessoais resultantes de outras situações e atividades nas quais manteve contacto com os alunos, incluindo notas relativas à observação de alguns situações distintas que surgiram nas entrevistas e em conversas mantidas com as alunas dos dois grupos-caso.

Gravações áudio e vídeo. A utilização deste tipo de registos não é aceite da mesma forma pelos investigadores. Uns recomendam que as gravações se utilizem somente em casos excecionais (e.g., Lincoln & Guba, 2000), outros referem que as gravações são um meio indispensável na recolha de dados (e.g., Patton, 2002). O registo fiel dos dados é a grande vantagem deste método de recolha de dados porém temos de considerar o seu carácter intrusivo ponderando se a inibição dos participantes é prejudicial e limitativa da investigação. Por isso é expectável que se utilizem estratégias que anulem essas dificuldades, construindo relações de proximidade e confiança com os participantes de modo a que a utilização destes meios seja encarada como natural. Neste estudo notou-se alguma inibição durante as primeiras tarefas mas, porque se tornaram hábito, as gravações acabaram por ser consideradas como naturais. As aulas de exploração das tarefas foram todas registadas em vídeo e complementadas com a gravação áudio para que não se perdesse nenhum detalhe da interação entre as alunas dos dois grupos-caso. A transcrição e visionamento das gravações completaram as notas de campo da investigadora com situações pertinentes e não percetíveis durante as observações. Todas as entrevistas realizadas a cada um dos dois grupos-caso foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas e analisadas. A Figura 4 ilustra os procedimentos que foram utilizados para a recolha de dados na aplicação das tarefas.

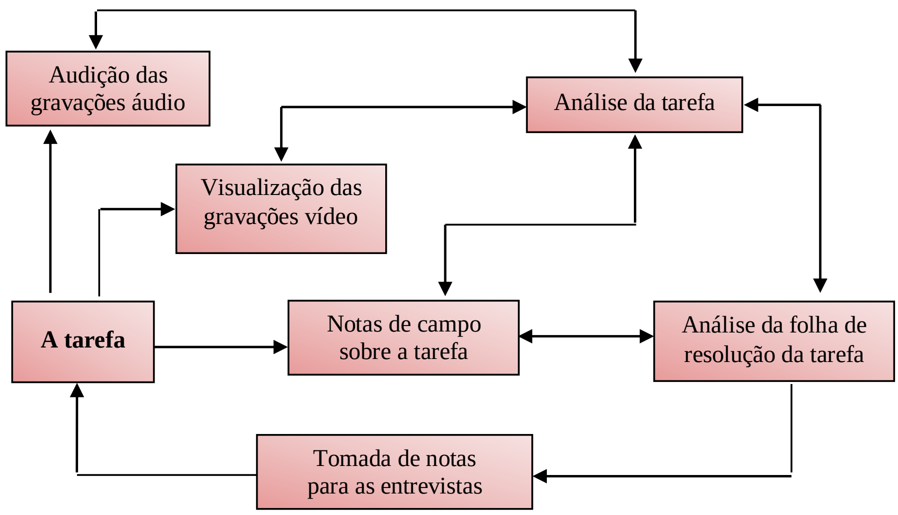


Figura 4. Procedimentos Usados na Recolha de Dados das Tarefas

Os dados recolhidos são na sua grande maioria de natureza qualitativa. Porém consideraram-se alguns dados de natureza quantitativa, sob a forma de percentagens na caracterização da turma e dos grupos-caso nas respostas às questões do teste, de modo a complementar aqueles dados. Yin (2009) e Stake (2009) recomendam que a melhor forma de se estudarem aspetos de natureza afetiva, tais como conceções e atitudes, são as observações prolongadas podendo estas ser complementadas com alguns instrumentos de natureza *mais numérica*.

A Análise dos Dados

A análise de dados é uma fase fundamental num trabalho de investigação deste género. Na investigação qualitativa este processo de análise exige a compartimentação dos dados a partir da identificação de padrões e temas. Segundo Patton (2002) este é um processo de simplificação dos dados face a um ambiente caótico de informação recolhida. É um processo que exige um trabalho árduo e criativo e rigor intelectual. Na análise de dados este estudo seguiu o modelo proposto por Huberman e Miles (1994).

A análise dos dados recolhidos divide-se, conforme Figura 5, em três direções: a *redução de dados* que é o processo de selecionar, abstrair, simplificar e transformar dados que decorrem de notas de campo, observações e transcrições (Huberman & Miles, 1994). Muito antes da recolha dos dados o investigador faz uma redução quando decide que casos, que questões a investigar e que abordagem vai utilizar para a recolha dos dados. No decorrer da recolha podem surgir outras reduções como sejam codificar, resumir e encontrar padrões sem desligar os dados do contexto em que estes ocorrem. Um outro aspeto importante da análise dos dados é o da *apresentação* organizada e condensada de toda a informação recolhida por forma a permitir evidenciar as conclusões. Como os dados qualitativos são quase sempre numerosos, a sua apresentação recorre a sínteses: quadros, gráficos, tabelas ou esquemas para apresentar a informação de modo acessível, compacto e organizado. O traçado de *conclusões* e de *verificações* são outro aspeto que estes autores incluem na análise dos dados e que entendem ser interativa e cíclica. No início da recolha dos dados o investigador pode começar logo a notar algumas regularidades e a procurar explicações para os dados que vão surgindo.

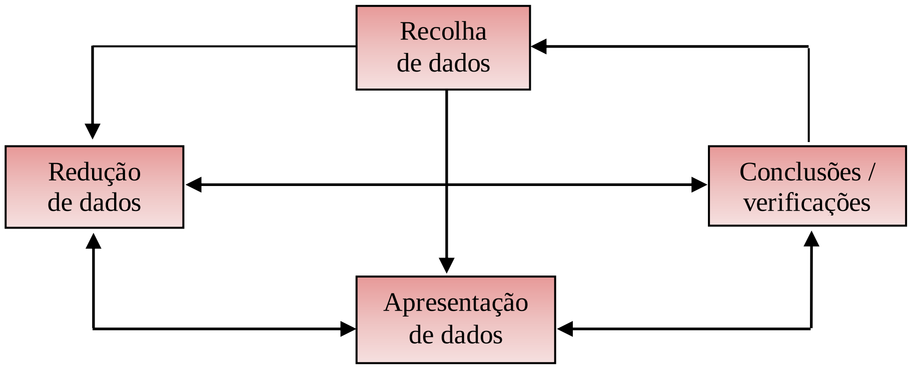


Figura 5. Componentes da Análise dos Dados: Modelo Interativo (adaptado de Huberman & Miles, 1994, p. 12)

A força dos dados qualitativos está no facto de estes retratarem casos vulgares que acontecem naturalmente em contextos naturais, serem detalhados e holísticos e serem recolhidos num longo período de tempo (Huberman & Miles, 1994). Isto permite ao investigador o estudo dos significados que os intervenientes colocam nos acontecimentos e no seu relacionamento com o meio social envolvente.

Os dados resultantes da observação de cada uma das tarefas bem como dos registos de gravação e filmagem das atividades dos alunos foram reduzidos de modo a identificar padrões e a classificar a informação para posterior interpretação. Numa primeira instância esboçou-se uma categorização baseada na literatura que foi gradualmente refinada ao longo do processo de recolha e análise de dados com a emergência de novas categorias.

Com base nas tomadas de notas, observações, gravações vídeo e áudio, entrevistas semiestruturadas e numa diversidade de documentos e artefactos foram feitas análises e interpretações sobre transcrições de registos de gravação áudio e vídeo à luz do modelo interativo de Huberman e Miles (1994) procurando ir de encontro às questões inicialmente enunciadas. Este processo iniciou-se no dia em que a investigadora entrou em cena prolongando-se até se conseguir estabelecer uma ordem e dar estrutura ao grande volume de dados que foram recolhidos ao longo do tempo e por diversos métodos.

Durante a recolha de dados por observação direta assumiu-se um papel que Adler e Adler (1998) qualificam como periférico. Estes autores defendem que adotar uma perspetiva "por dentro é vital para formar uma avaliação cuidada da vida do grupo humano [investigado] suficientemente perto dos seus membros para estabelecer uma identidade interna mas sem participar nas atividades internas do núcleo do grupo" (p. 85). Por isso se realizaram as observações no próprio meio natural, a sala de aula, para que as informações recolhidas fossem as mais corretas e rigorosas.

Nesta investigação considera-se o desempenho do estudante como sendo o modo como resolve os testes e as tarefas, ou seja, o conjunto de ações e/ou decisões que assume ao longo da sua prestação, as interações que são estabelecidas, as representações que utiliza e os conhecimentos que mobiliza.

A aplicação das tarefas teve como propósito caracterizar o conhecimento e pensamento geométrico num contexto de tarefas desafiantes, isto é, compreender como se relacionam os estudantes em relação à Geometria e perceber através das suas atitudes e perceções como encaram a Geometria.

Desde a recolha dos primeiros dados que se começaram a analisar até ao fim da sua recolha, utilizou-se um processo cíclico, voltando atrás na sua análise sempre que foi preciso esclarecer algum aspeto, com o intuito de garantir que todas as ideias relevantes fossem refletidas e contempladas.

A visualização dos registos realizados durante a execução das tarefas é um dos fatores potenciadores das reflexões da investigadora (Sherin & Van Es, 2005). Vale (2004) considera que "a observação é a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em actividade, em primeira mão, pois permite comparar aquilo que diz, ou o que não diz, com aquilo que faz" (p. 233). Em todas as tarefas a investigadora utilizou um bloco de notas onde registou os pontos determinantes e as situações observadas no decorrer das diferentes atividades e, para além de um registo de vídeo, utilizou também um gravador de voz para que não se perdesse nenhum momento importante. Teve o cuidado de descrever de forma objetiva, concreta, detalhada, concisa e descritiva todas as situações observadas durante a execução das tarefas (Gall, Borg & Gall, 1996).

Quando se avança para a descrição do estudo tem-se em atenção as recomendações de Wolcott (2002). Este autor refere que quando se está a tratar de dados para um relatório escrito se devem atender a três aspetos cruciais da investigação qualitativa: descrição, análise e interpretação. De acordo com os objetivos e características do investigador dar-se-á mais relevo a um ou outro dos três aspetos. Porém nesta investigação optou-se por uma descrição e uma análise-interpretação, numa ótica de equilíbrio entre os três aspetos sem privilegiar à partida nenhum em particular. No entanto houve momentos mais descritivos – quando se faz a descrição dos casos nomeadamente em relação ao conhecimento – e outros mais analíticos e interpretativos – quando se faz referência às relações entre os diversos domínios e pensamento dos intervenientes no estudo.

Como referido por Golafshani (2003) a combinação de métodos tais como observações, entrevistas, notas de campo e gravações leva à construção de realidades mais válidas, fiáveis e diversificadas. Enquanto Johnson (1997) refere que para melhorar quer a análise quer a compreensão da investigação a triangulação é um passo a dar pelos investigadores, de forma a envolverem outros investigadores na interpretação dos dados em tempo ou local diferente. Por isso em relação à veracidade do estudo e ao rigor com que foi efetuado a investigadora tentou assegurá-los através da utilização das seguintes técnicas: o seu envolvimento prolongado em todo o decorrer da unidade curricular, a integração de diversos métodos de recolha de dados, o recurso à elaboração regular de notas, o confronto dos participantes no estudo com o rascunho das transcrições de vídeo e de áudio, a proximidade da investigadora relativamente às situações em estudo e a constante troca de ideias com a professora Catarina.

Analisar os dados significa dar sentido e interpretar todo o material obtido na fase de recolha dos dados. Mas não há um único e bom sistema para a análise dos dados (Janesick, 1998). A investigação qualitativa depende de uma apresentação sólida dos dados descritivos para que o investigador consiga transmitir ao leitor a compreensão das experiências vividas no seu estudo (Vale, 2004). Procurou-se por isso realizar uma investigação pormenorizada que permanecesse fiel à verdade do fenómeno em estudo e privilegiasse a objetividade e a autenticidade. Mas como Vale (2004) sublinha um investigador qualitativo perante um “monte de dados” tem poucas orientações que o preservem da desilusão de ficar sozinho e poder tirar conclusões inválidas e irrealistas.

Teoricamente cada pensamento é único mas na análise dos dados recolhidos sobre a caracterização do conhecimento matemático e do pensamento dos alunos tentou-se “agrupar” e “hierarquizar” os seus conhecimentos e as suas dificuldades. Isto porque para se chegarem às categorias há que procurar regularidades. A criação de sistemas de categorias formais é a resposta do investigador à imensidão de dados que as investigações de natureza qualitativa originam. Segundo Patton (2002) a descoberta de padrões, temas e categorias é um processo que implica fazer julgamentos cuidadosos sobre o que é verdadeiramente significante e significativo nos dados. Mas a elaboração das categorias apesar de ser um processo intuitivo também é um processo sistemático orientado pela finalidade do estudo, conhecimentos do investigador e constructos manifestados pelos participantes no estudo (Lincoln & Guba, 2000). Para estes autores existem alguns cuidados a ter na construção de categorias pois devem: (1) refletir a finalidade da investigação; (2) ser exaustivas; (3) ser mutuamente exclusivas, ou seja, uma unidade não deve ser comum a mais do que uma categoria; (4) ser independentes, isto é, a distribuição de um determinado dado por uma categoria não deve afetar a classificação de outros dados; e (5) resultar de um princípio simples de classificação.

Com este enquadramento conceptual sobre a análise e a interpretação de dados de natureza qualitativa gizou-se um conjunto de procedimentos que incluem a definição das dimensões e categorias de análise.

Categorias de análise

A análise dos dados recolhidos não se baseou em nenhuma referência teórica específica pré-definida. Pretendeu-se organizar os dados recolhidos em categorias emergentes, decorrentes não só do problema em estudo e questões orientadoras enunciadas como da fundamentação teórica revista. A análise efetuada foi sobretudo indutiva pois as categorias foram emergindo dos dados recolhidos.

Para dar resposta às questões do estudo consideraram-se duas categorias: nível cognitivo (conhecimento geométrico e níveis de van Hiele) e nível afetivo (atitudes dos participantes). Nestas categorias, conforme Tabela 2, foram naturalmente surgindo os seus descritores.

Tabela 2. Categorias e Descritores de Análise

CATEGORIAS	DESCRITORES
NÍVEL COGNITIVO (Conhecimento)	conceitos geométricos e relação entre conceitos processos de raciocínio utilizados formas validação de resultados identificação de dificuldades níveis de van Hiele
NÍVEL AFETIVO (Atitudes)	satisfação perseverança empenhamento responsabilidade

Nos testes e nas tarefas descreve-se um conjunto de ações desenvolvidas pelos dois grupos-caso ao nível do seu desempenho cognitivo considerando processos de resolução, estratégias utilizadas, dificuldades identificadas e níveis de raciocínio geométrico. Em relação ao nível afetivo e optando-se pela definição *simples* de atitude consideram-se os seguintes descritores: satisfação, empenhamento, responsabilidade e perseverança. A *satisfação* revela que a tarefa consegue envolver o estudante na sua execução. A *perseverança* mostra a capacidade de se manter firme perante as dificuldades no propósito de alcançar a (re)solução. O *empenhamento* diz respeito à participação ativa na consideração e análise das situações que vão surgindo. A *responsabilidade* envolve a consideração cuidada do impacto das eventuais consequências de uma determinada ação que se pretende realizar.

A UC de Geometria, o Teste e as Tarefas

Em relação à licenciatura em Educação Básica vai-se descrever a unidade curricular de Geometria começando pela sua caracterização, sua organização e dinâmica. Para se perceber a turma onde se vai desenvolver o estudo passou-se um teste no início da unidade curricular de Geometria. O teste pretendeu somente avaliar o nível dos conhecimentos elementares de Geometria que os alunos traziam do ensino básico e secundário. No fim descrevem-se as tarefas que foram aplicadas no âmbito desta investigação e explicitam-se as expectativas que se tinha em relação a cada uma delas.

Caracterização da Licenciatura em Educação Básica

A LEB criada pelo decreto-lei nº 43/2007 de 22 de fevereiro veio substituir as anteriores licenciaturas bietápicas das variantes. Esta licenciatura destina-se a promover uma prática profissional em contextos formais e não-formais que capacite os licenciados para atividades profissionais no âmbito da ação educativa. Apresenta uma estrutura curricular abrangente e transversal que promove a aquisição de conhecimentos científicos e pedagógicos estruturantes permitindo obter, de acordo com o decreto-lei anteriormente referido, o número de créditos exigidos nas diferentes áreas do saber para inscrição nos mestrados de habilitação profissional para a docência como educadores de infância, professores do 1º ciclo do ensino básico e professores do 2º ciclo do ensino básico. Os objetivos gerais para a LEB são os seguintes: (1) proporcionar uma formação científica atualizada e estruturante para o exercício da atividade profissional em contextos educativos formais e não-formais; (2) fomentar o desenvolvimento de conhecimentos teóricos e fatuais acerca dos fenómenos educativos e formativos em contextos educativos diversificados; (3) contribuir para a aplicação, no âmbito de quadros conceptuais determinados, dos conhecimentos e da capacidade de compreensão adquiridos de forma a evidenciarem uma abordagem profissional ao trabalho desenvolvido na sua área vocacional e a colaborarem com respostas fundamentadas, inovadoras e criativas aos problemas concretos na conceção, desenvolvimento e avaliação de projetos de formação em contextos educativos; e (4) possibilitar o desenvolvimento progressivo de competências de observação e problematização, fomentando a investigação e transmissão eficaz de soluções para situações educativas e instalando a necessidade e a capacidade de aprendizagem ao longo da vida. Todas as UC de matemática da LEB são semestrais e em todos anos existem UC de matemática, conforme Tabela 3, distribuídas da seguinte forma:

Tabela 3. UC de Matemática da Licenciatura em Educação Básica

<table>
<tr><th></th><th>1º Semestre</th><th>2º Semestre</th></tr>
<tr><td>1º Ano</td><td>Cultura e Conhecimento Matemático</td><td>Linguagem, Lógica e Comunicação</td></tr>
<tr><td>2º Ano</td><td>Números e Estruturas</td><td>Geometria</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3º Ano</td><td rowspan="2">Matemática, Materiais e Tecnologias</td><td>Didática da Matemática</td></tr>
<tr><td>Matemática Elementar e Materiais
ou
Resolução de Problemas</td></tr>
</table>

No 1º ano a UC de *Cultura e Conhecimento Matemático* recorda conceitos matemáticos essencialmente algébricos do 1º, 2º e 3º ciclo. Esta UC pretende mobilizar adequadamente conceitos, conhecimentos e procedimentos matemáticos fundamentais; valorizar a comunicação matemática numa base compreendida e racional do conhecimento matemático; aplicar os conhecimentos elementares e ferramentas auxiliares à vida e à cultura do quotidiano. Na UC *de Linguagem, Lógica e Comunicação* os estudantes aplicam as linguagens formais na construção de modelos de interpretação da realidade; utilizam raciocínios dedutivos e indutivos na compreensão de conceitos matemáticos; e fundamentam conjeturas, raciocínios e conclusões em critérios de validade e consistência.

No 2º ano na UC de *Números e Estruturas* os estudantes adquirem conhecimento matemático no âmbito dos números e estruturas algébricas. Esta UC pretende estabelecer conexões entre os diferentes conhecimentos matemáticos e aplicar de maneira flexível estratégias de manipulação dos números e operações. Também explora relações e padrões numéricos e desenvolve a comunicação matemática numa base compreendida e racional do conhecimento. Na LEB a abordagem à *Geometria* inicia-se no 2º semestre do 2º ano. Por isso é que este estudo se desenvolveu numa turma do 2º ano da LEB. É nesta UC que são abordados pela primeira vez os conhecimentos sobre Geometria. A recolha de dados desta investigação iniciou-se em março de 2012 e prolongou-se até finais de julho de 2012. Neste estudo pretendeu-se identificar não só o conhecimento matemático e respetivo nível de van Hiele em relação aos conceitos estruturantes de Geometria dos dois grupos-caso, que são importantes para a estruturação do conhecimento que um futuro professor deve ter do que irá ensinar, como identificar as suas atitudes em relação à Geometria.

Caracterização, Organização e Dinâmica da UC de Geometria

A UC de Geometria possui uma carga total de trabalho de 168 horas (67,5 h+100,5 h), ao longo de 15 semanas, distribuída da seguinte forma: 67,5 horas de contacto divididas em 30 horas de aulas teórico-práticas (TP) e 37,5 horas de aulas práticas-laboratoriais (PL) + 100,5 horas de trabalho autónomo. À UC de Geometria correspondem seis créditos.

No programa da UC de Geometria (Apêndice A) estão definidas as seguintes competências: desenvolver a capacidade de usar a Geometria para analisar e resolver situações problemáticas, raciocinar e comunicar; mobilizar adequadamente conceitos, conhecimentos e procedimentos matemáticos fundamentais; aplicar os conhecimentos elementares e as ferramentas auxiliares à vida e à cultura do quotidiano; explorar científica e pedagogicamente materiais na aquisição e desenvolvimento do conhecimento da Geometria; e desenvolver atitudes positivas em relação à matemática que possibilitem a análise crítica, a inovação, a investigação pedagógica e a reflexão sobre a prática desenvolvida.

O programa desta UC aborda os seguintes conteúdos: Geometria no plano – o cálculo de áreas e o teorema de Pick; o cálculo de volumes; os lugares geométricos e o cálculo vetorial; Transformações geométricas – as isometrias no plano; as aplicações de semelhança e a simetria; Geometria no espaço – a posição relativa de retas no espaço; áreas de superfícies; volumes; Lugares geométricos; Visualização e representação – vistas de figuras tridimensionais e reconhecimento de figuras representadas por diferentes vistas. E ainda uma breve referência à Trigonometria do triângulo retângulo – razões trigonométricas do ângulo agudo; determinação de lados e ângulos de um triângulo retângulo; e aplicações de trigonometria.

Uma vez que a UC de Geometria tem uma grande diversidade de temas geométricos o presente estudo debruça-se apenas sobre os temas de Geometria mais relacionados com o 1º e 2º ciclo do ensino básico. Como a investigação é sobre o conhecimento elementar em Geometria este estudo direciona-se essencialmente para os conteúdos de Geometria no plano podendo ir até à Geometria no espaço.

A UC de Geometria possui duas tipologias de aulas: TP e PL. Nas aulas TP são ministrados os conceitos teóricos desta unidade curricular. Em relação às aulas TP o programa refere que os conteúdos serão abordados numa perspetiva científica mas constantemente apoiados em exemplos de aplicação e complementos de informação (debates, colocação de questões, pesquisa bibliográfica, entre outras), visando desenvolver nos alunos competências diversas em simultâneo com a aprendizagem de conceitos, destacando a aquisição de conhecimentos globalizantes que permitam o estabelecimento de conexões entre os diferentes conteúdos. Cada conteúdo apresentado terá enquadramento teórico e sínteses de carácter científico. Nas aulas PL os alunos são colocados perante várias propostas de trabalho para aplicarem os conhecimentos transmitidos nas aulas TP. Relativamente à metodologia das aulas PL o programa refere que estas aulas terão como base de trabalho o estabelecimento de uma dialética entre a informação científica fornecida nas aulas teórico-práticas e a exercitação e aplicabilidade dos conhecimentos e conceitos adquiridos pelos alunos. As propostas de trabalho terão numa primeira fase a resolução imediata para aquisição de destreza matemática e numa fase seguinte a resolução de problemas que possibilitem a familiarização dos métodos de resolução, rigor, formalização, espírito crítico, revisão, aplicação e o prolongamento dos conhecimentos e capacidades adquiridas. Nestas aulas serão utilizados materiais manipuláveis que facilitem a aquisição dos conhecimentos e a perceção da sua utilização enquanto futuros educadores.

A UC de Geometria no ano letivo de 2011/12 foi lecionada pela professora Catarina (nome fictício por uma questão de confidencialidade). As duas tipologias das aulas desta UC obrigaram a investigadora e a professora Catarina a reunirem com frequência de modo a agilizar o melhor momento de implementação de cada uma das tarefas. No início ficou decidido que o teste decorreria na 1ª aula desta UC. A investigadora esteve presente nalgumas das aulas TP e nas aulas PL onde as tarefas foram implementadas mas sempre como observadora não participante.

Uma vez que no capítulo da metodologia se fez uma caracterização da professora Catarina, da investigadora e dos dois grupos investigados ir-se-á agora proceder somente à caracterização da turma onde os grupos-caso estão inseridos.

A turma e os grupos

No início deste subcapítulo analisou-se a estrutura curricular da LEB quanto às diferentes UC de matemática. Mas para se compreender a seleção da turma onde ocorreu o estudo tem de perceber-se quando ocorre cada unidade curricular de matemática da LEB. Nesta licenciatura no 2º semestre do 1º ano a investigadora lecionou a UC de Linguagem, Lógica e Comunicação. No ano seguinte 1º semestre do 2º ano a investigadora lecionou a UC de Números e Estruturas, isto é, contactou com estes alunos durante um ano. Por isso conheceu muito bem todas as turmas da LEB que iniciaram a UC de Geometria. Deste modo a investigadora baseada num critério de bons informantes e disponibilidade pôde selecionar a turma onde ocorreu a investigação.

Nesta turma procedeu-se à escolha dos dois pares de alunos para constituíram os grupos que foram objeto desta investigação. Os grupos que se denominam por grupo AB (constituído pelos elementos A e B) e grupo MS (formado pelos elementos M e S) foram selecionados tendo em conta que se pretendiam estudantes boas informantes e responsáveis pela sua aprendizagem (interessadas). O grupo AB foi constituído por alunas com médias de 15 e 16 valores às UC de Linguagem, Lógica e Comunicação e de Números e Estruturas. Para o grupo MS escolheram-se duas alunas com médias respetivamente de 11 e 12 valores porque se pretendia uma média mais baixa de forma a existir algum nível de diferenciação entre os dois grupos. Não se consideraram as notas que as alunas obtiveram à UC de Cultura e Conhecimento Matemático (1º semestre do 1º ano) uma vez que esta nota iria distorcer a média. Esta UC não pretende mais do que fazer um nivelamento dos alunos relativamente à matemática que trazem do ensino básico e secundário. O que se tem verificado é que os alunos oriundos da área de ciências têm notas muito mais altas em relação aos que vêm de outras áreas. Mas isso não significa que esses alunos mantenham essas notas nas outras unidades curriculares. Por esse facto achou-se mais prudente não entrar em linha de conta com as notas que estes alunos tiveram na UC de Cultura e Conhecimento Matemático.

Com o objetivo de melhor se caracterizar a turma onde se desenvolveu esta investigação foi previamente passado um teste para diagnosticar o seu conhecimento em Geometria elementar.

O Teste

Na primeira aula da UC de Geometria foi passado o teste à turma das alunas que foram objeto desta investigação. Queria identificar-se que conhecimentos elementares em Geometria é que os alunos traziam da sua escolaridade básica e secundária. Por um lado pretendeu-se que os resultados deste teste fossem utilizados na construção de uma dinâmica construtiva e/ou alternativa de processos de ensino e aprendizagem mais sólidos, isto é, gerindo os conceitos em que os alunos mostravam maior debilidade na avaliação de conceitos geométricos elementares, nem sempre assimilados durante a sua escolaridade básica. Esta informação comporta uma dimensão formativa da avaliação do conhecimento do aluno, uma vez que tomada em linha de conta deve influenciar a intervenção científica e didática da UC de Geometria. Por outro lado considerou-se indispensável responsabilizar o aluno pela sua aprendizagem alertando-o para lacunas no seu conhecimento em Geometria, sublinhando o carácter informativo do teste na aferição desse conhecimento.

Como já referido o teste teve por base questões retiradas tanto de testes nacionais, provas de aferição do 1º, 2º e 3º ciclos como internacionais, TIMSS, PISA e teste de van Hiele. O teste foi validado por um painel de cinco especialistas doutorados, ligados à formação de professores e também foi recolhida a opinião da professora Catarina, docente que ia lecionar a UC de Geometria. Todos estes contributos permitiram um teste equilibrado. O teste tem vinte e cinco questões, dezoito das quais sobre Geometria no plano e sete sobre Geometria no espaço (Apêndice B). De acordo com o PMEB (ME, 2007) em relação aos conhecimentos e capacidades o teste era constituído por: 37% de perguntas sobre conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos; 26% de perguntas sobre raciocínio; 9% de perguntas sobre comunicação; e 28% de perguntas sobre resolução de problemas (Apêndice B). Na Tabela 4 verifica-se a percentagem de perguntas que o teste continha sobre Geometria no plano (65%) e sobre Geometria no espaço (35%).

Tabela 4. Questões do Teste por Conteúdos / Conhecimentos e Capacidades

CONHECIMENTOS e CAPACIDADES	CONTEÚDOS	
	Geometria no plano	Geometria no espaço
Conhecimento e Compreensão de conceitos e Procedimentos matemáticos	1 , 2 , 4 , 5 , 7 , 11 , 16 , 17 , 18	19 21 23
Raciocínio	3 , 9 , 13, 15	20 , 25
Comunicação	6 , 8	
Resolução de Problemas	10 , 12 , 14	22 , 24
	65%	35%

De modo a permitir uma caracterização do raciocínio geométrico destes alunos na Tabela 5 identificam-se os diferentes níveis de van Hiele de cada uma das vinte e cinco questões que o teste continha.

Tabela 5. Caracterização das Questões do Teste nos Níveis de van Hiele

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Níveis de van Hiele	1,2	2	2,3	1,2	3	1,2	1,2	2,3	1,2,3	1,2	1,2	1,2	1,2,3
Questões	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Níveis de van Hiele	1,2	1,2	2	1,2	2,3	2	1,2	2	1,2	1,2	1,2	2	

As informações recolhidas com a aplicabilidade do teste inicial permitiram orientar e sustentar as várias intervenções didáticas que se desenvolveram no decorrer da UC de Geometria.

De modo a se perceber o progresso destes alunos decidiu-se no final da UC repetir o teste que se tinha dado no seu início. A repetição do teste foi um instrumento muito útil para se analisar o grau de evolução que ocorreu no final da UC de Geometria.

As Tarefas e suas Expetativas de Resolução

O nosso estudo procura identificar e compreender como se relacionam os estudantes em relação à Geometria ao nível das suas atitudes e conhecimentos. Porque se está perante futuros potenciais candidatos a professores do ensino básico houve a preocupação de selecionar tarefas que tivessem em conta, para além de conhecimentos matemáticos elementares de Geometria, o seu conhecimento didático – o conhecimento da matemática para o ensino. Neste sentido as tarefas constituíram uma fonte importante de recolha dos dados.

Entendeu-se portanto construir um conjunto de tarefas que os alunos pudessem aplicar mais tarde na sua atividade docente. Daí que os conceitos geométricos e relações entre conceitos contidos nas tarefas sejam elementares. Para além disso houve a preocupação de se escolherem tarefas onde se privilegiou a componente visual pois a investigação mostra que o mecanismo de representação visual é mais direto e eficiente na representação e absorção do conhecimento (Hou & Pai, 2009). Houve a preocupação de procurar contextos visuais uma vez que o recurso ao raciocínio visual não é normalmente contemplado nas aulas de matemática.

Apesar de terem sido aplicadas muitas tarefas na turma aos dois grupos-caso no âmbito desta investigação só se irão analisar as tarefas que constam da Tabela 6.

Tabela 6. Tarefas, Conteúdos, Objetivos e Níveis de van Hiele

Tarefas	*Conteúdos*	*Objetivos*	*Níveis de van Hiele*
Encontra polígonos	reconhecer a forma de vários polígonos	visualizar e contabilizar os polígonos de uma figura	1 e 2
Os três quadrados	áreas e perímetros	encontrar todas as possíveis áreas e perímetros da região obtida com os três quadrados	1 e 2
Retângulos sombreados	área do retângulo e área do triângulo; números racionais	relacionar a área do retângulo com a área de cada triângulo em que este foi dividido, fazendo a transposição da Geometria para a Álgebra	1 e 2
As casas da Ana e da Beatriz	desigualdade triangular; lugar geométrico	compreender a desigualdade triangular e a noção de lugar geométrico	2
Área do triângulo através da do retângulo	área	deduzir a área do triângulo a partir da do retângulo e calcular a área do triângulo por decomposição	2 e 3
Definição de quadrado	propriedades dos quadriláteros	identificar a condição necessária e o suficiente na construção de uma definição	2 e 3
Construções no geoplano	perímetro; área; polígono convexo e polígono não convexo	analisar diferentes estratégias para o cálculo do perímetro e da área de diferentes figuras geométricas	2 e 3
Caixas para distribuição	planificações; áreas; volumes; mínimo múltiplo comum.	relacionar o volume de uma caixa com volumes de caixas mais pequenos e de tamanhos diferentes	1, 2 e 3
História geométrica	propriedades dos polígonos; propriedades dos sólidos	estabelecer conexões entre os diferentes conteúdos de Geometria e fazer a transposição da Geometria no plano para a Geometria no espaço	2 e 3

Para se perceber a oportunidade ou seja o momento próprio para cada tarefa observou-se também algumas aulas teórico-práticas. Deste modo sabia-se exatamente que conceitos matemáticos tinham sido dados de forma a planear, para cada uma das tarefas, o momento ideal para a sua aplicação na aula de prática laboratorial. Como já referido a metodologia das aulas PL define que estas terão como base de trabalho o estabelecimento de uma dialética entre a informação científica fornecida nas aulas teórico-práticas e a exercitação e aplicabilidade dos conhecimentos e conceitos adquiridos pelos alunos. Por isso foi importante o estabelecimento de uma estreita colaboração entre a investigadora e a professora Catarina na seleção e preparação de todas as tarefas bem como a determinação do momento ideal para a sua aplicação.

Em seguida faz-se uma descrição detalhada de cada tarefa bem como das suas expectativas.

Encontra polígonos[3]

Na Figura 6 encontra-se o enunciado desta tarefa.

Quantos polígonos é que encontram na seguinte figura?

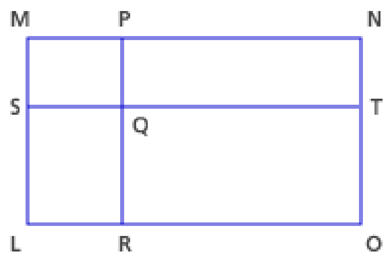


Figura 6. Tarefa Encontra polígonos

A tarefa pretende que o aluno reconheça os diferentes polígonos que estão contidos na figura apresentada. O objetivo é visualizar e contabilizar os polígonos convexos e não convexos contidos na figura.

O processo de raciocínio implícito nesta tarefa é o teste e a utilização de propriedades matemáticas.

É uma tarefa de análise classificada de nível 1 porque o aluno pode reconhecer na figura os polígonos apenas pela sua aparência física e não pelas suas propriedades. Porém será de nível 2 se o aluno reconhecer os polígonos pelas suas propriedades e classes (Crowley, 1987).

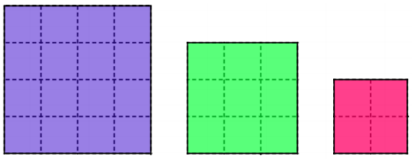
Esta tarefa exige com um grau de dificuldade mais acrescido o reconhecimento de polígonos não convexos, uma vez que a identificação dos polígonos convexos será mais intuitiva para estes alunos. Porém é expectável que os alunos não vão encontrar dificuldade na sua realização.

[3] Tarefa adaptada de http://www.learner.org/courses/learningmath/geometry/session10/part_a/finding.html e acedida em 03 de janeiro de 2012.

Os três quadrados[4]

O enunciado desta tarefa encontra-se na Figura 7.

Dados os três quadrados da figura, considere cada quadrícula como a unidade de área.



Utilizando os três quadrados, podendo sobrepô-los mas fazendo coincidir as suas quadrículas:

- Qual a menor e qual a maior área que consegue cobrir? Faça o registo de todas as figuras que tenham a sua área entre o valor mínimo e o máximo que encontrou. Justifique as impossibilidades que encontrar.
- Encontre a figura de perímetro máximo e a de perímetro mínimo e registe todas as figuras de perímetros intermédios entre o máximo e o mínimo. Justifique as impossibilidades que encontrar.

Figura 7. Tarefa *Os três quadrados*

O objetivo da tarefa é o de encontrar todas as possíveis áreas e perímetros que se podem formar com os três quadrados.

Nesta tarefa estão subjacentes três processos de raciocínio: a formulação, o teste e a justificação informal de conjeturas.

Porque é uma tarefa que envolve visualização e os conceitos envolvidos são o perímetro e a área do quadrado é classificada segundo van Hiele de nível 2.

Dados os conceitos geométricos básicos envolvidos na tarefa é nossa expetativa que os grupos irão resolvê-la com facilidade.

[4] Tarefa adaptada de http://ceure.buffalostate.edu/~csmp/CSMPProgram/Intermediate%20Disk/IG_I/IG-I%20Lesson%20 Plans/IGI-GStrand.pdf e acedida em 26 de janeiro de 2012.

Retângulos sombreados[5]

Na Figura 8 apresenta-se o enunciado desta tarefa.

Desenhe um retângulo;

- Divida os lados da altura em três segmentos de reta congruentes;
- Divida os lados da base em quatro segmentos de reta congruentes;
- Desenhe segmentos de reta a partir do ponto imediatamente abaixo do vértice superior esquerdo do retângulo para cada um dos pontos que determinou anteriormente;
- Sombreie o primeiro triângulo, depois o terceiro, quinto, sétimo, nono e décimo primeiro, começando no canto superior esquerdo e movendo-se no sentido dos ponteiros do relógio.

Que área do retângulo é que sombreou?

Figura 8. Tarefa *Retângulos sombreados*

Esta tarefa trabalha a noção de área do retângulo e triângulo e a de número racional. O objetivo é relacionar a área total do retângulo com a área de cada uma das partes em que este foi dividido, relacionando a Geometria com os números racionais.

Os processos de raciocínio presentes na tarefa são: a utilização de propriedades matemáticas e a justificação formal.

Segundo van Hiele esta é uma tarefa de nível 2. De nível 2 porque nesta tarefa é pressuposto que se identifique a base e a altura dos triângulos obtidos e que se perceba a implicação que terão na comparação das suas áreas.

Por ser uma tarefa nada convencional em que se relacionam dois ramos da matemática é expectável que os grupos vão encontrar alguma dificuldade na sua execução.

As casas da Ana e da Beatriz[6]

A Figura 9 contém o enunciado desta tarefa.

[5] Tarefa adaptada de uma proposta do NCTM (2012).

[6] Tarefa adaptada de Carmo (2009).

A Ana e a Beatriz são duas amigas da mesma turma que vivem respetivamente a 7km e 4km da escola quer frequentam. Qual é a distância entre a casa da Ana e a casa da Beatriz?

1. Será possível as duas amigas viverem a 10km uma da outra?
2. Será possível as duas amigas viverem a 12km uma da outra?
3. Será possível as duas amigas viverem a 2km uma da outra?
4. Qual poderá ser a distância máxima entre as casas das duas amigas? E a mínima?
5. Qual é, afinal, a distância entre as casas das duas amigas?
6. Que propriedade geométrica utilizou na resolução da tarefa?

Figura 9. Tarefa *As casas da Ana e da Beatriz*

Esta tarefa trabalha a construção de triângulos, a desigualdade triangular e os lugares geométricos. O objetivo pretendido é trabalhar a construção de triângulos relembrando o teorema da desigualdade triangular e a noção de lugar geométrico.

Os processos de raciocínio envolvidos na tarefa são o teste e a utilização de propriedades matemáticas.

Segundo van Hiele esta é uma tarefa de nível 2 porque para a sua resolução o aluno tem de estabelecer relações entre as diferentes hipóteses de localização das casas e da escola.

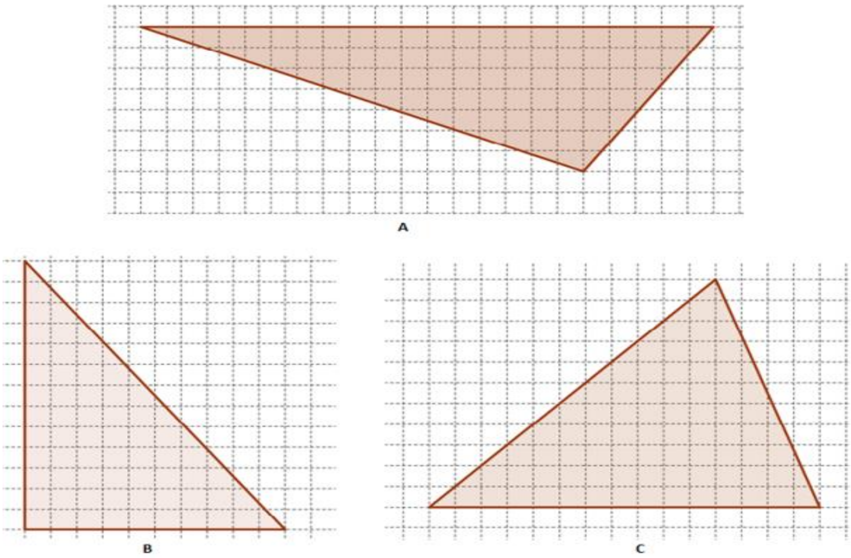
Relativamente ao desempenho dos alunos nesta tarefa é nossa expectativa de que terão alguma dificuldade na sua realização.

Área do triângulo através da do retângulo[7]

O enunciado da tarefa é apresentado na Figura 10.

[7] Tarefa adaptada de Herbel-Eisenmann e Otten (2011).

Na Figura considere os três triângulos A, B e C.



1. Decomponha o triângulo A de modo a formar triângulos que, rodados, permitam construir um retângulo equivalente ao triângulo original. Deste modo, determine a área do triângulo A a partir da área de um retângulo. Faça o mesmo para os triângulos B e C. Verifique de quantos modos diferentes é possível determinar, a partir da área do retângulo, a área dos triângulos A, B e C. Faça tantas explorações, para cada um dos triângulos, quantas consiga. Depois, descubra a área dos triângulos A, B e C, geométrica e analiticamente, considerando que a unidade de área é uma quadrícula.
2. Consegue chegar ao mesmo resultado da alínea anterior, sem ser por decomposição dos triângulos? Em caso afirmativo, mostre como.

Figura 10. Tarefa Área do triângulo através da do retângulo

A tarefa pretende que o aluno deduza a expressão da área do triângulo a partir da área do retângulo. O objetivo é deduzir a expressão da área do triângulo a partir da área do retângulo.

O processo de raciocínio que está subjacente nesta tarefa é o de testar e utilizar propriedades matemáticas e justificar formalmente a dedução da fórmula da área do triângulo a partir da do retângulo.

De acordo com os níveis de van Hiele e segundo Crowley (1987) é uma tarefa de nível 3 uma vez que o aluno tem de deduzir empiricamente a expressão da área do triângulo a partir da do retângulo.

Os conceitos de área do triângulo e do retângulo envolvidos pressupõem que esta será uma tarefa fácil.

Definição de quadrado[8]

O enunciado desta tarefa encontra-se na Figura 11.

Escreva uma definição de quadrado que comece por:

a) Um quadrado é um quadrilátero ____.
b) Um quadrado é um paralelogramo ______________________________________.
c) Um quadrado é um retângulo ____.
d) Um quadrado é um losango ____.

Figura 11. Tarefa *Definição de quadrado*

A tarefa pretende identificar se o estudante tem a noção do que é necessário e suficiente para a construção de uma definição. No caso presente pede-se a definição de quadrado baseada na de outros quadriláteros. O objetivo é a construção de uma definição matemática com as características que lhe são inerentes.

Os processos de raciocínio intrínsecos a esta tarefa são: a formulação de questões e a utilização de propriedades matemáticas.

Baseado em Crowley (1987) esta é uma tarefa de nível 3 de van Hiele porque é compreendida a hierarquia dos quadriláteros e as definições adquirem significado.

Dados os conceitos envolvidos na tarefa serem sobre as propriedades dos quadriláteros a nossa expectativa é a de que os alunos terão muita dificuldade na sua realização.

Construções no geoplano

A Figura 12 apresenta o enunciado desta tarefa.

[8] Tarefa retirada de Crowley (1987).

Construa no Geoplano um ou vários polígonos respeitando as condições indicadas no quadro, sendo A o valor da área da figura e P o perímetro. Quando são pedidos dois ou mais polígonos, estes devem ser não congruentes. Para cada polígono representado, apresente a área e o perímetro. Considere ainda a distância a dois pinos consecutivos, na horizontal, como a unidade de comprimento.

1. Dois polígonos com $A < 1$	2. Quadrado com $A = 5$
3. Paralelogramo não retângulo com $A = 6$	4. Polígono com $P = \sqrt{2} + \sqrt{5} + 3$
5. Polígono com $P = 3\sqrt{2} + 4$ e $A = 3{,}5$	6. Dois polígonos, um não convexo e um convexo, com $P = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
7. Triângulo retângulo com $A = 1\frac{1}{2}$	8. Polígono com $P = 2 + \sqrt{18} + \sqrt{10}$

Figura 12. Tarefa *Construções no geoplano*

A tarefa trabalha a noção de perímetro e de área de diferentes polígonos com determinadas propriedades onde se incluem a de polígono convexo e não convexo e pretende analisar as diferentes formas utilizadas para o cálculo desses perímetros e áreas. O objetivo é analisar as diferentes estratégias para o cálculo do perímetro, com recurso ao teorema de Pitágoras, e para o cálculo da área pretendida fazê-lo por enquadramento ou por decomposição.

Os processos de raciocínio envolvidos nesta tarefa são o teste e a utilização de propriedades matemáticas.

Segundo van Hiele esta é uma tarefa de nível 3. De nível 3 porque segundo Crowley (1987) o aluno tem estabelecer relações entre áreas e perímetros e identificar propriedades em polígonos específicos.

A expectativa em relação ao desempenho dos alunos na prossecução desta tarefa é a de que terão alguma dificuldade.

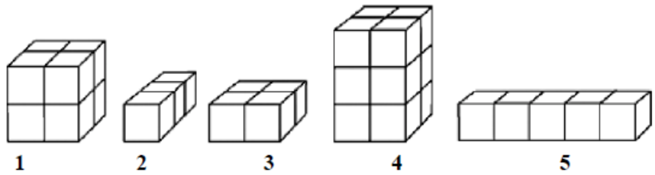
Caixas para distribuição[9]

A Figura 13 apresenta o enunciado desta tarefa.

[9] Tarefa adaptada de http://www.learner.org/course/teachingmath

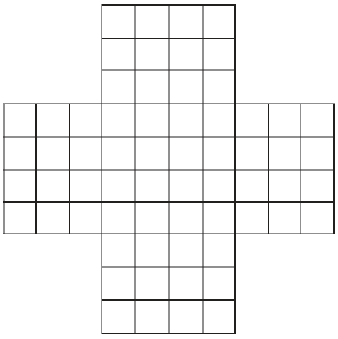
A fábrica de rebuçados Candy utiliza caixas de diferentes tamanhos para os embalar e utiliza caixotes para enviar as diferentes caixas para distribuição.

Observe que as caixas de diferentes tamanhos para os rebuçados são todas prismas retangulares.



1. Utilizando apenas um tipo de caixa de cada vez, quantas caixas de cada tipo (1-5) enchem completamente o caixote A?

Caixote A



Caixa	Número de caixas
Caixa 1	
Caixa 2	
Caixa 3	
Caixa 4	
Caixa 5	

2. Descreva a estratégia utilizada para determinar o número de caixas de tipo 2 que permitem encher o caixote A.
3. Note que nem todas as embalagens (1-5) enchem completamente o caixote A. Desenhe o menor caixote possível (em termos de volume) que pode ser utilizado na distribuição de todas as embalagens de rebuçados (1-5).
4. Será que há mais do que um tamanho de caixote onde se possa despachar as diferentes caixas? Explique as suas razões.
5. Generalize as relações entre as dimensões de qualquer caixa e o volume de um caixote que possa ser completamente cheio com caixas iguais a ela.

Figura 13. Tarefa *Caixas para distribuição*

Esta tarefa para além da noção de mínimo múltiplo comum trabalha as noções de área e volume, a visualização e a planificação de uma caixa aberta. O objetivo é definir volumes e relacionar o volume de um caixote com os volumes de caixas de diferentes tamanhos.

Os processos de raciocínio presentes nesta tarefa são a formulação e o teste de conjeturas e a apresentação de justificações informais.

Segundo van Hiele esta é uma tarefa de nível 3. É uma tarefa de nível 3 porque o aluno tem de estabelecer relações entre diferentes tipos de caixas, isto é, diferentes sólidos e o caixote.

Em relação ao desempenho dos alunos na prossecução desta tarefa é expectável de que irão ter alguma dificuldade na sua execução.

História geométrica[10]

O enunciado desta tarefa encontra-se na Figura 14.

1. Desenhe um triângulo retângulo isósceles.
2. Desenhe uma nova figura que tenha uma propriedade em comum com o triângulo. Que propriedade usou?
3. Desenhe agora uma outra figura com uma propriedade em comum com a que acabou de desenhar. Que propriedade usou? Continue até onde conseguir.

Figura 14. Tarefa *História geométrica*

A tarefa pretende que o aluno vá avançando no reconhecimento das propriedades de figuras ou sólidos geométricos e na descoberta de características comuns em diferentes figuras ou sólidos. No desenvolvimento desta tarefa foi referido que um dos objetivos era chegar às três dimensões.

O processo de raciocínio induz a utilização de propriedades matemáticas.

De acordo com van Hiele é uma tarefa de nível 3 uma vez que o aluno tem de estabelecer relações entre as propriedades da figura e entre diferentes figuras (Crowley, 1987).

Não há qualquer expetativa de que os grupos cheguem a sólidos geométricos.

[10] Tarefa retirada de Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008).

CAPÍTULO IV

OS CASOS

Este capítulo é dedicado aos dois grupos-caso que neste estudo se designam pelos grupos AB e MS. Inicia-se cada um deles com uma breve apresentação e caracterização. Analisa-se de seguida o percurso ao longo do estudo em particular - o seu sentir – as suas atitudes - e o seu desempenho no teste e nas tarefas propostas na UC de Geometria. Para uma melhor compreensão dos grupos de alunos selecionados faz-se primeiramente uma caracterização sucinta da turma onde estes se inserem. Optou-se por organizar cada um dos grupos-caso nas seguintes seções: (1) Um retrato; (2) O grupo ao longo dos testes; (3) O grupo ao longo das tarefas; (4) O grupo ao longo da UC de Geometria; e (5) Síntese.

A Turma

Para o nosso estudo considerou-se a turma constituída apenas por vinte e três alunos. Isto porque cinco dos vinte e oito alunos desistiram logo após a realização do primeiro teste ou seja ao fim de aproximadamente um mês de aulas.

Caracterização da Turma

A turma onde decorreu a investigação é uma turma maioritariamente feminina. É também uma turma bastante "viva", muito alegra e unida. Sobressai um espírito de interajuda entre todos o que não é comum nas restantes turmas. O facto de existirem alunas muito extrovertidas e com vocação para o ensino terá contribuído para esta união invulgar. A diferença de idades entre a aluna mais nova (dezoito anos) e mais velha (vinte e quatro anos) é de seis anos.

Dos vinte e três alunos dois são rapazes (9,5%) e vinte e uma são raparigas (90,5%). Nesta licenciatura a característica de uma minoria de rapazes tem sido constante desde 2007/08. Em março de 2012 quando esta investigação se inicia a média das idades dos alunos da turma é de vinte anos.

Analisando a prestação da turma nas três UC de matemática anteriores à de Geometria verifica-se que existem seis alunos com pelo menos uma UC em atraso. Um deles tem duas UC em atraso. Para além disso, existem quatro alunos que estão a repetir a UC de Geometria. Dois destes alunos chumbaram duas vezes à UC de Geometria e os outros uma vez. Este insucesso talvez se possa explicar porque apenas dez alunos da turma provêm da área das ciências, os outros dez provêm das humanidades e os restantes três do ensino profissional. Mas também pode ser fruto de durante a escolaridade básica alguns deles nunca terem tido *positiva* nas disciplinas de matemática.

Apesar das dificuldades da turma em relação às UC de matemática no geral é uma turma motivada, mostrando-se sempre muito participativa e interessada em superar esses mesmos obstáculos.

No final da avaliação da UC de Geometria a média das notas da turma foi de 11,4 valores com cinco alunos chumbados (< 10 valores), tendo as notas oscilado entre 1 e 19 valores (Apêndice E).

Em seguida analisa-se o desempenho dos alunos da turma ao longo do teste e das tarefas aplicadas nesta investigação.

Desempenho Global da Turma nos Testes

Para se compreender a prestação dos alunos no teste elaborou-se a Tabela 7 onde se resumiram os resultados da turma (em percentagem) distribuídos pelos conhecimentos e capacidades transversais. Em 989 pontos possíveis obtiveram-se somente 378 ou seja 38% de respostas corretas em média.

Tabela 7. Resultados da Turma no Teste

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES			
Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	*Raciocínio*	*Comunicação*	*Resolução de problemas*
38%	39%	35%	39%

Apesar de poder ser discutível a forma como se agruparam as questões pelos conhecimentos e capacidades, tomou-se como uma referência para se aferir o nível de alguns dos conhecimentos elementares a Geometria.

Os resultados denotam um baixo nível na comunicação e na aquisição dos conhecimentos elementares. Nenhuma das capacidades transversais e conhecimentos exigidos no PMEB (ME, 2007) atingiu sequer os 40% de sucesso. Foi na comunicação que se encontrou a maior debilidade destes alunos com apenas 35% de respostas corretas. Nos conhecimentos e compreensão de conceitos e conhecimentos matemáticos somente 38% dos alunos responderam bem. E na resolução de problemas e questões que envolviam raciocínio tiveram 39% de sucesso.

No teste o desempenho global da turma corresponde a uma classificação de 7,6 valores numa escala de 0 a 20 (Apêndice E).

A turma não era objeto de investigação. Por esse facto não foi feita uma tipificação de cada uma das vinte e cinco respostas de cada um dos alunos da turma nos diferentes níveis de van Hiele. No entanto verificou-se que no início da UC de Geometria a turma consegue realizar bem cento e setenta e duas das quatrocentas e trinta e sete questões de nível 2 e apenas trinta e oito das cento e trinta e oito questões de nível 3 de van Hiele (Apêndice E). Estes resultados vêm confirmar um dos pressupostos deste estudo que é a grande fragilidade existente nestes futuros professores, estando os resultados concordantes com os obtidos pelos alunos nos diferentes níveis do ensino básico.

Com o intuito de se analisar como evoluíram estes alunos ao longo da UC de Geometria decidiu-se no final da UC repetir o teste que se tinha aplicado no seu início. Veja-se então qual foi o desempenho da turma no momento da repetição do teste.

Para se perceber a evolução que os alunos tiveram no final da UC de Geometria elaborou-se a Tabela 8 onde se resumem os resultados da turma (em percentagem) distribuídos pelos conhecimentos e capacidades transversais. Em 989 pontos possíveis obtiveram-se 575 ou seja em média as respostas corretas foram de 58%.

Tabela 8. Resultados da Turma na Repetição do Teste

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES			
Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	*Raciocínio*	*Comunicação*	*Resolução de problemas*
59%	57%	59%	58%

No fim da UC de Geometria nenhuma das capacidades transversais e conhecimentos exigidos no PMEB (ME, 2007) ficou abaixo dos 57% de sucesso. Onde se tinha verificado a grande debilidade, na comunicação, registou-se a maior percentagem de sucesso, 59%, a que corresponde uma evolução de 68%. E essa mesma percentagem de 59% também se verificou nos conhecimentos e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos, o que equivale a uma evolução de 55% em relação aos resultados do teste inicial. Nas questões de raciocínio e na resolução de problemas houve uma taxa de sucesso respetivamente de 57% e de 58%, o que corresponde a um crescimento entre 46% e 49%.

O teste realizado no fim da UC de Geometria poderia eventualmente ter sido constituído por tarefas diferentes e do mesmo tipo e nível do teste aplicado no início da UC. Porém atendendo ao fraco desempenho dos alunos não nos pareceu relevante outro novo teste e optou-se pela repetição do teste inicial.

Na repetição do teste o desempenho global da turma corresponde a uma classificação de 11,6 valores numa escala de 0 a 20 (Apêndice E). Pode então afirmar-se que no fim da UC de Geometria estes alunos cresceram em média 52% em relação aos conhecimentos que traziam do ensino básico e secundário, e nas diferentes capacidades transversais e conhecimentos do PMEB (ME, 2007) atingiram apenas entre 57% e 59%. Estes resultados corroboram o que Tempera (2010) observou na sua investigação. O tipo de conhecimentos em Geometria dos futuros professores não é linear e a formação inicial parece não estar a conseguir dar resposta às suas dificuldades. Este autor concluiu que a frequência de uma UC de Geometria na LEB parece não dar resposta a todas as dificuldades dos estudantes da formação inicial.

No que ao raciocínio geométrico diz respeito a turma consegue realizar bem duzentas e sessenta e nove das quatrocentas e trinta e sete questões de nível 2 mas apenas sessenta e três das cento e trinta e oito questões de nível 3 de van Hiele. Pode dizer-se que no final da UC de Geometria e em relação ao teste inicial a turma evoluiu no seu raciocínio geométrico pois consegue resolver mais 50% das questões de nível 2 e de nível 3 de van Hiele.

Desempenho Global da Turma nas Tarefas

Ao longo das tarefas realizadas durante as aulas os alunos demonstraram um diversificado conjunto de competências entre as quais são de salientar o reconhecimento de formas geométricas simples bem como a aptidão para descrever figuras geométricas, a aptidão para realizar construções geométricas simples e também para identificar propriedades de figuras geométricas.

Em alguns momentos notou-se que existia uma competição entre grupos mas esse facto até nos pareceu saudável. Talvez isso acontecesse pelo facto de estarem a ser investigadas e por isso interpretou-se como sinónimo de uma responsabilidade acrescida. A turma mostrava estar sempre interessada e preocupada em dar o seu melhor.

Durante a execução das tarefas a professora provocava muitas vezes a lembrança de conceitos geométricos básicos visto que se verificava que muitos desses conceitos não estavam corretamente estruturados no pensamento destes alunos. Isto vem reforçar o que se tinha detetado na análise dos resultados do teste inicialmente aplicado à turma. A Geometria parecia ter sido tratada de um modo superficial ou simplesmente tratada como mero cálculo de áreas e de volumes onde se utilizavam fórmulas apropriadas.

Na tarefa *Encontra polígonos* era pedido para os alunos encontrarem todos os polígonos de uma dada figura (Apêndice C). Só o grupo AB conseguiu encontrar os treze polígonos. Todos os outros grupos da turma afirmavam que só existiam nove polígonos incluindo o grupo MS mas este, quando a professora lhes diz que eram mais, conseguiu encontrar os outros quatro. Depois de saberem que existiam mais polígonos alguns grupos conseguiram visualizar os treze polígonos demorando tempo a encontrá-los. No entanto outros tiveram de recorrer à ajuda da professora. Isto é relevante dado o grau de dificuldade da tarefa ser muito elementar e mostrar as debilidades destes alunos. Daí que se possa afirmar que no início da UC de Geometria o reconhecimento/visualização se destaca aqui como uma das grandes debilidades dos alunos desta turma.

Noutra das tarefas *Os três quadrados* (Apêndice C) o conceito de perímetro suscitava em vários grupos algumas dúvidas principalmente no seu valor máximo. Os alunos não consideravam que dois quadrados unidos somente pelos seus vértices formassem uma figura. Mesmo recorrendo à manipulação dos três quadrados havia grupos com muita dificuldade em compreender o motivo de não existirem áreas de valor ímpar e só com a ajuda da professora Catarina conseguiam formular a justificação de tal facto.

O desempenho da turma na tarefa *Definição de quadrado* (Apêndice C) foi muito fraco. Muitos mostraram que não estão preparados para construírem uma definição. Em vez disso faziam recorrentemente uma justificação. Demonstraram também muitas lacunas ao nível do relacionamento de conceitos matemáticos mostrando estar mais habituados a uma matemática de memorização em vez de uma matemática de entendimento. E isso foi visível nos fracos resultados obtidos na UC de Números e Estruturas (ver Tabela 8) onde o raciocínio é fundamental para a resolução de problemas.

Foram muitas as dificuldades sentidas em toda a turma na tarefa das *Construções no geoplano* (Apêndice C). Logo na primeira das propostas que solicitava o desenho de dois triângulos com a área $1/2$ a maioria dos alunos dizia que só era possível desenhar um triângulo nessas condições. Então a professora Catarina deixando passar algum tempo para não influenciar os outros alunos dirigiu-se para o quadro onde desenhou um dos outros possíveis triângulos com a referida área. Superada esta primeira dificuldade seguiu-se outra com a descoberta de um quadrado com área 5. Grande parte dos alunos andou à procura de um número racional que multiplicado por ele próprio desse 5. Tentaram de tudo e alguns chegaram a dizer que não era possível porque entre 2 e 2,5 nenhum número multiplicado por ele próprio dava 5. Como nenhum aluno conseguia pensar corretamente nesta questão a professora Catarina vai ao quadro, desenha um quadrado de lado 5 e relembra o teorema de Pitágoras. Ouvem-se então alguns Ah! – "não me tinha lembrado dos números irracionais". Quando surge o desenho do paralelogramo não retângulo com a área 6 muitos dos alunos não sabiam como o iriam obter. Outros porém visualizam o paralelogramo como dois triângulos e desenhavam dois triângulos obtusângulos de área 3. Na resolução das alíneas em que os comprimentos dos lados eram representados por números irracionais continuam a constituir uma dificuldade para alguns dos alunos. Muitos deles mesmo oriundos da área das ciências demonstram que não sabem lidar com um numeral misto apesar do conceito ter sido trabalhado na UC de Cultura e Conhecimento Matemático do ano letivo anterior.

Uma vez que o objeto desta investigação não era a turma mas as duas díades de alunas, não se reuniram os elementos necessários e suficientes para se avaliar em que nível de raciocínio geométrico de van Hiele é que a turma se situava.

O Grupo-caso AB

O grupo AB é formado por duas alunas que tiveram de média respetivamente quinze e dezasseis valores às UC de Linguagem, Lógica e Comunicação e de Números e Estruturas.

Um Retrato do Grupo AB

O grupo AB foi constituído por duas alunas que já trabalhavam em grupo e tinham por hábito discutirem as suas ideias, principalmente quando os seus pontos de vista não coincidiam. Uma das alunas provém da área das humanidades com Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e a outra da área das ciências com Matemática A. No entanto este facto nunca foi motivo de submissão de uma em relação à outra.

Para além de extrovertidas e alegres estas alunas possuíam uma característica pouco comum - demonstravam uma curiosidade matemática natural e estavam muito seguras da sua vocação para professoras do 1º e 2º ciclo do ensino básico. Embora a aluna proveniente da área das ciências tentasse quase sempre fazer prevalecer o seu ponto de vista, dado o seu excesso de confiança por ter mais anos de matemática, a aluna proveniente da área das humanidades discordava sempre que não percebia. Esta aluna só aceitava um conceito ou uma ideia se a percebesse e só admitia estar errada se entendesse o porquê do seu erro. A sua curiosidade tinha uma necessidade inata de perceber e a sua espontaneidade levava-a a expor as suas ideias mesmo não tendo a certeza se estavam ou não corretas. Embora tivessem perfis diferentes funcionavam bem e gostavam muito de trabalhar em conjunto.

A expetativa que tinham em relação à UC de Geometria era a de que, para além de irem gostar, ia ser mais simples que outras unidades curriculares de matemática por ser, na sua ideia, uma matéria essencialmente mais prática. Afirmam gostar de Geometria e só lamentam que tivesse sido pouco abordada na escolaridade anterior.

Encararam sempre esta investigação como um desafio e numa postura de constante preocupação em serem excelentes elementos e proporcionarem uma boa investigação. Ao longo do estudo foram sempre questionando a investigadora sobre se a sua prestação estava ou não a dar frutos para a investigação.

Na execução das tarefas mostraram-se muito empenhadas e tiveram sempre a preocupação de explicitarem todos os seus pensamentos e raciocínios, embora se notasse algum constrangimento sempre que existiam dificuldades, o que mesmo assim permitiu uma boa recolha de dados para esta investigação.

O Grupo AB ao longo dos Testes

Vamos agora analisar o desempenho que o grupo AB teve no teste e na repetição do teste de modo a podermos comparar e avaliar a sua evolução na UC de Geometria.

O teste

Em 86 pontos possíveis o grupo AB teve 45 pontos (Apêndice F) que correspondem a uma classificação de 10,5 numa escala de 0 a 20 ou seja 52% de respostas corretas, distribuídas pelos conhecimentos e capacidades conforme Tabela 9.

Tabela 9. Resultados do Grupo AB no Teste

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES			
Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	*Raciocínio*	*Comunicação*	*Resolução de problemas*
44%	50%	38%	71%

Constata-se que o grupo AB teve uma prestação acima da média da turma apesar de não ter resolvido oito das cinquenta questões dos testes. Este grupo mostra uma boa capacidade na resolução de problemas e um raciocínio médio apesar do fraco desempenho nas questões ligadas à comunicação. É no conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos que o grupo apresenta o seu segundo desempenho mais fraco. E é na resolução de problemas que o grupo atinge o seu melhor resultado.

Nível cognitivo

Para se avaliar o conhecimento geométrico das duas alunas que constituem o grupo AB elaborou-se a Tabela 10. Neste quadro identificam-se os conceitos geométricos e as relações entre conceitos bem como as dificuldades que se conseguiram identificar.

Tabela 10. Conceitos e Dificuldades do Grupo AB no Teste

Questão	Conceitos geométricos e relação entre conceitos	Dificuldades identificadas
1	Definição de polígono	-------
2	Congruência de ∆/s; ∑ dos ∢/s internos do ∆	A. Congruência de ∆/s
3	Relação entre os ∢/s internos do ∆ retângulo e do ∆ equilátero	B. Erro de cálculo mental – a amplitude seria de 60^0 e não 45^0 A. e B. Justificação confusa
4	Desenho das alturas de vários triângulos	B. Confunde altura com mediana
5	Elementos mínimos para a construção de um ∆	B. Identificar os elementos mínimos para a construção do ∆
6	Polígono inscrito ou polígono circunscrito	A. Identificar condições mínimas; Linguagem matemática
7	Identificar os eixos de simetria do retângulo	-------
8	Relacionar as prop/s do quadrado com as do retângulo	A. Prop/s dos quadriláteros
9	Relacionar as prop/s do losango quanto às suas diagonais e seus ∢/s	A. Prop/s dos quadriláteros
10	Cálculo do perímetro de uma figura com recurso ao Teorema de Pitágoras	A. Teorema de Pitágoras. B. Erro de cálculo ($\sqrt{50}+\sqrt{50}=\sqrt{100}$)
11	Identificação de ∢/s	Identificar ∢ não convexos
12	Área do retângulo; Relação entre áreas	-------
13	Área e perímetro de uma figura	Estabelecer relação entre conceitos independentes
14	Perímetro do círculo	Confunde área do círculo com perímetro do círculo
15	Rotação de 180^0 de uma figura geométrica no plano	-------
16	Lugares geométricos	Lugares geométricos
17	Translação no plano	Translação no plano
18	Seno de um ∢	A. Seno de um ∢
19	Definição de poliedro	A. Conceito de poliedro B. Identificar poliedros
20	Planificação de um cubo	-------
21	Pirâmide e seus constituintes	-------
22	Volume do cilindro e do paralelepípedo	-------
23	Planificação de um cilindro	-------
24	Retas complanares e perpendic/s; Área do quadrado; Volume da pirâmide	B. Retas perpendiculares
25	Identificar um sólido através do nº arestas e através do nº vértices	B. Confunde figura geométrica com sólido geométrico

Parece importante relembrar para melhor se compreender os resultados do grupo AB que o elemento A é proveniente da área das humanidades e o elemento B da área das ciências.

Este facto podia ter originado alguma diferenciação nos seus resultados. Porém tal não se veio a verificar uma vez que, convertendo a classificação do teste para uma escala de 0 a 20 valores, o elemento A obtém 9,8 e o elemento B consegue 10,7.

Analisando o comportamento do grupo AB, através da Tabela 10, constata-se que o grupo mostra algumas fragilidades, a saber: na segunda questão naturalmente que o elemento A mostra desconhecer a noção de congruência; mas já na quarta questão o elemento A consegue desenhar corretamente as alturas de todos os triângulos enquanto o elemento B, no triângulo obtusângulo e num outro fora de uma posição convencional, indica uma mediana como sendo a sua altura; na quinta questão o elemento A identifica perfeitamente quais os elementos mínimos para se construir um triângulo, mas estranhamente o elemento B seleciona uma opção errada – três lados e um ângulo; nas oitava e nona questões o elemento A mostra desconhecer as propriedades dos quadriláteros; e porque não se recorda do teorema de Pitágoras o elemento A não consegue resolver a décima questão; na questão 11 nenhum dos elementos identificou ângulos não convexos e também não conseguiram identificar todos os ângulos convexos; na questão 13 ambos os elementos A e B confirmam a conjetura que nem sempre é verdadeira e cuja resposta se pode tipificar na dada pelo elemento B - *Está correto, pois ao aumentarmos o perímetro, terá também de aumentar um dos lados logo a área que esta figura ocupa será maior*. É fácil errarem questões como esta porque é uma formulação que é nova para estes alunos. Exige muito mais do que simples conhecimento sobre Geometria. Envolve conhecimento didático e de avaliação da apresentação oral ao nível da retroação. O aluno não tem por hábito refletir sobre as suas aprendizagens, interrogar-se ou *contestar* o que o professor está a ensinar. E a matemática exige muita *curiosidade*; na questão 14 confundem a fórmula da área do círculo com a do seu perímetro; desconhecem a noção de lugar geométrico (questão 16) e não conseguem visualizar uma translação no plano (questão 17); naturalmente o elemento A desconhece a noção de seno de um ângulo (questão 18) bem como a de poliedro (questão 19); na questão 24 o elemento A consegue visulizar e identificar uma reta complanar e perpendicular a outra, enquanto o elemento B identifica uma reta complanar mas que não é perpendicular à reta dada; a questão 25 pede que se identifique um sólido com 16 vértices - o elemento A identifica uma pirâmide em que a base é um polígono com 15 lados e o elemento B desenha um octógono e regista que o sólido é um *octógono*. Parece inapropriado que uma estudante com 12 anos de matemática considere um octógono como sendo um sólido.

O grupo AB mostra falhas ao nível de alguns dos conceitos geométricos elementares e suas relações, a saber: congruência de triângulos; alturas do triângulo; elementos mínimos para a construção de um triângulo; polígono inscrito; polígono circunscrito; propriedades dos quadriláteros; teorema de Pitágoras; identificação de ângulos não convexos; estabelecimento de uma relação entre conceitos independentes – área e perímetro do retângulo; confusão entre a fórmula do perímetro e da área do círculo; lugares geométricos; translação no plano; seno de um ângulo; conceito de poliedro; retas complanares e perpendiculares; e confusão entre uma figura geométrica e um sólido.

Com os resultados alcançados no teste inicial e de acordo com Gutiérrez et al. (1991) o grupo AB evidencia ter um completo grau de aquisição (89%) do nível 1, um alto grau de aquisição do nível 2 (67%) e um grau intermédio de aquisição do nível 3 (52%) de van Hiele (Apêndice F). No entanto no nível 3 o desempenho do elemento B foi muito superior (70%) ao do elemento A (33%) isto é o elemento B evidencia um alto grau de aquisição do nível 3 enquanto o elemento A atinge somente um baixo grau de aquisição neste mesmo nível de van Hiele. Este resultado não nos surpreende uma vez que o elemento A só teve matemática até ao 9º ano de escolaridade.

Nível afetivo

Quando lhe foi proposto realizar um teste para aferir os seus conhecimentos básicos em Geometria o grupo AB tinha a sensação de que ia fazer má figura pois, como afirmado na entrevista, "já não nos lembrávamos de nada" (E5[11]).

Embora existissem muitas questões que não sabiam resolver consideraram que o tempo dado para a realização do teste foi suficiente. E referiram que a maior dificuldade sentida pelo grupo foi na questão que pedia para se colocarem no papel do professor e comentarem a conjetura que o aluno tinha apresentado (pergunta nº 13 do teste – ver Apêndice B).

A repetição do teste

Agora vai analisar-se a prestação que o grupo AB teve na repetição do teste no final da UC de Geometria. Em 86 pontos possíveis o grupo obteve 75 (Apêndice F) ou seja 87% de respostas corretas, distribuídas pelos conhecimentos e capacidades conforme Tabela 11.

[11] Elementos recolhidos durante as entrevistas realizadas (E), neste caso, na quinta (5).

Tabela 11. Resultados do Grupo AB na Repetição do Teste

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES			
Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	*Raciocínio*	*Comunicação*	*Resolução de problemas*
75%	95%	100%	92%

Verifica-se que o grupo AB teve uma excelente evolução atingindo mais de 90% de sucesso na capacidade de comunicação, no raciocínio e na resolução de problemas. É no conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos que o grupo AB apresenta o seu desempenho menos bom mas com 75% de respostas corretas.

Na repetição do teste o grupo AB só não responde a uma das cinquenta questões dos testes. Fazendo a conversão para uma escala de 0 a 20, a nota da prestação do grupo é de 17,4 valores (Apêndice F). No fim da UC de Geometria o grupo AB teve em média uma evolução de 71%. E isso está patente na Tabela 12 onde as dificuldades identificadas são muito poucas refletindo a evolução que o grupo AB teve no final da UC de Geometria. O elemento A mostra uma grande evolução de 84% – sobe de 9,8 para 17,7 valores – e o elemento B evolui apenas 52% – subindo de 11,2 para 17,2 valores (Apêndice F).

Tabela 12. Conceitos e Dificuldades do Grupo AB na Repetição do Teste

Questão	Conceitos geométricos e relação entre conceitos	Dificuldades identificadas
1	Definição de polígono	-------
2	Congruência de Δ/s; ∑ dos ∢/s internos do Δ	-------
3	Relação entre os ∢/s internos do Δ retângulo e do Δ equilátero	-------
4	Desenho das alturas de vários triângulos	-------
5	Elementos mínimos para a construção de um Δ	-------
6	Polígono inscrito ou polígono circunscrito	A. Linguagem matemática específica
7	Identificar os eixos de simetria do retângulo	B. Identificar eixos de simetria
8	Relacionar as prop/s do quadrado com as do retângulo	-------
9	Relacionar as prop/s do losango quanto às suas diagonais e seus ∢/s	-------
10	Cálculo do perímetro de figura com recurso ao Teorema de Pitágoras	-------
11	Identificação de ∢/s	A. Identificar ∢ não convexos
12	Área do retângulo; Relação entre áreas	-------
13	Área e perímetro de uma figura	-------
14	Perímetro do círculo	-------
15	Rotação de 180^0 de uma figura geométrica no plano	-------
16	Lugares geométricos	B. Lugar geométrico
17	Translação no plano	-------
18	Seno de um ∢	Seno de um ∢
19	Definição de poliedros	-------
20	Planificação de um cubo	-------
21	Pirâmide e seus constituintes	-------
22	Volume do cilindro e do paralelepípedo	-------
23	Planificação de um cilindro	-------
24	Retas complanares e perpendic/s; Área do quadrado; Volume da pirâmide	B. Retas perpendiculares
25	Identificar um sólido através do nº arestas e através do nº vértices	-------

As dificuldades que o grupo AB ainda apresenta mostram uma debilidade do elemento B relativamente à sua capacidade de visualização, uma vez que continua a errar as questões 7, 11, 16, 18 e 24 – eixos de simetria do retângulo; ângulos não convexos; lugares geométricos;

e reta complanar e perpendicular a outra. Por sua vez o elemento A mostra alguma dificuldade na linguagem matemática específica, no conceito de seno de um ângulo e na identificação de ângulos não convexos.

Visto que a UC de Geometria não abordou trigonometria nem trabalhou a noção de ângulo pode concluir-se que no fim da UC de Geometria o elemento A conseguiu superar todas as suas dificuldades com sucesso. Quanto ao elemento B parece que os erros se devem a alguma dificuldade ao nível da visualização.

No final da UC de Geometria os resultados que o grupo AB alcança na repetição do teste revelam um grau de aquisição completa (100%) do nível 1, do nível 2 (87%) e também do nível 3 (85%) de van Hiele.

A investigação conclui que após programas intensivos de Geometria os estudantes conseguem subir apenas um grau na aquisição dos níveis de van Hiele. Ora este resultado é bem mais animador pois no nível 3 o grupo evoluiu de um grau de aquisição intermédio para um grau de completa aquisição.

O Grupo AB ao longo das Tarefas

Neste grupo não havia uma líder mostrando-se ambas as alunas igualmente empenhadas na resolução de todas as tarefas. Mas quanto à postura já eram diferentes. O elemento A tomava sempre a iniciativa de ser ela a registar a resolução da tarefa. Esta aluna demostrava uma alegria muito grande na aprendizagem. O elemento B assumia mais o papel de assistente pois como tinha mais três anos de matemática notava-se o seu receio de errar. Mas apesar disso colaborava no raciocínio das tarefas.

Tarefa – Encontra polígonos

A facilidade com que o grupo AB reconhece todos os polígonos vem confirmar a expetativa de que esta não seria uma tarefa complicada.

Nível cognitivo

Em termos de conteúdos geométricos a tarefa solicita o reconhecimento da forma de polígonos convexos e não convexos. O grupo AB inicialmente visualiza e contabiliza apenas os polígonos convexos. No momento de darem a tarefa por terminada o elemento A exclama, apontando para o enunciado da tarefa (ver Figura 15): "Espera! Se taparmos isto não existem mais polígonos?!"

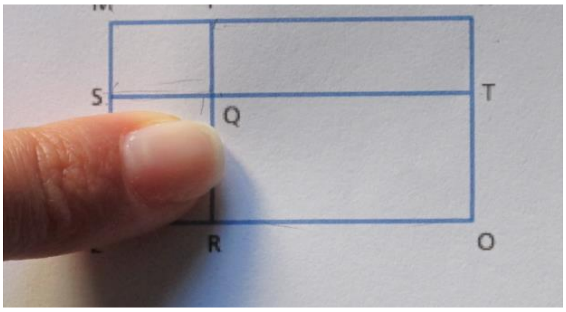


Figura 15. Descoberta dos Polígonos não Convexos

Mediante a observação o grupo consegue com sucesso completar a tarefa identificando, para além dos convexos, os polígonos não convexos. Este foi o único grupo da turma que sem a ajuda da professora Catarina visualizou os treze polígonos – nove retângulos (convexos) e quatro hexágonos (não convexos) .

O processo de raciocínio utilizado na identificação dos vários polígonos foi o uso das propriedades matemáticas que caracterizam os polígonos convexos e não convexos. O grupo teve também a preocupação de testar a validação do seu resultado, desenhando todos polígonos numa folha de papel com a indicação das letras respetivas em cada um dos seus vértices. Não foram identificadas quaisquer dificuldades na prossecução desta tarefa.

Segundo van Hiele esta é uma tarefa de nível 2. O grupo AB foi o único que conseguiu visualizar todos os polígonos sem a intervenção da professora. Mostra por isso estar no nível 2 com um grau de completa aquisição do nível 1 de van Hiele.

Nível afetivo

Pelo facto do grupo AB ter resolvido esta tarefa com demasiada facilidade sobressai aqui alguma *insatisfação*. Parece que fazem a tarefa como um mero exercício rotineiro.

O grupo AB achou esta tarefa demasiado simples e por isso pouco interessante (E1[12]). *No novo olhar sobre a tarefa* realçam a importância que a figura teve na identificação dos polígonos (E4[13]).

[12] Elementos recolhidos durante as entrevistas realizadas (E), neste caso, na primeira (1).
[13] Elementos recolhidos durante as entrevistas realizadas (E), neste caso, na quarta (4).

Tarefa – Os três quadrados

As dificuldades para encontrar o perímetro máximo leva-nos a crer que esta seria uma tarefa mais difícil e morosa se não tivessem a possibilidade de manipular os quadrados. O desempenho deste grupo não veio confirmar a nossa expetativa de que esta seria uma tarefa sem grandes dificuldades.

Nível cognitivo

O grupo AB chega facilmente ao valor da maior e da menor área possível respetivamente 16 unidades de área (ua) e $29\,ua$, registando essas duas situações. Movimentam os três quadrados e o elemento B formula a seguinte conjetura: "por mais que mudemos as posições dos quadrados a maior área coberta é sempre igual a 29". E o elemento A completa-a afirmando: "a menor área é 16". Seguidamente partem ao encontro das áreas intermédias. Não conseguindo encontrar nenhuma situação com $17\,ua$ tentam outra manipulação dos quadrados e após algumas tentativas infrutíferas deduzem essa impossibilidade registando: "quando sobrepomos os quadrados azul e vermelho, as áreas possíveis são 16, 18 e 19, uma vez que só conseguimos colocar $2\,ua$ ou $3\,ua$ para fora do quadrado azul". Este grupo revela empenhamento na procura da solução. Em relação às outras figuras de áreas compreendidas entre $17\,ua$ e $29\,ua$ não têm qualquer dificuldade e fazem um registo de todas as outras onze figuras. O grupo AB encontra as áreas intermédias, estabelecendo uma relação entre os valores que maximizam e minimizam a área mas manipulando sempre os três quadrados. Em todo este processo as justificações das várias conclusões assumem um caráter informal.

Para encontrar o perímetro mínimo o grupo AB coloca os três quadrados sobrepostos e responde que são 16 unidades de comprimento (uc). Depois respondem erradamente que o perímetro máximo é $26\,uc$ colocando os três quadrados seguidos como mostra a Figura 16. Este grupo não está consciente que sobrepondo os lados dos quadrados diminuem o perímetro da figura. Há notoriamente uma associação ao conceito de área devido à resolução da alínea anterior, o que as leva a dar uma resposta incorreta sobre o valor de perímetro máximo.

Figura 16. Figura de Perímetro 26 uc

Nos perímetros intermédios encontram uma impossibilidade quando começam a procurar uma figura com 17 uc. Justificam essa conjetura registando que: "não dá porque ao colocar 2 ua de fora do quadrado azul (mínimo de ua possível), aumentamos 2 uc ao perímetro". Depois um dos elementos do grupo diz que não se pode construir uma figura com o perímetro de valor 18 uc. Isto porque estava influenciada pelo que tinham feito na alínea anterior do cálculo da área. Porém o outro elemento numa atitude empenhada procura a solução e manipulando os três quadrados constrói uma figura de 18 uc, conforme Figura 17.

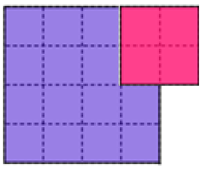


Figura 17. Figura de Perímetro 18 uc

Ao procurarem uma figura com 19 uc justificam outra impossibilidade e generalizam, escrevendo: "não dá porque ao colocarmos mais 1 ua de fora, aumentamos 2 uc ao perímetro".

Quando o grupo AB estava a pensar numa figura com 20 uc uma delas diz que o perímetro máximo não pode ser de 26 uc porque quando movimenta os quadrados consegue uma figura de perímetro 28 uc (ver Figura 18). Nota-se que o grupo AB tem a preocupação de ir comparando o que já fez com as novas situações que lhes vão surgindo, como forma de validar os resultados a que iam chegando.

Figura 18. Figura de Perímetro 28 uc

Depois perguntam à professora se os quadrados podem ficar juntos só pelos vértices porque deste modo obtêm uma figura de perímetro maior, $36\,uc$, como se observa na Figura 19. As dúvidas relativamente ao valor do perímetro máximo devem-se ao facto do grupo AB estar preocupado em representar unicamente polígonos *simples*[14] em vez de quaisquer figuras geométricas.

Figura 19. Figura de Perímetro $36\,uc$

Continuam na procura das outras figuras e com relativa facilidade encontram todas as que têm valor de perímetro par entre $16\,uc$ e $36\,uc$, não conseguindo encontrar nenhuma cujo valor do perímetro fosse ímpar. Justificam este facto escrevendo: "vamos conseguir encontrar todos os perímetros pares entre $16\,uc$ e $36\,uc$ e não vamos conseguir encontrar os perímetros ímpares. Apesar de não aumentarem proporcionalmente, para aumentarmos o perímetro com estas figuras temos de aumentar a área. Desta forma ao aumentarmos $1\,ua$ aumentamos obrigatoriamente $2\,uc$. Assim como o nosso perímetro mínimo é $16\,uc$, número par, sempre que aumentamos $2\,uc$ vamos obter o número par seguinte".

A possibilidade de manipulação dos quadrados aliada à utilização das noções não formais de área e de perímetro (por contagem sem recorrerem às fórmulas da área e do perímetro) foram fatores determinantes para a resolução desta tarefa. A comparação dos vários resultados que o grupo vai obtendo surge nesta tarefa como modo de validação dos valores obtidos.

Para além de manipular e visualizar o grupo AB conseguiu relacionar as características dos perímetros e áreas dos quadrados e estabelecer relações entre eles. Considera-se por isso que este grupo se encontra num grau intermédio no nível 2 e atinge completamente o nível 1 de van Hiele.

[14] Para este grupo a imagem conceptual de polígono refere-se unicamente ao *simples*.

Nível afetivo

Nesta tarefa o grupo manifesta uma atitude de *empenhamento* na procura de todas as soluções, visível na participação ativa e na análise das várias situações que vão surgindo.

Esta foi considerada pelo grupo como uma das tarefas mais simples (E1).

Olhando novamente para a tarefa o grupo AB referiu que:

- A determinação dos valores para a área foi muito mais fácil que para o perímetro – lembrou o elemento B.
- A área é mesmo fácil porque é imediata, vê-se – disse o elemento A.
- Sim porque a área é uma coisa que preenche. Mas o perímetro é só uma linha – acrescentou o elemento B.
- Pois é e por isso é que a visualização do perímetro não é tão imediata – disse o elemento A.
- E a manipulação das figuras foi muito importante – realçou o elemento B.
- Sim, é verdade. E o quadriculado dos quadrados facilitou imenso a tarefa – acrescentou o elemento A (Obs[15]).

Mas apesar do cálculo das áreas ter sido relativamente fácil o grupo pensou que no cálculo dos perímetros iriam ter a mesma facilidade, o que não se veio a verificar como se comprova no diálogo anterior. Dizem ainda que a manipulação do material (os quadrados) bem como a utilização de uma folha de papel quadriculada facilitaram muito a prossecução desta tarefa (E4).

Tarefa – Retângulos sombreados

Por ser uma tarefa nada convencional onde se relacionam dois ramos da matemática (teoria dos números e Geometria) e porque o grupo AB demorou cerca de $1h$ na sua execução, a expectativa de alguma dificuldade veio a confirmar-se.

A tarefa pedia que se desenhasse um retângulo e após várias divisões devidamente assinaladas no enunciado da tarefa o grupo AB chegou à Figura 20. Pretendia-se saber que fração da área do retângulo é que se tinha sombreado.

[15] Elementos recolhidos nas observações efetuadas, na audição das gravações e na visualização dos vídeos.

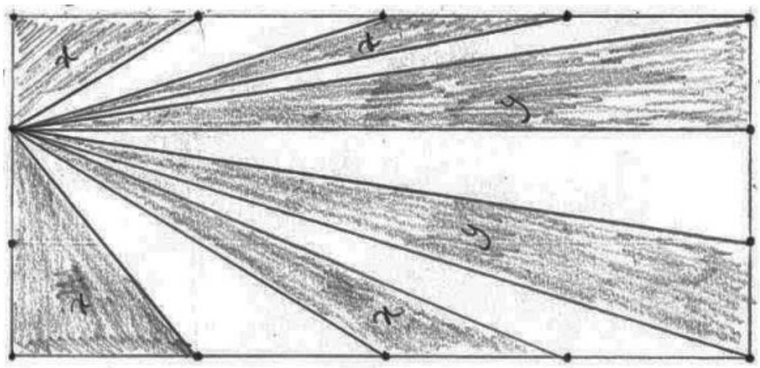


Figura 20. Retângulo Inicialmente Sombreado

Nível cognitivo

Nesta tarefa olhando para a figura o grupo especula sobre ela dizendo:

- A parte sombreada é de $2/3$ - afirmou o elemento A.
- Ou $3/4$ – disse o elemento B.
- Mas temos mais de metade da área do retângulo sombreada – afirmou o elemento A.
- Porque é que disseste $2/3$ e não $3/4$? – perguntou o elemento B.
- Não sei, calculei a olho – respondeu o elemento A (Obs).

Este diálogo mostra que ambos os elementos do grupo veem que a área sombreada é mais de metade da área do retângulo – o que evidencia uma boa capacidade de visualização.

Pouco depois o elemento A consegue visualizar a existência de triângulos com a mesma área porque segundo afirma possuem a mesma base e a mesma altura. Consegue também relacionar a área dos triângulos mais pequenos com a dos intermédios dizendo que estes têm o dobro da área porque como a base é a mesma, se a altura é o dobro a área também o é. Porém o grupo AB acaba por chamar a professora para esta lhes confirmar o raciocínio.

Após várias tentativas a relacionarem a base e a altura dos diferentes triângulos obtidos e utilizando algum cálculo algébrico chegam a afirmar que a fração da área sombreada é de $7/5$. A professora Catarina interroga-as sobre qual foi para elas a unidade de área. As alunas respondem que não tinham ligado ao facto do retângulo representar o todo. Então a professora intervém e diz-lhes que se a unidade é a área do retângulo como é que a área sombreada no interior do retângulo pode ser maior do que a própria área do retângulo, uma vez que a fração $7/5$ representa um valor superior à unidade. O erro que o grupo comete foi calcular a razão entre a área da zona sombreada e a área da zona não sombreada quando o que se pretendia era a razão entre a área da zona sombreada e a área do retângulo.

Perante o erro o grupo muda a estratégia adotando agora um processo algébrico. Começam por identificar todos os triângulos que têm a mesma área e designam por a os triângulos mais pequenos, designam por $2a$ os triângulos intermédios cuja área é o dobro dos mais pequenos e por $4a$ os triângulos maiores (ver Figura 21) cuja área é quádrupla da dos mais pequenos.

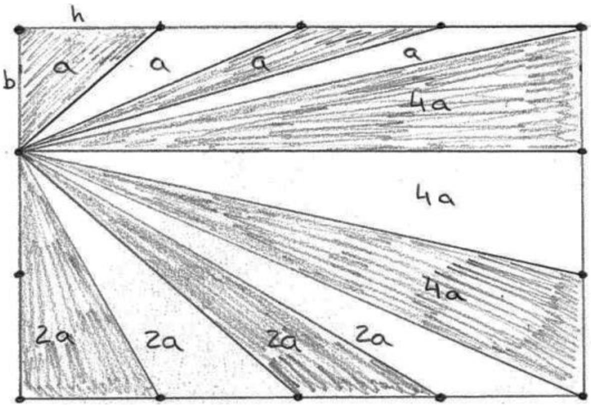


Figura 21. Retângulo Sombreado Utilizado na Resolução da Tarefa

Após a atribuição destas designações o grupo particulariza, atribuindo à base e à altura o valor de 2 unidades, e regista: $Aa = (2 \times 2)/2 = 2$ obtendo a área total de 48 (ver Figura 22).

$$A_{Total} = a + a + a + a + 4a + 4a + 4a + 2a + 2a + 2a + 2a =$$
$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 8 + 8 + 8 + 4 + 4 + 4 + 4 =$$
$$= 48$$

Figura 22. Registo do Cálculo da Área Total do Retângulo

Utilizam o mesmo processo para calcular a área da parte sombreada (ver Figura 23).

$$A_{sombreada} = a + a + 4a + 4a + 2a + 2a =$$
$$= 2 + 2 + 8 + 8 + 4 + 4 =$$
$$= 28$$

Figura 23. Registo do Cálculo da Área Sombreada

Finalmente chegam ao resultado pretendido (ver Figura 24). Repare-se na tendência deste grupo em utilizar expressões algébricas que rapidamente são abandonadas e substituídas por casos particulares. Isto reforça o peso que as fórmulas matemáticas têm nas estratégias de resolução a que estes alunos foram habituados.

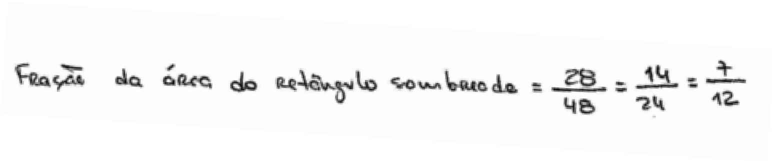


Figura 24. Registo do Cálculo da Fração da Área Sombreada

A particularidade da atribuição do mesmo valor para a base e altura do triângulo menor é induzida pela figura que o grupo AB desenhou (ver Figura 21). Contudo qualquer que fosse o valor atribuído à base e altura do referido triângulo o resultado não se alteraria uma vez que estavam a calcular razões.

O processo de raciocínio utilizado recorreu de uma justificação informal dado que o grupo só resolveu a tarefa usando um caso particular. Era expectável que tivessem utilizado um processo formal na resolução desta tarefa.

O grupo AB atinge completamente o nível 1 uma vez que o raciocínio que fazem se apoia totalmente na visualização. Mas também atingem o nível 2 de van Hiele pois analisam a figura e conseguem dela retirar as áreas necessárias para a resposta.

Nível afetivo

A participação ativa na consideração e análise da situação que envolve a tarefa mostra uma atitude de *empenhamento* do grupo. E apesar da dificuldade inicial com a visualização dos triângulos que tinham a mesma área, com empenho e alguma persistência o grupo resolve a tarefa relacionando as diferentes áreas mas sem conseguirem generalizar.

O grupo AB considerou esta uma tarefa com alguma dificuldade mas desafiante. Para o grupo a tarefa foi interessante na medida em que lhes recordou que triângulos com a mesma base e a mesma altura têm a mesma área (E2[16]).

Olhando novamente para a tarefa o grupo AB diz que a primeira vez que viram o retângulo dividido nos vários triângulos não visualizaram triângulos com a mesma área. Mas na tentativa de algebrizarem o problema reconheceram a equivalência de alguns triângulos apesar de terem identificado incorretamente dois desses triângulos como sendo equivalentes

[16] Elementos recolhidos durante as entrevistas realizadas (E), neste caso, na segunda (2).

(ver Figura 20). Se fossem agora resolver novamente a tarefa não utilizariam o cálculo algébrico mas recorreriam aos números racionais.

Acharam interessante a ligação da Geometria à álgebra embora não se tivessem apercebido logo da possível resolução da tarefa utilizando somente um raciocínio geométrico: a visualização e o relacionamento da parte com o todo – os números racionais. Disseram ainda que foi com esta tarefa que se aperceberam da importância de se trabalhar a visualização como ferramenta poderosa para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da resolução de problemas (E4).

Tarefa – As casas da Ana e da Beatriz

Em relação à expetativa inicial sobre o desenrolar da tarefa ela não se veio a verificar porque o grupo AB executou-a com relativa facilidade.

Nível cognitivo

Nesta tarefa o grupo AB começa a utilizar para as distâncias entre as casas e a escola a noção de lugar geométrico. Desenham duas circunferências concêntricas em E (escola) de raios respetivamente 4 km e 7 km (ver Figura 25). Assim pela análise dessa figura concluem que a distância mínima é de 3 km (7-4) e a distância máxima de 11 km $(7 + 4)$ respondendo deste modo à quarta questão.

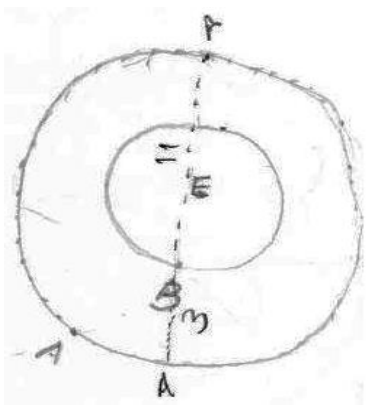


Figura 25. Primeiro Esboço para a Resolução da Tarefa

Consequentemente resolvem a primeira, segunda e teceira questões com facilidade respondendo que as duas amigas podem viver a 10 km uma da outra mas não a 12 km nem a 2 km. Na quarta questão respondem que a distância máxima são 11 km e a mínima 3 km.

Na quinta questão o grupo entende que lhe é solicitado um valor único como resposta e, por isso, elaboram um novo esquema (ver Figura 26) para confirmar se essa distância podia assumir infinitos valores pertencentes ao intervalo $[3; 11]$.

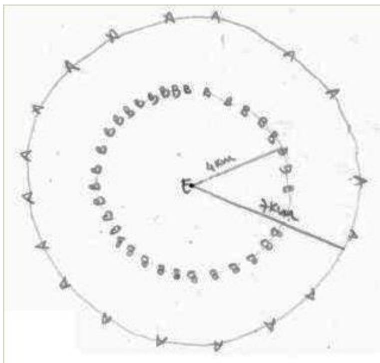


Figura 26. Segundo Esboço da Resolução da Tarefa

A sexta questão tinha como objetivo a identificação da desigualdade triangular que já tinha sido trabalhada nesta e na UC de CCM. Porém como o grupo tem imensas dificuldades em reconhecer essa propriedade solicitam a intervenção da professora Catarina que lhes pergunta:

- Como determinaram a distância máxima e mínima?

- Quantos pontos utilizaram para determinar essas distâncias?

Pensando nestas questões o grupo representa um triângulo de vértices A (Ana), B (Beatriz) e E (escola) que se encontra na Figura 27, concluindo que “a soma dos comprimentos dos dois lados menores do triângulo tem de ser maior ou igual ao comprimento do lado maior”. Nesta afirmação reside o erro de afirmarem que a referida soma pode ser igual à do lado maior.

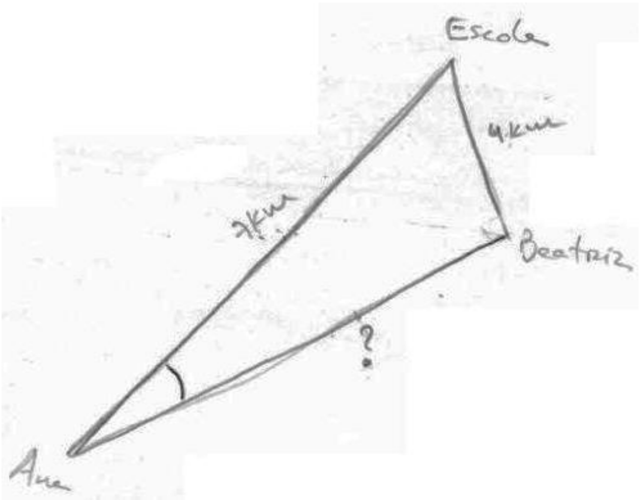


Figura 27. Triângulo de Representação da Escola e das Casas das Amigas

O grupo AB acabou por dizer que nunca lhes ocorreria pensar nesta atividade como um triângulo. Na UC de Geometria os lugares geométricos foram abordados e isso influenciou de certa forma os grupos. Verifica-se que as estratégias adotadas pelos alunos são muito influenciadas pelos conteúdos abordados recentemente nas aulas. Por isso, para além de se diversificarem as tarefas, é importante pensar em propostas que levem os alunos a relacionar e a refletir sobre diferentes conceitos matemáticos.

Uma vez que o grupo AB consegue resolver todas as questões que a tarefa exigia, considera-se que o nível 2 de van Hiele foi atingido.

Nível afetivo

O grupo analisa ativamente todas as situações que vão surgindo mostrando-se *empenhado*. Para além disso elabora diferentes esquemas medindo desta forma o impacto das eventuais consequências do que pretendem responder, o que evidencia *responsabilidade*.

O grupo considerou esta tarefa como relativamente fácil dado que não encontraram dificuldades na sua execução (E2).

No novo olhar sobre a tarefa o grupo AB achou esta tarefa interessante mas fácil. Quando confrontadas com o erro cometido na propriedade da desigualdade triangular imediatamente o detetam dizendo “se a soma dos comprimentos dos dois lados menores do triângulo forem iguais não obtemos um triângulo” e sorriem (E4).

Tarefa - Área do triângulo através da do retângulo

O grupo AB demorou cerca de 1 h na resolução da tarefa. A expetativa de que esta seria uma tarefa muito fácil não se veio a verificar.

Nível cognitivo

Na execução desta tarefa o grupo AB começa pelo triângulo A tentando perceber como o devem decompor de modo a obter um retângulo com a mesma área. Começam então a contar quadrículas de forma a obter pequenos triângulos que rodados pudessem formar o retângulo pretendido. Depois de várias tentativas falhadas o grupo chega a afirmar que é impossível. A professora Catarina apercebe-se da dificuldade do grupo e resolve perguntar-lhes se já tentaram decompor a figura para que as peças encaixem (rodando) e formem um retângulo. O grupo AB tinha começado pelo triângulo A, como se observa na Figura 28.

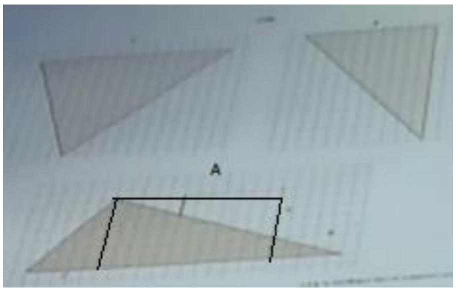


Figura 28. A Decomposição do Triângulo A

Voltam a tentar mas sem sucesso e chegam a afirmar: "É impossível". Mas depois resolvem tentar no triângulo retângulo B. Aí dividem a base do triângulo ao meio e verificam que o triângulo pequeno quando rodado dá origem a um retângulo, conforme Figura 29.

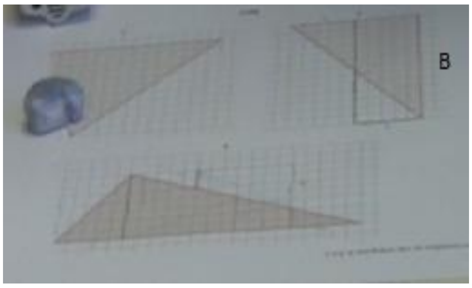


Figura 29. A Decomposição do Triângulo B

A professora Catarina pergunta-lhes então porque é que acharam o triângulo B mais fácil. O grupo responde que no triângulo retângulo B cortam num lado e encaixam no outro lado obtendo assim um retângulo.

Quando o grupo passa para o triângulo C fazem a divisão pelo ponto médio da base do triângulo retângulo menor. Depois passam para o triângulo retângulo maior mas devido a um traçado geométrico impreciso chegam a uma área do retângulo inferior à do triângulo inicial C. Na verificação do resultado, quando procedem à contagem das quadrículas, detetam o erro e verificam que tinham de andar mais meia quadrícula uma vez que metade de 11 são 5,5 quadrículas e não 5 como tinham considerado (ver Figura 30).

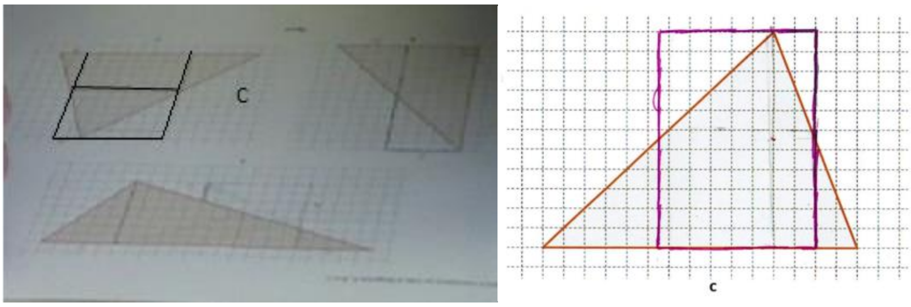


Figura 30. A Decomposição Inicial Errada do Triângulo C e sua Decomposição Correta ao Lado Direito

A professora acerca-se do grupo e pergunta-lhes se é ou não possível dividir cada um dos triângulos A e C em dois triângulos retângulos. Perante a pergunta da professora o grupo estabelece o seguinte diálogo:

- Como é que se pode ver um triângulo retângulo? – perguntou o elemento B.
- Nenhum dos ângulos destes dois triângulos A e C é retângulo! – respondeu o elemento A.
- Será que o ângulo formado no triângulo A é reto? – perguntou o elemento B à professora.
- Esse não é um ângulo reto. Mas será que é possível dividir esse triângulo em dois triângulos retângulos? – perguntou a professora.
- Ah! Já sei. Tiro uma perpendicular à base por este vértice e fico com dois triângulos retângulos – respondeu o elemento A (Obs).

Ressalta aqui alguma dificuldade na visualização dos triângulos retângulos. Estes alunos não estão habituados a observar, a imaginar, a decompor.

Algum tempo depois percebem que bastava considerarem os triângulos retângulos que o triângulo A continha e utilizarem o mesmo procedimento que tinham feito no triângulo retângulo B (ver Figura 31).

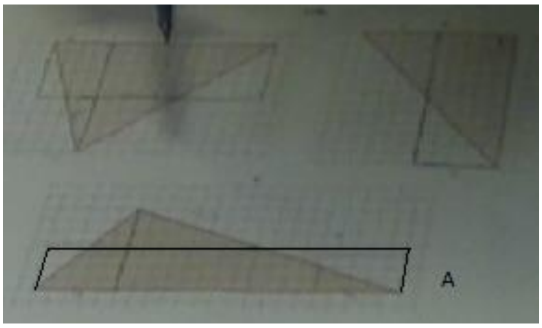


Figura 31. A Decomposição do Triângulo A

Depois é-lhes sugerido que decomponham os triângulos em retângulos de uma outra forma. O grupo começa a pensar no triângulo C, depois no A e não se lembra que tinha iniciado esta tarefa pelo triângulo B. Como não consegue outra decomposição o grupo afirma: “tal não é possível”. Nessa altura a professora Catarina sugere que o grupo comece pelo triângulo B e lembra-lhes que um triângulo retângulo tem sempre dois catetos. Com a dica da professora o grupo acaba por chegar à outra forma de decomposição do triângulo B num retângulo. Mas para os triângulos A e C já não consegue encontrar outra decomposição. Como a folha já estava muito confusa a professora disse para recomeçarem num esquema limpo e pensarem numa construção diferente da que tinham obtido para o triângulo B. Finalmente conseguem ver que tinham que dividir o outro cateto ao meio de forma a obterem um triângulo equivalente que rodado iria dar o pretendido retângulo (ver Figura 32). Esta figura que ilustra a tentativa que o grupo AB fez contém um erro na decomposição do triângulo A da figura do lado direito.

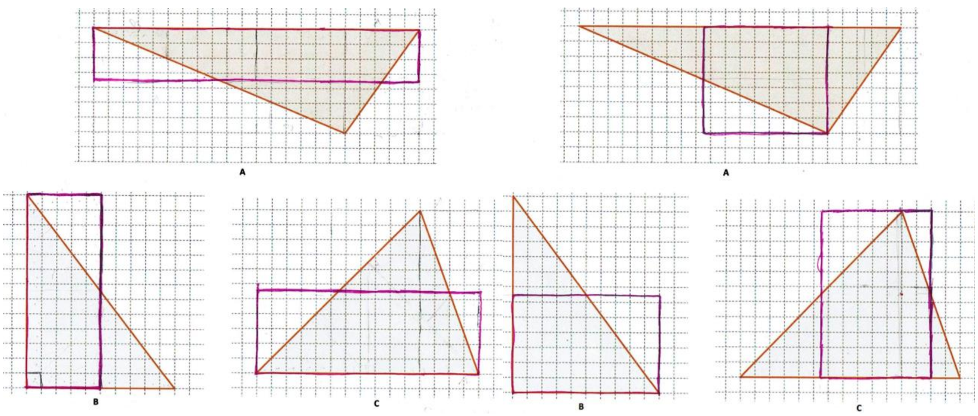


Figura 32. As Diferentes Decomposições dos Triângulos

Na primeira alínea o grupo apresentou os valores das áreas sem qualquer dificuldade, recorrendo à contagem de quadrículas, à aplicação da fórmula da área do triângulo e à decomposição do triângulo. Esta última estratégia foi registada pelo grupo do seguinte modo: “dividimos os triângulos em dois triângulos retângulos pois são os únicos triângulos onde coincide a base e a altura com os catetos”.

Para a segunda alínea o grupo apresenta a área do triângulo à custa dos retângulos construídos no início da tarefa, justificando do seguinte modo: “conseguimos obter para cada triângulo dois retângulos diferentes com a mesma área, um deles partindo da base e dividindo-a ao meio e o outro dividindo a altura, ou seja, $A_\Delta = \frac{b \times h}{2} = \frac{b}{2} \times h = b \times \frac{h}{2}$ ".

Este grupo apresentou ainda uma outra justificação para a igualdade $A = \frac{b \times h}{2}$ através do retângulo representado na Figura 33 onde a área do triângulo é metade da do retângulo.

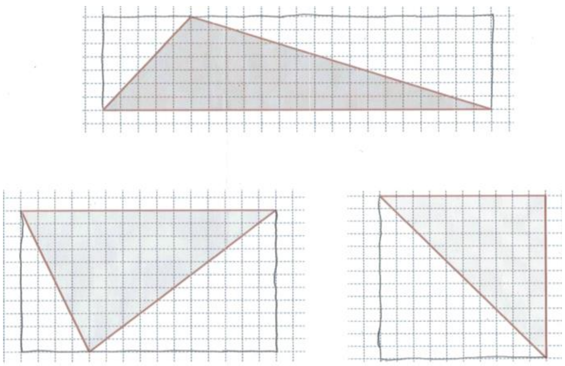


Figura 33. Uma Justificação Alternativa

Pela análise da tarefa constata-se que o grupo embora com algumas dúvidas que foram esclarecidas consegue deduzir a expressão da área do triângulo a partir da área do retângulo. Conclui-se então que o nível 3 de van Hiele foi atingido pelo grupo AB.

Nível afetivo

Perante as dificuldades a capacidade de se manterem firmes na procura das soluções da tarefa mostra uma atitude *perseverante* do grupo AB. A participação ativa na análise das diferentes situações que vão surgindo ao longo da tarefa evidenciam o seu *empenhamento*.

Esta foi uma das tarefas mais desafiantes para o grupo AB (E1).

Quando olham novamente para esta tarefa sorriem e dizem que inicialmente não tinham ideia de qual era a solução, não sabiam por onde começar. Mas isso foi um verdadeiro desafio para o grupo. E acrescentam:

- Esta tarefa foi muito gira e até nos custou a perceber o que era pedido – disse o elemento A.
- Não foi fácil e a prova é que demorámos imenso tempo – acrescentou o elemento B.
- Mas as figuras ajudaram-nos muito – afirmou o elemento A.
- Esta foi a tarefa que nos deu mais gozo e exigiu mais de nós - disse o elemento B (E4).

Reconhecem que foi difícil enquadrar o problema, melhor dizendo, descobrir o que era pedido. E realçam também a importância que as figuras tiveram na execução da tarefa.

O facto de não estarem habituadas a trabalhar a visualização leva a que tarefas como esta sejam mais complicadas do que outras em que o recurso ao cálculo algébrico possa resolver a questão.

Tarefa – Definição de quadrado

Não prevíamos que o grupo AB tivesse um bom desempenho. Tínhamos a expetativa de que ia ser uma tarefa difícil, o que não se concretizou.

A tarefa pedia que escrevessem uma definição de quadrado que começasse por: a) Um quadrado é um quadrilátero "…"; b) Um quadrado é um paralelogramo "…"; c) Um quadrado é um retângulo "…"; d) Um quadrado é um losango "…".

Nível cognitivo

O grupo AB responde às quatro definições do quadrado da seguinte forma:

a) Um quadrado é um quadrilátero "trapézio paralelogramo retângulo, ou seja, dois pares de lados opostos paralelos, todos os ângulos retos e o comprimento de todos os lados igual".
b) Um quadrado é um paralelogramo "retângulo quadrado porque tem os quatro ângulos retos (daí ser retângulo) e os quatro lados com o mesmo comprimento".
c) Um quadrado é um retângulo "quadrado pois tem todos os lados com o mesmo comprimento".
d) Um quadrado é um losango "com os ângulos todos retos".

Apesar de não terem apresentado definições económicas em três das alíneas, as propriedades referidas transformam as respostas em afirmações corretas.

Parece existir a preocupação de explicitar todas as propriedades. Contudo as respostas às duas primeiras alíneas, apesar de não terem nenhuma informação errada, são redundantes. Todas as propriedades referentes aos lados e ângulos foram mencionadas na resposta ignorando outras propriedades (e.g., eixos de simetria, diagonais) que poderiam ser suficientes para as definições solicitadas. Na alínea c) apresentam uma justificação e não uma definição. Na alínea d) é apresentada uma definição económica mas dado que a relação implicava o losango e o quadrado a única informação que restava, considerando somente a referência aos lados e ângulos, era a indicada. Com isto não se pode afirmar que a apresentação da definição económica tenha sido consciente.

Como o grupo AB consegue apresentar um raciocínio coerente com a classificação hierárquica dos quadriláteros e a apresentação de definições abstratas é ainda incipiente considera-se que este grupo tem características de um grau intermédio de aquisição do nível 3 de van Hiele.

Nível afetivo

Na execução desta tarefa o grupo AB mostra *responsabilidade* porque quando definem as propriedades consideram o seu impacto em cada uma das definições.

O grupo chega a afirmar que nunca lhes passaria pela cabeça que lhe poriam uma tarefa destas. Para o grupo AB esta foi uma das tarefas mais interessantes e desafiantes que executaram (E4).

Olhando novamente para a tarefa o grupo disse que queria realizá-la outra vez. Pretendiam averiguar se a fariam da mesma forma. E respondem o seguinte:

a) Um quadrado é um quadrilátero "que tem o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos iguais".
b) Um quadrado é um paralelogramo "com o comprimento dos lados e a amplitude dos ângulos iguais".
c) Um quadrado é um retângulo "com os lados todos iguais".
d) Um quadrado é um losango "com a amplitude dos ângulos iguais".

Aqui transparece uma nítida evolução da linguagem matemática utilizada que já não é redundante. Só referem as propriedades necessárias e suficientes para completarem as definições. Não repetem informação e utilizam uma linguagem matemática simples e rigorosa apesar de mais uma vez listarem somente propriedades referentes a lados e ângulos.

Sobre a tarefa o grupo faz o seguinte comentário:

- Aprendemos a raciocinar – disse o elemento A.
- E a relacionar o quadrado com as outras figuras – acrescentou o elemento B.
- Esta tarefa deu para refletir e pôs-nos a raciocinar sobre o quadrado e todas as outras figuras. E também percebemos que um quadrado são todas as outras figuras mas essas figuras não são obrigatoriamente um quadrado - afirmou o elemento A (Obs).

Após a UC de Geometria é evidente o progresso no que concerne à compreensão das relações inclusivas entre os quadriláteros. Parece que o anterior conhecimento sobre estas relações estaria mais memorizado do que compreendido.

Tarefa – Construções no geoplano

As dúvidas apresentadas pelo grupo AB na resolução da sexta alínea e nas medidas representadas por números irracionais comprovam a nossa expectativa de que a tarefa teria alguma dificuldade.

Nível cognitivo

Este grupo, que tem vindo a demonstrar ter uma boa perceção visual, não tem qualquer dificuldade na execução da primeira alínea. Consegue perceber que desenhando triângulos com a mesma base e a mesma altura obtém triângulos equivalentes com a área pretendida (menor que 1).

Na segunda alínea a dificuldade residia na área do quadrado ser igual a 5 uma vez que o comprimento do lado seria um número irracional conforme se constata no seguinte diálogo:

- O quadrado tem de ter de lado 2,5 – disse o elemento A.
- Mas como é que se obtém 2,5 no geoplano? – perguntou o elemento B.
- Ah, a distância entre dois pinos é 1 mas a distância entre dois pinos na diagonal não é 1 – afirmou o elemento A.
- Pois não, isso é $\sqrt{2}$ e nós não queremos $\sqrt{2}$. Nós queremos 2,5 – voltou a insistir o elemento B.
- E se considerarmos 3 pinos na diagonal teremos $\sqrt{4}$ – disse o elemento A.
- Não. Isso é $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ que é igual a $2\sqrt{2}$ e a área será de $4\sqrt{4}$ e não 5. Espera aí, mas $2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ é 8 por isso não pode ser – respondeu o elemento B.
- Então como vamos fazer? É melhor chamar a professora – disse o elemento A (Obs).

Neste diálogo o valor inicialmente apresentado influenciou o raciocínio dos elementos do grupo no sentido de tentar arranjar uma forma de obter 2,5 na malha do geoplano. O elemento B vai operando com os números irracionais até perceber que obteve uma área menor e maior do que a pretendida. O grupo refere-se apenas a $\sqrt{2}$ e seus múltiplos não se lembrando de outros valores.

Observando que este era um problema de quase toda a turma, a professora Catarina decide ir para o quadro explicar como se chegava ao valor 5 para a área de um quadrado. E pergunta à turma qual o valor do lado de um quadrado de área 5. A aluna deste grupo oriunda da área das ciências responde que o lado terá de ser 2,5. A professora responde que esse quadrado não terá certamente uma área de 5 mas de 6,25 porque $2{,}5\times 2{,}5 = 6{,}25$. Então como ninguém na turma consegue ver a solução a professora Catarina vai para o quadro explicar como se obtêm quadrados perfeitos e relembra o teorema de Pitágoras.

Há muita confusão no domínio dos números irracionais. Nenhum dos dez alunos provenientes da área das ciências com 12 anos letivos de matemática conseguiu responder a esta questão.

Na terceira alínea o grupo AB para obter a área do paralelogramo não retângulo de área 6 começa por construir um triângulo de área 3. Depois, unindo outro triângulo congruente ao desenhado refere que obtém um paralelogramo obliquângulo, como se observa na Figura 34 (lado direito). Utilizando a mesma estratégia a outra aluna desenha um paralelogramo não retângulo (Figura 34, lado esquerdo) obtido pela união dos dois triângulos e valida dizendo que também é um losango.

Figura 34. Construção do Paralelogramo Não Retângulo de Área 6

A quarta alínea é feita sem dificuldade pois já percebiam como obter um lado que media $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$.

Resolvem a quinta alínea mas demoram algum tempo a encontrar um polígono nas condições pedidas ou seja com perímetro igual a $3\sqrt{2}+4$ e área de $3{,}5$.

A sexta alínea pedia para desenharem dois polígonos, um convexo e outro não convexo, de perímetro $2+2\sqrt{2}\ +2\sqrt{10}$. Em relação ao conceito de polígono convexo e não convexo era expectável que surgissem dúvidas mas já não era esperado que a procura do polígono com o perímetro pretendido fosse de difícil resolução pois já tinham percebido como chegar a lados cujas medidas eram valores irracionais. Na sua primeira tentativa erram a medida do lado $\sqrt{10}$ porque consideraram um lado que media $\sqrt{82}$ (ver Figura 35). O erro cometido foi o de terem considerado um triângulo com os catetos respetivamente 1 e 9 pois $1+9=10$ e não 1 e 3 como seria de esperar. Somam as medidas dos catetos e não os seus quadrados.

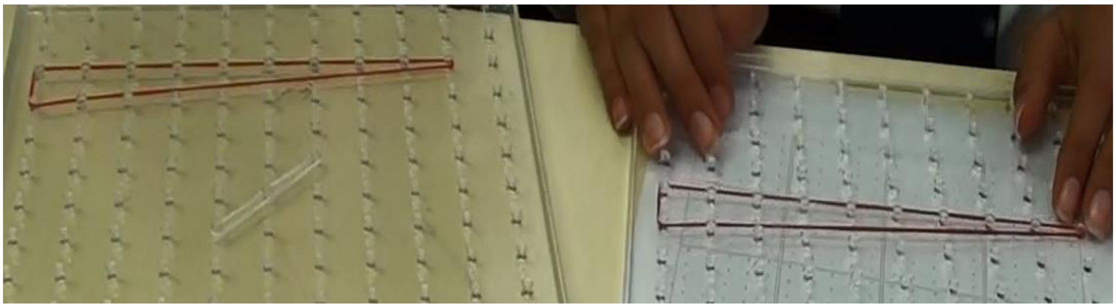


Figura 35. Tentativa de Construção de um Lado que Mede $\sqrt{10}$

Quando a professora vê que os desenhos dos polígonos pedidos ocuparem dois geoplanos em simultâneo (ver Figura 36) alerta-as para a obrigatoriedade de utilizarem somente um geoplano para cada polígono. Perante isto o grupo AB percebe imediatamente o erro cometido.

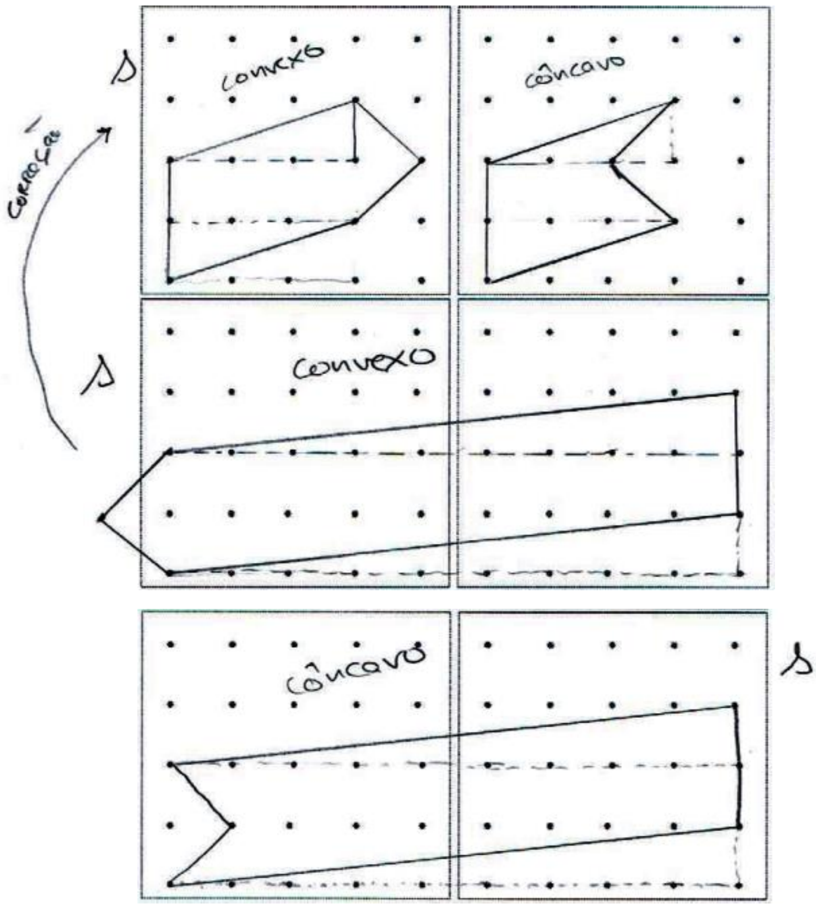


Figura 36. Correção da Construção de um Lado que Mede $\sqrt{10}$

Em seguida surge a dúvida sobre o que é um polígono convexo e não convexo e precisam de recorrer à professora Catarina para se certificarem da definição correta.

A sétima alínea solicitava a construção de um triângulo retângulo com área igual a $1\frac{1}{2}$ e aqui o grupo recorre à professora apenas para se certificar de que a área pretendida era 1,5 ou seja $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Na resolução da oitava alínea uma das alunas ao representar $\sqrt{18}$ no geoplano verifica que é igual a $3\sqrt{2}$ e por isso pergunta à outra se concorda. A outra aluna diz que não é verdade mas efetua um cálculo algébrico e verifica que a colega tem razão. Realça-se o facto de uma das alunas do grupo utilizando apenas a visualização conseguir compreender uma igualdade numérica enquanto a outra aluna, que não consegue visualizar esse facto, precisa de recorrer ao cálculo algébrico para o verificar.

Em relação ao conceito de polígono convexo e não convexo era expectável que surgissem dúvidas mas já não era esperado que a procura do polígono com o perímetro $2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ fosse de difícil resolução, uma vez que já tinham chegado a lados cujas medidas eram valores irracionais em anteriores alíneas.

Apesar de alguma dificuldade na prossecução da tarefa pode dizer-se que o grupo AB atinge o nível 3 de van Hiele. Isto porque consegue chegar aos polígonos que têm as áreas ou os perímetros solicitados estabelecendo relações entre as diferentes propriedades desses polígonos.

Nível afetivo

Apesar de algumas das alíneas desta tarefa terem sido resolvidas com relativa facilidade noutras o grupo foi ponderando e ultrapassando as suas dificuldades sempre com uma atitude muito *empenhada*.

Para o grupo AB esta foi uma tarefa interessante apesar das dificuldades que tiveram nas medidas representadas por números irracionais. "Ao complicar e exigir cálculo foi desafiante porque inicialmente não esperávamos que nos pudessem pedir o perímetro com medidas irracionais" (E2).

Olhando novamente para esta tarefa não gostaram muito porque lidava com irracionais. Quanto interrogadas sobre se o geoplano tinha sido uma ajuda não houve concordância entre elas e afirmaram:

- Acho que sim. É mais fácil ver no geoplano do que desenhar – disse o elemento A.
- Eu acho que é muito "seca" com o geoplano e com os elásticos – respondeu o elemento B.
- Não concordo, porque com o geoplano é mais fácil fazer tentativas. Posso manter um lado e mover o outro – afirmou o elemento A (Obs).

A aluna oriunda das humanidades afirmou que o geoplano foi muito útil porque pode manipular e testar soluções. A aluna vinda da área das ciências disse que não gosta de utilizar o geoplano porque preferia desenhar com lápis e papel e recorrer ao cálculo algébrico.

O grupo gostou da tarefa e até a achou interessante só que o elemento B reconheceu a sua dificuldade neste tipo de tarefas que exigem um raciocínio geométrico. Além disso o grupo achou mais difíceis as alíneas que incluíam medidas irracionais (E4).

Tarefa – Caixas para distribuição

Em relação ao desempenho do grupo AB na prossecução desta tarefa confirmou-se a nossa expectativa de que teriam alguma dificuldade.

Nível cognitivo

O grupo AB resolve a primeira questão sem qualquer dificuldade. Responde que as caixas do tipo 1 e do tipo 5 não enchem completamente o caixote. Relativamente às restantes caixas que enchem completamente o caixote o raciocínio efetuado é o seguinte:

- caixas tipo 2 - visualizam esta caixa na posição[17] $1 \times 1 \times 3$ porque deste modo cobre $1/16$ do caixote e respondem que 16 caixas o enchem;
- caixas tipo 3 - visualizam 3 destas caixas, umas em cima das outras, na posição $2 \times 2 \times 1$ pois assim enchem $1/4$ do caixote e respondem que 12 caixas enchem completamente o caixote A;
- caixas tipo 4 - colocam uma caixa na posição $2 \times 2 \times 3$, concluem que enche $1/4$ do caixote e respondem que são necessárias 4 caixas para o encher completamente.

Quando pensam na caixa tipo 5 comentam:

- A caixa tipo 5 não sei como é que vai caber – disse o elemento B.
- Mas o caixote não tem 5 só tem 4. Por isso não cabe porque elas são rígidas – respondeu o elemento A.
- Esta não. Esta pode-se dobrar-se – afirmou o elemento B.
- Eu estou a imaginar que só há esta forma de fechar o caixote – disse o elemento A.
- Mas se calhar há outras – respondeu o elemento B.
- Mas não há porque faltava aqui um quadrado – argumentou o elemento A apontando para a planificação da caixa.
- E na diagonal? – perguntou o elemento B.
- Não dá porque não ia encher nunca o caixote – respondeu o elemento A (Obs).

[17] Para melhor identificação da posição das caixas, na descrição desta proposta utilizaremos a decomposição dos prismas em $a \times b \times c$ cubos unitários justapostos onde a, b e c representam respetivamente o comprimento, a largura e a altura do prisma.

Este diálogo ilustra a tendência do elemento B para abarcar todas as possibilidades e deste modo tornar complexa uma tarefa simples. Neste sentido denota-se uma certa influência pouco positiva do elemento B no raciocínio visual do elemento A. No entanto o elemento A nunca se deixa convencer até ficar completamente esclarecida.

Para responder à segunda questão o grupo regista o seu pensamento do seguinte modo (ver Figura 37).

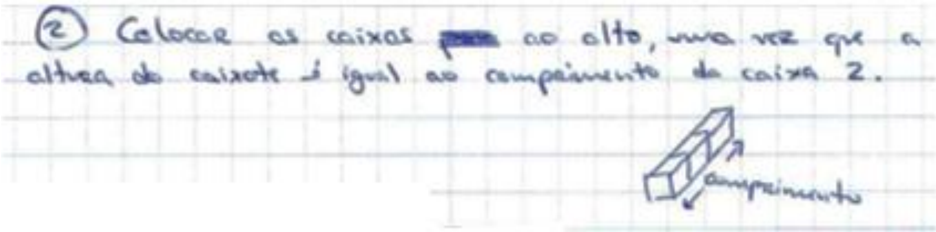


Figura 37. Resposta à Segunda Questão

Na terceira questão o grupo considera as caixas na mesma posição apresentada no enunciado exceto a caixa tipo 2 considerando-a na posição $1 \times 1 \times 3$ para ficar com a mesma altura da caixa tipo 4 (ver Figura 38).

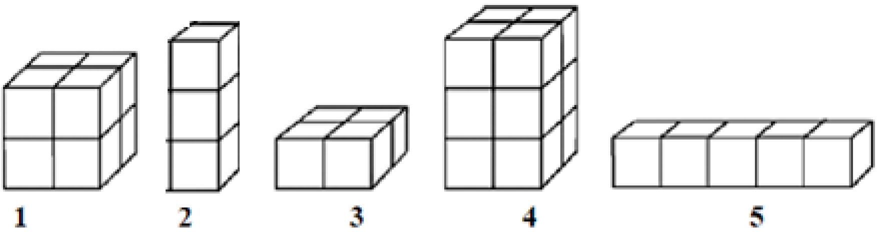


Figura 38. Posição das Caixas Adotada pelo Grupo AB

Assim para a base do caixote de menor volume o grupo procura o mínimo múltiplo comum entre 1, 2 e 5 uma vez que as bases de todas as caixas são do tipo 2×2, 1×1 ou 5×1 (ver Figura 38). Para a altura do caixote o grupo raciocina do mesmo modo, isto é, procuram o mínimo múltiplo comum entre 1, 2 e 3 precisamente as alturas das caixas indicadas na Figura 38. Em suma o caixote idealizado pelo grupo AB foi do tipo $10 \times 10 \times 6$ visível na Figura 39.

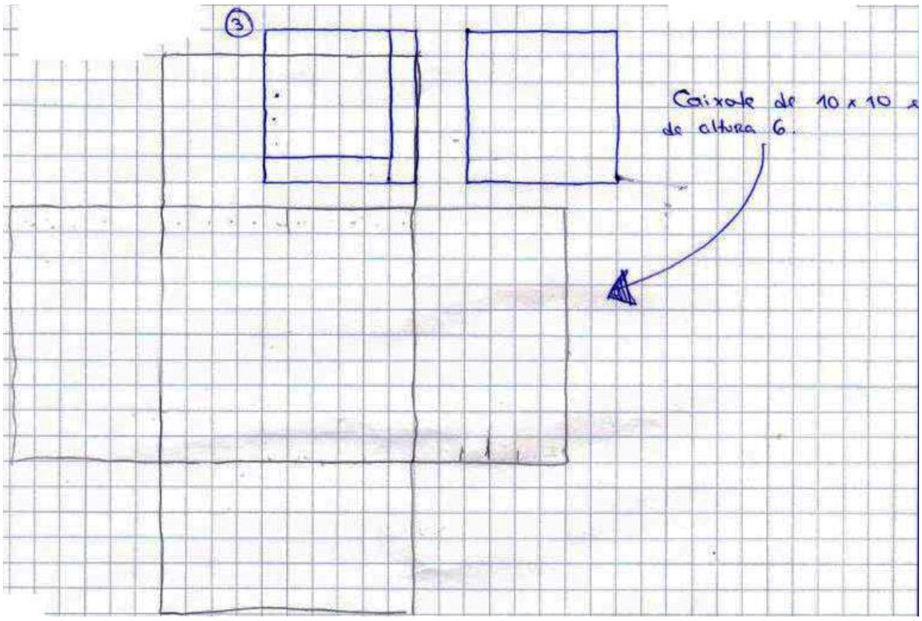


Figura 39. Resposta à Terceira Questão

O grupo não considerava que as caixas podiam ser colocadas noutras posições e esta rigidez não lhes permitiu visualizar caixotes de volume inferior. Não deixa de ser estranho que tenham considerado a caixa tipo 2 “ao alto” e não tenham considerado a possibilidade da caixa tipo 5 também estar “ao alto” e assim poder originar um caixote de menor volume. Consequentemente não chegam às duas soluções de volume mínimo possíveis - $2 \times 6 \times 10$ ou $2 \times 2 \times 30$ incluindo os sólidos geometricamente iguais a estes.

Na quarta questão o grupo AB responde “sim, existem infinitas possibilidades” de tamanhos de caixotes onde se podem despachar as diferentes caixas apresentando como exemplo o caixote desenhado na Figura 40.

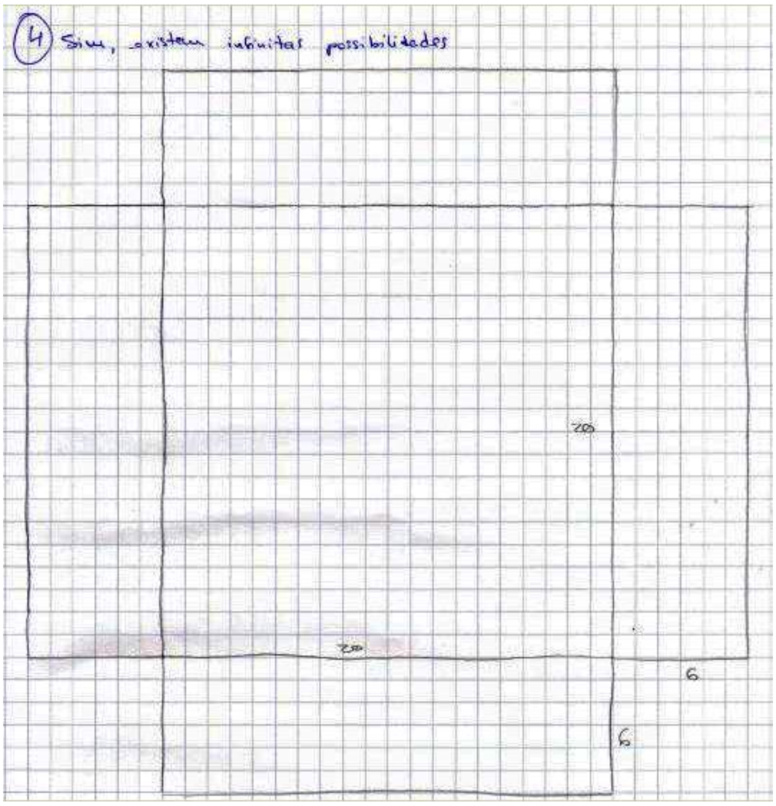


Figura 40. Resposta à Quarta Questão

O que o grupo faz é considerar um novo caixote duplicando o comprimento e a largura da sua base e mantendo a altura, obtendo assim um outro de dimensões $20 \times 20 \times 6$. Conseguem pensar noutros caixotes cujas dimensões da base são múltiplas das do inicial. Na exploração de todas as hipóteses consideraram sempre caixas com bases quadradas, talvez influenciadas pela planificação do caixote A apresentado no enunciado.

A quinta questão vem mais uma vez confirmar que a posição das caixas que o grupo inicialmente considerou para a terceira questão condicionou as respostas às questões subsequentes. Desta forma a resposta apresentada refere os múltiplos das medidas de comprimento das caixas nessas posições particulares (ver Figura 41).

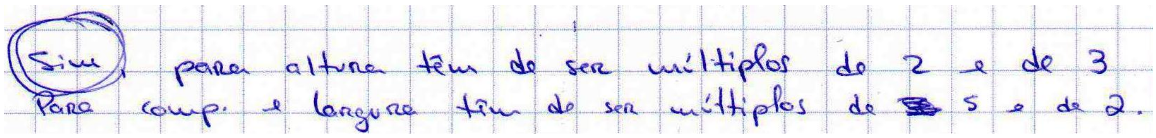


Figura 41. Resposta à Quinta Questão

Este grupo acrescentou uma justificação para as relações entre as dimensões das caixas (ver Figura 42). Repare-se que a observação que se fez anteriormente sobre a limitação da estratégia é comprovada pela referência do grupo AB ao “exercício 3”.

Figura 42. Justificação da Resposta à Quinta Questão

No seu desempenho o grupo AB mostra um raciocínio geométrico algo limitado pois ao impor uma posição rígida das caixas reduzem o tipo de exploração pensado para esta tarefa.

Conseguem ver que tipos de caixas é que enchem completamente o caixote que se encontra planificado. E apesar de não terem chegado às dimensões do caixote de menor volume que cheio comporta qualquer tipo de caixa, conseguem também estabelecer relações entre os diferentes tipos de caixas. Por isso se considera que em relação aos níveis de van Hiele o grupo AB atinge o nível 3.

Nível afetivo

Apesar da rigidez na posição das caixas, limitativa da estratégia pensada para a tarefa, o grupo AB mostra-se *empenhado* em simular, analisar e responder às várias questões da tarefa.

O grupo AB achou esta tarefa pouco motivadora uma vez que não era fácil compreender o que era pedido nas diferentes questões. Referem ainda que a terminologia de caixa e de caixote foi geradora de alguma confusão porque eram nomes muito parecidos (E2).

Olhando novamente para a tarefa e porque o grupo AB tinha errado a questão 3, a investigadora perguntou-lhes se dariam a mesma resposta. Disseram que sim e que no seu raciocínio tinham considerado o mínimo múltiplo comum entre as duas dimensões das bases e entre as alturas. Mas depois disseram:

- Mas não tinha de ser assim – exclamou o elemento A.
- Ai não, porquê? – perguntou o elemento B.
- Porque, por exemplo, aqui a altura da caixa tipo 4 é 3 mas se a deitar a altura passa a ser 2 – respondeu o elemento A.
- Mas isso ia-te condicionar todas as outras caixas? – disse o elemento B.
- E porque é que escolhemos que a caixa ia ficar com 3 de altura? – questionou o elemento A.
- Isso não interessa. Pode ficar na base mas o caixote tem de ter sempre 10×10 – respondeu o elemento B.
- Não concordo porque, quando consideramos a altura 6, consideramos o mínimo múltiplo comum entre as alturas mas se deitarmos a caixa tipo 4 já a solução não seria a mesma – disse o elemento A (Obs).

Este diálogo denota a consideração de outras posições das caixas que pudessem minimizar o volume do caixote no entanto, no decorrer da execução da tarefa, tais considerações não foram exploradas. Apesar da posição em destaque neste diálogo não minimizar o volume do caixote, esta tentativa podia suscitar a procura de outras hipóteses que levassem o grupo a encontrar pelo menos uma das duas respostas corretas, o que não se veio a concretizar. Na entrevista o grupo mencionou que esta tinha sido a razão pela qual não relacionaram as dimensões de cada tipo de caixa entre si e a causa de não chegarem ao caixote de menor volume (E4).

Tarefa – História geométrica

Nesta tarefa o grupo AB não consegue chegar a figuras geométricas a três dimensões o que veio a confirmar a nossa expetativa inicial.

A tarefa pedia para desenharem um triângulo retângulo isósceles e a partir dele desenharem uma nova figura com uma propriedade em comum explicitando essa propriedade.

Nível cognitivo

O grupo AB desenhou um triângulo isósceles não retângulo em vez do triângulo retângulo isósceles (ver Figura 43). Supomos que isso tenha ocorrido por falta de atenção na leitura do texto da tarefa.

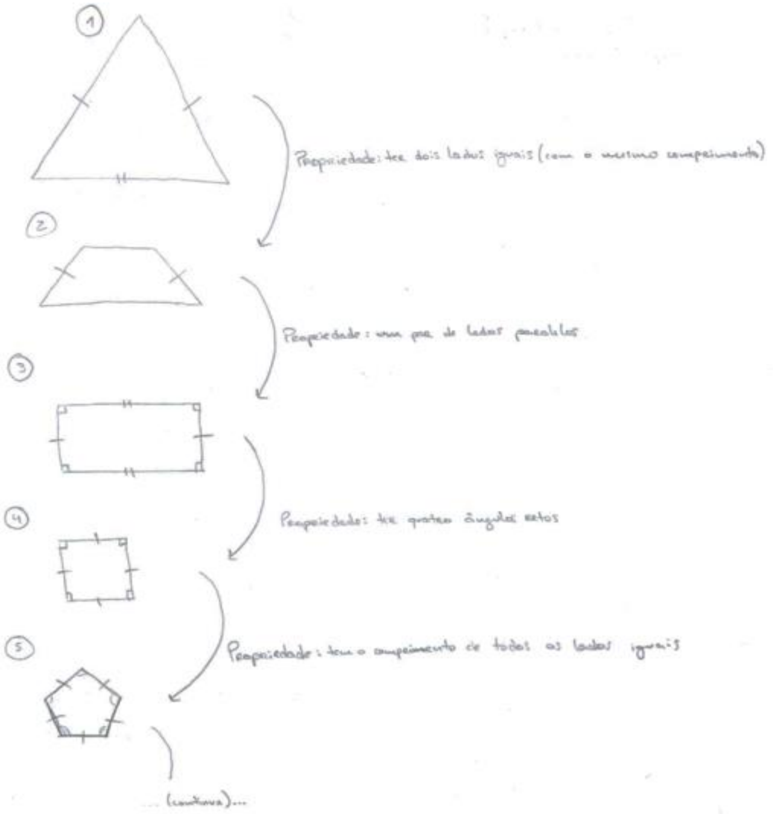


Figura 43. Resolução da Tarefa *História geométrica*

A partir do triângulo isósceles desenham um trapézio isósceles indicando que tem em comum a propriedade de "ter dois lados iguais (com o mesmo comprimento)". Depois desenham um retângulo mantendo "um par de lados paralelos". Do retângulo seguem para o quadrado mantendo os "quatro ângulos retos". Posteriormente do quadrado desenham um pentágono regular mantendo a propriedade de terem "o comprimento de todos os lados iguais".

Continuam na resolução da tarefa (ver Figura 44) e a partir do pentágono regular desenham um triângulo equilátero, mantendo "a amplitude de todos os ângulos igual". Na sétimo desenho apresentado (uma semiesfera) o grupo refere que "através da rotação de 360^0 de um dos lados obtemos um sólido geométrico" assumindo-a como uma propriedade. Nesta transição não se percebe qual a relação entre esta imagem e a anterior bem como a afirmação que fazem não é uma propriedade.

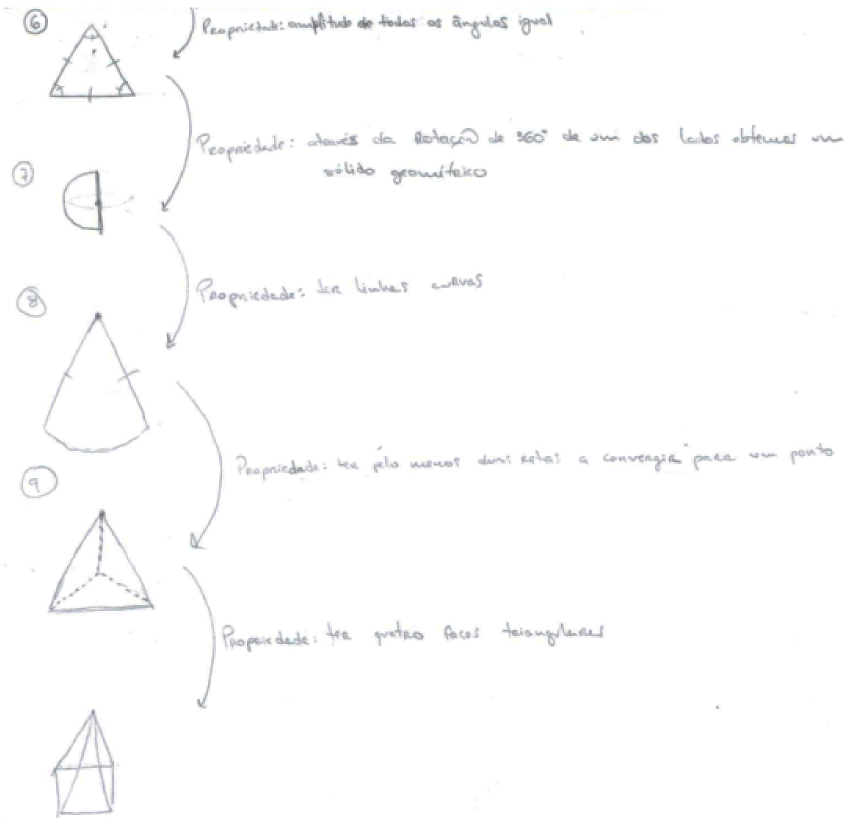


Figura 44. Continuação da Resolução da Tarefa *História geométrica*

O grupo como não consegue passar para as três dimensões usando uma sequência lógica de acordo com o enunciado da tarefa apresenta uma sequência de imagens com justificações forçadas (ver Figura 44).

Apesar de tentar passar das duas para as três dimensões o grupo AB revela-se incapaz de o fazer, mantendo uma propriedade comum de uma representação para a outra. Mais ainda as propriedades apresentadas referem-se unicamente a lados e ângulos.

Considera-se que o grupo atinge o nível 3 de van Hiele embora as soluções apresentadas tenham sido limitadas, revelando dificuldades em encontrar propriedades comuns entre representações em diferentes dimensões. O grupo tenta passar da Geometria no plano para a Geometria no espaço mas sem sucesso.

Nível afetivo

O grupo AB enceta várias tentativas para chegar a uma representação a três dimensões a partir de uma figura o que revela uma atitude *perseverante* na vontade de alcançar esse propósito, muito embora não o tenha conseguido.

Esta foi uma das tarefas que menos gostaram visto que não conseguiram saltar para as três dimensões (E3[18]).

Olhando novamente para a tarefa o grupo AB detetou imediatamente o erro cometido inicialmente na construção do triângulo retângulo isósceles. Admitiram que se a fossem realizar agora não a fariam da mesma forma e tomaram consciência de que afinal tinha sido muito fácil passarem para as três dimensões (passando da sexta para a nona imagem). Não acharam a tarefa interessante e referem que o nome *História geométrica* não as ajudou mesmo nada a gostarem da tarefa (E4). Este facto não deixa de ser curioso – o nome da tarefa influenciou negativamente a sua execução.

O Grupo AB ao longo da UC de Geometria.

Em relação à abordagem feita na UC de Geometria o grupo não viu transversalidade com outras unidades curriculares. Não sentiu que existisse uma continuidade tão forte entre os diferentes conteúdos abordados, acrescentando que noutras UC de matemática isso foi evidente. Viram a utilidade da Geometria para a própria matemática e reconheceram a sua importância na resolução de problemas. O grupo AB considerou a Geometria no plano e a Geometria no espaço relativamente fáceis mas os frisos e as rosáceas não. Na sua perspetiva as isometrias foram o tema mais difícil. Em relação ao que mais valorizaram no decurso da Geometria e o que mais contribuiu para uma melhor compreensão disseram que o seu carácter prático lhes permitiu desenvolver a componente visual e isso foi um fator de maior motivação para a aprendizagem da matemática e o desenvolvimento do raciocínio geométrico. É convicção do grupo que a visualização ajuda imenso a perceber alguns dos conceitos matemáticos; que o carácter prático da Geometria desenvolve as capacidades de visualização dos alunos; e para além disso no dia-a-dia existe a aplicação prática da Geometria. Acham essencial o desenvolvimento do raciocínio geométrico para superar a dificuldade que alguns alunos apresentam no cálculo algébrico. Para o grupo AB o aspeto inovador dos conteúdos foram os frisos, as rosáceas e as isometrias. Lamentam não ter sido feita uma abordagem a Geometrias não euclidianas. Isto porque gostavam de ter visto o que é que existe para além da Geometria euclidiana. Em relação aos pré-requisitos que tinham da escolaridade anterior acharam que o que trouxeram foi demasiado superficial. Para este grupo a Geometria é a

[18] Elementos recolhidos durante as entrevistas realizadas (E), neste caso, na terceira (3).

disciplina que menos exige em termos de bases matemáticas. Prova disso é que existem alunos com muitas dificuldades na matemática em geral e no cálculo analítico em particular mas que a Geometria conseguem ter sucesso. As maiores dificuldades nas fichas práticas realizadas por este grupo foram as das isometrias e dos frisos. As de menor dificuldade foram as das questões ligadas à Geometria no plano. De referir que estas alunas nunca tinham ouvido falar nos níveis de van Hiele (E6[19]).

Síntese

A análise do desempenho do grupo AB ao longo das dez tarefas encontra-se resumida na Tabela 13.

[19] Elementos recolhidos durante as entrevistas realizadas (E), neste caso, na sexta (6).

Tabela 13. Resumo da Análise de Dados do Grupo AB ao Longo das Tarefas

TAREFAS	*Processos de raciocínio identificados*	*Formas de validação de resultados*	*Dificuldades identificadas*	*Níveis de van Hiele*	*Atitudes*
Encontra polígonos	testa e utiliza propriedades matemáticas dos polígonos convexos e não convexos	desenho dos polígonos com a indicação das letras nos seus vértices	nenhuma	1 2	insatisfação
Os três quadrados	formula, testa e justifica informalmente conjeturas	manipulação dos quadrados; comparação das diferentes figuras	confusão entre figura geométrica e polígono[20] (em relação ao perímetro)	1 2	empenhamento
Retângulos sombreados	testa e utiliza propriedades matemáticas e justifica informalmente	-----	justificar formalmente	1 2	empenhamento
As casas da Ana e da Beatriz	testa e utiliza propriedades matemáticas	desenho de duas circunferências concêntricas; construção de Δ	enunciar a desigualdade triangular	2	empenhamento responsabilidade
Área do Δ através da do retângulo	testa e utiliza propriedades matemáticas e justifica formalmente	contagem das quadrículas da folha de papel	nenhuma	3	perseverança empenhamento
Definição de quadrado	formula questões e utiliza propriedades matemáticas	-----	linguagem matemática redundante	3	responsabilidade
Construções no geoplano	testa e utiliza propriedades matemáticas	contagem das quadrículas do geoplano	representação geométrica de $\sqrt{10}$; confusão entre polígonos convexos e não convexos	3	empenhamento
Caixas para distribuição	formula, testa e justifica informalmente conjeturas	desenho da planificação dos caixotes	tipo de exploração da tarefa limitado pela rigidez na posição das caixas	3	empenhamento
História geométrica	utiliza propriedades matemáticas	-----	tentativa de “salto” para as três dimensões	3	perseverança

De todas as tarefas realizadas as *Encontra polígonos*, *Os três quadrados* e *A casa da Ana e da Beatriz* foram as que o grupo AB considerou mais fáceis. Aquelas em que sentiram

[20] Este grupo considerava apenas os polígonos simples.

mais dificuldade foram nas *Construções no geoplano*, nas *Caixas para distribuição* e nos *Retângulos sombreados*.

No geral gostaram de todas as tarefas mas as que acharam mais desafiantes foram a *Área do triângulo através da do retângulo* e a *Definição de quadrado*.

Não gostaram da *História Geométrica* porque não conseguiram "*saltar* para a geometria no espaço e não era tão prática quanto as outras" (E4).

Na entrevista a investigadora solicitou ao grupo que na sua perspetiva desse uma definição de tarefa desafiante. De acordo com grupo AB uma tarefa desafiante é "aquela que é bem pensada, mais complicada e que nos faz puxar pela cabeça" (E4).

O Grupo-caso MS

Como previamente referido e porque se pretendia ter algum nível de diferenciação escolheu-se para o grupo MS duas alunas com médias mais baixas em relação ao grupo AB. Às UC de "Linguagem, Lógica e Comunicação" e de "Números e Estruturas" o grupo MS teve respetivamente 11 e 12 valores.

Um Retrato do Grupo MS

O *grupo MS* é constituído por duas alunas que já têm por hábito trabalhar no mesmo grupo. Estas duas alunas são provenientes da área das ciências. Apesar disso não se sentem suficientemente seguras a matemática para virem a ser professoras do 1º e 2º ciclo proferindo que isso é de muita responsabilidade. E manifestam o desejo vocacional de serem educadoras de infância ou professoras do 1º ciclo. Embora menos extrovertidas do que o grupo anterior, entre elas são extremamente dialogantes e por isso potenciais boas informantes. Exteriorizam a sua alegria perante as descobertas que vão fazendo o que revela gosto pela aprendizagem. Além disso este grupo tem uma característica que nos pareceu interessante. Quando não conseguem efetuar algum problema são persistentes e essa persistência é muitas vezes premiada com o êxito. Esta postura denota responsabilidade e interesse na ultrapassagem das dificuldades que vão surgindo, o que nos fez acreditar que esta foi uma excelente escolha para o nosso estudo de caso.

Em relação à UC de Geometria um dos elementos do grupo achava que não ia gostar porque pensava que iam fazer construções e desenhos e ela detestava fazê-los. O outro elemento achava que ia gostar muito porque gostava bastante de fazer construções geométricas e rigorosas.

A postura do grupo em relação à investigação foi sempre muito responsável. Houve uma preocupação constante em relação à investigação. Amiudadas vezes questionavam a investigadora sobre se a investigação estava ou não a correr bem.

Na execução das tarefas o grupo MS mostrou-se igualmente empenhado e também tiveram a preocupação de explicitar todos os passos dos raciocínios contribuindo deste modo para uma boa recolha de dados e enriquecimento deste estudo.

O Grupo MS ao longo dos Testes

Ao longo do teste o grupo MS teve um desempenho diferente do que teve o grupo AB.

O teste

Em 86 pontos possíveis o grupo MS teve apenas 37 (Apêndice G) isto é 43% de respostas certas. E na distribuição das percentagens ao longo dos conhecimentos e capacidade, o comportamento deste grupo na resolução de problemas foi muito díspar do grupo AB como se observa na Tabela 14.

Tabela 14. Resultados do Grupo MS no Teste

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES			
Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	*Raciocínio*	*Comunicação*	*Resolução de problemas*
47%	45%	25%	42%

Na prestação deste grupo não se destaca nenhum dos conhecimentos e capacidades. Tal como tinha acontecido com o grupo AB, o grupo MS tem um igual fraco resultado na comunicação. Nos outros conhecimentos e capacidades o grupo consegue apenas 45%, embora a resolução de problemas seja o seu ponto mais fraco com apenas 42%, em contraste com o resultado do grupo AB que nesta capacidade teve 71%.

Nível cognitivo

Para se avaliar o comportamento das duas alunas do grupo construiu-se a Tabela 15. Neste quadro identificam-se conceitos geométricos e relações entre conceitos bem como se exibem as suas dificuldades.

Tabela 15. Conceitos e Dificuldades do Grupo MS no Teste

Questão	Conceitos geométricos e relação entre conceitos	Dificuldades identificadas
1	Definição de polígono	M. Identificar polígonos
2	Congruência de Δ/s; $\sum$ dos $\sphericalangle$ internos do Δ	-------
3	Relação entre os $\sphericalangle$/s internos do Δ retângulo e do Δ equilátero	S. Linguagem matemática incorreta – “ângulo retângulo” e justificação incompleta
4	Desenho das alturas de vários triângulos	-------
5	Elementos mínimos para a construção de um Δ	M. Identificar os elementos mínimos para a construção de um Δ
6	Polígono inscrito ou polígono circunscrito	M. Identificar as condições mínimas; Linguagem matemática S. Ling. matemática específica
7	Identificar os eixos de simetria do retângulo	-------
8	Relacionar as propriedades do quadrado com as do retângulo	Prop/s dos quadriláteros
9	Relacionar as prop/s do losango quanto às suas diagonais e seus $\sphericalangle$/s	M. Prop/s dos quadriláteros
10	Cálculo do perímetro de figura com recurso ao Teorema de Pitágoras	-------
11	Identificação de $\sphericalangle$/s	Identificar $\sphericalangle$ não convexos
12	Área do retângulo; Relação entre áreas	M. Relacionar áreas retangulares; Erro de cálculo
13	Área e perímetro de uma figura	Estabelecer relação entre conceitos independentes
14	Perímetro do círculo	Formular as questões e resposta sem justificação
15	Rotação de 180^0 de uma figura geométrica no plano	Visualizar uma rotação
16	Lugares geométricos	Lugares geométricos
17	Translação no plano	Translação associada a um vetor
18	Seno de um $\sphericalangle$	M. Seno de um $\sphericalangle$
19	Definição de poliedro	S. Conceito de poliedro
20	Planificação do cubo	-------
21	Pirâmide e seus constituintes	M. Confusão de pirâmide c/ prisma
22	Volume do cilindro e do paralelepípedo	M. Área do círculo
23	Planificação do cilindro	S. Planificar o cilindro
24	Retas complanares e perpendic/s; Área quadrado; Volume pirâmide	Retas complanares e perpendic/s
25	Identificar sólido através do nº de arestas e através do nº de vértices	Identificar sólido através do nº arestas e do nº vértices

O grupo MS não responde a nove das cinquenta questões que os seus testes continham. Numa escala de 0 a 20 a prestação do grupo equivaleria a uma classificação de 8,6 valores - o elemento M teve 7,9 e o elemento S teve 9,8 valores (Apêndice G). Dado que estas alunas provêm ambas da área das ciências considera-se que a sua prestação foi fraca.

Através da análise da Tabela 15 verifica-se que os dois elementos do grupo têm um comportamento idêntico, mais propriamente: na primeira questão o elemento M não tem a noção do que é um polígono e na quinta questão também não consegue identificar os elementos mínimos para a construção de um triângulo - o que numa aluna proveniente da área das ciências é preocupante; na oitava questão o grupo não sabe que um quadrado também é um retângulo; na nona questão o elemento M não consegue relacionar as propriedades do losango quanto às suas diagonais e ângulos; na décima primeira questão o grupo não identifica qualquer ângulo não convexo; nas questões 13, 14, 15, 16, 17, 19 e 23 sobressai uma dificuldade acrescida porque nenhum dos elementos responde corretamente. Na questão 13 confirmam a conjetura registando: “se aumentarmos o perímetro é óbvio que a superfície dentro da figura, isto é, a área também aumentaria”. Ora isso nem sempre é verdade. Os estudantes erram questões como esta porque a formulação, para além de ser nova para eles, é mais do que um simples conhecimento sobre Geometria; na questão 14 o grupo responde errado sem efetuar nenhum cálculo; na questão 15 não conseguem visualizar corretamente a rotação de uma figura; na questão 16 desconhecem a noção de lugar geométrico; e também não conseguem visualizar uma translação associada a um vetor (questão 17); na questão 18 o elemento M desconhece a noção de seno de um ângulo; e na questão 19 o elemento S não sabe qual o conceito de poliedro; na questão 21 o elemento M confunde uma pirâmide com um prisma e não sabe a fórmula da área do círculo na questão 22; já o elemento S não consegue identificar a planificação de um cilindro (questão 23); o grupo, para além de não visualizar uma reta complanar e perpendicular a outra (questão 24) também não consegue identificar um sólido pelo seu número de vértices e arestas.

No grupo MS para além de falhas ao nível da sua capacidade visual e de alguns erros quando recorrem ao cálculo analítico detetaram-se falhas preocupantes em conceitos geométricos elementares e estruturantes e suas relações, a saber: definição de polígono; elementos mínimos para a construção de um triângulo; polígono inscrito; polígono circunscrito; propriedades dos quadriláteros; identificação de ângulos não convexos; relação entre áreas retangulares; estabelecimento de uma relação entre conceitos independentes - perímetro e área do retângulo; rotação de uma figura; lugares geométricos; translação no plano; seno de um ângulo; conceito de poliedro; fórmula da área do círculo; planificação de um cilindro; retas complanares e perpendiculares; e identificação de um sólido através do número de arestas e através do número de vértices.

No início da UC de Geometria o grupo MS evidencia um alto grau de aquisição (72%) do nível 1, um grau de aquisição intermédia tanto do nível 2 (49%) como do nível 3 (42%) de van Hiele. De realçar que no nível 3 o desempenho do elemento S é muito superior (67%) ao do elemento M (17%) ou seja o elemento S tem um alto grau de aquisição do nível 3 mas o elemento M alcança somente um baixo grau de aquisição neste mesmo nível de van Hiele.

Nível afetivo

No teste sobre conhecimentos geométricos básicos que se realizou na primeira aula o grupo MS receava não se lembrar do que tinham aprendido em Geometria no ensino básico e secundário. Porém no final do teste saíram satisfeitas por saberem muitas das respostas.

Acharam que o tempo concedido para a realização do teste foi suficiente e não se lembravam de nenhuma questão onde tivessem tido uma grande dificuldade (E5).

A repetição do teste

Na repetição do Teste o grupo MS teve 64 pontos em 86 pontos possíveis (Apêndice G) o que equivale a uma percentagem de respostas corretas de 74%. A distribuição das percentagens ao longo dos conhecimentos e capacidades do grupo MS encontra-se na Tabela 16.

Tabela 16. Resultados do Grupo MS na Repetição do Teste

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES			
Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	*Raciocínio*	*Comunicação*	*Resolução de problemas*
75%	82%	88%	63%

A análise da tabela evidencia uma evolução do grupo MS nos vários conhecimentos e capacidades entre 63% e 88% (Apêndice G). A resolução de problemas e o conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos respetivamente com 63% e 75% são as que menos evoluem. Só o raciocínio e a comunicação mostram uma evolução acima dos 80%.

Das cinquenta questões do teste o grupo MS só não respondeu a duas delas. Se se fizer uma conversão para uma escala de 0 a 20 a classificação do grupo MS é de 15 valores – o elemento M teve 14 e o elemento S teve 16 valores. O que quer dizer que no fim da UC de Geometria o grupo MS teve uma evolução superior a 70% especificamente de 73%. Na Tabela 17 faz-se um resumo do comportamento que este grupo teve na repetição do teste.

Tabela 17. Conceitos e Dificuldades do Grupo MS na Repetição do Teste

Questão	Conceitos geométricos e relação entre conceitos	Dificuldades identificadas
1	Definição de polígono	-------
2	Congruência de Δ/s; ∑ dos ∢ internos do Δ	-------
3	Relação entre os ∢/s internos do Δ retângulo e do Δ equilátero	-------
4	Desenho das alturas de vários triângulos	-------
5	Elementos mínimos para a construção de um Δ	Identificar os elementos mínimos para a construção de um Δ
6	Polígono inscrito ou polígono circunscrito	-------
7	Identificar os eixos de simetria do retângulo	Identificar eixos de simetria
8	Relacionar as propriedades do quadrado com as do retângulo	Prop.s dos quadriláteros
9	Relacionar as prop/s do losango quanto às suas diagonais e seus ∢/s	-------
10	Cálculo do perímetro de uma figura com recurso ao Teorema de Pitágoras	-------
11	Identificação de ∢/s	Identificar ∢ não convexos
12	Área do retângulo; Relação entre áreas	Formular uma estratégia e relacionar áreas retangulares
13	Área e perímetro de uma figura	Estabelecer relação entre conceitos independentes
14	Perímetro do círculo	-------
15	Rotação de 180^0 de uma figura geométrica no plano	-------
16	Lugares geométricos	Lugares geométricos
17	Translação no plano	S. Translação associada a um vetor
18	Seno de um ∢	M. Seno de um ∢
19	Definição de poliedro	-------
20	Planificação do cubo	-------
21	Pirâmide e seus constituintes	-------
22	Volume do cilindro e do paralelepípedo	-------
23	Planificação do cilindro	-------
24	Retas complanares e perpendic/s; Área quadrado; Volume pirâmide	M. Fórmula - volume da pirâmide
25	Identificar um sólido através do nº arestas e através do nº vértices	-------

Pela análise da Tabela 17 verifica-se que houve uma progressão do grupo MS no final da UC de Geometria. O elemento M evoluiu 77% - sobe de 7,9 para 14 valores – e o elemento S evoluiu 72% - sobe de 9,3 para 16 valores (Apêndice G).

Como a UC de Geometria não abordou trigonometria nem trabalhou a noção de ângulo, não se irá entrar em linha de conta com as dificuldades que nesses dois campos ainda permanecem. Deste modo no fim a UC de Geometria o grupo MS mantém ainda as seguintes dificuldades: identificação dos elementos mínimos para a construção de um triângulo; lugar geométrico; estabelecimento de uma relação entre conceitos independentes - área e perímetro de um retângulo; propriedades dos quadriláteros; eixos de simetria e translação associada a um vetor.

No final da UC de Geometria o grupo MS mostra um grau de aquisição completa (95%) do nível 1, um grau de alta aquisição do nível 2 (84%) e também do nível 3 (62%) de van Hiele. No entanto no nível 3 o desempenho do elemento S foi muito superior (87%) ao do elemento M (37%) situação esta que já se tinha verificado no teste inicial. Ou seja, o elemento S denota um grau de completa aquisição do nível 3 enquanto o elemento M atinge somente um baixo grau de aquisição neste nível de van Hiele (Apêndice G).

Como as duas alunas deste grupo provêm da área das ciências, era esperado que evoluíssem mais do que o grupo AB. No entanto tal não se veio a verificar.

O Grupo MS ao longo das Tarefas

Este grupo era um pouco apagado – não exteriorizavam muito o que sentiam. Não havia uma líder. O elemento M gostava de fazer os registos das resoluções das tarefas e o elemento S assumia mais o papel de pensadora. Quando discordavam nenhuma delas cedia e discutiam até ficarem esclarecidas. Se tal não acontecesse, recorriam à professora.

Tarefa – Encontra polígonos

Não era expectável a dificuldade que o grupo MS manifestou na visualização dos polígonos não convexos. No entanto esta dificuldade pode atribuir-se ao facto do currículo da matemática dar maior enfoque ao estudo dos polígonos convexos. Este facto é visível, por exemplo, no estudo de diversos teoremas contemplados nos programas de matemática e aplicados somente a polígonos convexos.

Nível cognitivo

Em termos de conteúdos geométricos a tarefa solicitava o reconhecimento da forma de vários polígonos, convexos e não convexos. O grupo MS revelou alguma dificuldade na visualização dos polígonos que se encontravam na figura. Começaram por identificar os nove retângulos (convexos) dizendo que não existiam mais e desenharam-nos na folha assinalando os seus vértices. Esta foi a forma utilizada para a validação dos resultados. Mas não identificavam os hexágonos (polígonos não convexos). Não conseguiam visualizar os polígonos que se obtinham quando se retirava um qualquer dos retângulos em que a figura se encontrava dividida, porque não estavam familiarizadas com a visualização destes outros polígonos – hexágonos (não convexos). Diziam: "Esta figura não pode conter mais polígonos!". Só depois da professora Catarina dizer que ainda existiam mais polígonos, e de ouvirem os outros grupos, é que foram capazes de os encontrar.

Como o grupo não identificou os quatro polígonos não convexos considerou-se que nesta tarefa o grupo MS estava no nível 2 mas não tinha um grau de completa aquisição do nível 1 de van Hiele.

Nível afetivo

Apesar da dificuldade assinalada o grupo mostrou-se *perseverante* pela capacidade de procura das outras figuras com o objetivo de alcançar a resolução da tarefa.

A tarefa foi considerada pelo grupo como uma das mais fáceis (E1).

No novo olhar sobre a tarefa o grupo MS referiu que as letras colocadas na figura ajudaram-nas muito visto que começaram a perceber que podiam ser os vértices de outras novas figuras (E4).

Tarefa – Os três quadrados

A tarefa apresentou dificuldades acrescidas e não previstas - o erro da impossibilidade da figura com 28 uc – o que não era expectável. Afinal andaram a estudar matemática durante 12 anos. Este erro revela que o grupo MS não pensou numa estratégia aditiva.

Nível cognitivo

O grupo MS chega com relativa facilidade ao valor da área mínima e máxima respetivamente a 16 ua e a 29 ua, esboçando o registo dessas duas situações. Nas áreas intermédias este grupo verifica logo que não pode construir uma figura com 17 ua, embora tenha tido alguma dificuldade em redigir essa justificação. Isto porque antes de a registar ponderaram no que iriam escrever denotando empenhamento na execução da tarefa. No argumento apresentado referiram não ser possível porque "se a menor área é 16 só precisaríamos de apenas mais $1\ ua$ e o menor quadrado que temos tem lado 2".

Começaram depois a procurar encontrar as figuras com áreas compreendidas entre $17\ ua$ e $29\ ua$. Facilmente encontraram as figuras de área 18, 19 e $20\ ua$. Para as obterem relacionaram sempre apenas dois quadrados: obtendo 18 com os quadrados 4×4 e 2×2 mas com duas das quadrículas do quadrado 2×2 sobrepostas; 19 com os quadrados 4×4 e 3×3 mas com três das quadrículas do quadrado 3×3 sobrepostas; e 20 com os quadrados 4×4 e 2×2. Quando chegaram à figura de $21\ ua$ um dos elementos do grupo disse que não era possível e justificaram a impossibilidade afirmando: "temos o quadrado de $16ua$ e só podemos obter $16 + (2 \times 1)$ ou $16 + (2 \times 2)$ ou $16 + (3 \times 1)$ ou $16 + (3 \times 2)$ ou ainda $16 + (3 \times 3)$, por isso nunca se conseguirá obter $21\ ua$", ver Figura 45.

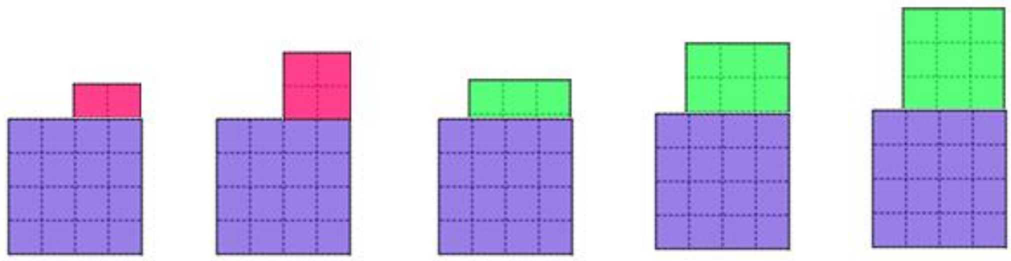


Figura 45. Exemplificação do Raciocínio Utilizado

Depois como o outro elemento do grupo não estava convicto dessa impossibilidade manipulando os três quadrados obtiveram uma figura com $21\ ua$ (ver Figura 46).

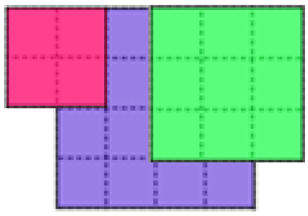


Figura 46. Figura de Área $21\ ua$

As figuras de áreas entre os valores de $22\ ua$ e $27\ ua$ foram fáceis de encontrar. No entanto realça-se o facto do grupo MS ter recorrido permanentemente à contagem das quadrículas uma a uma para chegar à área total da figura. Ou seja, para saberem a área da Figura 47 faziam uma contagem de quadrículas uma a uma. E se se enganassem, repetiam a mesma técnica de contagem para se assegurarem de que o valor da sua área era de 27. Não aproveitavam o facto de poderem calcular a área de cada um dos quadrados, somando-as e retirando apenas a área que ficava sobreposta. O grupo fez recorrentemente uso de um conceito não formal de área.

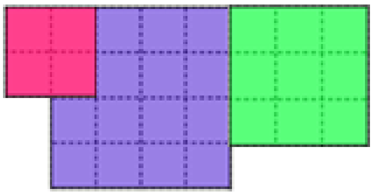


Figura 47. Figura de Área 27 ua

Quando pensavam na figura de 28 ua uma delas disse:

- 28 não dá – disse o elemento S.
- Pois é, deslocando o quadrado vermelho para fora saem duas quadrículas e não uma – confirmou o elemento M.
- Claro porque a razão da impossibilidade é a mesma que a da figura de área 17 – respondeu o elemento S (Obs).

Então o grupo justifica que uma figura com 28 ua "não é possível porque, como a maior área é de 29 ua, precisaríamos de tirar 1 ua para as 28 e o menor quadrado que temos tem de lado 2". Este grupo em nenhuma das situações apresentadas contemplou a hipótese da sobreposição de uma única quadrícula. Este facto sofreu a influência do raciocínio feito para justificar a impossibilidade de se obter uma área de 17 ua.

Para o perímetro mínimo o grupo MS sobrepõe os três quadrados e obtém o perímetro de 16 unidades de comprimento (uc). Para o perímetro máximo um dos elementos do grupo começa a pensar numa figura com 32 uc, fazendo em cada quadrado sobrepor o lado de uma quadrícula como se ilustra na Figura 48.

Figura 48. Figura de Perímetro 32 uc

Depois uma das alunas do grupo desloca o quadrado de modo a tocarem-se só pelos vértices mas a outra não aceita essa solução afirmando: “a figura não liga!”. Embora um dos elementos manifeste dúvida relativamente ao conceito de perímetro, o outro elemento do grupo, afirmando que se pode traçar uma linha contínua à volta de toda a figura, acaba por a esclarecer e ambas concordam então que 36 uc é a solução para a figura de perímetro máximo (ver Figura 49). Este diálogo realça o importante papel das interações nas discussões matemáticas.

Figura 49. Figura de Perímetro 36 uc

Partem para a descoberta das figuras com outros perímetros. Quando começam a procurar a figura de perímetro 17 uc registam que “não é possível porque o menor quadrado que temos disponível tem 2 uc de lado e precisaríamos que tivesse apenas uma”. Descobrem facilmente a figura de perímetro 18 uc e não conseguindo encontrar uma figura de perímetro 19 uc passam para a de 20 uc, deixando a justificação de tal impossibilidade para mais tarde. Quando passam para a figura de 21 uc de perímetro constatam que não podem obter figuras cujo perímetro tem um valor ímpar e registam o argumento que valida a conjetura: “não é possível porque no mínimo acrescentamos 2 unidades de comprimento à figura e se o mínimo é 16 uc então ao acrescentarmos 2 unidades dá sempre número par”. Facilmente encontram todas as figuras com perímetros pares entre o máximo e o mínimo.

Na contagem quer das ua quer das uc das várias figuras que obtêm quando manipulam os três quadrados o grupo nunca utiliza a estratégia de multiplicar (lado x lado) ou somar os lados iguais. Fazem sempre o cálculo da área por contagem – quadrícula a quadrícula. Pode dizer-se que nesta tarefa o grupo MS utiliza uma noção não formal de área. O mesmo se pode afirmar em relação ao perímetro, visto que nunca utilizam o valor do perímetro de cada um dos quadrados recorrendo sempre à contagem quadrícula a quadrícula de cada lado.

As interações entre os elementos do grupo desempenham aqui um papel relevante uma vez que se conseguem esclarecer mutuamente.

Pese embora as dificuldades e o erro cometido o grupo consegue visualizar e relacionar as diferentes áreas e perímetros das várias figuras. Considera-se por isso que nesta tarefa o grupo MS atinge o nível 2 de van Hiele.

Nível afetivo

A atitude do grupo é de *empenhamento* na consideração e análise das ideias que vão surgindo e na validação dessas mesmas situações.

O grupo MS considerou-a uma tarefa relativamente fácil (E1). Realçaram que a manipulação do material foi importante para o sucesso da tarefa.

No novo olhar sobre a tarefa o grupo voltou a frizar a importância da manipulação dos quadrados considerando-a indispensável para o sucesso da tarefa.

A investigadora pretendendo verificar se o erro que tinham cometido tinha sido ou não ocasional perguntou-lhes se agora voltassem a fazer esta tarefa, a fariam do mesmo modo. Responderam que sim. Perante esta resposta a investigadora pediu-lhes para obterem uma figura com $28\, ua$. Continuaram a responder que tal não era possível. Uma vez que a investigadora lhes disse que de facto a figura era possível, nas tentativas efetuadas foram capazes de construir com os três quadrados uma figura de $28\, ua$ (ver Figura 50). Apesar desta dificuldade gostaram da tarefa (E4).

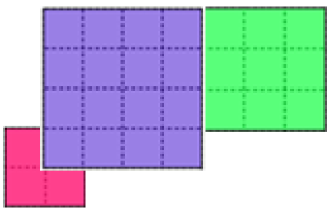


Figura 50. Figura de Área $28\, ua$

Quando a investigadora lhes chamou a atenção para a utilização recorrente que faziam do conceito não formal de área, o grupo perguntou:

- Mas como é que a professora faz para "saber" a área da figura sem ser por contagem? – questionou o elemento M.
- Os quadrados têm cores diferentes, não têm? – disse a professora.
- Sim, mas os quadrados também são de diferentes tamanhos – completou o elemento S.
- Certo, só que o quadrado vermelho tem sempre a área 4, o verde 9 e o azul 16. Logo isso podia ter facilitado os cálculos mas utilizaram sempre uma contagem quadrícula a quadrícula – afirmou a professora.
- Ah, pois foi, que "palermas" – comentou, a sorrir, o elemento M (Obs).

Tarefa – Retângulos sombreados

Uma vez que não era uma tarefa convencional era expectável que se encontrasse alguma dificuldade na sua execução, o que se veio a verificar.

A tarefa solicita o desenho de um retângulo que, após várias divisões devidamente assinaladas no enunciado da tarefa, o grupo MS chegou à Figura 51. Pretendia-se saber qual a fração da área do retângulo que se tinha sombreado.

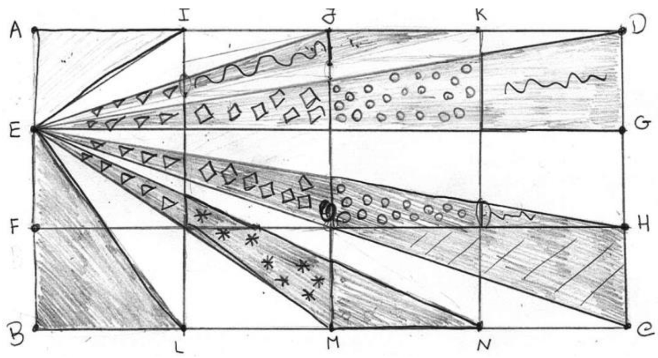


Figura 51. Aspeto Final do Retângulo Sombreado

Nível cognitivo

O grupo MS teve muitas dificuldades em iniciar a resolução desta tarefa solicitando a ajuda da professora por diversas vezes. Ora como não se pretendia influenciar a estratégia de resolução do grupo, a professora limitava-se a explicar o objetivo da tarefa, por exemplo, destacava um terço do retângulo e depois metade deste, solicitando-lhes a fração parte-todo correspondente. Mesmo assim o grupo apresentou enormes fragilidades na apresentação de frações representativas de uma dada região do retângulo, tais como, $1/3$, $1/4$, $1/6$, …

Após algumas reflexões sobre o procedimento a adotar, nomeadamente a utilização da régua graduada e a escrita da relação entre a base de um dos triângulos e o correspondente lado do retângulo, o grupo decide comparar áreas. Primeiramente dividem o retângulo inicial em 12 pequenos retângulos, resultando daí uma malha. A partir daqui observam a forma como os triângulos sombreados ficam divididos por essa malha e, quando não se tratam de triângulos retângulos, tentam juntar essas partes para comparar essas áreas com as dos pequenos retângulos que constituíam a referida malha. Para isso identificaram, com desenhos iguais, as partes que vão associando e que estão visíveis nos cálculos que se encontram na Figura 52.

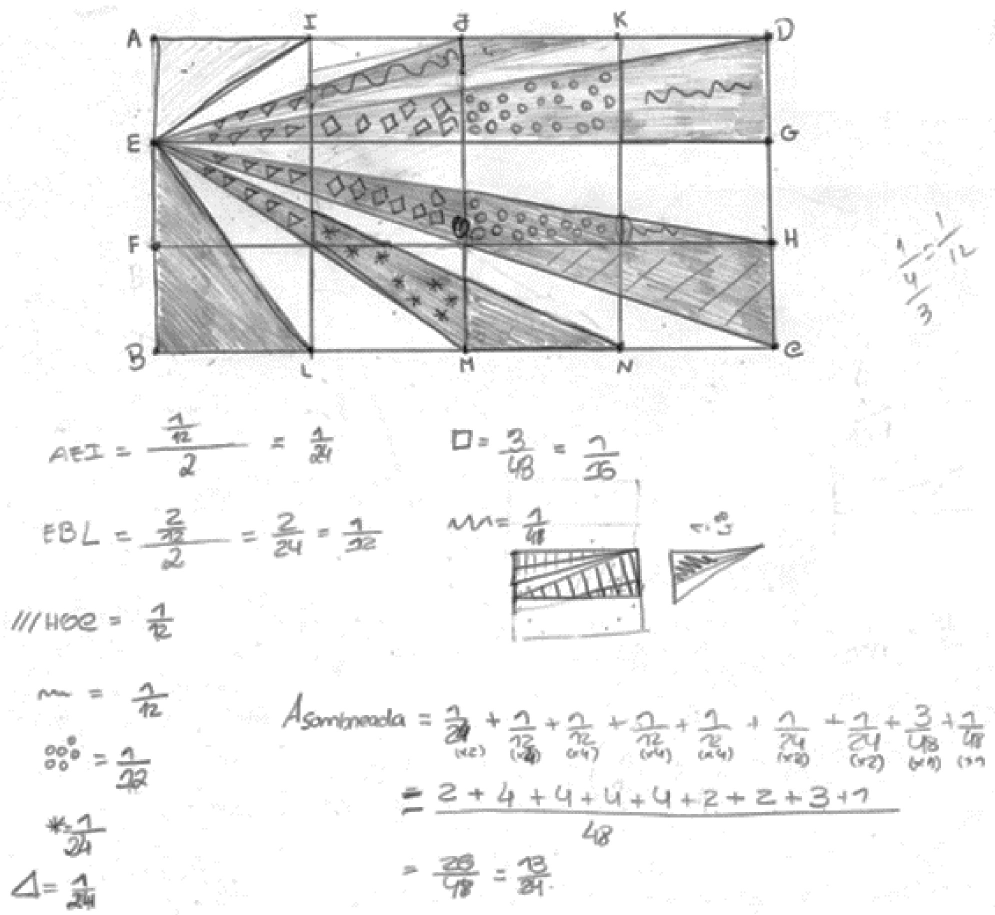


Figura 52. Cálculos Efetuados pelo grupo MS

Por contagem das quadrículas conseguem chegar ao valor $1/12$ que corresponde à área de cada um dos pequenos retângulos da malha e assim calcular a área dos triângulos $[AEI]$ e $[EBL]$ ou seja $1/24$ e $1/12$ respetivamente.

Utilizando o processo descrito anteriormente de juntar partes sombreadas calcularam as restantes áreas. Contudo este último processo levou o grupo MS ao valor final de $13/24$ em vez de $7/12$. Uma vez que estas duas frações possuem valores aproximados, o grupo não questionou o resultado obtido acreditando que este estava correto.

Na sua resolução embora o grupo não tenha chegado ao resultado correto considera-se que atingiu o nível 2 de van Hiele.

Nível afetivo

Apesar das muitas dificuldades que encontrou nesta tarefa o grupo MS manteve-se firme na procura de uma solução, o que evidencia uma atitude *perseverante* mesmo sem alcançarem a solução correta.

Pelo facto de terem demorado muito tempo a realizar esta tarefa e também de não terem conseguido relacionar as diferentes áreas em que o retângulo estava dividido, o grupo MS considerou esta uma tarefa difícil (E2).

Ao olhar novamente para a tarefa lembraram-se logo do imenso trabalho que tiveram, dizendo:

> - Lembro-me que tivemos muitas dores de cabeça – disse o elemento M.
> - E provavelmente ainda chegamos à resposta errada – disse o elemento S.
> - Tanto trabalho para nada não foi? – responde o elemento M.
> - Sim, na realidade chegaram a um valor inferior em $1/24$ porque se esqueceram de somar um triângulo com essa área – disse-lhes a investigadora.
> - Foi um esquecimento qualquer que nós tivemos – disse o elemento S.
> - Pois porque a estratégia que utilizaram dava origem a isso – referiu-lhes a investigadora (Obs).

Se agora fossem realizar novamente a tarefa afirmam que a fariam do mesmo modo. Isto mostra que mesmo quando confrontadas com a resolução da tarefa utilizando somente a relação das partes com o todo e a visualização dos triângulos equivalentes, o grupo MS não é capaz de a resolver desse modo. A investigadora pergunta-lhes se conseguem visualizar dois triângulos equivalentes mas o grupo não os consegue visualizar. No grupo MS evidencia-se ainda uma outra lacuna – a do significado de fração parte-todo.

O grupo confessa que não gostaram nada da tarefa mas acharam que a tarefa tinha sido desafiante porque lhes tinha dado "luta e muito trabalho" (E4).

Tarefa – As casas da Ana e da Beatriz

A nossa expetativa de que existiria alguma dificuldade veio a confirmar-se no desempenho do grupo MS.

Nível cognitivo

O grupo MS utilizou a circunferência como o lugar geométrico das possíveis localizações das casas das duas amigas respetivamente a $4Km$ e a $7Km$ da escola, centro destas circunferências (ver Figura 53).

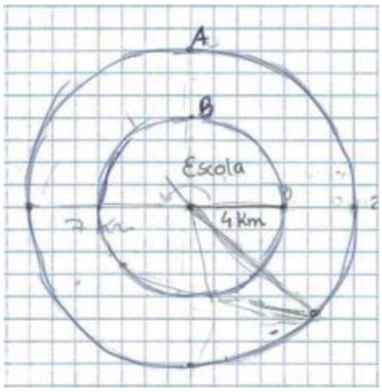


Figura 53. Esboço para a Resolução da Tarefa

Na resolução desta tarefa o grupo utilizou um papel quadriculado propositadamente pela necessidade que teve em estabelecer uma escala, dizendo: "uma quadrícula vale um quilómetro". Para a resolução desta tarefa foi facultada uma folha de papel branca que o grupo MS não chegou a utilizar.

A figura ajudou o grupo na resposta às quatro primeiras questões referindo que as duas amigas podem viver a $10Km$ uma da outra mas não a $2Km$ nem a $12Km$. O grupo determinou ainda que as distâncias máxima e mínima entre as casas da Ana e da Beatriz eram de $11Km$ $(7 + 4)$ e de $3Km$ $(7 - 4)$ respetivamente.

À quinta questão o grupo regista que "não é possível definir a distância com os dados que nos dão, porque a casa da Beatriz pode ser em qualquer local da circunferência B e a casa da Ana em qualquer local da circunferência A", acrescentando oralmente (registo obtido na gravação aúdio) que existem infinitos valores para esta distância. Este facto surpreende porque o grupo implicitamente tinha a resposta na quarta questão mas não a conseguem explicitar escrevendo-a sob a forma de um intervalo de valores.

Na sexta questão o grupo MS chama a professora Catarina e afirma não saber identificar a propriedade geométrica. Então a professora dá-lhes as mesmas pistas que tinha dado ao grupo AB, perguntando-lhes:

- Como determinaram as distâncias máxima e mínima?
- Quantos pontos utilizaram para determinar essas distâncias?

Estas pistas levaram o grupo a considerar o teorema de Pitágoras como uma possível resposta à sexta questão. Questionaram novamente a professora sobre se a propriedade geométrica tinha alguma relação com o teorema de Pitágoras mas esta disse-lhes que não.

Pouco tempo depois o grupo MS dá a tarefa por terminada não tendo respondido a esta questão.

O grupo MS não conseguiu identificar a propriedade geométrica nem definir o intervalo das distâncias entre as casas das duas amigas. Mas foi capaz de estabelecer relações entre as casas e a escola tendo chegado ao valor das distâncias máxima e mínima. Por isso se considera que o grupo MS atingiu o nível 3 de Van Hiele.

Nível afetivo

O grupo perante a dificuldade de não saber a propriedade geométrica que utilizou desistiu o que revela *insatisfação*. No entanto foram capazes de chegar aos valores das distâncias máximas e mínimas entre as casas das duas amigas e a escola, o que denota *empenhamento* na análise das situações que vão surgindo.

O grupo considerou a tarefa relativamente simples embora não tivessem conseguido responder a duas das suas seis questões (E2).

Olhando novamente para a tarefa o grupo diz que se a fossem realizar agora a fariam do mesmo modo. Quando interrogadas sobre as duas questões (quinta e sexta) que não tinham sido capazes de fazer objetam que ainda não sabem como responder. Na quinta questão e depois de verem a resposta percebem e dizem que, na altura só pensaram que se pretendia um valor exato para essa distância. Na sexta questão continuavam sem saber qual a propriedade geométrica utilizada na resolução da tarefa. Contudo e apesar dos erros cometidos acharam a tarefa interessante e motivadora (E4).

Tarefa - Área do triângulo através da do retângulo

O grupo MS demorou $1h\ 20m$ na resolução desta tarefa o que demonstra a dificuldade na sua concretização. Esperávamos que a tarefa fosse relativamente fácil o que não se veio a verificar.

Nível cognitivo

O grupo MS começa a olhar para os três triângulos e julga ser mais fácil começar pelo triângulo retângulo B. Então pergunta se podem começar por qualquer um ao que a professora lhes diz que sim. Então o grupo começa a contar o número de quadrículas dos catetos do triângulo B mas sem perceber para quê. Depois passa para o triângulo A. Passado algum tempo verifica que o triângulo A pode der dividir em dois triângulos retângulos e conclui que se problema no triângulo B (triângulo retângulo) for resolvido, estará resolvido o problema dos outros dois triângulos A e C que não são retângulos. O grupo tenta dividir o triângulo retângulo B em dois triângulos mas verifica que não obtêm nem um retângulo nem uma figura equivalente ao triângulo original, como se observa na Figura 54.

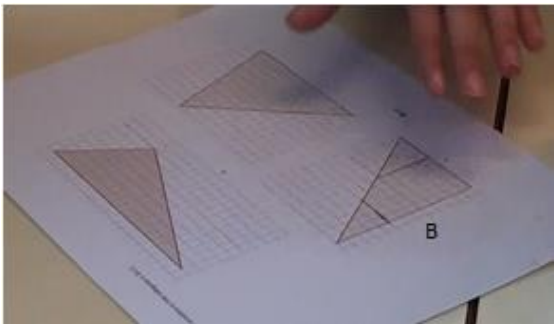


Figura 54. Primeira Tentativa para a Decomposição do Triângulo B

Continua a tentar e afirma ter de o recortar de forma a ficarem com quatro vértices (para dar um retângulo). A seguir divide o triângulo B em dois triângulos através da bissetriz do ângulo reto (ver Figura 55) mas verifica que não adianta e aí o grupo desiste.

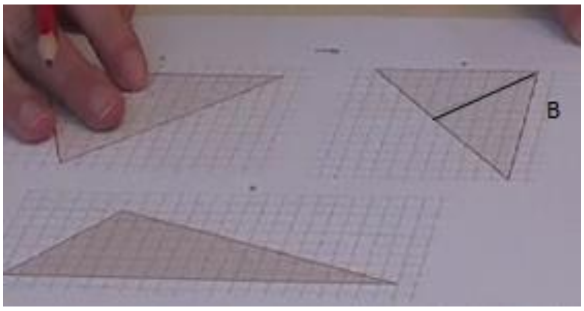


Figura 55. Segunda Tentativa para a Decomposição do Triângulo B

Depois, considerando ainda o triângulo B, o grupo chega à solução dizendo:

- Vamos imaginar um retângulo e ver o que temos de recortar para dar esse retângulo – disse o elemento M para o S (Obs).

Ao traçar a mediatriz de um dos catetos (ver Figura 55) o elemento S descobre a estratégia proferindo:

- Ah, já descobri! Prolonga-se essa linha a toda a altura do triângulo e obtém-se o retângulo – disse o elemento S.
- A linha traçada é uma qualquer? – perguntou a professora.
- Não. Tem de passar pelo ponto médio da base do triângulo – respondeu o grupo (Obs).

Assim o grupo obtém dois triângulos equivalentes (os triângulos 1 e 2 da Figura 56).

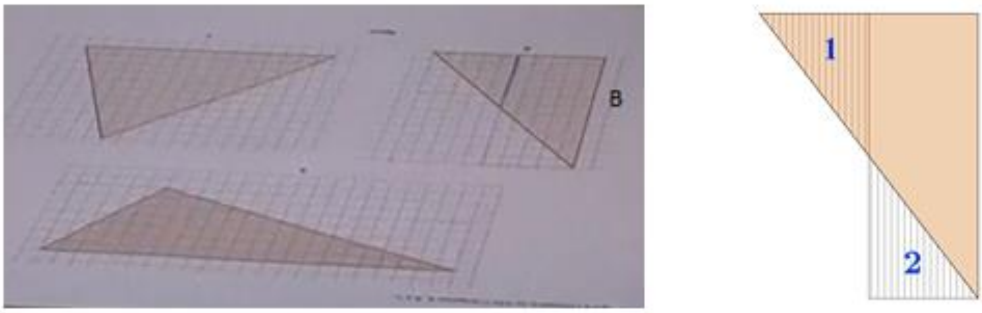


Figura 56. Decomposição do Triângulo B

Depois o grupo chama a professora que lhe dá os parabéns pela descoberta. E esta pergunta então porque é que começaram pelo triângulo B ao que o grupo MS responde ser o mais fácil por ter um ângulo reto. Seguidamente o grupo começa a pensar no triângulo C não conseguindo e passa ao triângulo A também não conseguindo e volta ao triângulo C. Entretanto o grupo tenta dividir o triângulo B em dois triângulos retângulos da forma indicada na Figura 57.

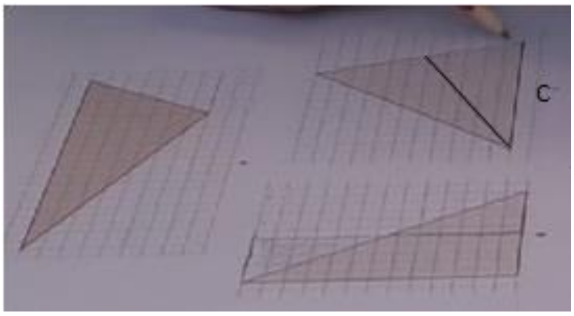


Figura 57. Primeira Tentativa Falhada de Decomposição do Triângulo C

Olhando para o que tinha feito uma das alunas afirma que não há a garantia dos ângulos obtidos serem retos. Perante a notória dificuldade de visualização dos dois triângulos retângulos que existem no triângulo C, a professora Catarina aborda o grupo MS e diz-lhes para pensarem no que tinham feito no triângulo retângulo B.

Então o grupo começa a colocar várias hipóteses de decomposição da figura sem serem capaz de aplicar a estratégia utilizada no triângulo B. Depois fazem uma tentativa a olho nu e ficam convencidas - pela alegria que exteriorizam - de terem encontrado a solução pretendida. Mas ao dividir a altura do triângulo C ao meio o grupo MS considera seis quadrículas para cima e cinco para baixo, o que faz com que os triângulos obtidos (a sombreado) não sejam geometricamente iguais, como se observa na Figura 58.

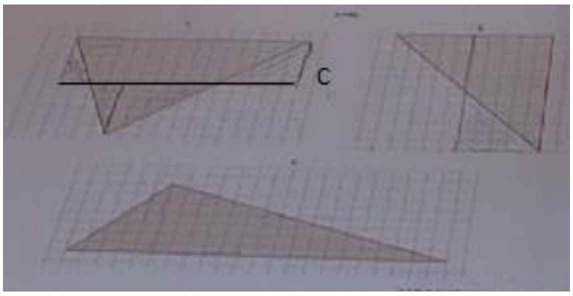


Figura 58. Segunda Tentativa Falhada da Decomposição do Triângulo C

Continuam a tentar, por contagem das quadrículas, dizendo que um dos lados do retângulo tinha que passar pelo meio dos lados do triângulo. Não conseguem visualizar e transpor para os outros dois triângulos o que tinham feito no triângulo retângulo. Quando desenham corretamente a linha a passar pelo ponto médio da altura do triângulo observam finalmente que obtêm triângulos equivalentes.

Quanto a saber se existe outro modo de transformar o triângulo num retângulo, o grupo MS começa pelo triângulo retângulo B e faz o mesmo procedimento nos outros dois triângulos, obtendo outra solução possível para a sua decomposição (ver Figura 59).

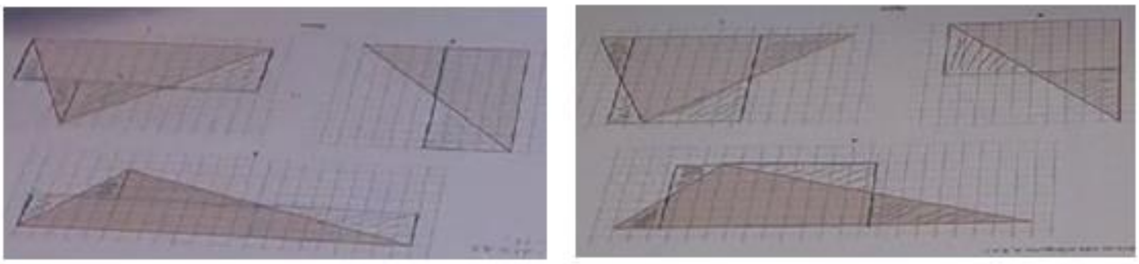


Figura 59. As Decomposições Possíveis dos Triângulos

Em relação à descoberta da área dos triângulos geométrica e algebricamente o grupo reage do seguinte modo:

- Como é que se determina a área geometricamente? – perguntou o elemento M.
- Pois também não sei. Vou chamar a professora e perguntar-lhe o que é – disse o elemento S.
- Têm alguma ideia de como se deve determinar a área geometricamente? – questionou a professora.
- Analiticamente sabemos, por exemplo, que o triângulo A tem 77 de área mas geometricamente não sabemos o que é para fazer – disse o elemento M.
- Qual é a unidade de área? - perguntou a professora.

- É a quadrícula. Mas então é para contar até chegarmos às 77 quadrículas? – disse o elemento M.
- E qual é o polígono que vamos contar? Pode ser o retângulo ou tem de ser o triângulo? – disse o elemento S.
- Gostava que fossem vocês a responder a essa questão – finalizou a professora (Obs).

No fim o grupo MS regista que “é possível determinar a área dos triângulos A, B e C de duas formas diferentes. Considerando que a unidade de área é uma quadrícula, contabilizamos as que existem em cada retângulo verificando que correspondia ao valor calculado analiticamente. Escolhemos o retângulo pois é equivalente ao triângulo e é mais fácil de contar”.

À segunda questão um dos elementos do grupo MS diz que tem de utilizar o teorema de Pitágoras e aplicá-lo duas vezes no caso dos triângulos A e C. Espantada com esta resposta a professora Catarina pergunta à aluna se para o cálculo da área ela necessita desse teorema. A aluna reflete e sente o disparate do que tinha dito. A outra aluna afirma que podem usar um retângulo grande e depois subtrair os dois triângulos. Muito bem, diz a professora.

Nesta tarefa o grupo MS, tal como o grupo AB, tem dificuldade em repetir a estratégia da decomposição do triângulo dado em triângulos retângulos, se a altura do triângulo não estiver na posição *standard*.

Nesta tarefa o desempenho dos grupos distingue-se pela decomposição da própria expressão da área do triângulo, ou seja, o grupo AB expressa de três modos distintos o quociente $\frac{b \times h}{2}$ enquanto o grupo MS não o faz.

Apesar das dificuldades encontradas na execução da tarefa o grupo MS, com o esclarecimento das dúvidas que foram surgindo, foi capaz de deduzir a expressão da área do triângulo a partir da área do retângulo. O que nos leva a dizer que nesta tarefa o grupo MS atingiu o nível 3 de van Hiele.

Nível afetivo

Nesta tarefa o grupo não desiste perante as dificuldades realçando uma atitude de *perseverança*. Para além disso na consideração do impacto das várias tentativas e análise das situações que vão surgindo mostram uma atitude de *responsabilidade*.

Acharam a tarefa difícil porque não perceberam logo o que era para fazer e, por isso, estiveram muito tempo a pensar. Mas depois de perceberem o que tinham de fazer ficaram desafiadas a passar para os outros triângulos (E1).

Olhando novamente para a tarefa lembram-se da grande dificuldade que tiveram e do tempo que demoraram na sua execução – uma hora e vinte minutos. E afirmam que se a fossem fazer novamente fá-la-iam da mesma maneira. Foi curioso verificar que mesmo depois de visualizar o que tinham feito não se lembravam de como transformar o triângulo num retângulo. Isto reflete a grande dificuldade deste grupo na visualização e no trabalhar tarefas de carácter aberto.

O grupo MS já não se lembrava do que é que tinham aprendido com esta tarefa. Referiram que as figuras foram importantes e ajudaram. Contudo consideraram-na desafiante porque "estava a ser difícil e nós queríamos saber como chegar lá" (E4).

Tarefa – Definição de quadrado

Dado o desempenho do grupo MS que só conseguiu construir corretamente uma das quatro definições, a expetativa de que esta iria ser uma tarefa difícil confirmou-se.

A tarefa pedia para escrever uma definição de quadrado que começasse por: a) Um quadrado é um quadrilátero "…"; b) Um quadrado é um paralelogramo "…"; c) Um quadrado é um retângulo "…"; d) Um quadrado é um losango "…".

Nível cognitivo

O grupo MS responde corretamente apenas a uma das quatro definições registando:

a) Um quadrado é um quadrilátero " … ".
b) Um quadrado é um paralelogramo "quando tem 4 ângulos rectos e os seus lados são todos congruentes".
c) Um quadrado é um retângulo "quando os seus ângulos são todos retos".
d) Um quadrado é um losango "em todas as situações porque ambos têm quatro lados congruentes".

Na alínea a) o grupo MS não consegue responder à questão. Na gravação da atividade ouve-se o grupo a afirmar que "Um quadrado é um quadrilátero quando tem 4" e a rir acrescentam "e não 3 lados, mas assim já não era um quadrado". Pode concluir-se que o grupo MS procura uma justificação para a frase denotando dificuldades em perceber o que é uma definição.

A alínea b) é respondida com sucesso. Em termos de escrita não está uma definição elegante mas respeita os princípios lógicos de uma definição. Repare-se que em c) não constroem uma definição mas limitam-se apenas a apresentar uma propriedade comum aos dois quadriláteros. Em d) o grupo apenas justifica o porquê do quadrado ser um losango.

As respostas do grupo evidenciam o desconhecimento dos princípios que caracterizam uma definição formal. Para além disso as únicas propriedades mencionadas referem-se aos ângulos e lados destes polígonos. Para além destas situações problemáticas o diálogo entre os elementos deste grupo permitiu-nos perceber ainda outras lacunas com consequências mais limitativas:

- O quadrado é um losango? – perguntou o elemento M.
- Sim pois já ouvi dizer que todos os quadrados são losangos – respondeu o elemento S.
- Então porque é que todos os quadrados são losangos? – disse o elemento M.
- Porque se tu rodares o quadrado ele fica losango – afirmou o elemento S.
- Ah! Agora percebi porque é que um losango nem sempre é um quadrado. Se rodarmos um losango ele não fica um quadrado – disse o elemento M (Obs).

Pelo diálogo apresentado denota-se o conhecimento da inclusão das classes dos quadriláteros (“Sim, (…) todos os quadrado são losangos”) mas estas relações não estão bem percebidas uma vez que a justificação assenta em termos da posição destes polígonos: “se rodares o quadrado ele fica losango” mas “se rodarmos um losango ele não fica um quadrado”. A imagem conceptual das figuras geométricas influenciou a capacidade de relacionar as suas propriedades. Isto vai ao encontro de algumas investigações no que respeita à posição *standard* das figuras (imagem conceptual), neste caso particular do quadrado que tem de ter um dos lados na horizontal. Por este facto o quadrado passa a ser um losango. Isto evidencia a importância dada no ensino básico e secundário à manipulação algébrica em detrimento da visualização geométrica, que tem contribuído para um raciocínio geométrico *pobre* de muitos dos estudantes candidatos a futuros professores do ensino básico.

Como a imagem conceptual que o grupo tem das figuras afetou a capacidade de relacionar as suas propriedades considera-se que o grupo está num baixo grau de aquisição do nível 3 de van Hiele e, conforme referido na revisão da literatura, regressam sistematicamente ao nível 2 e vice-versa. Observa-se pois que o nível 3 de van Hiele não foi atingido.

Nível afetivo

A grande dificuldade que a tarefa representou para o grupo MS, não o conseguindo envolver, despoletou uma atitude de *insatisfação*.

O grupo considerou esta como a tarefa mais difícil porque, segundo afirmam, “não tínhamos na nossa cabeça estas definições” (E3).

No novo olhar sobre a tarefa o grupo manifesta que não gostaram da tarefa porque não percebiam o que era para fazer. E quando lhes foi pedido para a realizarem novamente, o resultado foi o seguinte:

a) Um quadrado é um quadrilátero “com os lados e os ângulos todos congruentes”.
b) Um quadrado é um paralelogramo “retângulo com os lados todos iguais”.
c) Um quadrado é um retângulo “com os lados todos iguais”.

d) Um quadrado é um losango “com todos os ângulos retos”.

Agora, no fim da UC de Geometria, a prestação do grupo MS foi claramente distinta da anterior pois conseguiu apresentar definições económicas e com as relações inclusivas entre os quadriláteros compreendidas. No entanto o grupo continua a referir-se somente a lados e ângulos. Considera-se que houve uma evolução no seu raciocínio geométrico.

Tarefa – Construções no geoplano

Patentes na descrição de algumas das alíneas desta tarefa estão as dificuldades apresentadas pelo grupo MS, que vieram confirmar a nossa expectativa de que esta não iria ser uma tarefa fácil.

Nível cognitivo

Na primeira alínea o grupo MS começa por desenhar um triângulo retângulo com 1 de base e 1 de altura e não conseguem pensar em mais nenhum outro triângulo possível com a área $\frac{1}{2}$. Afirmam que não existe mais nenhum outro polígono com a área inferior a 1. Como a grande maioria dos grupos da turma não conseguia resolver esta alínea, a professora Catarina vai ao quadro explicar como se obtêm outros polígonos de área inferior a 1.

Na segunda alínea onde se pedia para desenhar um quadrado com $A = 5$ o grupo MS tem um comportamento idêntico ao grupo AB. Mesmo depois da explicação que a professora tinha dado no quadro sobre medidas irracionais, o grupo chega à solução mas ainda com dúvidas afirmando:

- O lado terá de ser 2,5 porque $2{,}5 + 2{,}5 = 5$ – disse o elemento M.
- A área não é a somar mas sim a multiplicar! – respondeu o elemento S.
- Pois é, tens razão. E como vamos fazer para termos o valor de $\sqrt{5}$? – perguntou o elemento M.
- Temos de pensar no teorema de Pitágoras e chegar ao valor $\sqrt{5}$ – respondeu o elemento S.
- Mas como? – perguntou o elemento M.
- Penso que se construirmos um triângulo com base 2 e altura 1, obtemos a hipotenusa com o valor $\sqrt{5}$ – afirmou o elemento S (Obs).

De seguida chamam a professora para confirmarem se estão a raciocinar bem. É curioso verificar que mesmo depois de ouvirem a explicação da professora no quadro e sendo alunas provenientes da área das ciências, mostram dúvidas nos números irracionais e inicialmente no cálculo de uma simples área de um quadrado. A construção de um quadrado de área 5 não foi uma tarefa fácil.

Na terceira alínea o grupo MS tem uma estratégia semelhante à do grupo AB. Para obter a área do paralelogramo não retângulo de área 6, começa por construir um triângulo de área 3. Depois, unindo outro triângulo igual ao desenhado, o grupo obtém um paralelogramo obliquângulo.

As quarta, quinta e oitava alíneas foram feitas com relativa facilidade uma vez que tinham compreendido a construção geométrica de números irracionais.

Na sexta alínea o grupo discute o que é um polígono convexo e um polígono não convexo. Têm a noção de que existem polígonos convexos e não convexos mas não sabem identificá-los. Uma das alunas diz que primeiro vai desenhar um "polígono normal". Não sabem se o *normal* é o polígono convexo ou não convexo. Para estes alunos o *conceito de normal* é aquilo que estão mais habituados a visualizar - o convexo. Acabam por chamar a professora Catarina e perguntar-lhe se o desenhado é um polígono convexo ou não convexo. Uma vez desfeitas as dúvidas resolvem rapidamente a questão.

Na sétima alínea o grupo comete um erro pois interpreta mal o numeral misto $1\frac{1}{2}$ como tendo o valor de 3, desenhando assim um triângulo retângulo com essa área (ver Figura 58 à esquerda). Isto pode até parecer uma distração mas as duas alunas cometem ambas o mesmo erro desenhando a mesma figura em papéis diferentes. Portanto o erro advém do numeral misto. Depois de esclarecidas pela professora sobre o erro cometido, resolvem a questão sem dificuldades (ver Figura 60 à direita).

Figura 60. Respostas à Sétima Alínea

Na oitava alínea o grupo não exibe qualquer dificuldade desenhando o polígono com o perímetro solicitado.

O grupo MS atinge o nível 3 de van Hiele pois, para além de conseguir desenhar os polígonos de diferentes áreas e perímetros, consegue estabelecer relações entre as propriedades desses polígonos.

Nível afetivo

Embora o grupo tenha encontrado algumas dificuldades procurou sempre ultrapassá-las e esclarecendo-as ponderou a ação do que pretendia realizar mostrando uma atitude de *empenhamento*.

Apesar de alguma dificuldade o grupo MS achou a tarefa interessante afirmando.

> "O geoplano ajudou a perceber como determinar a área e o perímetro. A nossa cabeça estava formatada e quando surgiam medidas com valores irracionais, obrigava-nos a mudar a nossa cabeça. Por isso foi uma tarefa importante e gostamos muito dela" (E2).

Ao olhar novamente para a tarefa o grupo lembra que teve grande dificuldade em trabalhar com o geoplano. Para além disso, o grupo refere que foi algo complicado considerarem as quadrículas do geoplano e suas diagonais como unidades de área e comprimento (E4). Isto vem confirmar a fraca capacidade de visualização que o grupo MS tem manifestado ao longo das diferentes tarefas.

Mesmo os alunos provenientes da área das ciências não conseguem nem visualizar nem determinar analiticamente o lado de um quadrado de área igual a 5. Também manifestam inconsistência em conceitos já abordados em unidades curriculares anteriores como foi o caso de não saberem interpretar um número misto.

De realçar que ambos os grupos não têm o conceito de polígono convexo e não convexo interiorizado e este já tinha sido abordado numa aula teórico-prática anterior à da execução da tarefa.

É curioso lembrar aqui a predisposição do grupo AB para a utilização do geoplano. Antes de passar à construção dos diferentes polígonos pedidos, na folha facultada pela professora, o grupo AB concretizava primeiro no geoplano. O grupo MS optou sempre por não recorrer ao geoplano e fizeram praticamente toda a atividade desta tarefa desenhando no papel. Este facto aponta para a falta de hábitos na utilização do raciocínio geométrico.

Tarefa – Caixas para distribuição

A expectativa de que iria haver alguma dificuldade na prossecução desta tarefa foi confirmada pelo desempenho do grupo MS.

Nível cognitivo

Na primeira questão o grupo MS tem alguma dificuldade em responder corretamente porque não reparam que só se pretendia saber que tipo de caixas é que enchiam completamente o caixote. Quando a professora aborda o grupo chama-as à atenção para esse facto e o grupo corrige escrevendo que as caixas tipo 1 e tipo 5 não enchem o caixote A. Relativamente aos outros tipos de caixas registam o seguinte:

- caixas tipo 2 - visualizam a caixa deitada ($1 \times 3 \times 1$) e preenchem o fundo com 5 destas caixas, ficando a sobrar uma quadrícula. Como a altura do caixote era 3 multiplicam 5 caixas por 3 e colocam na quadrícula livre uma caixa ao alto ($1 \times 1 \times 3$) perfazendo um total de 16 caixas;
- caixas tipo 3 - visualizam 4 caixas a cobrir o fundo do caixote na posição $2 \times 2 \times 1$ e multiplicam-nas por 3 para que seja preenchida toda a sua altura, chegando assim às 12 caixas necessárias para o encher;
- caixas tipo 4 - colocam 4 caixas na posição $2 \times 2 \times 3$ e verificam que o caixote fica completamente cheio porque a altura das caixas era igual à altura do caixote.

Na resposta à segunda questão o grupo MS encontrou duas estratégias registando-as da seguinte forma:

a) "Dentro do caixote A, como o seu fundo tem 16 quadrículas de espaço, podemos pôr 16 caixas tipo 2 ao alto [$1 \times 1 \times 3$], na vertical, e assim encherem por completo o caixote A";

b) "No fundo da caixa colocamos 4 caixas do tipo 2 seguidas [$1 \times 3 \times 1$] e uma no sentido diferente [$3 \times 1 \times 1$] e isto 3 vezes porque o caixote tem 3 de altura. Como ainda sobra uma quadrícula, coloca-se 1 caixa tipo 2 na vertical [$1 \times 1 \times 3$], e dá um total de 16 caixas tipo 2 dentro do caixote A" (ver Figura 61).

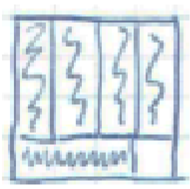


Figura 61. Posição das Caixas tipo 4 na Questão 2

Esta última estratégia (b) foi a utilizada para a resposta à questão anterior.

Na terceira questão o grupo MS utiliza uma estratégia de tentativa e erro procedendo da seguinte forma: (1) procura um caixote com volume mínimo onde coubesse um número inteiro de caixas tipo 1; (2) neste caixote analisa se a caixa tipo 2 também o completa; (3) e em caso afirmativo continua este processo para a caixa tipo 3. Caso contrário altera as dimensões do caixote inicialmente pensado voltando ao ponto (1) deste processo recursivo. Para melhor se clarificar esta estratégia ir-se-á esquematizar os passos efetuados pelo grupo, utilizando as etapas (1), (2) e (3) anteriormente descritas.

(1) O grupo representa a planificação do caixote de volume mínimo para a caixa tipo 1, ou seja, com as mesmas dimensões (ver Figura 62).

Figura 62. Planificação do Caixote de Volume Mínimo para a Caixa Tipo 1

(2) Verifica se no caixote obtido a caixa tipo 2 também o completa.

(3) + (1) Conclui a impossibilidade do ponto (2) pelo que inicia uma nova tentativa, riscando a planificação anterior e representando uma nova planificação para a caixa do tipo 1 conforme Figura 63.

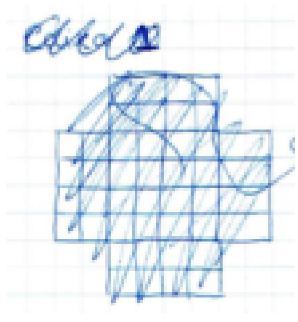


Figura 63. Nova Planificação do Caixote de Volume Mínimo para a Caixa Tipo 1

(2) Verifica se o caixote anteriormente obtido pode ser preenchido com um número inteiro de caixas tipo 2.

(3) + (1) Mais uma vez observando a impossibilidade da hipótese formulada no ponto anterior idealiza um novo caixote, mantendo a base da primeira planificação (ver Figura 62) e definindo uma altura de 6 quadrículas (ver Figura 64).

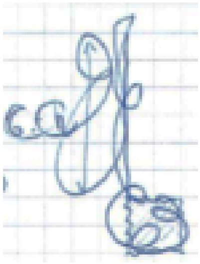


Figura 64. Esboço do Caixote de Menor Volume de Altura 6

(2) + (3) Estas novas dimensões do caixote permitem o seu enchimento com as caixas do tipo 1, 2, 3 e 4 mas não do tipo 5. Face ao insucesso destas três tentativas o grupo abandona este procedimento.

Repare-se que as três figuras representadas neste processo de tentativa e erro foram riscadas pelo grupo à medida que ela se revelava infrutífera.

No processo até aqui descrito o grupo MS começava com uma hipotética planificação para o caixote que pudesse ser preenchido totalmente pela caixa tipo 1. Seguidamente analisava essa possibilidade para os outros tipos de caixas. No abandono desta estratégia o grupo inicia um novo processo precisamente inverso do anterior. Imagina então um caixote cuja base qualquer tipo de caixa o possa preencher, isto é, 2×2. Neste caso as caixas estavam nas posições indicadas na Figura 65.

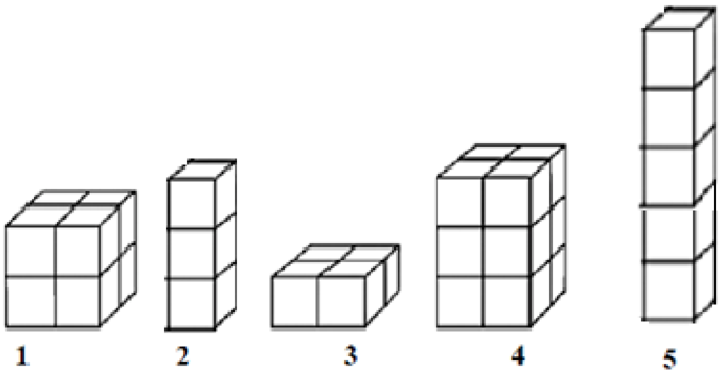


Figura 65. Posição das Caixas Adotada pelo Grupo

Nesta situação a única variável era a altura do caixote. Uma vez que todas as caixas tinham altura de 1, 2, 3 e 5 o grupo concluiu que esta tinha de ser um múltiplo de 2, 3 e 5, chegando assim à altura 30 (ver Figura 66).

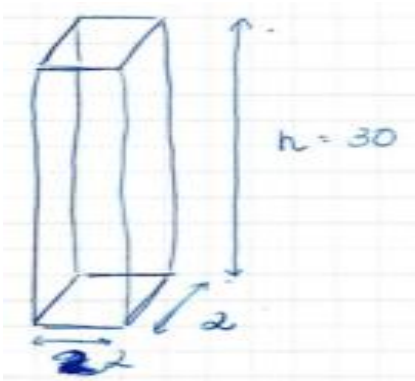


Figura 66. Menor Caixote Onde Cabem Todas as Caixas

Na quarta questão o grupo MS, convencido que o caixote representado anteriormente era o de menor volume possível, procurou decompor o 120 num produto de três fatores para que os caixotes obtidos com essas dimensões pudessem ser preenchidos com todos os tipos de caixas. Idealizaram um caixote de base 6×6 mas não encontraram nenhum número que multiplicado por 36 fosse igual a 120. Então abandonaram esta hipótese e pensaram noutro caixote de base 6×2 chegando a uma altura de 10. Como esta nova hipótese $6 \times 2 \times 10$ era uma solução possível responderam que "sim, se a caixa [caixote] em questão tiver o mesmo volume" (ver Figura 67).

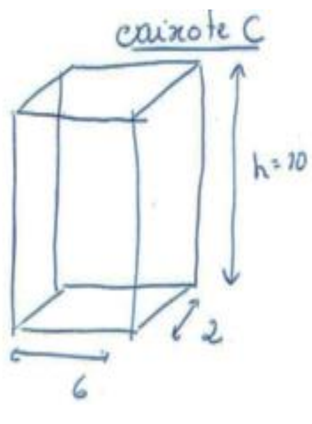


Figura 67. Outro Caixote Onde Cabem Todas as Caixas

Este grupo considerou assim a existência de outras soluções. Porém a afirmação que o grupo faz não é correta visto que, por exemplo, um caixote com as dimensões $2 \times 3 \times 20$ teria o mesmo volume (120) e não era solução da questão.

Para o grupo a existência de mais que duas soluções advém do facto de terem chegado ao valor do volume mínimo (120) através de um caixote possível e experimentarem, com sucesso, uma outra decomposição de 120 $(6 \times 2 \times 10)$. Esta particularidade fomentou uma generalização errada de que todas as decomposições de 120 eram resposta à questão. O grupo fica agarrado à ideia de volume mínimo trabalhado na questão anterior e procura unicamente caixotes com volume 120, por isso não é capaz de pensar nas infinitas possibilidades de resposta.

Na quinta questão o grupo escreveu "basta que a área da base seja igual ao mínimo múltiplo comum entre a área das bases de cada caixa. E a altura também tem que ter o mínimo múltiplo comum entre cada uma das alturas das caixas". Repare-se que esta afirmação induz a existência de um número limitado de caixotes consoante a posição das caixas e as respetivas áreas da base, uma vez que o mínimo múltiplo comum é um valor único.

Apesar da dificuldade de generalização o grupo MS chegou não só ao tipo de caixas é que enchem completamente o caixote A como também chegou ao caixote de menor volume que cheio comporta qualquer tipo de caixa. Considera-se por isso que o grupo MS atingiu o nível 3 de van Hiele.

Nível afetivo

O grupo mostra aqui uma atitude de *empenhamento* ao tentar ultrapassar as dificuldades, definindo estratégias e ponderando e analisando as várias situações que lhe vão surgindo ao longo da tarefa.

Esta foi uma tarefa que o grupo gostou expressando ainda que: "aprendemos muito com ela" (E2).

No novo olhar sobre a tarefa o grupo MS confessa que houve dificuldade no entendimento do que era para responder nas questões 4 e 5. A investigadora perguntou se agora continuariam a responder da mesma forma à questão 4 ao que o grupo respondeu que sim. Só depois de a investigadora lhes ter dito que existiam infinitas possibilidades de tamanhos de caixotes é que o grupo MS vê que a resposta que tinham dado à questão 4 estava errada. Mesmo assim consideraram esta tarefa confusa referindo como causa a proximidade dos termos "caixa" e "caixote".

Acharam a tarefa interessante e gostaram dela apesar das dificuldades que sentiram, referindo o desafio que as várias questões lhes iam colocando (E4).

Tarefa – História geométrica

O facto de o grupo MS não ter chegado às figuras geométricas a três dimensões veio confirmar a expetativa de que esta não seria uma tarefa fácil.

A tarefa começava por pedir para desenhar um triângulo retângulo isósceles e a partir dele desenhar uma nova figura com uma propriedade comum e explicitando essa propriedade.

Nível cognitivo

O grupo MS desenhou o triângulo retângulo isósceles e passou para o trapézio isósceles indicando como propriedade comum "tem dois lados iguais" (ver Figura 68). A seguir ao trapézio isósceles desenharam um retângulo referindo como propriedade comum "a interseção entre as diagonais forma 2 ângulos agudos e 2 obtusos". Do retângulo seguiram para o quadrado indicando como propriedade "todos os ângulos retos". Depois do quadrado desenharam um losango mantendo a propriedade de "tem todos os lados iguais". Do losango partiram para o paralelogramo propriamente dito referindo como propriedade "lados paralelos dois a dois". E chegadas aqui não conseguiram pensar em mais nenhuma nova figura.

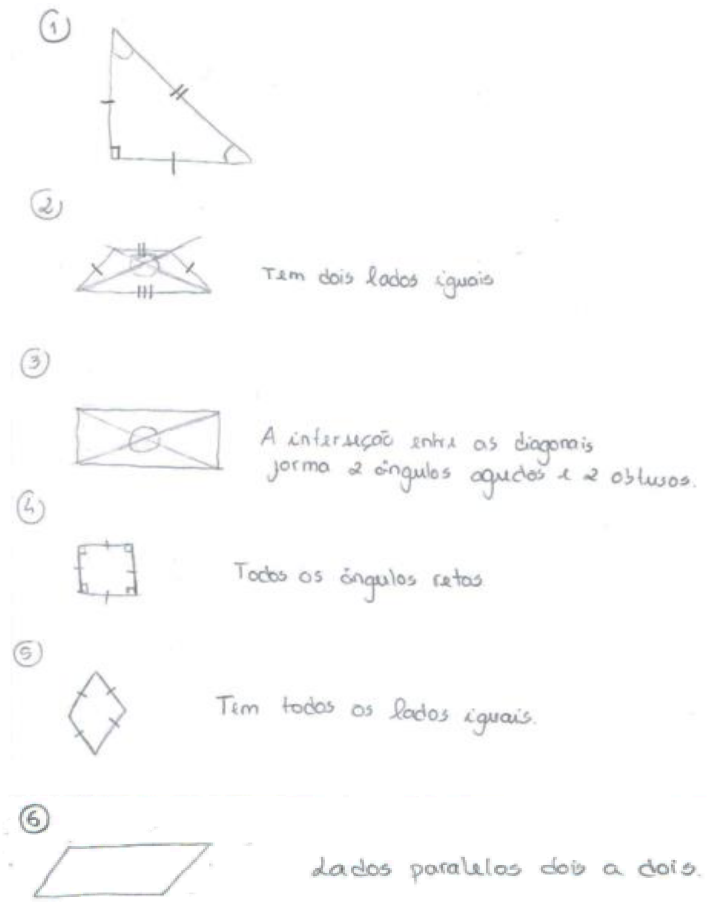


Figura 68. Resolução do grupo MS na Tarefa *História Geométrica*

Apesar de este grupo não ter atingido um dos objetivos desta tarefa referido inicialmente (obter uma representação tridimensional) mencionou como propriedades não apenas de ângulos e lados mas também entre as diagonais.

Na prossecução desta tarefa grupo MS atinge o nível 3 de van Hiele mas limitada a figuras geométricas a duas dimensões. Isto porque o grupo consegue estabelecer relações entre as propriedades da figura e entre outras figuras, embora sem ter sido capaz de fazer a transposição para a Geometria no espaço.

Nível afetivo

O grupo MS embora não tenha conseguido passar para as três dimensões considerou e analisou várias situações corretas no plano, o que revela uma atitude de *empenhamento* na tarefa.

O grupo não achou esta tarefa nada interessante. Mostrou alguma frustração por não ter conseguido evoluir para um sólido (E3).

Olhando novamente para a tarefa o grupo refere que se a fizessem agora a fariam da mesma forma. Não acharam a tarefa interessante porque na altura sentiram alguma frustração pelo facto de não terem conseguido fazer a passagem para as três dimensões. Mas agora novamente perante a tarefa já conseguem visualizar uma solução de passagem correta para as três dimensões, dizendo:

- Oh, podíamos ter passado do quadrado para o cubo – disse o elemento S.
- Ou continuado e passado para o paralelepípedo – completou o elemento M (Obs).

Isto reflete uma evolução na capacidade de visualização do grupo e consequentemente no seu raciocínio geométrico. Além disso o grupo refere que a tarefa foi importante porque lhes permitiu relembrar conceitos como as propriedades das diferentes figuras geométricas (E4).

O Grupo MS ao longo da UC de Geometria

Os pré-requisitos que traziam do ensino básico e secundário não foram, na opinião do grupo MS, essenciais porque no início da UC de Geometria se fez uma abordagem com alguma profundidade aos conceitos básicos. E compreenderam que assim fosse uma vez que mais de dois terços dos alunos são oriundos de outras áreas que não da de ciências. Afirmaram que o relembrar desses conhecimentos elementares foi importante porque permitiu consolidar o que já tinham dado e preparou-as para as novas matérias que iam ser lecionadas. Apesar de todo o cálculo vetorial dado no secundário só nesta disciplina tinham ficado a percebê-lo. A perceção inicial que o grupo MS tinha em relação à Geometria era a de que iam passar todo o tempo a fazer construções geométricas. Relativamente à abordagem que foi feita nesta unidade curricular, o grupo considerou muito positivo o facto de terem realizado imensas fichas práticas com muitos exercícios, problemas e tarefas. Em sua opinião esse foi o fator que mais contribuiu para que tivessem feito a disciplina com sucesso. Obrigou-as a muito trabalho extra aula o que, na perspetiva do grupo, possibilitou o amadurecimento dos seus conhecimentos geométricos. Referem que a componente visual desenvolvida com a Geometria bem como a manipulação de materiais as ajudou na resolução de problemas geométricos até porque "é mais fácil tocar do que imaginar" (E6). Em termos de conteúdos tratados, o grupo considerou como inovadores os frisos e as rosáceas. Quanto à importância do conhecimento adquirido na

UC de Geometria o grupo referiu que o puderam constatar na UC de Matemática Elementar e Materiais quando trabalharam com crianças de três anos a noção da forma, da cor, da espessura, do tamanho e de outras propriedades dos sólidos. Foi aí que experimentaram a importância de saber, compreender, saber explicar e saber como aplicar em futuras situações de ensino - por exemplo, saber explicar muito bem a diferença entre uma esfera e um círculo. E não têm dúvidas de que isso constituirá uma mais-valia para uma maior progressão no estudo da Geometria no 1º ciclo. Da Geometria lecionada no ensino básico e no secundário havia memória de a terem trabalhado em Educação Visual e não nas disciplinas de Matemática. Relativamente às maiores dificuldades sentidas na realização das atividades propostas nesta unidade curricular foram as fichas relacionadas com os frisos e rosáceas - opinião semelhante à do grupo AB. As questões ligadas à Geometria no plano foram as que consideraram de menor dificuldade. Em relação aos níveis de van Hiele o grupo MS nunca tinha ouvido falar disso (E6).

Síntese

Analisando o grupo MS ao longo das dez tarefas elaborou-se a Tabela 18 onde se sintetiza o seu desempenho.

Tabela 18. Resumo da Análise de Dados do Grupo MS ao longo das Tarefas

TAREFAS	*Processos de raciocínio identificados*	*Formas de validação de resultados*	*Dificuldades identificadas*	*Níveis de van Hiele*	*Atitudes*
Encontra polígonos	testa e utiliza propriedades matemáticas dos polígonos convexos	desenho dos polígonos com a indicação das letras nos seus vértices	identificar polígonos não convexos	1/2[21]	perseverança
Os três quadrados	formula, testa e justifica informalmente conjeturas	manipulação dos quadrados; comparação das diferentes figuras	encontrar uma figura com $28ua$; utilizar a noção formal de área e de perímetro;	1/2	empenhamento
Retângulos sombreados	testa e utiliza propriedades matemáticas	-----	visualizar triângulos equivalentes; relacionar as partes com o todo; justificar formalmente	1 2	perseverança
As casas da Ana e da Beatriz	testa e utiliza propriedades matemáticas	desenho de duas circunferências concêntricas	desigualdade triangular	2	empenhamento e insatisfação
Área do Δ através da do retângulo	testa e utiliza propriedades matemáticas e justifica informalmente	contagem das quadrículas da folha de papel	justificar formalmente	3	perseverança e responsabilidade
Definição de quadrado	formula questões e utiliza propriedades matemáticas	-----	distinguir entre justificação e definição; identificar propriedades dos quadriláteros; posição *standard* de objetos geométricos; relacionar hierárquica/ os quadriláteros	2	insatisfação
Construções no geoplano	testa e utiliza propriedades matemáticas	contagem das quadrículas do geoplano	confusão entre polígonos convexos e não convexos	3	empenhamento
Caixas para distribuição	formula, testa e justifica informalmente conjeturas	desenho das planificações dos caixotes	generalizar	3	empenhamento
História geométrica	utiliza propriedades matemáticas	-----	nenhuma tentativa para as três dimensões	3	empenhamento

Em relação às tarefas o grupo MS considera que *Os três quadrados* e *A casa da Ana e da Beatriz* foram as tarefas que na altura consideraram mais fáceis, apesar dos erros

[21] Não existe um grau de completa aquisição do nível 2 porque descem frequentemente ao nível 1 de van Hiele.

cometidos. As mais difíceis foram *Retângulos sombreados* e *Definição do quadrado* porque na primeira tarefa tiveram grandes problemas de visualização e na segunda não compreendiam como é que chegavam à definição.

A tarefa que mais gostaram e mais desafiante foi a da *Área do triângulo através da do retângulo* porque lhes deu luta e nunca tiveram vontade de desistir da sua resolução. As que menos gostaram foram a da *História geométrica* pois não conseguiram dar o salto para as três dimensões. As tarefas *Encontra polígonos*, *Construções no geoplano* e *Caixas para distribuição* foram consideradas pelo grupo como interessantes e motivadoras.

O grupo MS afirmou ainda que "as tarefas foram uma preciosa ajuda porque relembraram conceitos muito importantes para o esclarecimento de dúvidas e assuntos mal arrumados" (E4).

Quando a investigadora lhes perguntou qual a definição que davam para tarefas desafiantes o grupo MS respondeu que são as "que motivam conceitos novos e nos obrigam a pensar" (E4).

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E REFLEXÕES

Neste capítulo final faz-se uma síntese do estudo onde se destacam os objetivos do estudo e as questões que orientaram toda esta investigação. Depois apresentam-se as principais conclusões onde se procura dar resposta às questões orientadoras fazendo a ponte entre os referenciais teóricos e o trabalho dos dois grupos-caso envolvidos nesta investigação. Apontam-se as limitações que se sentiram ao longo do estudo e por fim abrem-se possíveis caminhos para futuras linhas de investigação.

Síntese do Estudo

Realizado no âmbito da UC de Geometria do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma Escola Superior de Educação, o presente estudo teve como objetivo principal a identificação do conhecimento e do raciocínio geométrico dos futuros professores, num contexto natural de sala de aula através da realização de testes de diagnóstico e da aplicação de um conjunto diversificado de nove tarefas desafiantes, bem como das suas atitudes em relação à Geometria. Dentro desta problemática enunciaram-se três questões orientadoras desta investigação, a saber: (Q_1) Como se pode caracterizar o conhecimento geométrico dos estudantes, identificando as principais dificuldades ao longo dos testes e das tarefas?; (Q_2) Como se pode caracterizar, de acordo com os níveis de van Hiele, o raciocínio geométrico dos estudantes ao longo dos testes e das tarefas?; e (Q_3) Que atitudes manifestam os estudantes em relação às tarefas que realizaram e à unidade curricular de Geometria?

Estas questões que orientam este estudo foram formuladas com o objetivo de estudar os fenómenos educativos enunciados em toda a sua complexidade e no seu contexto natural. Por isso se recorreu ao acompanhamento de duas díades que se procurou entender como vivenciaram as aulas de Geometria e sobretudo as tarefas que lhes foram propostas.

A investigação de natureza qualitativa e interpretativa que se adotou seguiu um *design* de estudo de caso que acompanhou, no contexto da turma onde se inserem, de modo particular os dois grupos-caso: AB e MS. Os dados foram recolhidos sobretudo através de observações, entrevistas e documentos escritos de diferente natureza. Isto é os dados decorrentes deste estudo foram: (1) os resultados dos testes e das tarefas; (2) as notas de campo sobre as observações, as filmagens, as gravações e os artefactos de todas as tarefas aplicadas e investigadas; e (3) as entrevistas realizadas.

O estudo teve por base a aplicação de um teste com o intuito de diagnosticar conhecimentos elementares em Geometria e caracterizar o raciocínio geométrico através dos níveis de van Hiele no início da UC de Geometria. Com o objetivo de analisar a evolução dos dois grupos-caso no fim da UC de Geometria repetiu-se a aplicação do teste de diagnóstico. Como os resultados iniciais do mesmo tinham sido fracos resolveu aplicar-se o mesmo teste. A experiência ocorreu numa turma de 23 alunos onde se integram os grupos-caso investigados. Os grupos-caso de duas alunas cada foram escolhidos com alguma diferenciação nas classificações obtidas a matemática porque se entendeu que essa diferenciação viria enriquecer o fenómeno em estudo. O estudo envolveu a realização de nove tarefas desafiantes de nível 1, nível 2 e nível 3 de van Hiele que foram alvo de análise e abrangeram vários tópicos do programa da UC de Geometria. Na seleção das tarefas privilegiou-se as que estas alunas pudessem utilizar quando forem já professoras em contexto de sala de aula quer no 1º e/ou no 2º ciclo. Em todas as tarefas a investigadora fez observações, tomou notas de campo, ouviu as gravações áudio, visualizou as filmagens de vídeo, analisou os vários artefactos recolhidos e realizou as entrevistas semiestruturadas de modo a coligir toda a informação importante e a não perder nenhum dado que pudesse ser relevante para as questões que se pretendiam ver respondidas.

Síntese Comparativa dos Casos

Este estudo contemplou dois grupos-caso. Um dos grupos era formado por duas alunas muito interessadas e dinâmicas embora oriundas de áreas diferentes - humanidades e ciências. O outro grupo era constituído por duas alunas ambas oriundas da área das ciências de média mais baixa e menos dinâmicas. Procuraram-se dois grupos diferenciados e realmente essa diferença foi sublinhada pelos resultados obtidos ao longo dos testes e das tarefas. Sentiu-se que o facto dos dois grupos saberem que estavam a se investigados condicionou de algum modo a sua postura sobretudo na persistência perante as dificuldades que iam surgindo, o que em circunstâncias normais não as teriam levado tão longe.

Um dos grupos-caso, curiosamente o que integra a estudante que provém da área das humanidades, manifesta pretender frequentar o mestrado que habilita para a docência no 1º e 2º ciclo. O outro grupo-caso diz claramente pretender seguir o mestrado que habilita para a docência do pré-escolar e 1º ciclo.

A turma não era objeto de investigação, no entanto o conhecimento geométrico obtido no teste inicial demonstrou que em nenhuma das capacidades transversais e conhecimentos exigidos no PMEB (ME, 2007) ao nível do ensino básico atingiu sequer os 40% de respostas corretas. Estes resultados sublinham as imensas fragilidades no conhecimento geométrico elementar e vão ao encontro das conclusões dos estudos de alguns investigadores (e.g., Gomes, 2003; Tempera, 2010). No final da UC de Geometria os resultados indicaram alguma evolução no seu conhecimento geométrico porém nas diferentes capacidades transversais e conhecimentos do PMEB (ME, 2007) atingiram apenas 58%. Estes resultados corroboram o que Tempera (2010) observou na sua investigação. O tipo de conhecimentos em Geometria dos futuros professores não é homogéneo e a formação inicial parece não estar a conseguir dar resposta às suas dificuldades. Este autor concluiu que a frequência de uma UC de Geometria na LEB parece não dar resposta a todas as dificuldades destes estudantes. A investigação (e.g., Ball & Bass, 2003; Ryan & Williams, 2007; Tirosh, 2000) também revela que muitos dos estudantes da formação inicial apresentam dificuldades nalgumas capacidades matemáticas e conceitos fundamentais semelhantes às dos alunos que vão ensinar.

Em relação ao estudo desenvolvido na Tabela 19 apresenta-se um resumo comparativo do desempenho das duas díades quer nos testes quer nas tarefas. Nos testes caracteriza-se o raciocínio geométrico dos grupos antes e depois da UC de Geometria. Nas tarefas identificam-se os principais processos de raciocínio utilizados assim como as principais dificuldades identificadas ao nível dos conceitos geométricos e de alguns processos matemáticos utilizados pelos grupos.

Tabela 19. Análise Comparativa dos dois Grupos-caso ao longo dos Testes e das Tarefas

Grupos	*Teste inicial*	*Teste final*	*Tarefas*	
	raciocínio geométrico		*processos de raciocínio*	*dificuldades*
AB	nível 1 - aquisição completa nível 2 – alta aquisição nível 3 - aquisição intermédia	nível 1 - aquisição completa nível 2 - aquisição completa nível 3 - aquisição completa	- formular questões - testar propriedades - utilizar propriedades - justificar informalm/ propried. - justificar formalm/ propried. - formular conjeturas - testar conjeturas - justificar informalm/ conjet. - justificar formalm/ conjet.	- confusão entre figura geométrica e polígono relativam/ ao perímetro - confusão entre polígono convexo e não convexo - justificar formalm/ propried.
MS	nível 1 - alta aquisição nível 2 - aquisição intermédia nível 3 - aquisição intermédia	nível 1 - aquisição completa nível 2 - alta aquisição nível 3 - alta aquisição	- formular questões - testar propriedades - utilizar propriedades - justificar informal/ propried. - formular conjeturas - testar conjeturas - justificar informal/ conjet.	- visualizar polígonos não convexos - confusão entre polígono convexo e não convexo - utilizar conceito formal de área - identificar propried. dos quadriláteros - relacionar hierarquicamente os quadriláteros - visualizar triângulos equivalentes - relacionar a parte com o todo - justificar formalm/ propried. - distinguir entre justificação e definição - desigualdade triangular - generalizar

Da observação da tabela constata-se que há uma diferenciação nos grupos-caso que será analisada mais em pormenor nas conclusões efetuadas no ponto seguinte.

Principais Conclusões do Estudo

Nesta secção far-se-á a discussão dos resultados mais importantes relativos às dimensões cognitiva e afetiva, de acordo com os vários descritores identificados na prossecução dos testes e das tarefas aplicadas, de modo a dar-se resposta às questões orientadoras predefinidas neste estudo. Paralelamente ir-se-á referindo estudos similares comparando as suas conclusões com as obtidas nesta investigação.

O presente estudo teve como principal objetivo caracterizar o conhecimento e o raciocínio geométrico dos estudantes ao longo dos testes e das tarefas, identificar dificuldades e perceber as atitudes das duas díades em relação às tarefas e à própria UC de Geometria. As principais conclusões deste estudo apresentam-se de seguida organizadas pelas questões previamente formuladas no início deste estudo.

Como se pode caracterizar o conhecimento geométrico dos estudantes, identificando as principais dificuldades ao longo dos testes e das tarefas?

Em relação aos grupos-caso os testes mostraram grandes fragilidades nalguns conceitos geométricos elementares. As lacunas existentes ao nível dos conhecimentos elementares em Geometria, tais como, as propriedades dos quadriláteros, a noção de polígono inscrito e circunscrito, a posição relativa de retas e o conceito de poliedro entre outras, trazem consequências na execução das tarefas propostas. Esta realidade está patente quer nas três alunas com matemática A no ensino secundário, quer na aluna com matemática aplicada às ciências sociais. A este facto estão associados dois fatores, por um lado o caráter demasiado formal com recurso a procedimentos algébricos previsto no programa da Matemática A e por outro a ausência do estudo da Geometria no programa da MACS. Qualquer uma destas situações não traz benefícios para a Geometria enquando área de estudo (Veloso, 2012). Alguns investigadores (e.g., Bansilal & Naidoo, 2012; Timmer & Verhoef, 2012) referem mesmo que a predisposição para estas manipulações algébricas na Geometria provocam nos estudantes uma resistência ao recurso à visualização, para além de prejudicar a visão global dos conceitos geométricos através desta área uma vez que estão a operar em domínios isolados.

A manipulação de fórmulas faz perder a essência da Geometria e dá origem a que os conceitos com que estão a trabalhar por detrás dessas fórmulas não sejam entendidos. Por exemplo o elemento B apesar de ter sido boa aluna a Matemática A e reconhecer o seno de um ângulo e saber operar com números irracionais confundia a área do círculo com o perímetro, figura geométrica com sólido geométrico e a altura com a mediana de um triângulo. Estes são alguns exemplos de lacunas ao nível dos conhecimentos geométricos elementares que demonstram que o uso da álgebra, a mecanização e a memorização sobrepõem-se e ofuscam a aquisição destes conceitos básicos essenciais para a resolução de situações problemáticas. O elemento B procurava sempre que possível refugiar-se no cálculo algébrico, o que vem ao encontro de Battista (1990) quando afirma que os estudantes que não são *visuais* podem desenvolver estratégias analíticas que os ajudem a compensar a falta da sua capacidade de visualização. O elemento A apesar de ter estudado Geometria apenas até ao 9º ano de escolaridade apresentava uma capacidade de visualização superior, como por exemplo, identificava rotações numa figura, analisava a posição relativa de retas e relacionava os elementos em sólidos geométricos, situações que constituíram um problema para as restantes colegas.

Apesar de se ter a consciência de que as tarefas propostas abarcavam conhecimentos elementares em Geometria houve a perceção de determinadas dificuldades que revelaram uma consistência dos factos frágil ou limitada. Os alunos manifestaram menor dificuldade em conceitos frequentemente abordados no ensino básico mas apresentaram constrangimentos relacionados com casos particulares em dois sentidos: por um lado não se recordavam de casos particulares existentes (e.g., ângulos côncavos) ou generalizavam a partir dos casos particulares (e.g., imagem conceptual).

A dificuldade manifestada na visualização dos polígonos côncavos pode atribuir-se ao facto do currículo da matemática dar maior enfoque ao estudo dos polígonos convexos. Este facto é visível, por exemplo, no estudo de diversos teoremas contemplados nos programas de matemática e aplicados apenas a polígonos convexos. Somente o elemento A conseguiu visualizar estes polígonos mas após ter sido estimulada a procurar outros para além dos que já tinha descoberto (convexos).

Ao longo das tarefas foram várias as situações em que a imagem conceptual das figuras geométricas influenciou a capacidade de relacionar as suas propriedades. O que vai ao encontro de algumas investigações no que concerne à posição *standard* das figuras (imagem conceptual), como por exemplo, no caso particular do quadrado ou de um ângulo reto que possuem um dos lados na horizontal (Clements & Battista, 1992; Lindquist & Shulte, 1987). Este facto foi evidente quando uma das alunas afirmou: "se rodares o quadrado ele fica losango". Ou seja, é visível a prevalência da imagem conceptual de um losango pois ainda que a imagem inicial seja um quadrado os seus ângulos retos deixam de ser reconhecidos. Estas preconceções erradas são as imagens conceptuais que os estudantes possuem dos objetos geométricos e que estão relacionadas com a intuição geométrica dos mesmos. E a investigação também refere que o desenvolvimento da intuição geométrica depende muito das aprendizagens e experiências provenientes de atividades de natureza geométrica que os estudantes experimentam (Clements & Battista, 1992).

Para além dos dois aspetos anteriormente referidos temos ainda a registar a influência que os traçados geométricos elaborados pelos alunos têm no desenvolvimento das tarefas, tal como ocorreu com a tarefa dos *Retângulos sombreados*. Battista (2007) refere isto mesmo quando afirma que as representações construídas pelos alunos afetam muitas vezes as suas conclusões, constituindo-se num obstáculo ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Ainda no âmbito da visualização foi notório que as próprias estratégias encontradas pelos grupos para a resolução das tarefas foram umas vezes limitativas (e.g., posição rígida para as caixas) conduzindo-os a uma prestação muito redutora e outras a uma generalização pouco refletida.

No final do ensino básico um dos objetivos patentes é a classificação hierárquica dos quadriláteros com a clara compreensão das suas relações no entanto, tal como as investigações (e.g., De Villiers, 1994; Fujita, 2008) relatam, as dificuldades manifestadas permitem afirmar que tal objetivo não foi atingido. As dificuldades identificadas na compreensão das relações inclusivas entre quadriláteros parecem querer evidenciar que o conhecimento sobre essas relações estaria mais memorizado do que compreendido. A investigação mostra que os professores podem ser culpados de redução de nível uma vez que este desenvolvimento depende das tarefas por eles propostas, levando muitas vezes os seus alunos a terem de recorrer à memorização em vez de raciocinarem (Clements & Battista, 1992; Fuys et al., 1988).

Ainda no estudo dos quadriláteros as alunas revelaram desconhecimento em relação ao significado de definição matemática que lhes poderia ter ajudado a ultrapassar alguns dos obstáculos na tarefa *Definição de quadrado*. Para além disso há somente menção de propriedades relativas a lados e a ângulos ignorando outras propriedades (e.g., diagonais, eixos de simetria).

No que concerne às provas formais em matemáticas verificou-se uma dificuldade acrescida no grupo MS, pois no outro grupo um dos elementos (B) utilizava com frequência a álgebra que facilitava estes processos. Este grupo AB também mostrou uma sensibilidade maior do que o outro grupo para a necessidade de trabalhar com casos genéricos em vez de casos particulares. Este facto foi visível na resolução da tarefa *Retângulos sombreados*.

No fim da UC de Geometria os resultados dos testes realçam uma evolução no conhecimento geométrico e na linguagem matemática utilizada e uma diminuição nos erros cometidos, o que mostra que os conceitos geométricos evoluem com a instrução. Estes resultados não evidenciam a conclusão de Matos (1984) que afirma que o conhecimento geométrico progride ao longo do curso de futuros professores mas esse progresso só é significativo para os estudantes que não frequentaram matemática no ensino secundário.

Como se pode caracterizar, de acordo com os níveis de van Hiele, o raciocínio geométrico dos estudantes ao longo dos testes e das tarefas?

Pela análise dos resultados do teste inicial os grupos mostram alguma diferenciação no seu raciocínio geométrico. Evidencia-se que o grupo MS não possui uma aquisição completa do nível 1 e tem apenas uma aquisição intermédia do nível 2 de van Hiele. Já o grupo AB denota a aquisição completa do nível 1 e uma alta aquisição do nível 2. Ambos os grupos têm um grau de aquisição intermédia do nível 3 de van Hiele. De salientar que no nível 3 o desempenho do elemento B foi muito superior (70%) ao do elemento A (33%), ou seja, o elemento B evidencia um alto grau de aquisição do nível 3 enquanto o elemento A atinge somente um baixo grau de aquisição neste mesmo nível de van Hiele. Este resultado não nos surpreende uma vez que o elemento A só teve matemática até ao 9º ano de escolaridade.

A prestação dos dois grupos-caso foi similar nas formas utilizadas para a validação dos resultados. Já nos processos de raciocínio utilizados na execução das tarefas destacam-se as dificuldades do grupo MS para as justificações formais (e.g., Tarefa *Retângulos sombreados*) e para a visualização (e.g., Tarefa *Encontra polígonos*). Esta dificuldade confirma os resultados obtidos no teste inicial - um grau de alta aquisição do nível 1 – mostrando que o grupo MS ainda não possuía um grau de completa aquisição do nível 1 de van Hiele. Para Vale e Barbosa (2009) *ver* é uma componente importante da generalização e deve ser explorada desde muito cedo nos jovens. Outros autores referem que o objetivo final do ensino da matemática é o desenvolvimento da capacidade de generalização tanto no campo numérico como com formas no plano e no espaço (e.g., Vale & Fonseca, 2010). Pode então concluir-se que estas duas lacunas foram determinantes na menor evolução do raciocínio geométrico do grupo MS.

Após a intervenção da UC de Geometria os grupos avançaram pelo menos para um grau mais elevado em todos os níveis, o que é consistente com os resultados de outras investigações (Fuys et al., 1988; Van Hiele, 1999). Mesmo depois de programas intensivos de Geometria os estudantes só conseguem subir um grau na aquisição dos níveis de van Hiele. Porém o resultado a que se chegou é bem mais animador porque no nível 3 o grupo AB evoluiu de um grau de aquisição intermédia para um grau de completa aquisição, subindo assim dois graus dentro do nível 3. Este resultado necessita de mais investigação. É preciso investigar se a subida de mais de um nível no grau de aquisição do nível 3 se deve ao facto de inicialmente o grupo AB apresentar um grau de completa aquisição do nível 1 e um grau de alta aquisição do nível 2. Ou se o grupo tivesse partido de um grau de completa aquisição do nível 1 e um grau de aquisição intermédia do nível 2 os resultados seriam semelhantes.

No grupo AB o que distingue os seus elementos é a propensão do primeiro (A) pela visualização em detrimento do cálculo algébrico preferido pelo segundo (B). É curioso verificar que no final da UC de Geometria a classificação do elemento A proveniente das humanidades é de 19 valores enquanto o elemento B proveniente das ciências obtém apenas 15 valores. Estes resultados evidenciam a importância de se desenvolver a capacidade de visualização como competência matemática. E não foi só na UC de Geometria que o elemento A consegue obter a maior nota pois teve as melhores classificações a praticamente todas as UC de matemática da LEB. No Mestrado em Ensino do 1º e 2º ciclo do Ensino Básico o elemento A atinge a classificação final de 18 valores (a nota mais alta) na UC de opção – "Desenvolvimento do Pensamento Geométrico" enquanto o elemento B só consegue obter 16 valores (a segunda melhor nota). Perante estes resultados parece emergir uma evidência - a apetência pela visualização é um importante contributo para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. O que corrobora o defendido por outros investigadores (e.g., Battista, 2007; Yilmaz, 2009) que sublinham a importância da capacidade espacial no processo de ensino e aprendizagem da matemática provando que esta capacidade está positivamente correlacionada com o sucesso a matemática.

Que atitudes manifestam os estudantes em relação às tarefas que realizaram e à UC de Geometria?

A atitude do estudante é uma das variáveis que mais influencia afetivamente o processo de ensino e aprendizagem. Os grupos-caso ao longo das tarefas demonstraram uma predisposição afetiva positiva no envolvimento que tiveram neste processo. A vontade de quererem aprender demonstrada numa curiosidade matemática natural, a pretensão de abraçar a carreira docente, a consciência das suas dificuldades e a vontade em as superar foram fatores que pesaram na predisposição para o desenvolvimento das tarefas. As investigações recentes vão nesta mesma direção sublinhando que a motivação do aluno para se envolver no processo de ensino e aprendizagem é fundamental (Tobias & Itter, 2007; Tobias et al., 2010). Os estudos comparativos internacionais (e.g., TIMSS) também incluem a atitude do estudante como uma variável importante para o sucesso na aprendizagem.

Relativamente à UC de Geometria, na entrevista, as alunas confessaram que, como não estavam habituadas a raciocinar sobre figuras e estavam mais familiarizadas com o cálculo, recorriam a este sem imaginarem que a visualização lhes pudesse resolver muitas das situações que lhes iam surgindo. Panaoura (2013) confirma isto mesmo ao afirmar que as inter-relações das crenças dos estudantes com o seu desempenho matemático na Geometria influenciam o seu desempenho, porque ao terem crenças negativas sobre a utilização de figuras, diagramas e representações não as conseguem usar de forma fluente e flexível como uma ferramenta para superar os obstáculos cognitivos na compreensão de um conceito geométrico.

Ao longo das tarefas sobressai alguma insatisfação dos grupos-caso em duas situações distintas: quando a tarefa é resolvida com demasiada facilidade, executando-a como um mero exercício rotineiro (tarefa *Encontra polígonos* – grupo AB); e quando não se entende o que é para fazer (tarefa *Definição de quadrado* – grupo MS). A investigação mostra não só que o que pode ser um autêntico quebra-cabeça para uns, para outros pode ser um exercício banal ou uma simples questão de recordar o que se memorizou (Barbeau, 2009; Sullivan et al., 2011). Em relação ao modo como o estudante entende a tarefa, processa a informação e as relações mentais que desenvolve, são condicionadas pela atividade proposta que influencia e estrutura a capacidade do pensamento e do raciocínio (Vale, 2012). Por isso parece claro que o que o estudante aprende depende amplamente das tarefas que resolve.

A possibilidade de manipulação dos quadrados e as figuras foram fatores facilitadores, apontados por ambos os grupos. A investigação (e.g., Clements, 2004; Vale, 2003) também mostra que a utilização de materiais concretos pode ser útil para o desenvolvimento das representações geométricas.

O empenhamento esteve patente na procura e análise das situações que lhes iam surgindo ao longo das tarefas. Nas mais difíceis perseveravam sempre no propósito de alcançarem a sua (re)solução. Embora se notasse algum constrangimento sempre que surgiam dificuldades a consideração do impacto das suas ações levava-as a permanecer na prossecução das tarefas evidenciando uma atitude responsável.

Por um lado, pode então concluir-se que, tarefas demasiado simples são por isso mesmo pouco interessantes. Tarefas em que o estudante não compreenda o que nelas é solicitado provocam insatisfação e desmotivam-no. Por outro ter uma predisposição afetiva para com a matemática – uma atitude positiva – e querer compreender e relacionar cada passo da matemática – pretender ser um bom professor – são ingredientes indispensáveis ao estudante para uma sólida formação em matemática.

Limitações do Estudo

A comunicação e as interações eram dois dos aspetos que se tinham colocado como hipótese de estudo. Trabalhou-se em grupo porque interessava saber se o conhecimento seria potenciado nas discussões entre pares que eventualmente iriam surgir mas os dados recolhidos não permitiram responder a essa questão. A pouca intervenção que se pretendia por parte da professora, para não influenciar o modo de pensar dos estudantes, e a existência de algum receio quer da turma quer dos grupos-caso em exporem as suas debilidades com medo de errarem inviabilizou esta nossa pretensão - não foram produzidos dados suficientes que justificassem essa análise. As interações produzidas nos grupos-caso foram prejudicadas pelo facto de se estar a gravar e a filmar, o que causou alguma perturbação – era como se os grupos sentissem que estavam a ser avaliados. Para além disso estes estudantes eram adultos e como tal não era fácil colocar a "nú" as suas limitações. Embora a professora os colocasse sempre à vontade o facto de saberem que estavam a ser objeto de investigação pesava sobre eles.

Reflexões

Os resultados deste estudo podem não ter sido os esperados mas, para mim e mais importante do que isso, ao elaborar este estudo senti uma grande valorização pessoal. As leituras que fiz foram autênticas descobertas que, como tal, me proporcionaram um outro modo de *olhar* a minha atividade docente.

Retiro deste estudo a necessidade de uma reestruturação do programa da UC de Geometria de modo a dar-se maior destaque à compreensão aprofundada dos conceitos geométricos elementares que estes alunos irão trabalhar enquanto professores em detrimento de outros mais elaborados. Isto porque já outros estudos (e.g., Owens & Outhred, 2006) revelaram que os professores apresentam as mesmas dificuldades conceptuais em Geometria dos alunos que ensinam. E também porque Zaslavsky (1991) sublinha que os professores com um conhecimento conceptual incompleto transmitem conceitos errados e incompletos aos seus alunos.

Os fracos resultados obtidos no teste inicial levam-nos a refletir para a necessidade de se dar uma maior importância ao estudo da Geometria já no 1º ciclo. O estudante necessita desde logo de oportunidades para desenvolver a sua capacidade de visualização espacial, apurando e refinando o seu "olho geométrico", isto é, o seu raciocínio geométrico. É por isso urgente que desde cedo se invista no desenvolvimento da capacidade de visualização espacial da criança para mais tarde se conseguirem colher bons *frutos* geométricos. Há uma necessidade de se recriarem os temas que estes futuros professores irão trabalhar futuramente com os seus alunos de modo a poderem privilegiar a capacidade de visualização.

A participação neste estudo fortaleceu nos grupos-caso a sensibilização de uma outra forma de raciocínio - o raciocínio geométrico, como potencial ferramenta para a resolução de problemas. Estas alunas confessaram que esta investigação lhes proporcionou uma importante visão das potencialidades da Geometria e da capacidade visual a ela inerente.

Para além disso este trabalho teve um grande impacto nos participantes nele envolvidos, os dois grupos-caso. Há uma nítida evolução tanto na compreensão dos conceitos geométricos elementares que foram abordados na UC de Geometria como na linguagem matemática utilizada (e.g., nas definições já só referem as propriedades necessárias e suficientes). Também é evidente o progresso no que toca à compreensão das relações inclusivas entre os quadriláteros.

No final da UC de Geometria os grupos-caso veem a utilidade da Geometria para a própria matemática e reconhecem a sua importância para a resolução de problemas. Relativamente ao que mais valorizaram e que mais contribuiu para uma melhor compreensão, referem que o caráter prático da UC lhes permitiu desenvolver a capacidade visual, aspeto que até então não lhes tinha sido solicitado e foi fator de maior motivação para a aprendizagem da matemática e desenvolvimento do raciocínio geométrico. Referem também que o desenvolvimento do raciocínio geométrico é essencial para se superar a dificuldade que alguns alunos apresentam no cálculo algébrico.

Teria sido útil ter feito um acompanhamento longitudinal destes alunos, no sentido de ver se as competências que foram adquirindo bem como algumas das atitudes que foram demonstrando em relação à Geometria se manteriam. E, no que toca à capacidade visual que estes estudantes descobriram com esta experiência, seria interessante verificar se na sua prática de ensino supervisionada estes estudantes utilizariam algumas das tarefas aplicadas ou outras em que a visualização estivesse presente.

Com este trabalho, que incluiu momentos pessoais de desenvolvimento profissional, espera-se ter contribuído para a qualidade da formação dos nossos futuros professores do ensino básico em Geometria e para o melhoramento do trabalho da investigadora enquanto professora educadora.

Numa chamada de atenção para os limites da construção científica e parafraseando Eichelberger (1989, citado em Afonso, 2005, p. 21) o autor recorda que “somos incapazes de produzir verdade, só produzimos conhecimento”. No culminar desta etapa apraz-me dizer que se o conhecimento produzido for consistente, alicerçado em conceitos matemáticos bem compreendidos e apoiado num raciocínio geométrico, as bases para o sucesso em Geometria estarão lançadas.

REFERÊNCIAS

Abbasi, S., & Iqbal, K. (2009). How learning and teaching of mathematics can be made interesting: A study based on statistical analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (4), 505-515.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.

Adler, P. A., & Adler, P. (1998). Observational tecniques. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 79-109). London: Sage Publications.

Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação. Um guia prático e crítico*. Porto: Asa Editores.

Aiken, L. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of Educational Research*, 40 (4), 551–596. doi: 10.3102/00346543040004551

Ainscow, M. (2000). The next step for special education. *British Journal of Special Education*, 27 (2), 76-80.

Alarcão, I. (org.) (2000*). Escola reflexiva e supervisão. Uma escola em desenvolvimento e aprendizagem*. Porto: Porto Editora.

Alarcão, I., Freitas, C., Ponte, J. P., Alarcão, J. & Tavares, M. J. (1997). *A formação de professores no Portugal de hoje*. Documento produzido por um grupo do CRUP – Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas.

Alatorre, S., & Sáiz, M. (2009). Triangles' prototypes and teachers' conceptions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 25-32). Thessaloniki: PME.

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles S. (2006). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Aleixandre, M., Rodriguez A., & Duschl, R. (2000). "Doing the lesson" or "doing science": Argument in high School genetics. *Science Education*, 84 (6), 757-792.

Alkan, F., & Erdem, E. (2011). A study on developing candidate teachers' spatial visualization and graphing abilities. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 15, 3446–3450.

Almeida, J. (2010). *Representações e conhecimentos de docentes do 1º ciclo do ensino básico relativamente à geometria: Um estudo em torno da sua influência na abordagem com os alunos*. Tese de mestrado. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Alsina, C. (1999). Painel "Geometria no currículo de matemática". In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria no virar do milénio*, 65. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Amato, S. (2004). Improving student teachers´ attitudes to mathematics. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 25-32). Bergen: Bergen University College.

Anders, P., Hoffman, J., & Duffy, G. (2000). Teaching teachers to teach reading: Paradigm shifts, persistent problems, and challenges. In M. Kamil, P. Mosenthal, P. Pearson & R. Barr (Eds.), *Handbook of reading research*, 3 (pp. 719-742). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Andrews P., & Hatch, G. (2000). A comparison of Hungarian and English teachers' conceptions of mathematics and its teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 31–64.

Antunes, F. (2005). Regulação supranacional e governação da educação: Dimensões europeias. *Administração Educacional*, 5, 6-19.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Archambault, I., Janosz, M., & Chouinard, R. (2012). Teacher beliefs as predictors of adolescents´ cognitive engagement and achievement in mathematics. *The Journal of Educational Research*, 105, 319-328.

Areepattamannil, S., & Kaur, B. (2013). Mathematics teachers´ perceptions of their students´ mathematical competence: Relations to mathematics achievement, affect, and engagement in Singapore and Australia. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics education: Expanding horizons* (pp. 52-56). Melbourne: MERGA. ISBN: 978 0 7340 4844 8

Associação de Professores de Matemática (1997). *Matemática 2001. Relatório final*. Lisboa: APM.

Atiyah, M. (2001), Mathematics in the 20th century: Geometry versus algebra. *Mathematics Today*, 37 (2), 46-53.

Atiyah, M. (2003). What is geometry? In C. Pritchard (Ed.), *The changing shape of geometry. Celebrating a century of geometry and geometry teaching* (pp. 24-29). London: Cambridge University Press.

Azevedo, N. (2013). *Atividades de investigação em geometria: Uma experiência no 2º ciclo de escolaridade*. Tese de mestrado. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers´ understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), 132-144.

Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93 (4), 373-397.

Ball, D. (2003). Teaching and learning mathematic with an interactive whiteboard. *Micromath*, 4-6.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton: Canadian Mathematics Education Study Group.

Ball, D., Bass, H., Sleep, L., & Thames, M. (2007). A theory of mathematical knowledge for teaching [CD-ROM]. *Proceedings of the 15th ICMI Study, The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. Águas de Lindóia: UNESP.

Ball, D., & Even, R. (Eds.) (2008). *The professional education and development of teachers of mathematics*. Rotterdam: Springer.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall), 14–46.

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problems of teachers´ mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.), (pp. 433-456). New York: MacMillan Publishers.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching*. Paper presented at the American Education Research Association Conference.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407.

Bansilal, S., & Naidoo, J. (2012). Learners engaging with transformation geometry. *South Africa Journal of Education*, 32, 26-39.

Barbeau, E. (2009). Challenges and education. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), Proceedings of the *16th ICMI Study, Challenging mathematics in and out beyond the classroom*, 12 (pp. 1-9). New York: Springer. ISBN: 978-0-387-09602-5

Barbosa, A. (2002). *Geometria no plano numa turma do 9º ano de escolaridade: uma abordagem sociolinguística à teoria de van Hiele usando o computador*. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico.* Tese de doutoramento em Estudos da Criança. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. In L. Santos (Ed.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática: Raciocínio matemático* (pp. 51-80). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Barbour, R. (1998). Mixing qualitative methods: Quality assurance or qualitative quagmire? *Qualitative Health Research*, 8 (3), 352-361.

Battista, M. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21 (3), 47-60.

Battista, M. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics,* 6 (3), 170-177.

Battista, M. (2001). A research-based perspective on teaching school geometry. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Subject-specific instructional methods and activities* (pp. 145-185). New York: JAI Press.

Battista, M. (2007). The development of geometry and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston: NCTM.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, 8 (3), 507-570. Montana: University of Montana & Information Age Publishing. ISSN: 1551-3440

Battista, M., & Clements, D. (1996). Students´understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (3), 258-292.

Battista, M., & Clements, D. (2000). Mathematics curriculum development as a scientific endeavor. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 737-760). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Battista, M., & Clements, D. (2002). Using spatial imagery in geometric reasoning. In D. L. Chambers (Ed.), *Putting research into practice in the elementary grades* (pp. 174-178). Reston: NCTM.

Battista, M., Wheatley, G., & Talsma, G. (1989). Spatial visualization, formal reasoning and geometric problem-solving strategies of pre-service elementary teachers. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11, 17-30.

Beeth, M. (2001). Systemic reform in mathematics and science education in Ohio (USA): 1991–2000. In D. Psillos, P. Kariotoglou, V. Tselfes, G. Bisdikian, G. Fassoulopoulos, E. Hatzikraniotis & M. Kallery, Eds, *Proceedings of the Third International Conference on Science Education Research in the Knowledge Based Society,* 1 (pp. 198–200). Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki.

Belchior, M. C. (1994). *Níveis de pensamento geométrico e atitudes face à geometria e ao seu ensino de futuros professores*. Tese de mestrado. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Beltrán, J. (1994). Actitudes y valores. In J. Beltrán (Ed.), *Psicologia educacional*, 2 (pp. 327-381). Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Bennett, N., & Turner-Bisset, R. (1993). Case studies in learning to teach. In N. Bennett & C. Carré (Eds.), *Learning to Teach* (pp. 165-190). London: Routledge.

Bergsten, C., Favilli, F., & Grevholm, B. (2008). Learning to teach mathematics: Expanding the role of the practicum as an integrated part in a teacher education programme. In D. Ball & R. Even (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 57-70). Rotterdam: Springer.

Bergsten, C., & Grevholm, B. (2004). The didactic divide and the education of teachers of mathematics in Sweden. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 9 (2), 123-144.

Bernard, H. (1988). *Research methods in cultural anthropology*. Newbury Park: Sage Publications.

Bicudo, M. (2010). *Filosofia da Educação Matemática. Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11 (1), 7-15.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (Eds.) (2003). Second i*nternational handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bispo, R., Ramalho, G., & Henriques, N. (2008). Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5º ano de escolaridade. *Análise Psicológica*, 1 (XXVI), 3-14.

Boaler, J. (2000). Exploring situated insights into research and learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (1), 113-119.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the “dance of agency”. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 1-16). Honolulu: University of Hawaii.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC – Ministério da Educação. ISBN: 978-972-742-290-6

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borko, H. & Whitcomb, J. (2008). Teachers, teaching, and teacher education: Comments on the national mathematics advisory panel’s report. *Educational Researcher*, 37 (9), 565–572. doi: 10.3102/0013189X08328877

Braconne, A., & Dionne, J. (1987). Secondary school students´ and teachers´ understanding of demonstration in geometry. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 109-116).

Brady, K. (2012). Stories from the classroom: The developing beliefs and practices of beginning primary mathematics teachers. In J. Dindyal, L. Cheng & S. Ng (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics education: Expanding horizons* (pp. 123-129). Singapore: MERGA. ISBN: 978-981-07-2527-3

Braumman, C. (2004). A matemática e diferentes modelos de formação. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Orgs.), *A matemática na formação do professor*, (pp. 75-82). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Bravo, F. (2006). *Impacto da utilização de um ambiente de geometria dinâmica no ensino-aprendizagem da geometria por alunos do 4º ano do 1º ciclo do ensino básico*. Tese de mestrado. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Brown, M., Jones, K., Taylor, R., & Hirst, A. (2004). *Developing geometrical reasoning*. (pp. 127-134). Acedido em fevereiro 12, 2014, em http://www.merga.net.au/documents/RP132004.pdf

Brown, T., McNamara, O., Hanley, U., & Jones, L. (1999). Primary student teachers' understanding of mathematics and its teaching. *British Educational Research Journal*, 25 (3), 299-322.

Buchberger, F., Campos, B., Kallos, D., & Stenpehenson (Eds.) (2000). Green paper on teacher education in Europe: High quality teacher education for high quality education and training. *Thematic Network on Teacher Education in Europe*. ISBN 91-973904-0-2 Acedido em julho 25, 2013, em http://tntee.umu.se/publications/greenpaper/greenpaper.pdf

Bullock, S. M. (2011). *Inside teacher education: Challenging prior views of teaching and learning*. Rotherdam: Sense Publishers. ISBN: 978-94-6091-403-4. Acedido em março 08, 2012, em https://www.sensepublishers.com/media/513-inside-teacher-education.pdf

Bullough, R., Jr., & Gitlin, A. (2001). *Becoming a student of teaching: Methodologies for exploring self and school context*. (2nd ed.). London: Routledge Falmer.

Burger, W., & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1), 31-48.

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Campbell, D. (1975). Degrees of freedom and the case study. *Comparative Political Studies*, 8, 178-193.

Caraça, B. (1989). *Conceitos fundamentais da matemática*. (2ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Carmo, J. (2009). A propósito da desigualdade triangular. Relato de uma aula com uma turma do 7º ano. *Educação e Matemática*, 103, 35-38.

Carneiro, C. (2005). *O contributo da linguagem Logo no ensino e aprendizagem da geometria: Uma proposta de ensino de geometria no 5º ano de escolaridade*. Tese de mestrado. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Carpenter, T., & Fennema, E. (1991). Research and cognitively guided instruction. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 1-16). Albany: State University of New York Press.

Carreira, S. (2010). Conexões matemáticas: Ligar o que foi desligado. *Educação e Matemática*, 110, 13-18.

Ceia, M. (2002). A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele. *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (pp. 241-255). Acedido em maio 22, 2012, em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_15_MJMCeia.pdf

Chapman, O. (1998). Metaphor as a tool in facilitating preservice teacher development in mathematical problem solving. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 176-184).

Chazan, D., & Herbst, P. (2011). Challenges of particularity and generality in depicting and discussing teaching. *For the Learning of Mathematics*, 31 (1), 9-13.

Cheeseman, J., Clarke, D., Roche, A., & Wilson, K. (2013). Teachers’ views of the challenging elements of a task. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics education: Expanding horizons* (pp. 154-161). Melbourne: MERGA. ISBN: 978 0 7340 4844 8

Chinnapan, M. (1998). The assessing of geometry schemas by high school students. *Mathematics Education Journal*, 10 (2), 27-45.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Chval, K. (2004). Supporting teacher learning: Making the complexities of teaching visible for prospective teachers. *Teaching Children Mathematics*, 11 (2), 91–96.

Clandinin, D. (1986). *Classroom practice: Teacher images in action*. London: The Falmer Press.

Clandinin, D., & Connelly, F. (1996). Teachers' professional knowledge landscapes: Teacher stories - stories of teachers - school stories - stories of schools. *Educational Researcher*, 24 (3), 24-30.

Clarke, B., Grevholm, B. & Millman, R. (Eds.) (2008). *Tasks in primary mathematics teacher education: Purpose, use and exemplars*. Dordrecht: Springer.

Clements, D. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-177). Reston: NCTM.

Clements, D. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. Clements, J. Sarama, & A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 267–297). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Company.

Clements, D., & Battista, M. (2001). Logo and geometry. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*. Reston: NCTM.

Clements, D., & Sarama, J. (2007). In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-891). Reston: NCTM.

Clements, D., Wilson, D., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 163-184. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_5

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research methods in education* (4th ed.). London: Routledge.

Cooney, T., & Wiegel, H. (2003). Examining the mathematic in mathematics teacher education. In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*, 2 (pp. 795-828). London: Kluwer Academic Publishers.

Costa, M. C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. In Atas do Encontro da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, *Ensino e Aprendizagem da Geometria* (pp. 157-184).

Costa, M. C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: Transformações geométricas no início da escolaridade*. Tese de doutoramento. Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Cotti, R. & Schiro, M. (2004). Connecting teacher beliefs to the use of children´s literature in the teaching of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 7, 329-356.

Cramer, K. (2004). Facilitating teachers´ growth in contente knowledge. In R. Rubenstein (Ed.), *Implementing the teacher principles: 2004 Yearbook*. Reston: NCTM.

Creswell, J. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approach* (3rd ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Creswell, J., & Miller, D. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory into Practice*, 39 (3), 124-131.

Crowley, M. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. Lindquist & A. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12, Yearbook* (pp. 1-16). Reston: NCTM.

D´Ambrosio, U. (2002*). Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade*. São Paulo: Autêntica.

Daskalogianni K. & Simpson A. (2000). Towards a definition of attitude: The relationship between the affective and the cognitive in pre-university students. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 217-224). Hiroshima, Japan.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores. Os desafios de aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1), 11-18.

De Villiers, M. (1997). The future of secondary school geometry. *Pythagoras*, 44, 37-54.

De Villiers, M., & Njisane, R. (1987). The development of geometric thinking among black high school pupils in Kwazulu (Republic of South Africa). In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieren (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 117-123). Montreal.

Decreto-Lei n.º 43/2007 de 22 de fevereiro. *Diário da República n.º 38/2007 – I Série A*. Ministério da Educação. Lisboa.

Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. Lindquist (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12, Yearbook* (pp. 127-135). Reston: NCTM.

Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *Arithmetic Teacher*, 37, 14-20.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. In *6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Geometrical Thinking* (pp. 696-705). Lyon: CERME.

Delors, J., … , Nanzhao. Z. (Coord.) (1996). *Educação: Um tesouro a descobrir* (Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI). Porto: Edições ASA. ISBN: 85-249-0673-1. Acedido em abril 29, 2011, em http://ftp.infoeuropa.eurocid.pt/database/000046001-000047000/000046258.pdf

Dewey, J. (1933*). How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston: D. C. Heath. (edição revista e ampliada a partir da edição original publicada em 1910).

Dewey, J. (1944). *Democracy and education*. New York: The Free Press.

Di Martino, P. & Zan, R. (2001). Attitude toward mathematics: Some theoretical issues. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 351-358). Utrecht, the Netherlands.

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). Me and maths: Towards a definition of attitude grounded on students` narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13 (1), 27-48. doi: 10.1007/s10857-009-9134-z

Di Martino, P. & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM Mathematics Education*, 43, 471-482. doi: 10.1007/s11858-011-0309-6

Dindyal, J. (2007). The need for an inclusive framework for students' thinking in school geometry. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4 (1), 73-83.

DiSessa, A. (2006). A history of conceptual change research: Threads and fault lines. In K. Sawyer (Ed.), *Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 265-281). Cambridge: University Press.

Drake, C., Spillane, J., & Hufferd-Ackles, K. (2001). Storied identities: Teacher learning and subject matter context. *Journal of Curriculum Studies*, 33 (1), 1-23.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking processes. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the PME* (pp. 113-134). Cambridge: University Press.

Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. *Science Education*, 84 (3), 287–312.

Duffy, A., & Atkinson, T. (2001). Learning to teach struggling (and non-struggling) elementary school readers: An analysis of preservice teachers' knowledges. *Reading Research and Instruction*, 41 (1), 83-102.

Duit, R., & Treagust, D. (2003). Conceptual change: A powerful framework for improving science teaching and learning. *International Journal of Science Education*, 25 (6), 671-688. doi: 10.1080/09500690305016

Dutton, W. (1951). Attitudes of prospective teachers towards arithmetic. *The Elementary School Journal*, 52 (2), 84-90.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 26 (4), 109-113.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. In L. Burton & C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-158).

Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 99-114.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge.* New York: Nichols Publishing Company.

Empson, S., & Jacobs, V. (2008). Learning to listen to children´s mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 257–281). Rotterdam: Sense Publishers. ISBN: 978-90-8790-544-6

English, L. (1997). Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images. In L. English (Ed.), *Analogies, Metaphors, and images: Vehicles for mathematical reasoning* (pp. 3-18). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. (2002). The problematic relationship between theory and practice. In Lyn D. English (Ed.), *International research in mathematics education* (pp. 3-15). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Erduran, S. (2006). Promoting ideas, evidence and argument in initial teacher training. *School Science Review*, 87 (321), 45-50.

Erduran, S., Ardac, D., & Guzel, B. (2006). Learning to teach argumentation: Case studies of pre-service secondary science teachers. *Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2 (2), 1-14. ISSN: 1305-8223. Acedido em janeiro 28, 2013, em http://www.ejmste.com/022006/full.pdf.

Even, R. (2005). Using assessment to inform instructional decisions: How hard can it be? *Mathematical Educational Research Journal*, 17 (3), 51-67.

Even, R., & Tirosh, D. (2008). Teacher knowledge and understanding of students´ mathematical learning and teaching. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 202-222). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Even, R., & Wallach, T. (2004). Between student observation and student assessment: A critical reflection. *Canadian Journal of Sciences, Mathetamtics, and Technology Education*, 4 (4), 483-495.

Fenwick-Sehl, L., Fioroni, M., & Lovric, M. (2009). Recruitment and retention of mathematics students in Canadian universities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (1), 27-41.

Ferguson, S. (2013). Scaffolding the mathematics learning of low-attaining students through whole class discussions. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics education: Expanding horizons* (pp. 282-289). Melbourne: MERGA. ISBN: 978 0 7340 4844 8

Fernstermacher, G. (1994). The knower and the known: The nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education*, 20, 3-56.

Ferreira, R., & Vale, I. (2013). Raciocínio em geometria. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, M. Rodrigues, M. Costa, & R. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação*

Matemática: Raciocínio Matemático (pp. 82-86). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. ISSN: 2182-0023

Flegas, K., & Charalampos, L. (2013). Exploring logical reasoning and mathematical proof in grade 6 elementary school students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13 (1), 70-89. doi: 10.1080/14926156.2013.758326

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de matemática: A demonstração em geometria*. Tese de doutoramento. Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Franke, M., Fennema, E., & Carpenter, T. (1997). Teachers creating change. Examining evolving beliefs and classroom practice. In E. Fennema & B. Nelson (Eds.), *Mathematics teacher in transition. The studies in mathematical thinking and learning series* (pp. 225–282). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Frid, S., & Sparrow, L. (2007). Towards "breaking the cycle of tradition" in primary mathematics. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice* (pp. 295-304). Adelaide: MERGA. ISBN: 978-1-920846-13-8

Fujita, T. (2008). Learners' understanding of the hierarchical classification of quadrilaterals. In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 28 (2) (pp.31-36). Londres: BSRLM.

Fujita, T., & Jones, K. (2002). The bridge between practical and dedutive geometry: Developing the "geometrical eye". In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 384-391). Norwick: University of East Anglia.

Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers´ knowledge of parallelograms. In D. Hewitt (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 26 (2), (pp. 25-30). University of Bristol, BSRLM.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9 (1,2), 3-20.

Fuys, D. (1985). Van Hiele levels of thinking in geometry. *Education and Urban Society*, 17 (4), 447-462.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph Number 3, 191-196.

Gall, J., Gall, M., & Borg, W. (2005). *Applying educational research. A practical guide*. Boston: Pearson Education, Inc.

Gall, M., Borg, W., & Gall, J. (1996). *Educational research: An introduction.* New York: Longman Publishers.

Garnica, A., Gomes, M., & Andrade, M. (2012). As memórias de Lacroix: A instrução pública na França revolucionária, em geral, e o ensino de matemática, em particular. *Bolema*, 44, 1227-1260. ISSN: 0103-636X

Gay, L. (s/d). *Educational research: Competencies for analysis & application*. (2nd ed.). Florida: Florida International University.

Ghousseini, H. (2009). Designing opportunities to learn to lead classroom mathematics discussions in preservice teacher education: Focusing on enactment. In D. Mewborn & H. Lee (Eds.), *Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teacher*, (pp. 147-158). San Diego: Association of Mathematics Teacher Educators.

Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T., & Pollock, E. (2005). *What the United States can learn from Singapore´s world-class mathematics system.* American Institutes for Research. Acedido em janeiro 20, 2012, em https://www.math.wisc.edu/~robbin/131dir/TIMSS_PISA%20math%20study.pdf

Golafshani, N. (2003). Understanding reliability and validity in qualitative research. *The Qualitative Report*, 8 (4), 597-606. Acedido em outubro 20, 2011, em http://www.nova.edu/ssss/QR/QR8-4/golafshani.pdf

Gomes, M. A. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em Geometria*. Tese de doutoramento. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Gomes, M. A. (2010). Uses and goals of mathematical tasks: An experiment with pre-service teachers. *Journal of the European Teacher Education Network*, 6, 70-75.

Goos, M. (2005). A sociocultural analysis of the development of pre-service and beginning teachers´ pedagogical identities as users of technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (1), 35-59.

Gordo, M. F. (1994). A visualização espacial e aprendizagem da Matemática: Um estudo no 1º ciclo do Ensino Básico. *Quadrante*, 3(1) 157-184.

Gorev, D., Gurevich, I., & Barabash, M. (2004). Will “the way they teach” be “the way they learned”? Pre-service teachers´ beliefs concerning computer embedding in math teaching. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 487-494). Bergen: Bergen University College.

Gray, E., & Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 115-120). Norwich: United Kingdom.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and development research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25 (5), 443-471.

Grossman, P., Wilson, S., & Shulman, L. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. Reynolds (Ed.), *The knowledge base for beginning teachers* (pp. 23-36). New York: Pergamon.

Guba, E., & Lincoln, Y. (2005). Paradigmatic controversies, contradictions and emerging confluences. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (3rd ed.) (pp. 191-215). Thousand Oaks: Sage Publications.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A., & Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1987). Study of the characteristics of the van Hiele levels. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieron (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 131-137). Montreal: University of Montreal.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2&3), 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22 (3), 237-251.

Guven, B., & Baki, A. (2010). Characterizing student mathematics teachers' levels of understanding in spherical geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41 (8), 991-1013. doi: 10.1080/0020739X.2010.500692

Hammerness, K., Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2005). How teachers learn and develop. In L. Darling-Hammond & J. Bransford (Eds.), *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do* (pp. 358-389). San Francisco: Wiley.

Hampson, T. (2003). Iniciação à geometria na universidade. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria dinâmica* (pp. 103-113). Lisboa: APM.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21 (1), 6–13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.

Hanna, G., & Barbreau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40, 345–353.

Hannula, M. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations, and values. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 25-46. Acedido em outubro 20, 2013, em http://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1016048823497#page-1

Hatano, G., & Inagaki, K. (1991). Sharing cognition through collective comprehension activity. In L. Resnick, J. Levine & S. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 331-348). American Psychological Association.

Herbel-Eisenmann, B., & Otten, S. (2011). Mapping mathematics in classroom discourse. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42 (5), 451–485.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389–399.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry – Or when "a little learning is a dangerous thing". In J. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, 3 (pp. 238-251). Ithaca: Cornell University.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century* (pp. 29-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161–204). London: Kluwer Academic Publishers.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1984). Children´s concepts in elementary geometry. A reflection of teacher´s concepts?. In B. Southwell (Ed.), *Proceedings of the 8th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 63-69). Darlinghurst: Mathematical Association of New South Wales.

Hesse-Biber, S., & Leavy, P. (2011). *The practice of qualitative research* (2nd ed.). London: Sage Publications. ISBN: 978-1-4129-7457-8

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishers.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., Morris, A., Berk, D., & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58 (1), 47-61.

Hiebert, J., Morris, A., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 201-222.

Hierbert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional task, classroom discourse, and students' learning in second grade. *American Educational Research Journal*, 30, 393-425.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualising and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-400. NCTM. Acedido em fevereiro 03, 2011, em http://www.ugr.es/~pflores/2008_9/Master_Conocim/textos%20JP/%5B1%5D_Hill-Ball-Schilling-JRME2008-07.pdf

Hill H., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., & Ball, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26 (4), 430-511. doi: 10.1080/07370000802177235

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J., & Ball, D. (2007). Assessing teachers mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence count. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-156). Charlotte: Information Age Publishing.

Ho, C.-H., & Eastman, C. (2006). An investigation of 2D and 3D spatial and mathematical abilities. *Design Studies*, 27 (4), 505-524.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). New York: Academic Press.

Hoffer, A., & Hoffer, S. (1992). Geometry and visual thinking. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based mathematics* (2nd ed.), (pp. 249-227). Boston: Allyn & Bacon.

Hollins, E. (2011). Teacher preparation for quality teaching. *Journal of Teacher Education*, 62 (4), 395–407. doi: 10.1177/0022487111409415

Holton, D., Cheung, K., Kesianye, S., Losada, M., Leikin, R., Makrides, ... , & Yeap, B. (2009). Teacher development and mathematical challenge. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Proceedings of the 16th ICMI Study, Challenging mathematics in and beyond the classroom* (pp. 205-242). NewYork: Springer.

Hou, J.-L., & Pai, S.-T. (2009). A spatial knowledge sharing platform. Using the visualization approach. *International Journal of Production Research*, 47 (1), 25-50. doi: 10.1080/00207540601011535

House, J. D. (2006). Mathematics beliefs and achievement of elementary school students in Japan and the United States: Results from the third international mathematics and science study. *The Journal of Genetic Psychology*, 167 (1), 31-45.

Hsieh, M.-H., & Ho C.-H. (2013). *Evaluation on Spatial Ability: A comparison between the performances on spatial aptitude and engineering drawing tests* (pp. 1-8). Acedido em outubro 12, 2013, em http://design-cu.jp/iasdr2013/papers/1269-1b.pdf

Huberman, A. M., & Miles, M. (1994). Data management e analysis methods. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444). London: Sage Publications.

Hunter, R. & Anthony, G. (2012). Designing opportunities for prospective teachers to facilitate mathematics discussions in classrooms. In J. Dindyal, L. Cheng & S. Ng (Eds.), *Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Mathematics education: Expanding horizons* (pp. 354-361). Singapore: MERGA.

ICMI (2013). The 22th ICMI Study. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education*. Oxford: United Kingdom. ISBN 978-2-7466-6554-5

Jacobson, C., & Lehrer, R. (2000). Teacher appropriation and student learning of geometry through design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (1), 71-88.

Jaime, A., Chapa, F., & Gutiérrez, A. (1992). Definitions of triangles and quadrilaterals: Errors e inconsistencies in primary school textbooks. *Epsilon*, 23, 49-62.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1995). Guidelines for teaching plane isometries in secondary school. *The Mathematics Teacher*, 88 (7), 591-597.

Janesick, V. (1998). The dance of qualitative research design. Metaphor, methodolatry and meaning. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative research* (pp. 35-55). London: Sage Publications.

Jaworski, B., & Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practicing teachers. In A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 829-875). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jenkins, A., Breen, R., & Lindsay, R. (2003). *Reshaping teaching in higher education, linking teaching with research*. London: Kogan Page.

Johnson, B. (1997). Examining the validity structure of qualitative research. *Education*, 118 (3), 282-292.

Jones, K. (2000a). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1/2), 55-85.

Jones, K. (2000b). Teacher knowledge and professional development in geometry. In T. Rowland (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 20 (3), (pp. 109-114). Acedido em abril 11, 2012, em http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip20-3/BSRLM-IP-20-3-19.pdf

Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary mathematics teaching and learning* (pp. 3-15). London: Open University Press.

Jones, K., Mooney, C., & Harries, T. (2002). Trainee primary teachers' knowledge of geometry for teaching. In S. Goodchild (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 22 (1&2), (pp. 95-100).

Kaufman, S. (2007). Sex differences in mental rotation and spatial visualization ability: Can they be accounted for by differences in working memory capacity? *Intelligence*, 35 (3), 211-223.

Kennedy, C. (2005). *Single case design for educational research*. Virginia: Pearson. ISBN 0-205-34023-7

Khazanov, V. (2008). Misconceptions in probability. *Journal of Mathematical Sciences*, 141 (6), 1701-1701.

Kikas, E., Peets, K., Palu, A., & Afanasjev, J. (2009). The role of individual and contextual factors in the development of maths skills. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 29 (5), 541-560. Doi: 10.1080/01443410903118499

Kilpatrick, J., Sawfford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Kline, M. (1973). *O fracasso da matemática moderna*. São Paulo: Ibrasa.

Koç, Y., Işıksal, M., Seviş, S., Osmanoğlu, A., Çetinkaya, B., Aşkun, C., & Bulut, S. (2013). An investigation on students´ degree of acquisition related to van Hiele level of geometric reasoning: A case of 6-8th graders in Turkey. In *8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8): Geometrical thinking*. Acedido em dezembro 01, 2013 em http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG4/WG4_Koc.pdf

Koehler, M.S., & Grouws, D. (1992). Mathematics teaching practices and their effects. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 115-126). New York: Macmillan Publishers.

Koklu, O., & Topcu, A. (2012). Effect of Cabri-assisted instruction on secondary school students' misconceptions about graphs of quadratic functions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43 (8), 999-1011.

Korthagen, F. A., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B., & Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Krainer, K. (2005). Editorial: What is "good" mathematics teaching, and how can research inform practice and policy? *Journal of Mathematics Teacher Education,* 8 (2), 75-81.

Kuhn, D. (1993). Science as argument: Implications for teaching and learning scientific thinking. *Science Education*, 77, 319–337.

Kulm, G. (1980). Research on mathematics attitude. In R. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 356-387). Reston: NCTM.

Kurtulus, A., & Uygan, C. (2010). The effects of Google Sketchup based geometry activities and projects on spatial visualization ability of student mathematics teachers. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 384-389.

Lampert, M. (1986). Teaching multiplication. *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 241-280.

Lampert, M. (1989). Arithmetic as problem solving. *Arithmetic Teacher*, 36, 34-36.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven: Yale University Press.

Lampert, M., & Ball, D. (1999). Teaching, multimedia, and mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2 (3), 311-319.

Lange, T., & Meaney, T. (2011). Pre-service teachers learning mathematics from the internet. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the Australian Association of Mathematics Teachers. Mathematics: Traditions and [new] practices* (pp. 438-445). Adelaide: AAMT & MERGA.

Lannin, J., & Chval, K. (2013). Challenge: Beginning teacher beliefs. *Teaching Children Mathematics*, 19 (8), 508-515.

Lannin, J., Ellis, A., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten - grade 8*. Reston: NCTM.

Laval, C., & Weber, L. (2002). *Le nouvel ordre éducatif mondial*. Paris: Nouveaux Regards, Syllepse.

Leder, G. (1985). Measurement of attitude to mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5 (3), 18–21.

Lee, O., & Yarger, S. (1996). Modes of inquiry in research on teacher education. In J. Sikula et al. (Eds.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 14-37). New York: Macmillan Publishers.

Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. In L. English (Ed.), *International research in mathematics education* (pp. 27-49). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Liljedahl, P., Chernoff, E., & Zaskis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Mathematics Teacher Education*, 10, 239-249.

Lima, E. L. (2005). No aniversário do professor Armando Machado. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 52, 101-110.

Lin, P. (2012). The approaches of developing teachers´ expertise in mathematics instruction in Taiwan. In T. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 131-134). Taipei: PME.

Lin, P., & Li, Y. (2011). Expertise of mathematics teaching valued in Taiwanese classroom. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction: An international perspective* (pp. 263-291). New York: Springer.

Lincoln, Y., & Denzin, N. (2005). Epilogue: The eighth and ninth moments – qualitative research in/and the fractured future. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (3rd ed.) (pp. 1115-1126). Thousand Oaks: Sage Publications.

Lincoln, Y., & Guba, E. (2000). Paradigmatic controversies, contradictions and emerging confluences. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2nd ed.) (pp. 163-188). Thousand Oaks: Sage Publications.

Lindquist, M., & Shulte, A. (1987). *Learning and teaching geometry, K-12*. Reston: NCTM.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-460). Rotterdam: Sense Publishers.

Lo, J. (2004). Prospective elementary school teachers´ solutions strategies and reasoning for a missing value proportion task. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 265-272). Bergen: Bergen University College.

Lortie, D. (1975). *School teacher: A sociological study*. Chicago: University Press.

Loucks-Horsley, S., Love, N., Stiles, K., Mundry, S., & Hewson, P. (2003). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks: Corwin Press.

Loughran, J. (2006). *Developing pedagogy of teacher education: Understanding teaching and learning about teaching*. London: Routledge.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.

Ma, X. & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), 26-47.

Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16-32.

Malkevitch, J. (1991). Geometry: Yesterday, today and tomorrow. In J. Malkevitch (Ed.), *Geometry´s future* (pp. 1-13). Bedford: COMAP, Inc.

Malloy, C. (2002). *The van Hiele framework. Navigating through Geometry in Grades 6-8.* Reston: NCTM. Acedido em outubro 09, 2013, em http://tian.terc.edu/empower_readings/Malloy_van%20Hiele%20Framework.pdf

Mammana, C. & Villani, V. (1998). Geometry and geometry-teaching through the ages. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry fot the 21st century: An ICMI study* (pp. 1-8). London: Kluwer Academic Publishers.

Mansfield, H. & Happs, J. (1992). Using grade eight students´ existing knowledge to teach about parallel lines. *School Science and Mathematics*, 92 (8), 450-454.

Mariotti, M. A. (1995). Images and concepts in geometrical resoning. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in Mathematics Education* (pp. 97-116). New York: Springer.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Guiterez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173–204). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of albegra. In N. Bednarz, C, Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluver Academic Publishers.

Mason, L. (2003). High school students' beliefs about maths, mathematical problem solving, and their achievement in maths: A cross-sectional study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 23 (1), 73-85. doi: 10.1080/01443410303216

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. New York: QED Press.

Mata-Pereira J. & Ponte, J. P. (2013). Processos de raciocínio matemático em alunos do 9º ano: Generalização em números reais e inequações. In A. Domingos, I. Vale, M.

Saraiva, M. Rodrigues, M. Costa & R. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática. Raciocínio Matemático* (pp. 235-253). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Matos, J. (1984). *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal*. Tese de mestrado. Universidade de Boston. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J., Powell, A., & Sztajn, P. (2009). Mathematics teachers' professional development: Processes of learning in and from practice. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 167-183). New York: Springer. Acedido em setembro 07, 2013, em http://ia600607.us.archive.org/14/items/TheProfessionalEducation/TheProfessional Education....pdf

Matos, J., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta. ISBN: 9726741726

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14 (1), 58-69.

McCaffrey, D., Lockwood, J., Koretz, D., Louis, T., & Hamilton, L. (2004). Models for the value-added modeling of teacher effects. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 29, 67–101.

McDuffie, K., & Scruggs, T. (2008). The contributions of qualitative research to discussions of evidence-based practice in special education. *Intervention in School and Clinic*, 44, 91-97.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the NCTM* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2006). Research designs and reading research reports. In Allyn & Bacon (Eds.), *Research in education: Evidence-based inquiry*, 6 (pp. 21-49). Acedido em agosto 22, 2012, em http://edt2.educ.msu.edu/DWong/CEP822Sum11/Readings&Lectures/McMillan-ResearchInEducationChapter02.pdf

Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve math problems. *Language and Education*, 20, 507-528.

Merriam, B. (1988). *Case study research in education. A qualitative approach.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Mertens, D. (2009). *Transformative research and evaluation*. New York: Guilford.

Mertens, D. (2010). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative and mixed methods* (3rd ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Mesiti, C., & Clarke, D. (2010). A functional analysis of mathematical tasks in China, Japan, Sweden, Australia and the USA: Voice and agency. In Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang & D. Clarke (Eds.), *Mathematical task in classrooms around the world* (pp. 185-216). Rotterdam: Sense Publishers. ISBN: 978-94-6091-150-7

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 183-195.

Mewborn, D. (2001). Teachers content knowledge, teacher education, and their effects on the preparation of elementary teachers in the United States. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, 28-36.

Mialaret, G. (2007). Les méthodes de recherche en science de l'éducation. *Educação, Sociedade & Culturas*, 24, 209-213.

Middleton, J. & Spanias P. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (1), 65-88.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico. Competências essenciais*. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e metas curriculares. Matemática. Ensino básico*. Lisboa: Direção Geral de Educação.

Morais, C., & Miranda, L. (2008). Estilos e percepções dos alunos sobre ensino e aprendizagem da matemática. In R. González, B. Alfonso, M. Machín & L. Nieto (Orgs.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 697-708). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática & Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Moren, E., & Santos, A. (2011). Uma reflexão sobre ações de formação de professores no Brasil. *Revista Ibero-americana de Educação*, 55 (1), 1-13.

Morgan, D. (2007). Paradigms lost and pragmatism regained: Methodological implications of combining qualitative and quantitative methods. *Journal of Mixed Methods Research*, 1, 48-76.

Morse, J. (1994). Designing funded qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 220-235). Newbury: Sage Publications.

Munthe, E., Malmo, K., & Rogne, M. (2011). Teacher education reform and challenges in Norway. *Journal of Education for Teaching*, 37 (4), 441–450.

Nagy-Kondor, R. (2010). Spatial ability, descriptive geometry and dynamic geometry systems. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 37, 199-210.

National Council of Supervisors of Mathematics (1990). A matemática para o século XXI. *Educação e Matemática*, 14, 23-25.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Tradução dos Professional Standards do NCTM. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2001). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Geometria do 2º e 3º ciclo.* Tradução da Addenda Séries do NCTM. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (2002). *Navigating through Geometry in grade 6-8*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). Navigating through problem solving and reasoning in prekindergarten-kindergarten. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2004a). *Navigating through problem solving and reasoning in grade 1*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2004b). *Navigating through problem solving and reasoning in grade 2*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2004c). *Navigating through problem solving and reasoning in grade 3*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2005). *Navigating through problem solving and reasoning in grade 4*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for kindergarten through grade 8 mathematics: a quest for coherence*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2012). Solve it - Shaded rectangles. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17 (5), 271.

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington: United States Department of Education. Acedido em setembro 20, 2013, em http://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf

National Research Council (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Sawfford & B. Findell (Eds), *Mathematics learning study committee, center for education, division of behavioral and social sciences and education*. Washington: National Academy Press (pp. 1-14). Acedido em julho 14, 2013, em http://books.google.pt/books?id=df7ZX4a8fzAC&printsec=frontcover&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false

National Research Council (2010). *Preparing teachers: Building evidence for sound policy* (Free Summary). Committee on the Study of Teacher Preparation Programs in the United States, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington: National Academy Press. Acedido em novembro 22, 2013 em http://www.nsf.gov/attachments/117803/public/2b--Preparing_Teachers.pdf

Neale, D. (1969). The role of attitudes in learning mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 16 (8), 631-640.

Neto, M. T. (2009*). O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas*. Tese de doutoramento. Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Ng, D. (2011). Indonesian primary teachers' mathematical knowledge for teaching geometry: Implications for educational policy and teacher preparation programs. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, 39 (2), 151-164. doi: 10.1080/1359866X.2011.560648

Nickerson, R. (1985). Understanding understanding. *American Journal of Education*, 93 (2), 201-239.

Nóvoa, A. (Org.) (2000). *Vidas de professores*. Porto: Porto Editora.

Nzekwe-Excel, C. (2010). Role of mathematics learning development centres in HEIs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning,* Acedido em maio 06, 2013, em http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/nzekwe.pdf

OECD (2012). *Preparing teachers and developing school leaders for the 21st century: Lessons from around the world*. Paris: OECD Publishing. Acedido em setembro 28, 2013, em http://www.oecd.org/site/eduistp2012/49850576.pdf

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, 100, 3-9.

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2011). A formação inicial de professores de matemática em Portugal e no Brasil: Narrativas de vulnerabilidade e agência. *Interacções*, 18, 104-130.

Oliveira, H., & Hannula, M. (2008). Individual prospective mathematics teachers: Studies on their professional growth. In T. Wood (Series Ed.) & K. Krainer (Vol. Eds.), *International handbook of mathematics teacher education*, 3 (pp. 13-34). Rotterdam: Sense Publishers.

O´Shea, H., & Peled, I. (2009). The task types and mathematics learning research project. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Simposium: Task Types and Mathematics Learning* (pp. 2-5). Palmerston North: MERGA. Acedido em fevereiro 03, 2014, em http://www.merga.net.au/documents/merga32_symp5.pdf

Otten, S., Gilbertson, N., Males, L., & Clark, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 16 (1), 51-79. doi: 10.1080/10986065.2014.857802

Owens, K. (1999). The role of visualization in young students´ learning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 220-234). Haifa: PME.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.

Panaoura, A. (2013). Using representations in geometry: A model of students' cognitive and affective performance. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-14. Acedido em fevereiro 12, 2014, em http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.851804

Panaoura, G., & Gagatsis, A. (2010). The geometrical reasoning of primary and secondary school students. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 746-755). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Pandiscio, E., & Orton, R. (1998). Geometry and metacognition: An analysis of Piaget's and van Hiele's perspectives. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20, 78-87.

Pardal, L., & Lopes, E. (2011). *Métodos e técnicas de investigação social*. Porto: Areal Editores.

Pastells, A. (2004). *O desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos. Para crianças dos 6 aos 12 anos*. Porto: Porto Editora.

Patkin, D., & Dayan, E. (2013). The intelligence of observation: improving high school students' spatial ability by means of intervention unit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44 (2), 179-195. doi: 10.1080/0020739X.2012.703335

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Pepin, B. (2009). Exploring mathematics teacher knowledge for teaching: Mathematics teachers in England, France and Germany. *Orbis Scholae*, 3 (2), 27-46.

Pepin, B. (2011). Pupils' attitudes towards mathematics: A comparative study of Norwegian and English secondary students. *ZDM Mathematic Education*, 43, 535–546. doi: 10.1007/s11858-011-0314-9

Peressin, D., & Knuth, E. (2000). The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry. *Teaching Children Mathematics*, 6 (6), 391-397.

Pesci, A. (1995). Visualization in Mathematics and graphical mediators: an experience with 11-12 Year old pupils. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*, (p. 33-51). New York: Springer.

Peter-Koop, A., & Wollring, B. (2001). Student teacher participation in interpretative classroom research projects. *Mathematics Teacher Education and Development*, 3, 4-15.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). *Mental imagery and the child: A study of the development of imaginal representation*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante*, XXI (2), 29–50.

Pinheiro, A. & Carreira, S. (2013). O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, M. Rodrigues, M. Costa & R. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática. Raciocínio Matemático* (pp. 146-169). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Pinto, S. (2011). *Desenvolvimento do pensamento geométrico: Uma proposta para o ensino das isometrias*. Tese de mestrado. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, Portugal.

Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (2), 191-212.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In *Actas do ProfMat* (pp. 25-39). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In Grupo de Trabalho sobre Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006a). Os desafios do processo de Bolonha para a formação inicial de professores. *Revista de Educação*, XIV (1), 19-35.

Ponte, J. P. (2006b). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interacções*, 12, 96-114.

Ponte, J. P. (2012). What is an expert mathematics teacher? In T. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 125-128). Taipei: PME. ISSN: 0771-100X

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers knowledge and practices. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, presente and future* (pp. 461-494). Rotterdan: Sense Publishers.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teacher´s knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 223-261). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Ponte, J. P., Januário, C., Ferreira, I. C., & Cruz, I. (2000). *Por uma formação inicial de professores de qualidade*. Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP para a formação de professores – Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Práxis Educativa*, 7 (2), 355-377.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. (2002). Development of pre-service mathematics teachers´ professional knowledge and identity in working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5 (2), 93-115.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13, 51-74.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O novo programa de matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, 105, 2-6.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Martins, M., ... , & Sousa, H. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Martins, M., ... , & Sousa, H. (2013). *Sobre o Programa de Matemática para o Ensino Básico recentemente homologado*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na matemática no ensino básico. In Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *O Professor e o programa de matemática do ensino básico*, (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery*. Minnesota: John Wiley & Sons.

Potari, D. (2012). The complexity of mathematics teaching and learning in mathematics teacher education and research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 97–101. doi: 10.1007/s10857-012-9213-4

Potari, D., & Georgiadou–Kabouridis, B. (2009). A primary teacher's mathematics teaching: The development of beliefs and practice in different ''supportive'' contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 7-25. doi: 10.1007/s10857-008-9091-y

Prenzel, M., & Duit, R. (2000). *Increasing the efficiency of science and mathematics instruction: Report of a national quality development programme*. Paper presented at the annual meeting of the National Association for Research in Science Teaching (NARST), New Orleans. Acedido em janeiro 27, 2013, em http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_sinus.pdf

Presmeg, N. (1998). Ethnomathematics in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1 (3), 317-339.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Rotterdam: Sense Publishers.

Pusey, E. (2003). *The van Hiele model of reasoning in geometry: A literature review*. Master's thesis. North Carolina State University, Raleigh, United States of America. Acedido em maio 05, 2012, em http://repository.lib.ncsu.edu/ir/bitstream/1840.16/2275/1/etd.pdf

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83–96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0

Reason, P. (1994). Three approaches to participative inquiry. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 324-339). Thousand Oaks: Sage Publications.

Ribeiro, A. (2005). *Cabri-géomètre e a construção de uma nova cultura matemática: um estudo no âmbito da formação inicial de professores do 1º CEB*. Tese de doutoramento. Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Riccomini, P. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. *Learning Disability Quarterly*, 28 (3), 233–242.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R., & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93, 346–362.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a mathematical way of knowing: Understanding figural generalization. *Mathematics Teacher*, 101 (1), 69-75.

Rivkin, S., Hanushek, E., & Kain, J. (2005). Teachers, schools, and academic achievement. *Econometrica*, 73, 417–458.

Robertson, S. (2005). Re-imagining and rescripting the future of education: global knowledge economy discourses and the challenge to education systems. *Comparative Education*, 41 (2), 151-170.

Rockoff, J. (2004). The impact of individual teachers on student achievement: Evidence from panel data. *American Economic Review*, 94, 247–252.

Roddick, C., Becker, J., & Pence, B. (2000). Capstone courses in problem solving for prospective secondary teachers: Effects of beliefs and teaching practices. In A. Cokburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (pp. 97-104). Hiroshima: PME.

Ross, A. (2007). Political learning and controversial issues with children. In H. Claire & C. Holden (Eds.), *The challenge of teaching controversial issues* (pp. 117–129). Stoke-on-Trent: Trentham Books.

Ruffell, M., Mason, J., & Allen, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35 (1), 1-18.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. Stiff & F. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston: NCTM.

Russel, B. (2007). As funções de um professor. *Educação e Matemática*, 91, 24-29.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions*. New York: Open University Press.

Saads, S., & Davis, G. (1997). Spatial abilities, van Hiele levels and language use in three dimensional geometry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4 (pp. 104-111).Lahti: PME.

Santos, L., Nápoles, S., & Veloso, E. (2007). A Matemática na formação inicial de professores. *Educação e Matemática*, 91, 90-95.

Sarama, J., & Clements, D. (2009*). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Schäfer, M. (2004). World view theory and the conceptualisation of space in mathematics education. *Pythagoras*, 59, 8-17.

Schleicher, A. (Ed.) (2012). *Preparing teachers and developing school leaders for the 21st century: Lessons from around the World*. OECD Publishing. Acedido em setembro 28, 2013, em http://www.oecd.org/site/eduistp2012/49850576.pdf

Schoenfeld, A. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* London: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher,* 81, 420-427.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). *Toward a theory of proficiency in teaching mathematics teaching. Reflection of practice with the knowledge quartet*. London: SAGE Publications.

Schoenfeld, A., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student´s evolving understanding of a complex subject matter domain. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology*, 4 (pp. 155-175). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books. Acedido em outubro 12, 2011, em http://www.amazon.com/Reflective-Practitioner-Professionals-Think-Action/dp/0465068782/ref=asap_bc?ie=UTF8

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner: Towards a new design for teaching and learning in the professions*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Org.), *Os professores e a sua formação* (pp. 77-92). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Schreiber, J. B. (2002). Institutional and student factors and their influences on advanced mathematics achievement. *The Journal of Educational Research*, 95 (5), 274-286.

Schulke, C., & Steinbring, H. (2009). Mathematical reflection in primary school education. Theoretical foundation and empirical analysis of a case study. In Candia Morgan (Ed.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 862-872). Lyon: CERME.

Schwandt, T. (2000). Three epistemological stances for qualitative inquiry: Interpretivism, hermeneutics and social constructionism. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2nd ed.) (pp. 189-214). Thousand Oaks: Sage Publications.

Schwarz, B., Neuman, Y., Gil, J., & Ilya, M. (2003). Construction of collective and individual knowledge in argumentation activity. *Journal of the Learning Sciences*, 12 (2), 219-256

Seale, C. (1999). Quality in qualitative research. *Qualitative Inquiry*, 5 (4), 465-478. doi: 10.1177/107780049900500402

Segall, A. (2002). *Disturbing practice: Reading teacher education as text*. New York: Peter Lang Publishing Group.

Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. In J. Malkevitch (Ed.), *Geometry´s future* (p. 15-21). Bedford: COMAP, Inc.

Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (3), 309-321.

Shell, V. (1998). Introduction to the special issue: Elements of geometry in the learning of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2), 1-3.

Sherin, M., & Van ES, E. (2005). Using video to support teachers´ ability to interpret classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 13 (3), 475-491.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

Shulman, L. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: The impact of subject-specific conceptions of teaching. In L. Montero & J. Vez (Ed.), *Las didácticas específicas en la formación del professorado* (pp. 53-69). Santiago de Compostela: Tórculo Ediciόns.

Shulman, L. (2005). Teacher education does not exist. *Stanford Educator* [Stanford University School of Education Alumni Newsletter], Fall´05, 7. Acedido em julho 18, 2013, em https://ed.stanford.edu/sites/default/files/suse-educator-fall05.pdf

Siegel, H. (1989). The rationality of science, critical thinking and science education. *Synthese*, 80, 9–41.

Siegler, R. (2005). Children's learning. *American Psychologist*, 60, 769–778.

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the Learning of Mathematics*, 24 (2), 7-15.

Sierspinska, A. (2011). Research into pre-service elementar teacher education courses. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress f the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 9-33). Poland: University of Rzeszów.

Silva, P. (2011). *LOGO: Um meio para aprender geometria no 2º ano do 1º ciclo do ensino básico*. Tese de mestrado. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Silver, E. A., & Stein, M. K. (1996). The QUASAR project: The "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middle schools. *Urban Education,* 30 (4), 476-521.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 91-104.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26 (3), 9-15.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33 (4), 123-132.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da Educação Matemática Crítica*. São Paulo: Papirus.

Sliva, J., & Roddick, C. (2001). Mathematics autobiographies: A window into beliefs, values, and past mathematics experiences of preservice teachers. *Academic Exchange Quarterly*, 5 (2), 101-116.

Smith, A. (2004). *Making mathematics count: The report of professor Adrian Smith's inquiry into post-14 mathematics education.* London: The Stationary Office Limited. Acedido em maio 06, 2013, em http://www.mathsinquiry.org.uk/report/MathsInquiryFinalReport.pdf

Smith, M., Hughes, E., Engle, R., & Stein, M. (2009). Orches. *Mathematics Teaching in the Middle* School, 14 (9), 548-556.

Smith, M., & Stein, M. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston: NCTM. ISBN: 978-0-87353-677-6

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-224). Charlotte: Information Age Publishing.

SPM (1982). Os programas em debate. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 5, 18-22.

St. Aubyn, A. (1980). Matemática moderna em crise? *Inflexão*, 2, 6-12.

Stake, R. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (3rd ed.) (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. (2ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M., & Kaufman, J. (2010). Selecting and supporting the use of mathematics curricula at scale. *American Educational Research Journal*, 47 (3), 663–693. doi: 10.3102/0002831209361210

Stein, M., & Kim, G. (2009). The role of mathematics curriculum materials in largescale urban reform: An analysis of demands and opportunities for teacher learning. In J. Remillard, G. Lloyd & B. Herbel-Eisenmann (Eds.), *Teachers' use of mathematics curriculum materials: Research perspectives on relationships between teachers and curriculum* (pp. 37–55). New York: Routledge.

Stein, M., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2, 50-80.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (4), 268-275.

Stenbacka C. (2001). Qualitative research requires quality concepts of its own. *Management Decision,* 39 (7), 551-556.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world´s teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

Stillman, G., Cheung, K., Mason, R., Sheffield, L., Sriraman, B., & Ueno, K. (2009). Challenging mathematics: Classroom practices. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), Proceedings of the *16th ICMI Study, Challenging mathematics in and beyond the classroom* (pp. 243-284). NewYork: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-09603-2

Stylianides, A., & Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 307–332.

Stylianou, D., & Silver, E. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (4), 353-387.

Sullivan, P., Cheeseman, J., Michels, D., Mornane, A., Clarke, D., Roche, A., & Middleton, J. (2011). Challenging mathematics tasks: What they are and how to use them. In L. Bragg (Ed.), *Maths is multidimensional* (pp. 33-46). Melbourne: Mathematical Association of Victoria.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer.

Sullivan, P., Clarke, D., & O´Shea, H. (2010). Students' opinions about characteristics of their desired mathematics lessons. In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. *Shaping the future of mathematics education* (pp. 531-538). Fremantle: MERGA. ISBN: 978-1-920846-25-1

Sullivan, P., & Mousley, J. (2001). Thinking teaching: Seeing mathematics teachers as active decision makers. In F. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 147-163). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Swafford, J., & Jones, G. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (4), 467-483.

Swafford, J., & Langrall, C. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (1), 89–112.

Tall, D. (2004). The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23 (3), 29-33.

Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2003). Major issues and controversies in the use of mixed methods in the social and behavioral sciences. In A. Tashakkori & C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in the social and behavioral research* (pp. 3-50). Thousand Oaks: Sage Publications.

Teixeira, M. (2008). *O pensamento geométrico no 1º ano de escolaridade*. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Tempera, T. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes*. Tese de mestrado. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematics education* (pp. 194-209). Cambridge: Cambridge University Press.

Timmer, M., & Verhoef, N. (2012). Increasing insightful thinking in analytic geometry. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/13 (3), 217-219.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers´ knowledge of children´s conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 5-25.

Tobias, S., & Itter, D. (2007). Mathematical backgrounds of pre-service teachers in rural Australia: A regional comparative study. In *Proceedings of AARE annual Conference*. Fremantle: University of Notre Dame. Acedido em dezembro 09, 2011, em http://www.aare.edu.au/data/publications/2007/tob07424.pdf

Tobias, S., Serow, P., & Schmude, M. (2010). Critical moments in learning mathematics: First year pre-service primary teachers' perspectives. In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Shaping the future of mathematics education* (pp. 804-811). Fremantle: MERGA. ISBN: 978-1-920846-25-1

Tonkes, E., Isaac, P., & Scharaschkin, V. (2009). Assessment of an innovative system of lecture notes in first-year mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 40 (4), 495-504.

Trigwell, K., Ellis, R., & Han, F. (2012). Relations between students' approaches to learning, experienced emotions and outcomes of learning. *Studies in Higher Education*, 37 (7), 811-824. doi: 10.1080/03075079.2010.549220

Tuckman, B. (1994). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Turgut, M., & Yilmaz, S. (2012). Relationships among preservice primary mathematics teachers´ gender, academic sucess and spatial ability. *International Journal of Instruction*, 5 (2), 5-20. ISSN: 1694-609X

Tzur, R. (2008). A researcher perplexity: Why do mathematical tasks undergo metamorphosis in teacher hands? In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the International group of Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 139-146). Michoacán: Michoacán University of Saint Nicholas of Hidalgo.

Unal, H., Jakubowski, E., & Corey, D. (2009). Differences in learning geometry among high and low spatial ability pre-service mathematics teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (8), 997-1012. doi: 10.1080/00207390902912852

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. *Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project*. Illinois: University of Chicago Press. Acedido em setembro 27, 2012, em http://psych.stanford.edu/~jlm/pdfs/Usiskin82AssessingvanHiele.pdf

Vale, I. (2002). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis*. (Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Vale, I. (2003). Didactic materials in initial elementary mathematics teacher education: The use of manipulative in geometry. In P. Wlodkowic (Ed.), *Proceedings of CIEAEM 55*. University Plock, Poland.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: O estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171-202. Viana do Castelo: IPVC.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. *Interacções*, 20, 181-207.

Vale, I., & Barbosa, A. (2009). *Padrões. Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do IPVC.

Vale, I,, & Fonseca, L. (2010). Pattern task with geometric transformation in elementar teachers´ training: Some examples. *Journal of the European Teacher Education Network*, 6, 76-86.

Vale, I., & Pimentel, T. (2011). Mathematical challenging tasks in elementary grades. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Mathematical Potential, Creativity and Talent* (pp. 1154-1164). University of Rzeszów: European Society for Research in Mathematics. ISBN: 978-83-7338-683-9

Vallence, R. (2000). Excellent teachers: Exploring self-constructs, role, and personal challenges. *Conference of Australian Association for Research in Education*. Sydney. Acedido em fevereiro 03, 2012, em http://www.aare.edu.au/data/publications/2000/val00341.pdf

Van de Walle, J. (2001). Geometric thinking and concepts. *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.) (pp. 12-43). Boston: Allyn & Bacon.

Van den Broeck, A., Opdenakker, M.-C., & Van Damme, J. (2005). The effects of student characteristics on mathematics achievement in Flemish TIMSS 1999 data. *Educational Research and Evaluation*, 11 (2), 107-121.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press.

Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5 (6), 310–316.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. (1999). Ensino da geometria: Ideias para um futuro melhor. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Org.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (pp. 17-32). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Veloso, E. (2007). Notas sobre o ensino da geometria. Sobre as definições [II]. *Educação e Matemática*, 93, 19-22.

Veloso, E. (2008). Notas sobre o ensino da geometria. Há vida para além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones. *Educação e Matemática*, 96, 18-19.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas. Textos de Geometria para professores*. Lisboa. Associação de Professores de Matemática.

Veloso, E., & Ponte, J. P. (1999). Introdução. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Org.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (pp. 1-5). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Vergani, T. (1993). *Um horizonte de possíveis sobre uma educação matemática viva e globalizante*. Lisboa: Universidade Aberta.

Visser-Wijnveen, G., Driel, J., Rijst, R., Verloop N., & Visser A. (2009). The relationship between academics' conceptions of knowledge, research and teaching – a metaphor study. *Teaching in Higher Education*, 14 (6), 673-686.

Wallach, T., & Even, R. (2005). Hearing students: The complexity of understanding what they are saying, showing, and doing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (5), 393-417.

Weber, K. (2010). How proofs develop insight. *Learning Mathematics*, 30 (1), 32–36.

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43 (4), 463–482. doi: 10.1080/0020739X.2011.622803

Weiss, D. (2006). The rationale for using manipulatives in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11 (5), 238-242.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Acedido em setembro 06, 2011, em http://wenger-trayner.com/wp-content/uploads/2012/01/09-10-27-CoPs-and-systems-v2.01.pdf

Whitenack, J., & Yackel, E. (2002). Making mathematical arguments in the primary grades: The importance of explaining and justify ideas. *Teaching Children Mathematics*, 8, 524-527.

Wilson, S., Shulman, L., & Richert, A. (1987). "One hundred fifty ways of knowing": Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 104-124). London: Cassell.

Winter, G. (2000). A comparative discussion of the notion of validity in qualitative and quantitative research. *The Qualitative Report*, [On-line serial], 4 (3&4). Acedido em setembro 27, 2012, em http:/www.nova.edu/ssss/QR/QR4-3/winter.html

Wittrock, M. (1986). Students´ thought process. In M. Wittrock (Ed.*), Handboock of research on teaching*, 3 (pp. 297-314). New York: Macmillan Publishing Company.

Wolcott, H. (2002). Writing up qualitative research … better. *Qualitative health research*, 12, 91-103. doi: 10.1177/1049732302012001007. Acedido em Agosto 25, 2012, em http://www.uk.sagepub.com/gray/Website%20material/Journals/qhr_wolcott.pdf

Wong, K., & Chen, Q. (2012). Nature of an attitudes toward learning mathematics questionnaire. In J. Dindyal, L. Cheng & S. Ng (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics education: Expanding horizons* (pp. 793-800). Singapore: MERGA. ISBN: 978-981-07-2527-3

Wood, T. (2002). Demand for complexity and sophistication: Generating and sharing knowledge about teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 201–203.

Wood, T., & Berry, B. (2003). What does ‘‘design research’’ offer mathematics teacher education? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 195–199.

Wu, H. (1999). Professional development of mathematics teachers. *American Mathematical Society*, 46 (5), 535-542.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227-236). Reston: NCTM.

Yilmaz, H. B. (2009). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education,* 1 (2), 83-96.

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th ed.). Thousand Oaks: Sage Publications. ISBN 978-1-4129-6099-1

Yu, C. (2006). Abduction, Deduction, and Induction: Their implications to quantitative methods. *The American Educational Research Journal (AERA), 43*.

Zan, R., & Di Martino, P. (2007). Attitude towards mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 157-168. ISSN: 1551-3440

Zan, R., & Di Martino, P. (2014). Students´attitude in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 572-577). doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Zan, R., Brown, L., Evans, J. & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63 (2), 113-121. ISSN 0013-1954

Zaslavsky, O. (1991). In what ways are similar figures similar?. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3 (pp. 378-385). Assisi: PME.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education and teacher educators. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 433-440. doi: 10.1007/s10857-007-9060-x

Zaslavsky, O. (2010). The challenge of listening. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 3–5. doi: 10.1007/s10857-010-9146-8

Zeichner, K. (1992). Novos caminhos para o practium: Uma perspectiva para os anos 90. In A. Nóvoa (Org.), *Os professores e a sua formação* (pp. 115-138). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

APÊNDICES

Apêndice A

Programa da UC de Geometria

Unidade Curricular	GEOMETRIA
CURSO – Licenciatura em	EDUCAÇÃO BÁSICA
Regime	Diurno
Unidade Técnico-Científica:	Matemática

Carga Total de Trabalho	168,0	horas	Obrigatória	X	Créditos (ECTS)	6
Horas de Trabalho Autónomo	100,5	horas	Opcional			
Horas de Contacto	67,5		Ano		Docente Responsável	
Teóricas		horas	1.º		Angela Couto	
Teórico-Práticas	30,0	horas	2.º	X		
Práticas Laboratoriais	37,5	horas	3.º		Leccionação	
Seminário		horas			Cláudia Maia	
Orientação Tutorial		horas	Anual		Daniela Mascarenhas	
Trabalho de Campo		horas	1.º Semestre			
Estágio		horas	2.º Semestre	X		

PROGRAMA

Autoria	Angela Couto, Cláudia Maia e Daniela Mascarenhas
Competências	Desenvolver a capacidade de usar a Geometria para analisar e resolver situações problemáticas, raciocinar e comunicar. Mobilizar adequadamente conceitos, conhecimentos e procedimentos matemáticos fundamentais. Aplicar os conhecimentos elementares e as ferramentas auxiliares à vida e à cultura do quotidiano. Explorar, científica e pedagogicamente, materiais na aquisição e desenvolvimento do conhecimento da Geometria. Desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática que possibilitem a análise crítica, a inovação, a investigação pedagógica e a reflexão sobre a prática desenvolvida.

Conteúdos

Geometria no plano
- Flatland ou Terra Plana
- Teorema de Pick para o cálculo de áreas
- Lugares geométricos
- Construções com régua e compasso.
- Cálculo vetorial (Vetor livre; vetores num referencial; operações com vetores; norma de um vetor)

Transformações geométricas
- Isometrias no plano
- Aplicações de semelhança – homotetias
- Simetria (Frisos; padrões; pavimentações)

Geometria no espaço
- Posição relativa de retas no espaço
- Áreas de superfícies
- Volumes
- Lugares geométricos
- Visualização e representação – vistas (lateral, frontal, entre outras) de figuras tridimensionais e reconhecimento de figuras representadas por diferentes vistas

Trigonometria do triângulo retângulo
- Razões trigonométricas do ângulo agudo
- Determinação de lados e ângulos de um triângulo retângulo
- Aplicações da trigonometria

Cultura Matemática
- Tira de Mobius
- Garrafa de Klein
- Pontes de Konigsberg e fórmula de Euler

Geometrias não-Euclidianas
- Breve contextualização histórica
- Geometria do motorista de táxi
  - Distância
  - Lugares geométricos
  - Aplicações/explorações

Metodologia do Trabalho

<u>Teórico-Práticas</u>

Os conteúdos serão abordados numa perspetiva científica mas constantemente apoiados em exemplos de aplicação e complementos de informação (debates, colocação de questões, pesquisa bibliográfica, entre outras), visando desenvolver nos alunos competências diversas em simultâneo com a aprendizagem de conceitos, destacando a aquisição de conhecimentos globalizantes que permitam o estabelecimento de conexões entre os diferentes conteúdos. Cada conteúdo apresentado terá enquadramento teórico e sínteses de carácter científico.

<u>Práticas Laboratoriais</u>

Estas aulas terão como base de trabalho o estabelecimento de uma dialética entre a informação científica fornecida nas aulas teórico-práticas e a exercitação e aplicabilidade dos conhecimentos e conceitos adquiridos pelos alunos. As propostas de trabalho terão numa primeira fase a resolução imediata para aquisição de destreza matemática e, numa fase seguinte, a resolução de problemas que possibilitem a familiarização dos métodos de resolução, rigor, formalização, espírito crítico, revisão, aplicação e o prolongamento dos conhecimentos e capacidades adquiridas. Nestas aulas serão utilizados materiais manipuláveis que facilitem a aquisição dos conhecimentos e a perceção da sua utilização enquanto futuros educadores.

Avaliação	
	<u>Avaliação durante as aulas</u>: Provas individuais e escritas: Um conjunto de (≥ 3) mini-testes (m-T≥6,5) e / ou um teste global (T) <u>Exame Final</u>: Média (m-T) ≥ 6,5 e / ou T ≥ 6,5 e / ou Média (Média (m-T), T) ≥ 6,5 O exame constará de uma prova escrita.

Cálculo da Classificação	
	Média (m-T) ≥ 9,5 e / ou T ≥ 9,5 e / ou Média (Média (m-T), T) ≥ 9,5

Bibliografia Fundamental	(Máximo – 4 referências)
	Como base de trabalho, os alunos terão à sua disposição, na página desta unidade curricular (plataforma Moodle da ESE): os Textos de Apoio e as Atividades a desenvolver nas aulas. No entanto, deverão sempre recorrer à seguinte bibliografia complementar: Araújo, P. V. (1998). *Curso de Geometria*. Gradiva Publicações. Brannan, A. D., Esplen, M. F. & Gray, J. J. (n.d.) *Geometry*. Cambridge. University Press. Rick, B; (2000). *Geometria*. (3ª ed.), Colecção Schaum: McGraw-Hill Companies, Inc.

Observações	

Bibliografia Complementar	
	Araújo, P. V. (1998). *Curso de Geometria*. Gradiva Publicações. Bonola, R. (2007). *Non-Euclidean Geometry*. Cosimo, Inc. Brannan, A. D., Esplen, M. F., & Gray, J. J. (n.d.). *Geometry*. Cambridge, University Press. Caraça, B. J. (1989) *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, Livraria Sá da Costa. Departamento de Educação Básica (1999). *A matemática na Educação Básica*. Lisboa, Ministério da Educação. Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's Elements of Geometry*. Modern English translation. Giesecke, E.H. (1996). *Reflective Geometry - Activities with the GeoReflector Mirror*. Learning Resources, USA. Palhares, P. (editor) (2004). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa, Lidel. Pó lya, G. (1986). *A Arte de Resolver Problemas*, Interciência. Rick, B. (2000). *Geometria*. (3ht ed), Coleção Schaum: McGraw-Hill Companies, Inc. Vale, I., Sousa, R., & Pimentel, T. (2007). *Matemática no 2º Ciclo. Propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: ESE.

Apêndice B

Instrumentos utilizados no Teste:

- Teste de diagnóstico;
- Distribuição das perguntas pelos conteúdos/conhecimentos e capacidades;
- Critérios de classificação;
- Questões do Teste, cotações e níveis de van Hiele.

Teste de diagnóstico

Geometria

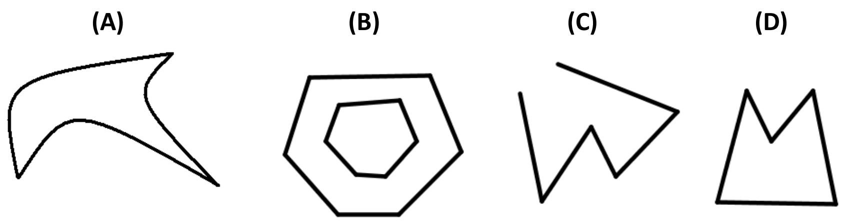
Caro aluno

Este teste insere-se num trabalho de investigação e tem como objetivo diagnosticar alguns dos seus conhecimentos em Geometria e Grandezas no início desta Unidade Curricular «Geometria». É constituído por questões de escolha múltipla, múltipla escolha e questões de resposta aberta. Nas questões de escolha múltipla faça um círculo à volta da letra que identifica a(s) opção(ões) que considere correta(s). Nas restantes questões responda com letra legível.

O teste é anónimo e confidencial.

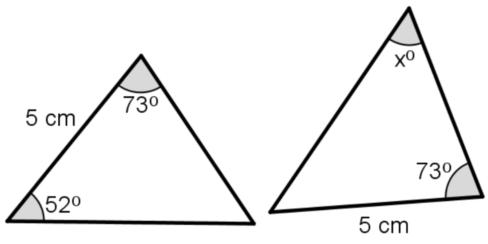
Agradeço a sua colaboração.

1. Das figuras apresentadas identifique a que é um polígono?



2. Os triângulos apresentados nesta questão são congruentes. Atendendo às condições das figuras identifique a opção que representa o valor de x.

- **(A)** 52^{0}
- **(B)** 55^{0}
- **(C)** 65^{0}
- **(D)** 73^{0}
- **(E)** 75^{0}



3. Explique por que é que a seguinte afirmação é verdadeira: *Um triângulo retângulo não pode ser equilátero*.

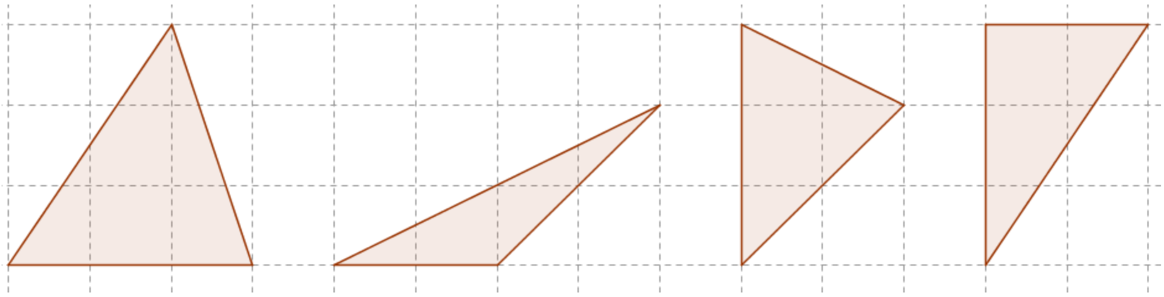
____

____

____

____

4. Para cada um dos triângulos desenhe, na própria figura, uma altura.



5. Para desenhar um triângulo, com instrumentos de desenho, são necessários alguns dados referentes a lados ou a amplitude de ângulos. Qual das opções seguintes contém os elementos mínimos que permitirão fazer tal construção?

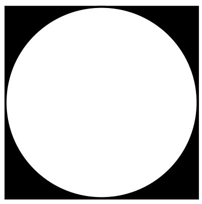
(A) A medida de comprimento de um qualquer lado e a medida de amplitude de dois ângulos.

(B) A medida de comprimento de dois lados e a medida de amplitude de um ângulo qualquer.

(C) A medida de comprimento dos três lados e a medida de amplitude de um ângulo.

(D) A medida de comprimento de um dos lados e a medida de amplitude dos ângulos adjacentes.

6. As camisolas dos participantes num torneio de andebol vão ter o desenho apresentado na figura. A Cátia vai telefonar ao Sr. Tomás. Precisa de descrever o desenho para ele o fazer. Coloque-se no lugar da Cátia e descreva o desenho para o Sr. Tomás.



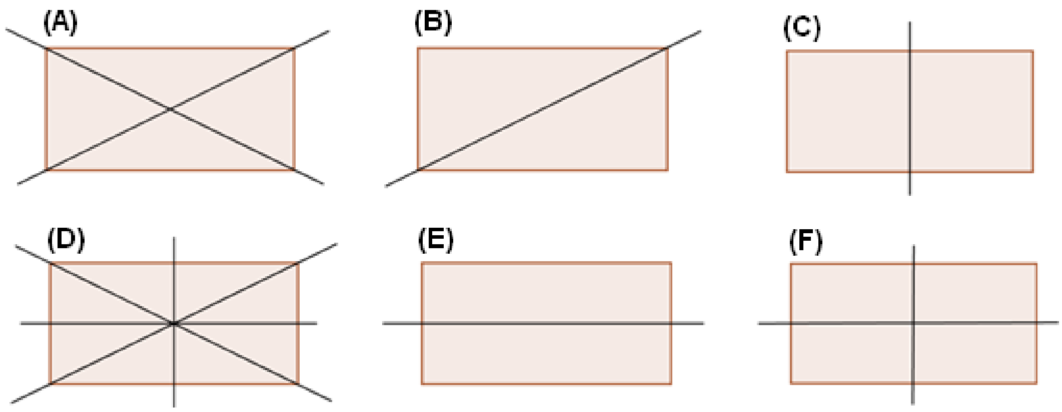
____

____

____

____

7. Qual das hipóteses mostra apenas os eixos de simetria do retângulo?



8. Um quadrado é um retângulo? Explique a sua resposta.

____

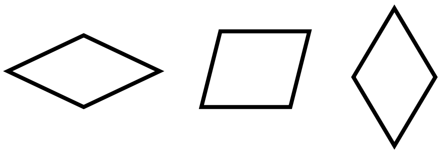
____

____

____

9. Das afirmações seguintes, identifique a que <u>não é</u> válida para todos os losangos.

(A) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
(B) Cada diagonal bisseta dois ângulos do losango.
(C) As duas diagonais são perpendiculares.
(D) Os ângulos opostos têm a mesma amplitude.

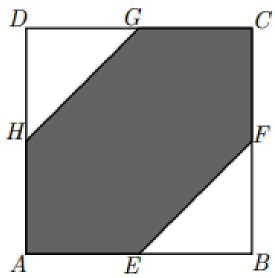


10. Na figura está representado o quadrado [ABCD]. Sabe-se que:

- o lado do quadrado é 10;
- E, F, G e H são os pontos médios dos lados [AB], [BC], [CD] e [DA], respetivamente.

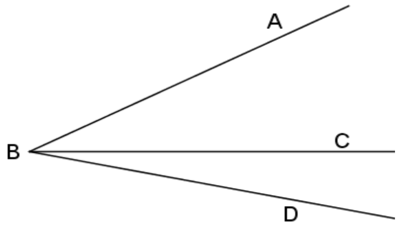
10.1. Qual a medida de [EF]?

10.2. Qual o perímetro da região sombreada?



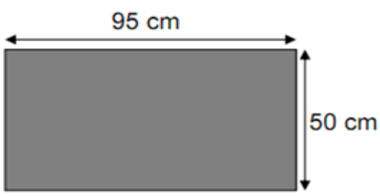
11. Quantos ângulos identifica na figura?

Assinale-os na figura de forma clara.



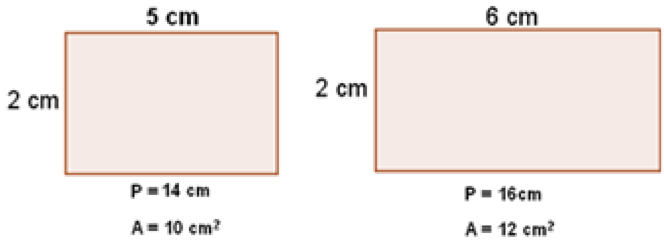
12. A Ana colou doze fotografias sem as sobrepor num cartão retangular com as dimensões assinaladas na figura.

Cada fotografia tem a forma de um retângulo com 20 cm de comprimento e 15 cm de largura.
Qual a área do cartão que não está ocupada pelas fotografias?



13. Numa aula do 5º ano de escolaridade, um aluno entrou na sala e disse para a professora:

Professora, descobri uma regra nova: Numa figura qualquer, se aumentarmos o perímetro a área também aumenta. Trouxe um exemplo para ver como é verdade.



Coloque-se no papel de professor. Como comentaria a conjetura do aluno?

____

____

____

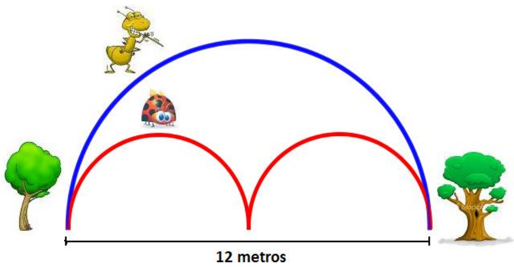
____

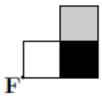
14. Uma formiga e uma joaninha decidiram mudar de casa de uma árvore para a outra.

Quem chegará primeiro, a formiga ou a joaninha?

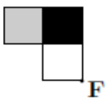
Justifique.

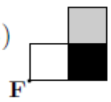
(Considere a velocidade da formiga e da joaninha iguais).

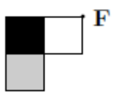


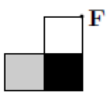
15. Se a figura for 

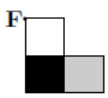
rodada 180^0 em torno do ponto F, o resultado da figura é a opção:

(A) 

(B) 

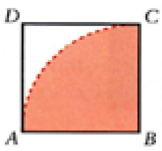
(C) 

(D) 

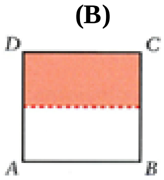
(E) 

16. Qual é o lugar geométrico dos pontos do interior do quadrado cuja distância ao ponto B é inferior a $\overline{BC}$:

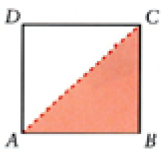
(A)



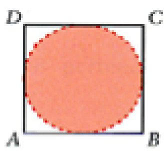
(B)



(C)



(D)



17. A figura 1 apresenta um pormenor arquitetónico da Casa do Cipreste, de Raul Lino, em Sintra. Na figura 2 estão a representação geométrica de parte do pormenor arquitetónico e o vetor $\vec{v}$.

figura 1

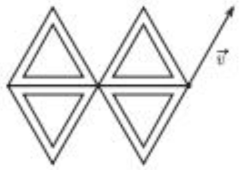
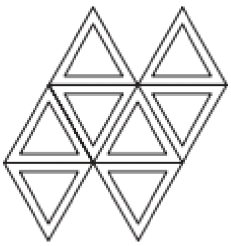


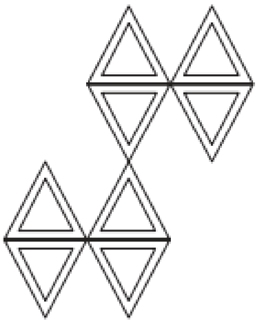
figura 2

Escolha a opção onde estão representadas a figura 2 e sua imagem através da translação associada ao vetor $\vec{v}$?

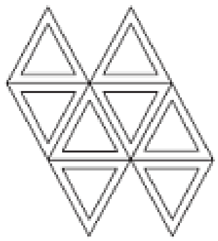
(A)



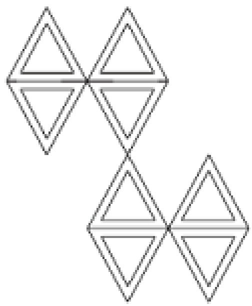
(B)



(C)

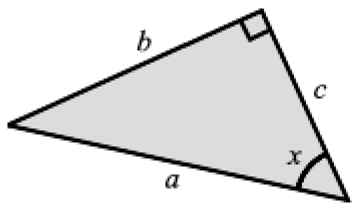


(D)



18. Na figura está representado um triângulo retângulo em que:

- a, b e c são medidas de comprimento dos seus lados, em centímetros;
- x é a medida da amplitude de um dos seus ângulos agudos, em graus.



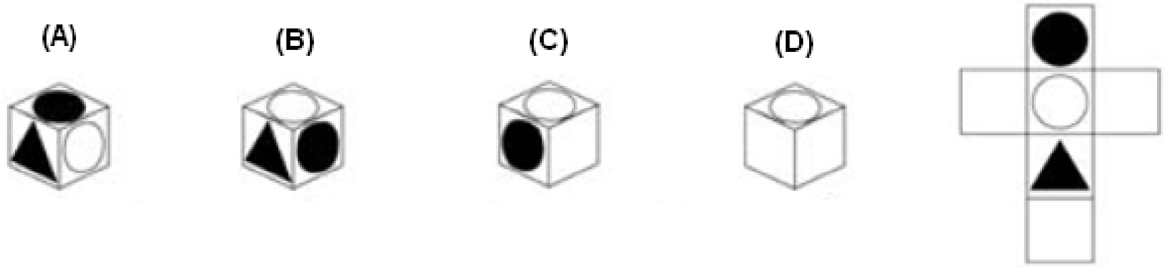
Qual das opções traduz uma afirmação correta?

(A) sen $x = b/a$
(B) sen $x = a/b$
(C) sen $x = b/c$
(D) sen $x = c/a$

19. Dos seguintes sólidos quais são poliedros?

(A) Cubo
(B) Cilindro
(C) Cone
(D) Paralelepípedo
(E) Pirâmide
(F) Esfera

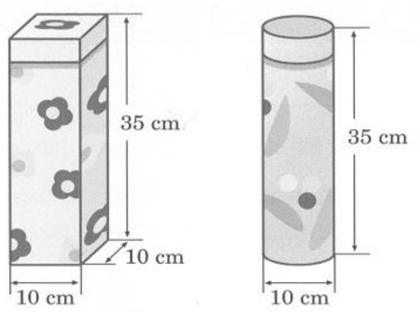
20. Qual dos cubos representados pode ser construído a partir da planificação apresentada?



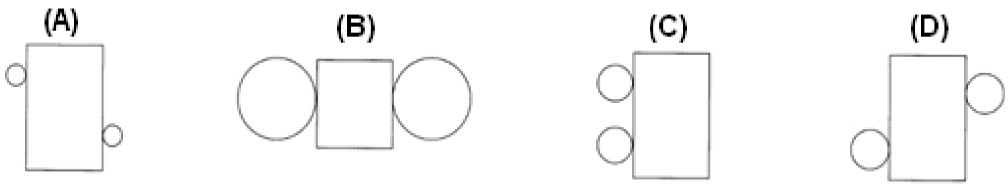
21. Qual das seguintes opções <u>não é</u> verdadeira?

(A) Uma pirâmide hexagonal tem 6 faces laterais triangulares.
(B) Uma pirâmide hexagonal tem 6 faces laterais retangulares.
(C) Uma pirâmide hexagonal tem 1 base hexagonal.
(D) Uma pirâmide hexagonal tem 7 faces.

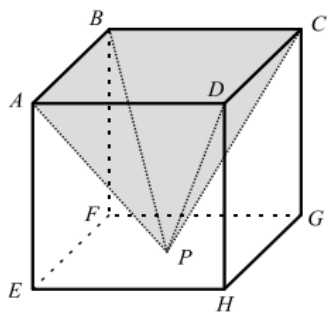
22. Qual das duas latas de massa tem maior volume? Justifique.



23. Assinale a figura que possa corresponder à planificação de um cilindro.



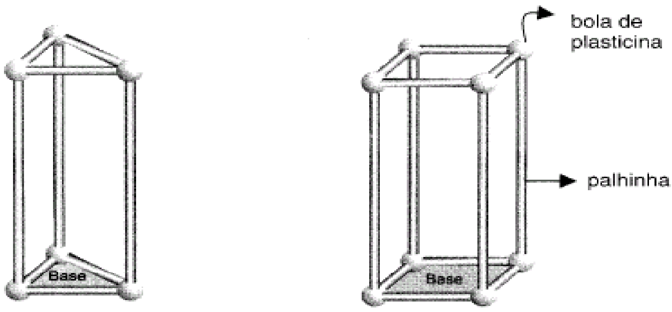
24. Na figura pode ver um cubo e, sombreada a cinzento, uma pirâmide quadrangular regular.
A base da pirâmide coincide com a face [ABCD] do cubo.
O vértice P é o ponto médio do quadrado [EFGH].



24.1. Utilizando as letras da figura, indique uma reta que seja complanar com a reta AC e perpendicular a esta reta. ______.

24.2. Se a pirâmide da figura tivesse 9 cm^3 de volume, qual seria a área de uma das faces do cubo? Apresente todos os cálculos que efetuar.

25. Os dois desenhos abaixo são exemplos do que se pode construir com palhinhas e bolas de plasticina.



25.1. Com exatamente 25 palhinhas é possível fazer uma construção de outro sólido? Se sim, diga que sólido obteria ou faça o seu esboço. Se não, justifique o seu raciocínio.

25.2. Com exatamente 16 bolas de plasticina é possível fazer uma construção de outro sólido? Se sim, diga que sólido obteria ou faça o seu esboço senão justifique o seu raciocínio.

Distribuição das Perguntas pelos Conteúdos/Conhecimentos e Capacidades

Conteúdos Conhecimentos e Capacidades	Geometria no plano	Geometria no espaço
Conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos	1 2 4 5 7 11 16 17 18	19 21 23
Raciocínio	3 9 13 15	20 25
Comunicação	6 8	
Resolução de problemas	10 12 14	22 24
% dos Conteúdos	65%	35%

Critérios de Classificação

Item	Categorias
01	1 – responde a opção D 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
02	1 – resposta a opção B 0 – dá qualquer resposta incorreta ou assinala mais do que uma resposta
03	2 – dá uma explicação clara e correta 1 – apresenta uma explicação confusa mas que evidência alguma compreensão 0 – apresenta uma explicação incompreensível ou incorreta
04	2 – desenha uma altura para cada um dos triângulos 1 – desenha uma altura para três dos triângulos 0 – dá qualquer outra resposta diferente das mencionadas
05	1 – responde a opção D 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
06	2 – dá uma explicação clara e correta 1 – apresenta uma explicação confusa mas que evidência alguma compreensão 0 – apresenta uma explicação incompreensível ou incorreta
07	1 – responde a opção F 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
08	2 – dá uma explicação clara e correta 1 – apresenta uma explicação confusa mas que evidência alguma compreensão 0 – apresenta uma explicação incompreensível ou incorreta

09	1 – responde a opção A 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
10	2 – responde que a medida de [EF] é $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ e que o perímetro de [AEFCGH] é 20+2$\sqrt{50} = 20 + 10\sqrt{2}$. 1 – responde corretamente apenas a uma das duas questões anteriores 0 – dá outra resposta diferente das mencionadas
11	3 – responde que são 8 e assinala-os 2 – responde que são 4 e assinala-os 1 – responde que são de 4 a 6 e não os assinala 0 – dá qualquer outra resposta
12	2 – apresenta uma estratégia correta do problema e responde $1150cm^2$ 1 – não apresenta a estratégia correta (o aluno decompõe a parte do cartão não ocupado pelas fotografias mas duplica a porção de área 5x15) respondendo $1225cm^2$ 0 – dá qualquer outra resposta
13	2 – dá um feedback claro e correto sobre a conjetura 1 – corrige a conjetura mas apresenta uma explicação confusa 0 – dá qualquer outra resposta mas sem uma explicação consistente
14	2 – responde corretamente à questão apresentando a justificação 1 – responde corretamente à questão mas não apresenta justificação 0 – dá qualquer outra resposta
15	1 – responde a opção C 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
16	1 – responde a opção A 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
17	1 – responde a opção A 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
18	1 – responde a opção A 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
19	2 – responde as opções A, D e E 1 – responde apenas a duas das opções A, D e E ou responde às opções A, D, E e outra. 0 – dá qualquer outra resposta
20	1 – responde a opção C 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
21	1 – responde a opção B 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
22	2 – responde corretamente à questão apresentando a justificação 1 – responde corretamente à questão mas não apresenta justificação 0 – dá qualquer outra resposta
23	1 – responde a opção D 0 – dá qualquer outra resposta ou assinala mais do que uma resposta
24	4 – responde a reta BD ou AE ou CG e calcula (como $\frac{1}{3}a^3 = 9cm^3$ então $a^3=27cm^3$ donde a=3cm logo axa=$9cm^2$) a área da face corretamente 3 – responde corretamente às duas questões mas na 2ª questão não indica as unidades 2 – responde corretamente apenas a uma das duas questões 1 – responde incorretamente à 1ª questão e corretamente à 2ª questão mas não indica as unidades 0 – dá outra resposta diferente das mencionadas

25	4 – responde corretamente às duas questões - na 1ª questão justifica claramente o motivo de impossibilidade de um esboço e na 2ª questão diz o nome do sólido ou faz o seu esboço correto 3 – responde claramente às duas questões - apresenta uma justificação para a 1ª questão incompleta ou imprecisa e na 2ª questão diz o nome do sólido ou faz o seu esboço correto 2 – só responde corretamente à 1ª questão e justifica claramente o motivo da impossibilidade 1 – só responde corretamente à 2ª questão dizendo o nome do sólido ou faz o seu esboço ou responde somente não à 1ª questão e sim à 2ªquestão, sem justificar claramente 0 – dá outra resposta diferente das mencionadas

Questões do Teste, Cotações e níveis de van Hiele

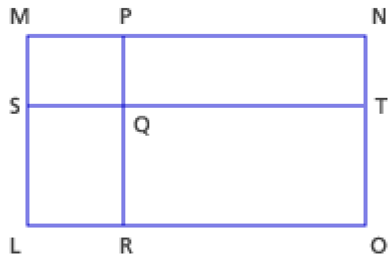
Item	*Cotação*	*Níveis de van Hiele*	*Item*	*Cotação*	*Níveis de van Hiele*
1	1	1 e 2	14	2	1 e 2
2	1	2	15	1	1 e 2
3	2	2 e 3	16	1	2
4	2	1 e 2	17	1	1 e 2
5	1	3	18	1	2 e 3
6	2	1 e 2	19	2	2
7	1	1 e 2	20	1	1 e 2
8	2	2 e 3	21	1	2
9	1	1, 2 e 3	22	2	1 e 2
10	2	1 e 2	23	1	1 e 2
11	3	1 e 2	24	4	1 e 2
12	2	1 e 2	25	4	2
13	2	1, 2 e 3			

Apêndice C

Tarefas utilizadas no estudo

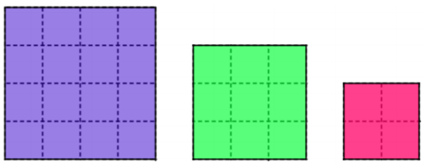
T1 Encontra polígonos

Quantos polígonos é que encontram na seguinte figura?



T2 Os três quadrados

Dados os três quadrados da figura, considere cada quadrícula como a unidade de área.



Utilizando os três quadrados, podendo sobrepô-los mas fazendo coincidir as suas quadrículas:

- Qual a menor e qual a maior área que consegue cobrir? Faça o registo de todas as figuras que tenham a sua área entre o valor mínimo e o máximo que encontrou. Justifique as impossibilidades que encontrar.
- Encontre a figura de perímetro máximo e a de perímetro mínimo e registe todas as figuras de perímetros intermédios entre o máximo e o mínimo. Justifique as impossibilidades que encontrar.

T3 Retângulos sombreados

Desenhe um retângulo;

- Divida os lados da altura em três segmentos de reta congruentes;
- Divida os lados da base em quatro segmentos de reta congruentes;
- Desenhe segmentos de reta a partir do ponto imediatamente abaixo do vértice superior esquerdo do retângulo para cada um dos pontos que determinou anteriormente;
- Sombreie o primeiro triângulo, depois o terceiro, quinto, sétimo, nono e décimo primeiro, começando no canto superior esquerdo e movendo-se no sentido dos ponteiros do relógio.

Que área do retângulo é que sombreou?

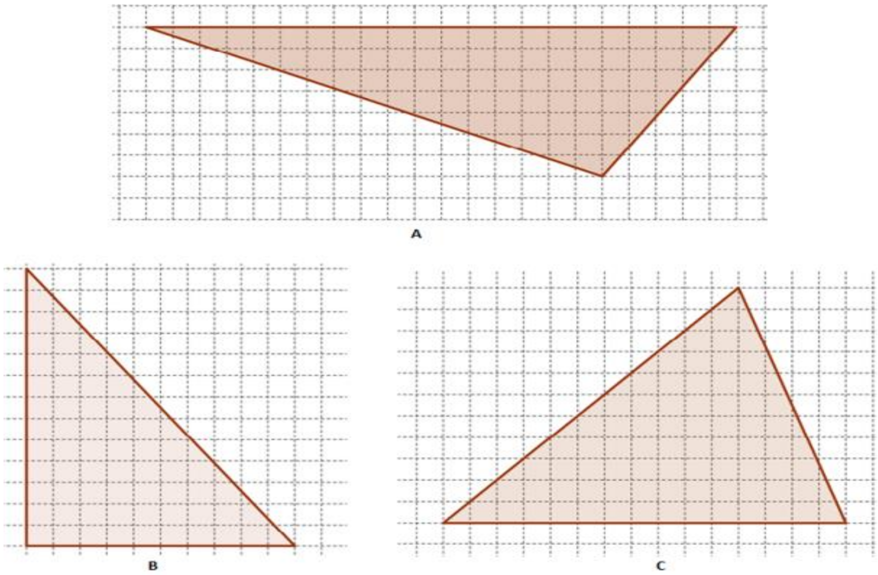
T4 As casas da Ana e da Beatriz

A Ana e a Beatriz são duas amigas da mesma turma que vivem respetivamente a 7km e 4km da escola quer frequentam. Qual é a distância entre a casa da Ana e a casa da Beatriz?

1. Será possível as duas amigas viverem a 10km uma da outra?
2. Será possível as duas amigas viverem a 12km uma da outra?
3. Será possível as duas amigas viverem a 2km uma da outra?
4. Qual poderá ser a distância máxima entre as casas das duas amigas? E a mínima?
5. Qual é, afinal, a distância entre as casas das duas amigas?
6. Que propriedade geométrica utilizou na resolução da tarefa?

T5 ## Área do triângulo a partir da área do retângulo

Na Figura considere os três triângulos A, B e C.



1. Decomponha o triângulo A de modo a formar triângulos que, rodados, permitam construir um retângulo equivalente ao triângulo original. Deste modo, determine a área do triângulo A a partir da área de um retângulo. Faça o mesmo para os triângulos B e C. Verifique de quantos modos diferentes é possível determinar, a partir da área do retângulo, a área dos triângulos A, B e C. Faça tantas explorações, para cada um dos triângulos, quantas consiga. Depois, descubra a área dos triângulos A, B e C, geométrica e analiticamente, considerando que a unidade de área é uma quadrícula.

2. Consegue chegar ao mesmo resultado da alínea anterior, sem ser por decomposição dos triângulos? Em caso afirmativo, mostre como.

T6 Definição de quadrado

Escreva uma definição de quadrado que comece por:

a) Um quadrado é um quadrilátero ______________________________________.

b) Um quadrado é um paralelogramo ____________________________________.

c) Um quadrado é um retângulo ____.

d) Um quadrado é um losango ____.

T7 Construções no geoplano

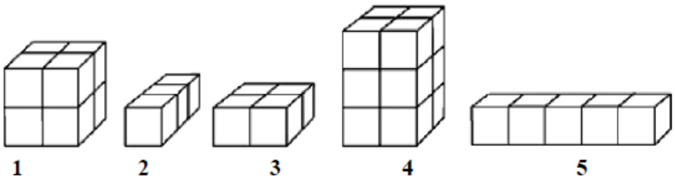
Construa no Geoplano um ou vários polígonos respeitando as condições indicadas no quadro, sendo A o valor da área da figura e P o perímetro. Quando são pedidos dois ou mais polígonos, estes devem ser não congruentes. Para cada polígono representado, apresente a área e o perímetro. Considere ainda a distância a dois pinos consecutivos, na horizontal, como a unidade de comprimento.

1. Dois polígonos com $A < 1$	2. Quadrado com $A = 5$
3. Paralelogramo não retângulo com $A = 6$	4. Polígono com $P = \sqrt{2} + \sqrt{5} + 3$
5. Polígono com $P = 3\sqrt{2} + 4$ e $A = 3{,}5$	6. Dois polígonos, um não convexo e um convexo, com $P = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
7. Triângulo retângulo com $A = 1\frac{1}{2}$	8. Polígono com $P = 2 + \sqrt{18} + \sqrt{10}$

T8 Caixas para distribuição

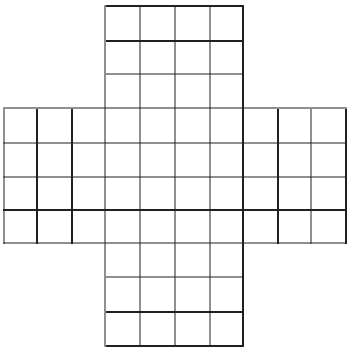
A fábrica de rebuçados Candy utiliza caixas de diferentes tamanhos para os embalar e utiliza caixotes para enviar as diferentes caixas para distribuição.

Observe que as caixas de diferentes tamanhos para os rebuçados são todas prismas retangulares.



1. Utilizando apenas um tipo de caixa de cada vez, quantas caixas de cada tipo (1-5) enchem completamente o caixote A?

Caixote A



Caixa	Número de caixas
Caixa 1	
Caixa 2	
Caixa 3	
Caixa 4	
Caixa 5	

2. Descreva a estratégia utilizada para determinar o número de caixas de tipo 2 que permitem encher o caixote A.
3. Note que nem todas as embalagens (1-5) enchem completamente o caixote A. Desenhe o menor caixote possível (em termos de volume) que pode ser utilizado na distribuição de todas as embalagens de rebuçados (1-5).
4. Será que há mais do que um tamanho de caixote onde se possa despachar as diferentes caixas? Explique as suas razões.
5. Generalize as relações entre as dimensões de qualquer caixa e o volume de um caixote que possa ser completamente cheio com caixas iguais a ela.

T9 História geométrica

1. Desenhe um triângulo retângulo isósceles.
2. Desenhe uma nova figura que tenha uma propriedade em comum com o triângulo. Que propriedade usou?
3. Desenhe agora uma outra figura com uma propriedade em comum com a que acabou de desenhar. Que propriedade usou? Continue até onde conseguir.

Apêndice D

Guiões utilizados nas várias entrevistas (E).

E1 **E2** **E3** **Guião**

Tópicos para as três primeiras entrevistas

Qual a tarefa em que sentiu mais dificuldades? Porquê?

O que aprendeu com as tarefas?

Qual a tarefa mais fácil?

Qual a tarefa que mais gostou? Porquê?

E4 **Guião**

Tópicos para a quarta entrevista

Olhando para cada uma das tarefas que cada grupo-caso fez, colocaram-se as seguintes questões:

Olhando para o que fizeram, fá-lo-iam da mesma maneira, ou não, e porquê?

O que aprendeu com a tarefa? Achou-a interessante?

No que é que prestaram mais atenção?

As figuras ajudaram? Ou as propriedades apareceram porque pensaram mais sobre a figura?

Depois, em relação a todas as tarefas, colocaram-se as seguintes questões:

Qual a tarefa mais fácil? E porquê?

Qual ou quais foram as tarefas em que sentiram mais dificuldade? E porquê?

Qual a tarefa de que mais gostaram? Porquê?

E a tarefa de que gostaram menos? Porquê?

Qual a mais desafiante? Porquê?

E5 **Guião**

Tópicos para a quinta entrevista

No início da UC de Geometria, qual a sensação que teve quando realizou o teste?

O tempo para a realização do teste foi suficiente?

Quais perguntas em que tiveram maiores dificuldades?

E se lhe pedisse agora para resolver novamente o Teste estaria disponível?

E6 **Guião**

Tópicos para a sexta entrevista

Que expetativas tinham em relação à UC de Geometria? Que esperavam? Qual a vossa relação com a Geometria antes da sua lecionação? A abordagem que foi feita na UC de Geometria foi importante (útil) para outras disciplinas? Se sim, porquê?

O que pensavam sobre o ensino e aprendizagem da UC e o trabalho efetuado no geral? O que acham que falhou ou o que poderia ter sido de outro modo?

O que é que mais valorizaram no decurso da UC? O que acham que mais contribuiu para uma melhor compreensão em Geometria?

O que é que agora, quase no fim da licenciatura, pensam em relação à Geometria?

Que conteúdos se apresentaram como inovadores relativamente ao que já tinham aprendido?

Qual o conteúdo que consideram de maior complexidade, porquê?

Que fichas realizaram com alguma dificuldade? E com relativa facilidade?

O que pensam da componente visual na resolução de problemas geométricos?

Os pré-requisitos de Geometria que possuíam revelaram-se essenciais para o desenvolvimento dos conteúdos abordados nesta UC? Se sim, em que matérias?

Alguma vez ouviram falar no modelo de van Hiele? E o que é que têm a dizer sobre isso?

Apêndice E

Instrumentos utilizados na caracterização do desempenho da turma:

- Quadro dos resultados da turma no teste por conhecimentos e capacidades.
- Prestação da turma no teste.
- Quadro dos resultados da turma na repetição do teste, por conhecimentos e capacidades.
- Prestação da turma na repetição do teste.
- Quadro das classificações da turma.

Quadro dos Resultados da Turma no Teste, por Conhecimentos e Capacidades

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES	Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	01 – Noção de polígono	16/23=69,6%	140/368= 38%
		02 – Ângulos do Δ e Δ/s congruentes	12/23=52,2%	
		04 – Altura de diferentes Δ/s	20/46=43,5%	
		05 – Instrumentos mínimos para desenhar um Δ	08/23=34,8%	
		07 – Eixos de simetria do retângulo	11/23=47,8%	
		11 – Noção de ângulos	04/69=05,8%	
		16 – Noção de lugar geométrico	02/23=08,7%	
		17 – Cálculo vetorial	09/23=39,1%	
		18 – Trigonometria	07/23=30,4%	
		19 – Noção de poliedro	19/46=41,3%	
		21 – Propriedades da pirâmide hexagonal	13/23=56,5%	
		23 – Planificação de um cilindro	19/23=80,6%	
	Raciocínio	03 – Relação entre Δ retângulo e Δ equilátero	26/46=56,5%	98/253= 39%
		09 – Propriedades do losango	12/23=52,2%	
		13 – Conjetura sobre perímetro e área	00/46=00,0%	
		15 – Transformações geométricas	15/23=65,2%	
		20 – Planificação do cubo	18/23=78,3%	
		25 – Construção de sólidos	27/92=29,3%	
	Comuni-cação	06 – Descrição de figura geométrica	20/46=43,5%	32/92= 35%
		08 – Propriedades dos quadriláteros	12/46=26,1%	
	Resolução de problemas	10 – Teorema de Pitágoras – perímetro e área	21/46=45,7%	108/276= 39%
		12 – Áreas de retângulos	22/46=47,8%	
		14 – Perímetro do círculo	17/46=37,0%	
		22 – Volumes do prisma quadrangular e do cilindro	17/46=37,0%	
		24 – Retas complanares, área e volume da pirâmide quadrangular	31/92=33,7%	
	Em 989 pontos possíveis a turma teve 378 pontos, isto é, 38,2% de respostas corretas. Numa escala de 0 a 20 a classificação da turma seria de 7,6 valores.			

Prestação da Turma no Teste

Questão	Cotação	Nº de respostas corretas	Níveis van Hiele
1	1	16	2
2	1	12	2
3	2	07	3
4	2	05	2
5	1	08	3
6	2	02	2
7	1	11	2
8	2	04	3
9	1	12	3
10	2	08	2
11	3	02	2
12	2	11	2
13	2	00	3
14	2	07	2
15	1	15	2
16	1	02	2
17	1	09	2
18	1	07	3
19	2	08	2
20	1	17	2
21	1	13	2
22	2	08	2
23	1	18	2
24	4	03	2
25	4	05	2

Quadro dos Resultados da Turma na Repetição do Teste, por Conhecimentos e Capacidades

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES	Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	01 – Noção de polígono	20/23=87,0%	217/368= 59%
		02 – Ângulos do Δ e Δ/s congruentes	14/23=60,9%	
		04 – Altura de diferentes Δ/s	38/46=82,6%	
		05 – Instrumentos mínimos para desenhar um Δ	12/23=52,2%	
		07 – Eixos de simetria do retângulo	16/23=69,6%	
		11 – Noção de ângulos	14/69=20,3%	
		16 – Noção de lugar geométrico	06/23=26,1%	
		17 – Cálculo vetorial	16/23=69,6%	
		18 – Trigonometria	07/23=30,4%	
		19 – Noção de poliedro	33/46=71,7%	
		21 – Propriedades da pirâmide hexagonal	18/23=78,3%	
		23 – Planificação de um cilindro	23/23=100%	
	Raciocínio	03 – Relação entre Δ retângulo e Δ equilátero	34/46=73,9%	143/253= 57%
		09 – Propriedades do losango	20/23=87,0%	
		13 – Conjetura sobre perímetro e área	09/46=19,6%	
		15 – Transformações geométricas	19/23=82,6%	
		20 – Planificação do cubo	21/23=91,3%	
		25 – Construção de sólidos	40/92=43,5%	
	Comunicação	06 – Descrição de figura geométrica	30/46=65,2%	54/92= 59%
		08 – Propriedades dos quadriláteros	24/46=50,0%	
	Resolução de problemas	10 – Teorema de Pitágoras – perímetro e área	36/46=78,3%	161/276= 58%
		12 – Áreas de retângulos	35/46=76,1%	
		14 – Perímetro do círculo	28/46=60,9%	
		22 – Volumes do prisma quadrangular e do cilindro	26/46=56,5%	
		24 – Retas complanares, área e volume da pirâmide quadrangular	36/92=39,1%	
	Em 989 pontos possíveis a turma teve 575 pontos, isto é, 58% de respostas corretas. Numa escala de 0 a 20 a classificação da turma seria de 11,6 valores.			

Prestação da Turma na Repetição do Teste

Questão	Cotação	Nº de respostas corretas	Níveis van Hiele
1	1	20	2
2	1	14	2
3	2	13	3
4	2	18	2
5	1	12	3
6	2	07	2
7	1	16	2
8	2	08	3
9	1	20	3
10	2	16	2
11	3	07	2
12	2	17	2
13	2	03	3
14	2	12	2
15	1	19	2
16	1	06	2
17	1	16	2
18	1	07	3
19	2	16	2
20	1	21	2
21	1	18	2
22	2	11	2
23	1	23	2
24	4	04	2
25	4	08	2

Quadro das Classificações da Turma

Aluno	Nota no Teste	Nota na repetição do Teste	Classificação Final à UC de Geometria
A	9,8	18	19
B	10,7	17	15
C	5,1	6,5	10
D	10,2	14,9	15
E	13,5	14,4	16
F	4,7	11,2	12
G	3,7	4,2	6
H	5,1	8,4	10
I	15,3	16,7	16
J	5,1	7	6
K	7,9	14,4	11
L	4,2	10,7	10
M	7,9	14	11
N	5,6	7,4	10
O	5,1	9,8	8
P	5,1	9,8	4
Q	1,9	9,3	1
R	12,1	14	15
S	9,3	16	14
T	8,8	10,2	11
U	5,1	7	11
V	5,1	11,6	15
X	14,4	15,3	16
Médias	*7,6*	*11,6*	*11,4*

Apêndice F

Instrumentos utilizados na caracterização do desempenho do grupo AB:

- Quadro de resultados dos testes do grupo AB, por conhecimentos e capacidades.
- Tipificação das respostas, nos diferentes níveis de van Hiele, nos testes do grupo AB.
- Pesos resultantes da tipificação das respostas nos testes do grupo AB.
- Quadro de resultados na repetição dos testes do grupo AB, por conhecimentos e capacidades.
- Tipificação das respostas, nos diferentes níveis de van Hiele, na repetição dos testes do grupo AB.
- Pesos resultantes da tipificação das respostas na repetição dos testes do grupo AB.

Quadro de Resultados dos Testes do grupo AB, por Conhecimentos e Capacidades

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES	Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	01 – Noção de polígono	2/2=100%	14/32= 44%
		02 – Ângulos do Δ e Δ/s congruentes	1/2=50%	
		04 – Altura de diferentes Δ/s	2/4=50%	
		05 – Instrumentos mínimos para desenhar um Δ	1/2=50%	
		07 – Eixos de simetria do retângulo	2/2=100%	
		11 – Noção de ângulos	0/6=0%	
		16 – Noção de lugar geométrico	0/2=0%	
		17 – Cálculo vetorial	0/2=0%	
		18 – Trigonometria	1/2=50%	
		19 – Noção de poliedro	1/4=25%	
		21 – Propriedades da pirâmide hexagonal	2/2=100%	
		23 – Planificação de um cilindro	2/2=100%	
	Raciocínio	03 – Relação entre Δ retângulo e Δ equilátero	2/4=50%	11/22= 50%
		09 – Propriedades do losango	1/2=50%	
		13 – Conjetura sobre perímetro e área	0/4=0%	
		15 – Transformações geométricas	2/2=100%	
		20 – Planificação do cubo	2/2=100%	
		25 – Construção de sólidos	4/8=50%	
	Comun i-cação	06 – Descrição de figura geométrica	1/4=25%	3/8= 38%
		08 – Propriedades dos quadriláteros	2/4=50%	
	Resolução de problemas	10 – Teorema de Pitágoras – perímetro e área	1/4=25%	17/24= 71%
		12 – Áreas de retângulos	4/4=100%	
		14 – Perímetro do círculo	2/4=50%	
		22 – Volumes do prisma quadrangular e do cilindro	4/4=100%	
		24 – Retas complanares, área e volume da pirâmide quadrangular	6/8=75%	
	O grupo AB teve 45 pontos em 86 possíveis, ou seja, teve 52% de respostas corretas. Numa escala de 0 a 20 corresponde a uma classificação de 10,5 valores.			

Tipificação das Respostas, nos diferentes Níveis de van Hiele, nos Testes do grupo AB

Questão	Cotação	Resultados do grupo AB	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento A	elemento B
1	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
2	1	0 – 1	(2,2)	(2,7)
3	2	1 – 1	(2,7) (3,6)	(2,7) (3,6)
4	2	2 – 0	(1,7) (2,7)	(1,2) (2,2)
5	1	1 – 0	(3,7)	(3,2)
6	2	0 – 1	(1,7) (2,2)	(1,7) (2,6)
7	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
8	2	nr – 2	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)
9	1	nr – 1	(1,0) (2,0) (3,0)	(1,7) (2,7) (3,7)
10	2	0 – 1	(1,7) (2,2)	(1,7) (2,5)
11	3	0 – 0	(1,7) (2,2)	(1,7) (2,2)
12	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
13	2	0 – 0	(1,7) (2,7) (3,2)	(1,7) (2,7) (3,2)
14	2	0 – 2	(1,7) (2,4)	(1,7) (2,7)
15	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
16	1	nr – nr	(2,0)	(2,0)
17	1	nr – nr	(1,0) (2,0)	(1,0) (2,0)
18	1	nr – 1	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)
19	2	nr – 1	(2,0)	(2,4)
20	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
21	1	1 – 1	(2,7)	(2,7)
22	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
23	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
24.1	2	2 – 0	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)
24.2	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
25.1	2	2 – 2	(2,4)	(2,4)
25.2	2	1 – 0	(2,7)	(2,1)

nr - *não responde*

Pesos Resultantes da Tipificação das Respostas dos Testes do grupo AB

Nível 1	Nível 2	Nível 3	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento A	elemento B	Nível 1	Nível 2	Nível 3
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	20		(2,2)	(2,7)	-	100	
-	100	80	(2,7) (3,6)	(2,7) (3,6)	-	100	80
100	100		(1,7) (2,7)	(1,2) (2,2)	20	20	
-	-	100	(3,7)	(3,2)	-	-	20
100	20		(1,7) (2,2)	(1,7) (2,6)	100	80	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	0	0	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)	-	100	100
0	0	0	(1,0) (2,0) (3,0)	(1,7) (2,7) (3,7)	100	100	100
100	20		(1,7) (2,2)	(1,7) (2,5)	100	75	
100	20		(1,7) (2,2)	(1,7) (2,2)	100	20	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100	20	(1,7) (2,7) (3,2)	(1,7) (2,7) (3,2)	100	100	20
100	50		(1,7) (2,4)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	0		(2,0)	(2,0)	-	0	
0	0		(1,0) (2,0)	(1,0) (2,0)	0	0	
-	0	0	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)	-	100	100
-	0		(2,0)	(2,4)	-	50	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)	100	20	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	50		(2,4)	(2,4)	-	50	
-	100		(2,7)	(2,1)	-	0	
88%	61%	33%			89%	74%	70%

Quadro de Resultados na Repetição dos Testes do grupo AB, por Conhecimentos e Capacidades

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES	Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	01 – Noção de polígono	2/2=100%	24/32= 75%
		02 – Ângulos do Δ e Δ/s congruentes	2/2=100%	
		04 – Altura de diferentes Δ/s	4/4=100%	
		05 – Instrumentos mínimos para desenhar um Δ	2/2=100%	
		07 – Eixos de simetria do retângulo	1/2=50%	
		11 – Noção de ângulos	2/6=33%	
		16 – Noção de lugar geométrico	1/2=50%	
		17 – Cálculo vetorial	2/2=100%	
		18 – Trigonometria	0/2=00%	
		19 – Noção de poliedro	4/4=100%	
		21 – Propriedades da pirâmide hexagonal	2/2=100%	
		23 – Planificação de um cilindro	2/2=100%	
	Raciocínio	03 – Relação entre Δ retângulo e Δ equilátero	4/4=100%	21/22= 95%
		09 – Propriedades do losango	2/2=100%	
		13 – Conjetura sobre perímetro e área	4/4=100%	
		15 – Transformações geométricas	2/2=100%	
		20 – Planificação do cubo	2/2=100%	
		25 – Construção de sólidos	7/8=88%	
	Comuni-cação	06 – Descrição de figura geométrica	4/4=25%	8/8= 100%
		08 – Propriedades dos quadriláteros	4/4=25%	
	Resolução de problemas	10 – Teorema de Pitágoras – perímetro e área	4/4=100%	22/24= 92%
		12 – Áreas de retângulos	4/4=100%	
		14 – Perímetro do círculo	4/4=100%	
		22 – Volumes do prisma quadrangular e do cilindro	4/4=100%	
		24 – Retas complanares, área e volume da pirâmide quadrangular	6/8=75%	
	O grupo AB teve 75 pontos em 86 possíveis, ou seja, teve 87,2% de respostas corretas. Numa escala de 0 a 20 corresponde a uma classificação de 17,4 valores.			

Tipificação das Respostas, nos diferentes Níveis de van Hiele, na Repetição dos Testes do grupo AB

Questão	Cotação	Resultados do grupo AB	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento A	elemento B
1	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
2	1	1 – 1	(2,7)	(2,7)
3	2	2 – 2	(2,7) (3,7)	(2,7) (3,7)
4	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
5	1	1 – 1	(3,7)	(3,7)
6	2	2 – 2	(1,7) (2,6)	(1,7) (2,7)
7	1	1 – 0	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)
8	2	2 – 2	(2,7) (3,7)	(2,7) (3,7)
9	1	1 – 1	(1,7) (2,7) (3,7)	(1,7) (2,7) (3,7)
10	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
11	3	0 – 2	(1,7) (2,2)	(1,7) (2,4)
12	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
13	2	2 – 2	(1,7) (2,7) (3,7)	(1,7) (2,7) (3,7)
14	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
15	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
16	1	1 – nr	(2,7)	(2,0)
17	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
18	1	0 – 0	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,2)
19	2	2 – 2	(2,7)	(2,7)
20	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
21	1	1 – 1	(2,7)	(2,7)
22	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
23	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
24.1	2	2 – 0	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)
24.2	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
25.1	2	1 – 2	(2,4)	(2,7)
25.2	2	2 – 2	(2,7)	(2,7)

nr – não responde

Pesos Resultantes da Tipificação das Respostas na Repetição dos Testes do grupo AB

Nível 1	Nível 2	Nível 3	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento A	elemento B	Nível 1	Nível 2	Nível 3
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
-	100	100	(2,7) (3,7)	(2,7) (3,7)	-	100	100
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	-	100	(3,7)	(3,7)	-	-	100
100	80		(1,7) (2,6)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)	100	20	
-	100	100	(2,7) (3,7)	(2,7) (3,7)	-	100	100
100	100	100	(1,7) (2,7) (3,7)	(1,7) (2,7) (3,7)	100	100	100
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	20		(1,7) (2,2)	(1,7) (2,4)	100	50	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100	100	(1,7) (2,7) (3,7)	(1,7) (2,7) (3,7)	100	100	100
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,0)	-	0	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	0	0	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,2)	-	100	20
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)	100	20	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	50		(2,4)	(2,7)	-	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
100%	87%	83%			100%	88%	87%

Apêndice G

Instrumentos utilizados na caracterização do desempenho do grupo MS:

- Quadro de resultados dos testes do grupo MS, por conhecimentos e capacidades.
- Tipificação das respostas, nos diferentes níveis de van Hiele, nos testes do grupo MS.
- Pesos resultantes da tipificação das respostas nos testes do grupo MS.
- Quadro de resultados na repetição dos testes do grupo MS, por conhecimentos e capacidades.
- Tipificação das respostas, nos diferentes níveis de van Hiele, na repetição dos Testes do grupo MS.
- Pesos resultantes da tipificação das respostas na repetição dos testes do grupo MS.

Quadro de Resultados dos Testes do grupo MS, por Conhecimentos e Capacidades

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES	Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	01 – Noção de polígono	1/2=50%	15/32= 47%
		02 – Ângulos do Δ e Δ/s congruentes	2/2=100%	
		04 – Altura de diferentes Δ/s	4/4=100%	
		05 – Instrumentos mínimos para desenhar um Δ	1/2=50%	
		07 – Eixos de simetria do retângulo	2/2=100%	
		11 – Noção de ângulos	0/6=0%	
		16 – Noção de lugar geométrico	0/2=0%	
		17 – Cálculo vetorial	0/2=0%	
		18 – Trigonometria	1/2=50%	
		19 – Noção de poliedro	2/4=50%	
		21 – Propriedades da pirâmide hexagonal	1/2=50%	
		23 – Planificação de um cilindro	1/2=50%	
	Raciocínio	03 – Relação entre Δ retângulo e Δ equilátero	3/4=75%	10/22= 45%
		09 – Propriedades do losango	1/2=50%	
		13 – Conjetura sobre perímetro e área	0/4=0%	
		15 – Transformações geométricas	1/2=50%	
		20 – Planificação do cubo	2/2=100%	
		25 – Construção de sólidos	3/8=37,5%	
	Comuni-cação	06 – Descrição de figura geométrica	2/4=50%	2/8= 25%
		08 – Propriedades dos quadriláteros	0/4=0%	
	Resolução de problemas	10 – Teorema de Pitágoras – perímetro e área	3/4=75%	10/24= 42%
		12 – Áreas de retângulos	0/4=0%	
		14 – Perímetro do círculo	2/4=50%	
		22 – Volumes do prisma quadrangular e do cilindro	2/4=50%	
		24 – Retas complanares, área e volume da pirâmide quadrangular	3/8=37,5%	
	O grupo MS teve 37 pontos em 86 possíveis, ou seja, teve 43% de respostas corretas. Numa escala de 0 a 20 corresponde a uma classificação de 8,6 valores.			

Tipificação das Respostas, nos diferentes Níveis de van Hiele, nos Testes do grupo MS

Questão	Cotação	Resultados do grupo MS	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento M	elemento S
1	1	nr – 1	(1,0) (2,0)	(1,7) (2,7)
2	1	1 – 1	(2,7)	(2,7)
3	2	2 – 1	(2,7) (3,6)	(2,7) (3,6)
4	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
5	1	0 – 1	(3,1)	(3,7)
6	2	1 – 1	(1,7) (2,4)	(1,7) (2,4)
7	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
8	2	nr – nr	(2,0) (3,0)	(2,0) (3,0)
9	1	0 – 1	(1,2) (2,2) (3,2)	(1,7) (2,7) (3,7)
10	2	2 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
11	3	0 – 0	(1,7) (2,2)	(1,7) (2,2)
12	2	0 – 0	(1,0) (2,0)	(1,7) (2,5)
13	2	nr – 0	(1,0) (2,0) (3,0)	(1,7) (2,7) (3,2)
14	2	2 – 0	(1,7) (2,7)	(1,2) (2,1)
15	1	1 – 0	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)
16	1	nr – 0	(2,0)	(2,1)
17	1	0 – 0	(1,0) (2,0)	(1,7) (2,2)
18	1	nr – 1	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)
19	2	2 – nr	(2,7)	(2,0)
20	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
21	1	0 – 1	(2,0)	(2,7)
22	2	0 – 2	(1,7) (2,2)	(1,7) (2,6)
23	1	1 – nr	(1,7) (2,7)	(1,0) (2,0)
24.1	2	nr – nr	(1,0) (2,0)	(1,0) (2,0)
24.2	2	1 – 2	(1,2) (2,2)	(1,7) (2,7)
25.1	2	nr – 1	(2,0)	(2,4)
25.2	2	nr – 2	(2,0)	(2,7)

nr – não responde

Pesos Resultantes da Tipificação das Respostas dos Testes do grupo MS

Nível 1	Nível 2	Nível 3	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento M	elemento S	Nível 1	Nível 2	Nível 3
0	0		(1,0) (2,0)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
-	100	80	(2,7) (3,6)	(2,7) (3,6)	-	100	80
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	-	0	(3,1)	(3,7)	-	-	100
100	50		(1,7) (2,4)	(1,7) (2,4)	100	50	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	0	0	(2,0) (3,0)	(2,0) (3,0)	-	0	0
20	20	20	(1,2) (2,2) (3,2)	(1,7) (2,7) (3,7)	100	100	100
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	20		(1,7) (2,2)	(1,7) (2,2)	100	20	
0	0		(1,0) (2,0)	(1,7) (2,5)	100	75	
0	0	0	(1,0) (2,0) (3,0)	(1,7) (2,7) (3,2)	100	100	20
100	100		(1,7) (2,7)	(1,2) (2,1)	20	0	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)	100	20	
-	0		(2,0)	(2,1)	-	0	
0	0		(1,0) (2,0)	(1,7) (2,2)	100	20	
-	0	0	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)	-	100	100
-	100		(2,7)	(2,0)	-	0	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	0		(2,0)	(2,7)	-	100	
100	20		(1,7) (2,2)	(1,7) (2,6)	100	80	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,0) (2,0)	0	0	
0	0		(1,0) (2,0)	(1,0) (2,0)	0	0	
20	20		(1,2) (2,2)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	0		(2,0)	(2,4)	-	50	
-	0		(2,0)	(2,7)	-	100	
61%	43%	17%			84%	55%	67%

Quadro de Resultados na Repetição dos Testes do grupo MS, por Conhecimentos e Capacidades

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES	Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	01 – Noção de polígono	2/2=100%	24/32= 75%
		02 – Ângulos do Δ e Δ/s congruentes	2/2=100%	
		04 – Altura de diferentes Δ/s	4/4=100%	
		05 – Instrumentos mínimos para desenhar um Δ	1/2=50%	
		07 – Eixos de simetria do retângulo	1/2=50%	
		11 – Noção de ângulos	4/6=67%	
		16 – Noção de lugar geométrico	0/2=0%	
		17 – Cálculo vetorial	1/2=50%	
		18 – Trigonometria	1/2=50%	
		19 – Noção de poliedro	4/4=100%	
		21 – Propriedades da pirâmide hexagonal	2/2=100%	
		23 – Planificação de um cilindro	2/2=100%	
	Raciocínio	03 – Relação entre Δ retângulo e Δ equilátero	4/4=100%	18/22= 82%
		09 – Propriedades do losango	2/2=100%	
		13 – Conjetura sobre perímetro e área	0/4=0%	
		15 – Transformações geométricas	2/2=100%	
		20 – Planificação do cubo	2/2=100%	
		25 – Construção de sólidos	8/8=100%	
	Comuni-cação	06 – Descrição de figura geométrica	4/4=100%	7/8= 88%
		08 – Propriedades dos quadriláteros	3/4=0%	
	Resolução de problemas	10 – Teorema de Pitágoras – perímetro e área	4/4=100%	15/24= 63%
		12 – Áreas de retângulos	2/4=50%	
		14 – Perímetro do círculo	3/4=75%	
		22 – Volumes do prisma quadrangular e do cilindro	0/4=0%	
		24 – Retas complanares, área e volume da pirâmide quadrangular	6/8=75%	
	O grupo MS teve 64 pontos em 86 possíveis, ou seja, teve 74,4% de respostas corretas. Numa escala de 0 a 20 corresponde a uma classificação de 14,9 valores.			

Tipificação das Respostas na Repetição dos Testes do grupo MS

Questão	Cotação	Resultados do grupo MS	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento M	elemento S
1	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
2	1	1 – 1	(2,7)	(2,7)
3	2	2 – 2	(2,7) (3,7)	(2,7) (3,7)
4	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
5	1	0 – 1	(3,1)	(3,7)
6	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
7	1	0 – 1	(1,7) (2,2)	(1,7) (2,7)
8	2	0 – 2	(2,7) (3,1)	(2,7) (3,7)
9	1	1 – 1	(1,7) (2,7) (3,7)	(1,7) (2,7) (3,7)
10	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
11	3	2 – 2	(1,7) (2,4)	(1,7) (2,6)
12	2	2 – 0	(1,7) (2,7)	(1,2) (2,2)
13	2	0 – 0	(1,7) (2,7) (3,2)	(1,7) (2,7) (3,2)
14	2	1 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
15	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
16	1	0 – nr	(2,1)	(2,0)
17	1	1 – 0	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)
18	1	nr – 1	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)
19	2	2 – 2	(2,7)	(2,7)
20	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
21	1	1 – 1	(2,7)	(2,7)
22	2	0 – 0	(1,7) (2,4)	(1,7) (2,4)
23	1	1 – 1	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
24.1	2	2 – 2	(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)
24.2	2	nr – 2	(1,0) (2,0)	(1,7) (2,7)
25.1	2	2 – 2	(2,7)	(2,7)
25.2	2	2 – 2	(2,7)	(2,7)

nr – não responde

Pesos Resultantes da Tipificação das Respostas na Repetição dos Testes do grupo MS

Nível 1	Nível 2	Nível 3	(Níveis de van Hiele , Tipos de resposta) elemento M	elemento S	Nível 1	Nível 2	Nível 3
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
-	100	100	(2,7) (3,7)	(2,7) (3,7)	-	100	100
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	-	0	(3,1)	(3,7)	-	-	100
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	20		(1,7) (2,2)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100	0	(2,7) (3,1)	(2,7) (3,7)	-	100	100
100	100	100	(1,7) (2,7) (3,7)	(1,7) (2,7) (3,7)	100	100	100
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	50		(1,7) (2,4)	(1,7) (2,6)	100	80	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,2) (2,2)	20	20	
100	100	20	(1,7) (2,7) (3,2)	(1,7) (2,7) (3,2)	100	100	20
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	0		(2,1)	(2,0)	-	0	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,2)	100	20	
-	0	0	(2,0) (3,0)	(2,7) (3,7)	-	100	100
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
100	50		(1,7) (2,4)	(1,7) (2,4)	100	50	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
100	100		(1,7) (2,7)	(1,7) (2,7)	100	100	
0	0		(1,0) (2,0)	(1,7) (2,7)	100	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
-	100		(2,7)	(2,7)	-	100	
94%	82%	37%			95%	87%	87%